

Title	結合・分離がおこるシステムに対するコントローラ的设计に関する研究
Author(s)	浅田, 幸則
Citation	
Issue Date	1997-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/1002">http://hdl.handle.net/10119/1002</a>
Rights	
Description	Supervisor: 示村 悦二郎, 情報科学研究科, 修士

# 修士論文

## 結合・分離がおこるシステムに対するコントローラ的设计 に関する研究

指導教官 示村 悦二郎 教授

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報システム学専攻

510003 浅田 幸則

1997年2月14日

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	結合・分離がおこるシステム	1
1.2	従来の研究	5
1.3	本論文の目的	6
<b>2</b>	<b>問題の定式化</b>	<b>8</b>
2.1	はじめに	8
2.2	結合の構造	8
2.3	状態方程式と問題の定式化	15
<b>3</b>	<b>準備</b>	<b>17</b>
3.1	はじめに	17
3.2	最適制御	17
3.3	折り返し法	20
<b>4</b>	<b>コントローラのハイゲイン化による設計法</b>	<b>25</b>
4.1	はじめに	25
4.2	安定性解析	25
4.2.1	安定条件の導出 1: 全システム共通のハイゲイン化条件	25
4.2.2	安定条件の導出 2: 各システム別々のハイゲイン化条件	32
4.3	設計手順	36
4.3.1	設計法 1: 全サブシステム共通のハイゲイン化条件を用いた設計手順	36
4.3.2	設計法 2: 各システム別々のハイゲイン化条件を用いた設計手順	37

<b>5</b>	<b>折り返しパラメータの導出による設計法</b>	<b>39</b>
5.1	はじめに . . . . .	39
5.2	安定性解析 . . . . .	39
5.2.1	安定条件の導出 3: 全システム共通の折り返しパラメータ . . . . .	39
5.2.2	安定条件の導出 4: 各システム別々の折り返しパラメータ . . . . .	41
5.2.3	固有値の存在範囲 . . . . .	46
5.3	設計手順 . . . . .	48
5.3.1	設計法 3: 全システム共通の折り返しパラメータを用いた設計手順 . . . . .	48
5.3.2	設計法 4: 各システム別々の折り返しパラメータを用いた設計手順 . . . . .	49
<b>6</b>	<b>シミュレーション</b>	<b>51</b>
6.1	はじめに . . . . .	51
6.2	倒立振子の運動方程式と状態方程式の導出 . . . . .	52
6.3	固有値の位置と応答 . . . . .	60
6.4	設計法 1 ~ 4 の比較と検討 . . . . .	95
<b>7</b>	<b>結論</b>	<b>98</b>
<b>A</b>	<b>行列理論</b>	<b>100</b>

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 結合・分離がおこるシステム

近年, 結合・分離がおこるシステムを繰り返すようなシステムが増加し, 安定性や信頼性において制御理論の観点からの対策が重要となってきた。

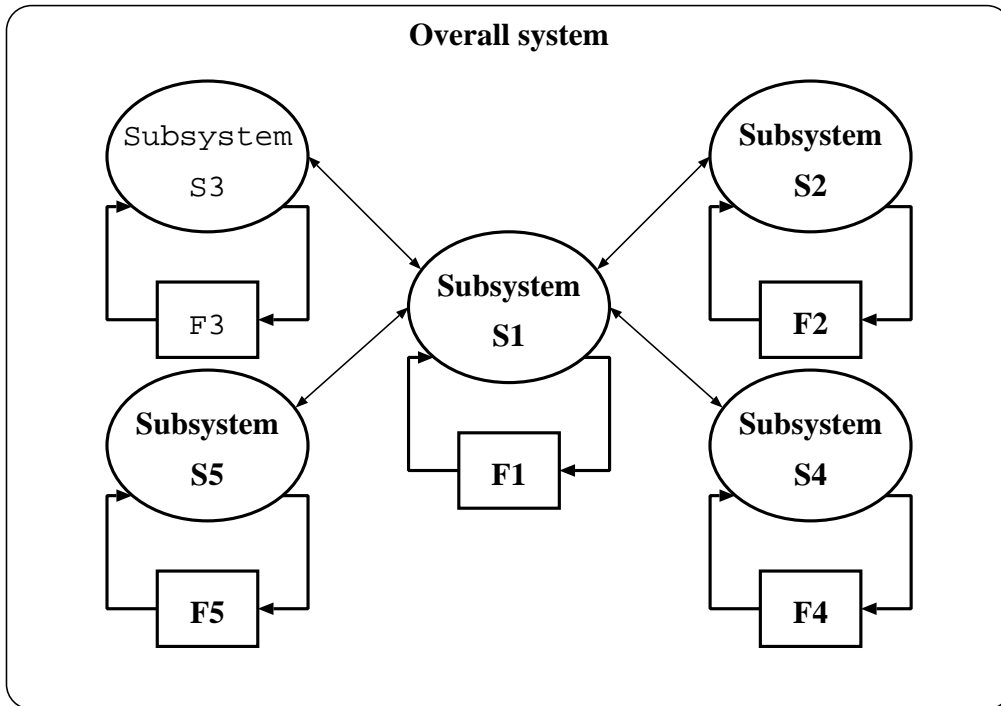
例えば, 近い将来の宇宙での活動において, その特殊な環境のために宇宙ステーションやアメリカ合州国のスペースシャトルに代表される宇宙運搬船の存在はかせない。そして, 宇宙ステーションには, 数多くの宇宙運搬船がドッキングされることになる。これは, 宇宙ステーションと宇宙運搬船をそれぞれサブシステムとして考えれば, サブシステム同士が結合する 1 つの結合・分離がおこるシステムといえる。

また, 運行密度の高い鉄道で, ダイヤを守るために, 路線にあるすべての列車を全体として制御して安定な走行を実現することが望まれ, すでにいくつかの制御方式が提案されている<sup>[28]</sup>。この例では, 列車同士が近付くと結合で離れると分離と考え, 1 つの列車をサブシステムとしてみなせば, サブシステム同士が互いに影響を及ぼしあう 1 つの結合・分離がおこるシステムといえる。

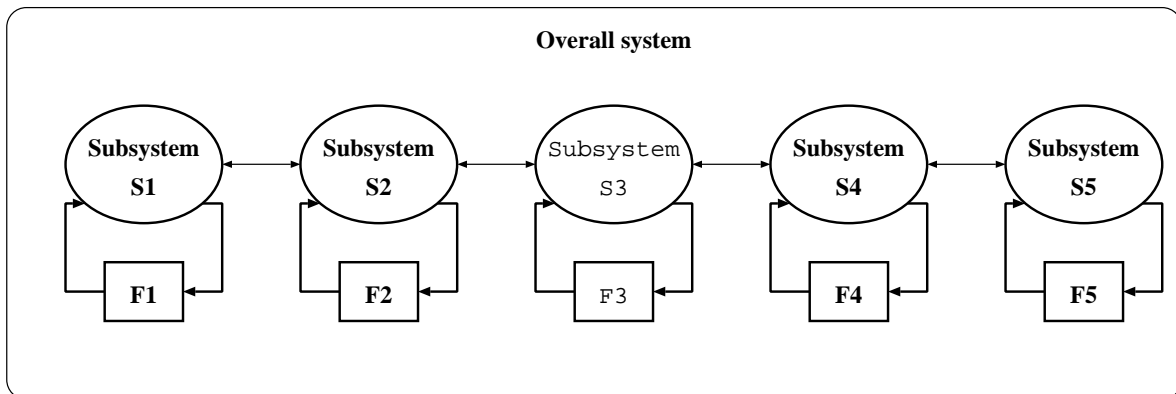
上記の例のような結合・分離がおこるシステムを制御する方法としては, 大きくわけて 2 つある。まず, 全サブシステムの情報を一箇所に集めて, この情報をもとにして制御指令を出すという集中制御方式がある。つぎに, 複数の制御ステーションによって制御する分散制御方式である。ところが, サブシステムの数が増えれば集中制御方式では行きづまることになる。宇宙ステーションと宇宙運搬船の例でいうと, 数が増える以外にも, 宇宙ステーションには様々な国籍の宇宙運搬船が結合されることが予想されるため, 一箇所で制

御するよりも分散制御方式のほうが有利であると考えられる。また、鉄道の交通システムの例では、列車数の多い系では、各列車の加速・減速などの入力決定に利用される情報の量、および計算の量が膨大になる。しかし、ひとつの列車のダイヤのずれは、近接する列車にとっては重要であるが、遠く離れた列車にはあまり影響を与えないと予想できる。したがって、ある台数以上離れた列車の状態は情報として利用しないような、分散形の制御方式も考えられる。

ひとくちに結合・分離といっても様々な構造が考えられる。その特徴的な例が上記の2つの例である。宇宙ステーションと宇宙運搬船の例の場合、宇宙運搬船同士は結合する必要はなく図 1.1のような結合構造をとると考えられる。これを、並列結合構造と呼ぶ。また、鉄道の交通システムの例では、列車は直列に並んでおり図 1.2のような構造をする。これを、直列結合構造と呼ぶ。



☒ 1.1: Overall system: parallel structure



☒ 1.2: Overall system: series structure

ここで、結合・分離がおこるシステムを制御する際にどのような問題がおこるかを考えるために、つぎのような状態方程式で表された 2 つのサブシステム  $S_1, S_2$  からなる例を考えてみる.

$$S_1: \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \quad (1.1)$$

$$S_2: \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (1.2)$$

ここで、 $x_i \in R^2, i = 1, 2$  は  $i$  番目のサブシステム  $S_i$  の状態を表すベクトルで、 $u_i \in R^2$  は  $i$  番目のサブシステム  $S_i$  の制御入力である. また、サブシステム  $S_1$  と  $S_2$  が結合したときは、つぎのよになる.

$$S_1: \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x_2 \quad (1.3)$$

$$S_2: \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x_1 \quad (1.4)$$

(1.3) 式, (1.4) 式それぞれの第 3 項は結合した際に他のサブシステムから及ぼされる影響を表している. これについては 2 章で詳しく述べる.

いま、これらのシステムに対して、

$$u_1 = [0.4 \ 1.0]x_1 \quad (1.5)$$

$$u_2 = [0.4 \ 0.7]x_2 \quad (1.6)$$

なる状態フィードバック制御を行なうことを考える. このとき、結合していない場合の  $S_1$  の固有値は  $\{-0.5 + 1.1i, -0.5 - 1.1i\}$ ,  $S_2$  の固有値は  $\{-0.9 + 0.8i, -0.9 - 0.8i\}$  で安定であるが、結合した場合の固有値は  $\{0.03 + 1.4i, 0.03 - 1.4i, -0.8, -2.0\}$  となり不安定になってしまう.

このように、それぞれのシステムを安定化したところで、それが結合しても安定性を保つとは限らない. したがって、結合・分離がおこるシステムについて、安定性が保たれる条件を導出すると同時に、コントローラ設計法を確立することが望まれる.



## 1.2 従来の研究

この節では本論文に関係のある同時安定化問題と大規模分散制御問題の従来の研究について述べる。同時安定化問題は複数のシステムを1つのコントローラによって制御する問題である。結合・分離がおこるシステム(図 1.3(a))において, 様々な結合・分離した状態の全体システムを複数のシステムとして考えれば(図 1.3(b), (c), (d), (e)), 結合・分離がおこるシステムの安定化問題は同時安定化問題として扱うことができる。一方, 結合・分離がおこるシステムを低次元のサブシステムに分割されて制御していると考えれば, 大規模システムの分散制御問題として扱うことができる。

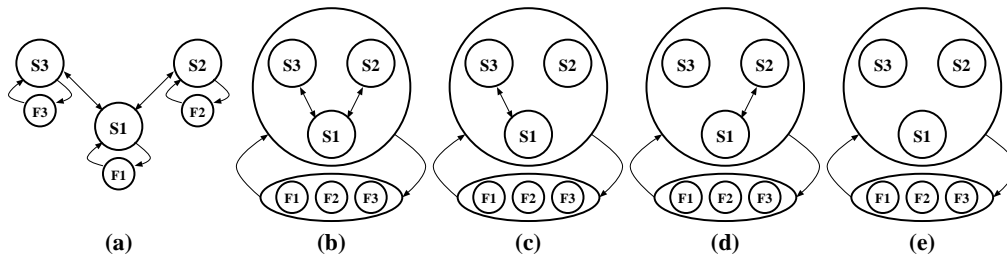


図 1.3: Simultaneous stabilization problem

同時安定化問題は 1982 年 Seaks and Murray<sup>[21]</sup> により最初に取り扱われた。Seaks and Murray はこの論文により, 2 つのシステムの同時安定化問題を 1 つのシステムを安定なコントローラによって安定化する問題(強安定化問題<sup>[29]</sup>)に帰着させた。さらに, Vidyasagar and Vidwanadham<sup>[26]</sup> によって, 2 つの MIMO システムが同時安定化可能であるための必要十分条件は, 1 つの MIMO システムが強安定であるということが示されている。

また, 強安定化問題は, Youla, Bongiotno and Lu によって定式化され parity interlacing property 条件という形で必要十分条件が導かれた<sup>[29]</sup>。

一方, 3 システム以上の同時安定化問題については, Blondel<sup>[7]</sup> は 3 システム以上の同時安定化問題についてコントローラの存在条件の十分条件を求めているが, 先に述べた 2 システムの同時安定化問題も含めコントローラ的设计方法については述べられていない。

同時安定化問題におけるコントローラ的设计方法については, Chen, Chow, Kale and Minto<sup>[8]</sup> や Minto and Vidyasagar<sup>[20]</sup> で述べられているが, 応答特性などのパフォーマンスについては考慮されていない。

つぎに、大規模分散制御問題についての従来研究について述べる。大規模分散制御問題は、非常に高次元のシステムを制御する問題で、1つのシステムをいくつかのサブシステムに分割して制御を考えたり、制御システムに階層構造をもたせたりするものである。

M 行列<sup>[1]</sup>を用いた大規模システムの安定性解析が Šiljak<sup>[24]</sup> および文献<sup>[2],[3],[4],[12],[13]</sup>によって行なわれているが、どれもコントローラ的设计方法については述べられていない。また、池田、Šiljak、安田<sup>[10]</sup>は大規模システムを制御する際に最適制御を適用したコントローラ的设计方法についても述べられている。しかし、最適制御の評価関数の重み係数と応答との関係がはっきりと解明されていないため设计方法としては不十分である。

Konstanzer<sup>[19]</sup>は、結合・分離がおこるシステムの安定化問題について議論している。これは、communication という新たな概念を導入して、LMI(Linear Matrix Inequalities) を用いてコントローラ的设计を行なっている。しかし、これはコントローラが非常にハイゲインとなるという問題点がある。

### 1.3 本論文の目的

本論文の目的は、結合・分離がおこるシステムに対するコントローラ的设计法を求めることである。その際、サブシステムと全体システムに対して以下の2つを考慮する。

- 1) 各サブシステムの固有値を希望の領域にいれることによって、コントローラのパフォーマンスを考慮する。
- 2) サブシステムが結合して構成された全体システムを結合構造(並列結合構造, 直列結合構造)を考慮して安定化する。

本論文においては、まず最初に、並列結合構造と直列結合構造を数式で表し問題の定式化を行なった。この際、システムの数式モデルは、まずサブシステムの数式表現を求め、それらの結合構造を使って全体の表現を導くという方向で進めた。

つぎに、並列結合構造と直列結合構造の全体システムに対して、どのような結合・分離が行なわれても常に安定性を保つコントローラ的设计法を以下のように求める。

設計法 1: 全サブシステム共通のハイゲイン化条件を用いた設計法

設計法 2: 各サブシステム別々のハイゲイン化条件を用いた設計法

設計法 3: 全サブシステム共通の折り返しパラメータを用いた設計法

#### 設計法 4: 各サブシステム別々の折り返しパラメータを用いた設計法

設計法 1 ~ 4 は、各サブシステムの固有値を希望の領域に入れるために、折り返し法を適用している。折り返し法は、最適制御が有する利点をそのまま受け継ぐとともに、折り返しパラメータを用いて、好ましい応答を保証する領域に閉ループ極を配置することができる設計法である。いま、サブシステムが他のサブシステムからの干渉入力の影響を、自身の操作入力で等価的に発生することができるかと仮定する。そうすると、サブシステムのコントローラのフィードバックゲインを干渉入力の影響がなくなるまで定数倍することによって全体システムの安定性も保たれると考えることができる。よって、設計法 1, 設計法 2 では、各サブシステムをそれぞれ折り返し法で設計する。つぎに、全体システムが安定性を保つようにコントローラのゲインを定数倍する条件を求める。ここで設計法 1 では、全サブシステム共通の条件、設計法 2 では、各サブシステム別々の条件を求る。設計法 3, 設計法 4 では、求めたコントローラのフィードバックゲインを定数倍するのではなく、最初から各サブシステム、全体システムともに安定となるような折り返しパラメータの条件を求める。そうすることにより、各サブシステムの固有値を希望の領域に配置することが可能となり、とびぬけてハイゲインになることも避けられる。ここで設計法 3 では、全サブシステム共通の条件、設計法 4 では、各サブシステム別々の条件を求る。

最後に、それぞれの設計法が有効であることを確かめるために、倒立振子を用いてシミュレーションを行なう。

## 第 2 章

# 問題の定式化

### 2.1 はじめに

システムの数式モデルは、まずサブシステムの数式表現を求め、それらの結合構造を使って全体の表現を導くという方向で進める。サブシステムの結合の形式で表された全体システムの表現を結合モデルと呼ぶ。そこで、結合関係を表した結合構造が重要になってくるが、2.2 節では結合構造、特に並列結合構造と直列結合構造について考える。そして、2.3 節で結合モデルを求め、問題の定式化を行なう。

### 2.2 結合の構造

システムの結合・分離を表現するために以下の行列を定義する。

定義 2.2.1  $E = [e_{ij}] \in R^{N \times N}$  を結合行列と呼び、つぎのように定義する。

$$e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{サブシステム } i \text{ とサブシステム } j \text{ が分離しているとき} \\ 1 & \text{サブシステム } i \text{ とサブシステム } j \text{ が結合しているとき} \end{cases}$$

$$E = [e_{ij}] = \begin{bmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{N1} & \cdots & e_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

定義 2.2.1 のように結合行列を定義することによって、様々な結合構造を数式上で表現することができる。

つぎに、全体システムが図 2.1 ~ 図 2.4 のような並列結合をしている場合について考える。並列結合は、あるサブシステムの周りに他のサブシステムが結合・分離する場合である。図 2.1 では、サブシステム  $S_1$  の周りにサブシステム  $S_i, i = 2, \dots, 5$  が結合した形になっている。さらに、図 2.1 のようにサブシステム  $S_i, i = 2, \dots, 5$  同志は結合しない。このような特徴をもった並列結合の構造を数式で表すために、つぎのような行列を定義する。

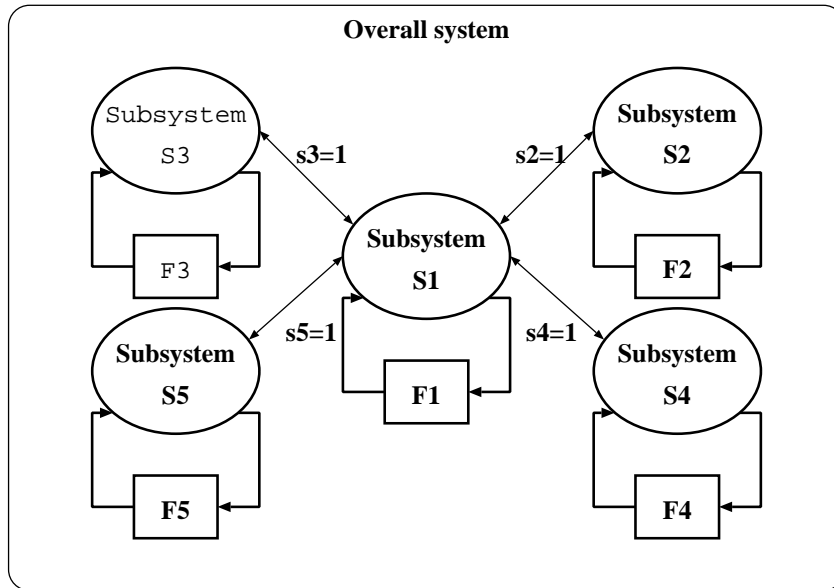
定義 2.2.2 (並列結合行列)  $s_i, i = 2, \dots, N$  を

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{サブシステム } i \text{ がサブシステム } 1 \text{ と分離しているとき} \\ 1 & \text{サブシステム } i \text{ がサブシステム } 1 \text{ と結合しているとき} \end{cases}$$

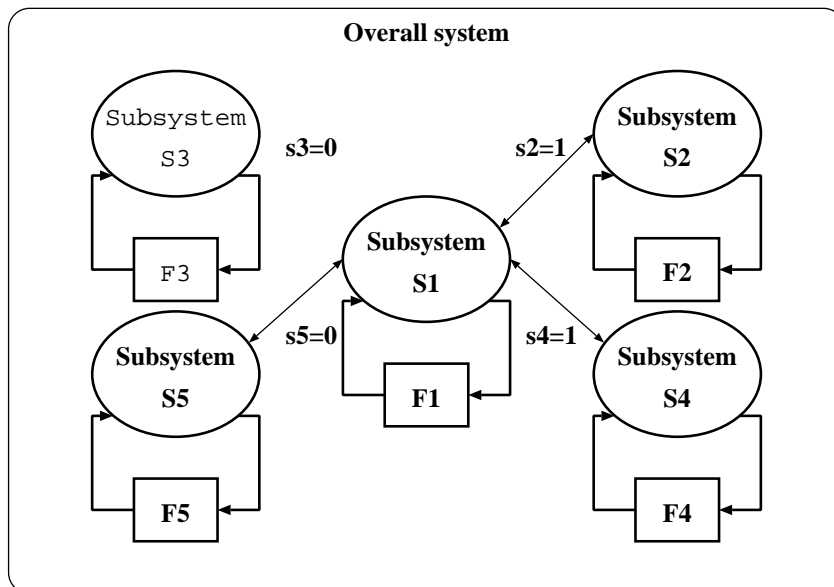
と定義し、並列結合行列  $E_p$  を

$$E_p = [e_{ij}] = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_N \\ s_2 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_3 & 0 & s_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_N & 0 & 0 & \cdots & s_N \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

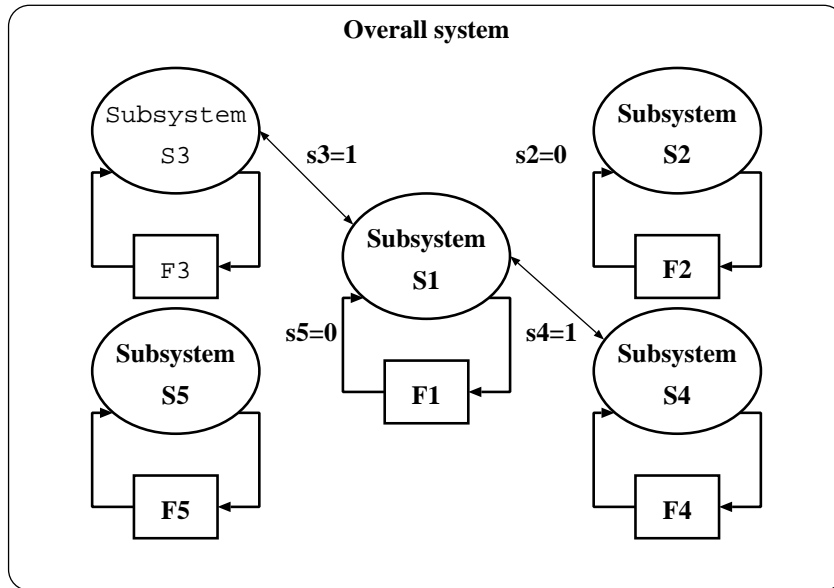
と定義する。 $s_1$  については、1 つでもサブシステムが結合していれば  $s_1 = 1$ 、すべてのサブシステムが分離していれば  $s_1 = 0$  とするので、 $s_1 = s_2 \cup s_3 \cup \cdots \cup s_N$  となる。



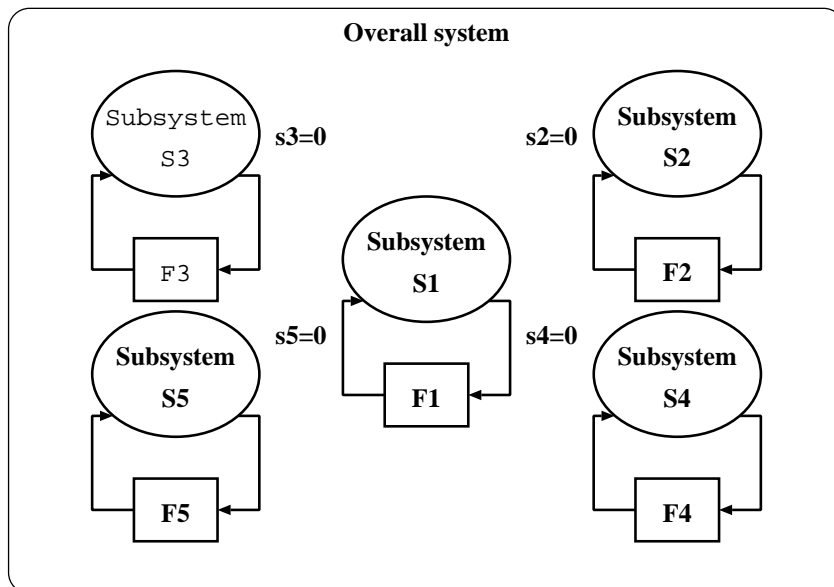
☒ 2.1: Overall system: parallel structure



☒ 2.2: Overall system: parallel structure



☒ 2.3: Overall system: parallel structure



☒ 2.4: Overall system: parallel structure

最後に、全体システムが図 2.5 ~ 図 2.8 のような直列結合をしている場合について考える。ここでは、サブシステムの順序は変わらないとする。例えば、図 2.5 では、 $S_1, S_2, \dots, S_5$  の順に結合しているが、 $S_1$  と  $S_5$  が入れ替わることはないということである。このような特徴をもった直列結合の構造を数式で表すために、つぎのような行列を定義する。

定義 2.2.3 (直列結合行列)  $s_i, i = 2, \dots, N$  を

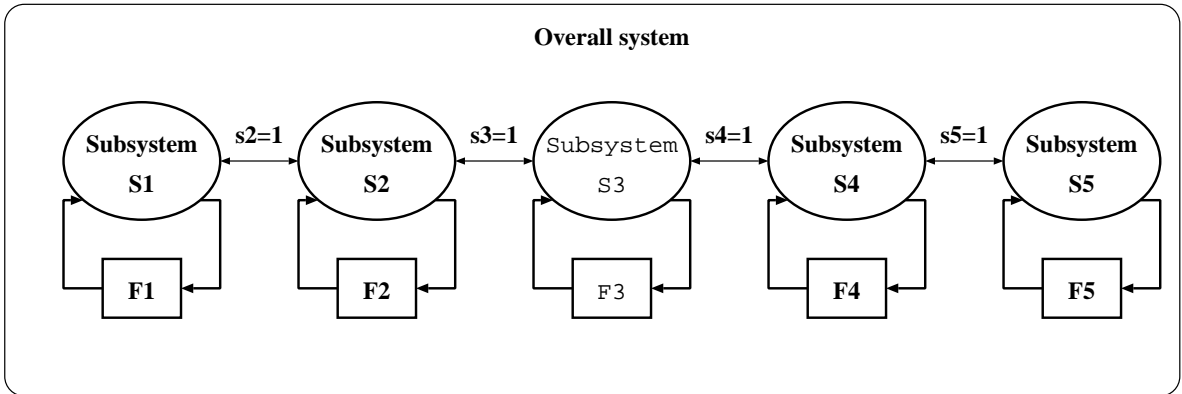
$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{システム } i \text{ とシステム } (i-1) \text{ が分離しているとき} \\ 1 & \text{システム } i \text{ とシステム } (i-1) \text{ が結合しているとき} \end{cases}$$

と定義し、直列結合行列  $E_s$  は

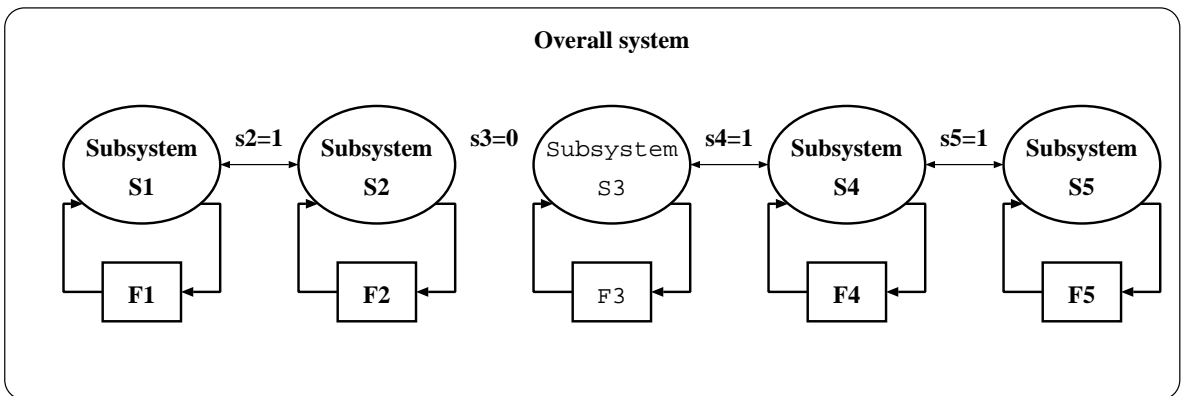
$$E_s = [e_{ij}] = \begin{bmatrix} s_2 & s_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ s_2 & (s_2 \cup s_3) & s_3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s_3 & (s_3 \cup s_4) & s_4 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_{N-1} & (s_{N-1} \cup s_N) & s_N \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s_N & s_N \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

と定義する。

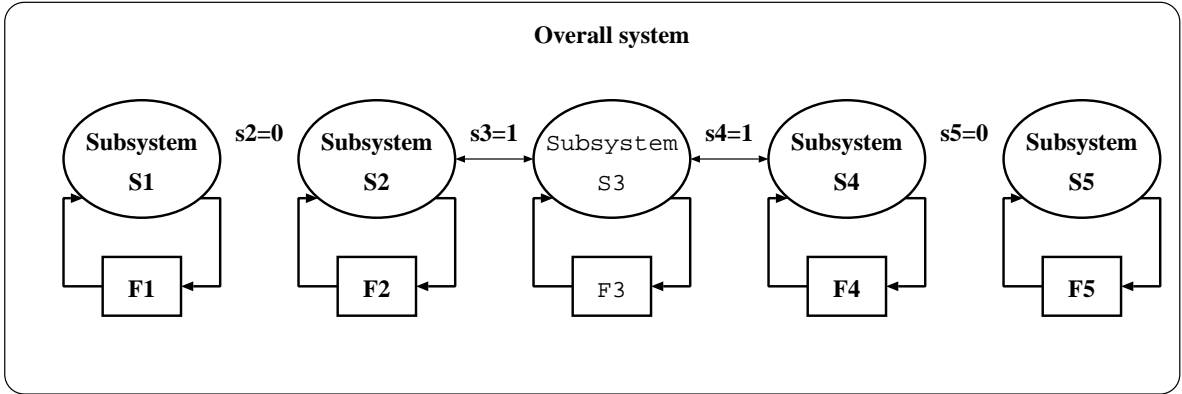




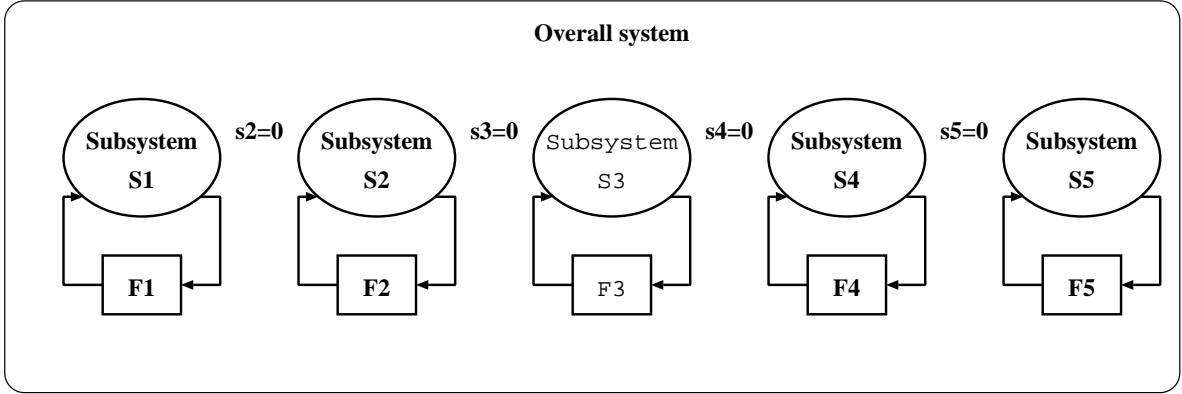
☒ 2.5: Overall system: series structure



☒ 2.6: Overall system: series structure



☒ 2.7: Overall system: series structure



☒ 2.8: Overall system: series structure

## 2.3 状態方程式と問題の定式化

サブシステム  $S_i$  を状態空間表現すると

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

となる. ここで, 添字  $i$  は  $i$  番目のサブシステムを指し,  $x_i \in R^{n_i}$ ,  $u_i \in R^{r_i}$ ,  $A_i \in R^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in R^{n_i \times r_i}$  である. また, 出力は考えない.

つぎに, サブシステム間の結合は  $i$  番目のサブシステムが他のシステムに及ぼす影響として付加的な信号によって表す. そうすると, サブシステムは

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + E_i w_i \quad (2.5)$$

$$z_i = C_{z_i} x_i + D_{z_i} u_i + F_{z_i} w_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6)$$

となる. ここで,  $w_i$  は  $i$  番目のサブシステムから結合への入力,  $z_i$  は結合から  $i$  番目のサブシステムへの出力を表す. また, サブシステム間の結合は

$$w_i = \sum_{j=1}^N e_{ij} L_{ij} z_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

のように表す. ここで,  $L_{ij}$  は  $i$  番目のサブシステムが  $j$  番目のサブシステムに及ぼす影響を記述したもので,  $e_{ij}$  は結合しているときは 1 で, 分離しているときは 0 である.

今, 結合の入力ベクトル  $w_i$  及び出力ベクトル  $z_i$  は考えないと仮定する. つまり,  $D_{z_i} = 0$ ,  $F_{z_i} = 0$  とする. そうすると (2.5) 式, (2.6) 式, (2.7) 式から

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + E_i \sum_{j=1}^N L_{ij} C_{z_j} x_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

を得る. さらに  $A_{ij} := E_i L_{ij} C_{z_j}$  と定義することによって最終的に全体システム  $S$  は

$$S: \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

と表される. ここで,  $A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$ ,  $e_{ij} = \{0, 1\}$  であり  $i$  番目と  $j$  番目のサブシステム同志に影響があるかないかを表している.

以上より, 並列結合構造 (直列結合構造) の結合・分離がおこるシステムの安定化問題について定式化を行なう.

つぎの, サブシステム  $S_i, i = 1, \dots, N$

$$S: \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.10)$$

が結合して, 全体システム  $S$

$$S: \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

を構成するとき  $E_p(E_s)$  のあらゆる組み合わせに対して全体システム  $S$  が安定性を保つ分散コントローラ

$$u_i = F_i x_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

を求める. ここで, 添字  $i$  は  $i$  番目のサブシステムを指し,  $x_i \in R^{n_i}, u_i \in R^{r_i}, A_i \in R^{n_i \times n_i}, B_i \in R^{n_i \times r_i}, A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}, e_{ij} = \{0, 1\}$  で,  $(A_i, B_i)$  は可制御対あるとする. また, 出力は考えない.

# 第 3 章

## 準備

### 3.1 はじめに

この章の目的は 4 章, 5 章においてコントローラ的设计をする際必要となる理論を説明することである. 3.2 において最適制御を, 3.3 節において折り返し法を説明する.

### 3.2 最適制御

最適制御とは, 2 次形式評価関数によるフィードバック制御<sup>[18]</sup>で, 指標として, 閉ループ系の応答の速さと操作量の大きさとの間で妥協を図るための 2 次形式評価関数を導入し, これを最小にする制御を求めるものである.

制御対象として,  $m$  入力  $r$  出力  $n$  次元定係数線形システム

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

$$y = Cx \quad (3.2)$$

をかんがえる. 状態変数  $x$  は直接観測が可能であるとする. この制御対象において評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \{x^T Qx + u^T Ru\} dt \quad (3.3)$$

を最小にする操作量  $u$  を求める. ただし,  $(A, B)$  は可制御,  $Q$  は  $n \times n$  半正定対称行列,  $R$  は  $m \times m$  正定対称行列とする. この 2 次形式評価関数の最適制御問題は, 線形システム理論の最も標準的な問題の 1 つとして知られている.

評価関数 (3.3) を最小にする最適操作量は,

$$u = -R^{-1}B^T P x \quad (3.4)$$

の状態フィードバックとなる. ここで,  $P$  はリカッチ代数方程式

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.5)$$

を満たす解である. このとき, 評価関数  $J$  の最小値は次式で与えられる.

$$J_{min} = x_0^T P x_0 \quad (3.6)$$

また, 閉ループ系は,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BF)x \\ &= (A - BR^{-1}B^T P)x \end{aligned} \quad (3.7)$$

であり, その固有値は  $Q$  と  $R$  から自動的に決定される. つぎに, (3.7) 式で記述されるシステムが安定になるための条件を以下において論ずる.

(3.5) 式において  $Q$  を移項し, 両辺から  $PBR^{-1}B^T P$  を引くと,

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P - PBR^{-1}B^T P = -Q - PBR^{-1}RR^{-1}B^T P \quad (3.8)$$

となり,  $F = R^{-1}B^T P$  を代入すると,

$$(A - BF)^T P + P(A - BF) = -Q - F^T R F \quad (3.9)$$

となる. リアプノフの安定定理より, (3.9) 式の右辺が負定有的时候, 正定対称な唯一解  $P$  が存在することとシステム (3.7) が漸近安定であることが等価であることが知られている.

リカッチ代数方程式 (3.5) は,  $(A, B)$  が可安定,  $Q$  が半正定行列,  $R$  が正定行列のとき半正定対称な解  $P$  を持つが, 特に  $Q$  が正定行列の場合は正定唯一解  $P$  を持つ. したがって, リアプノフの安定定理から閉ループ系は漸近安定であることがわかる.

以上, 2 次形式評価関数を最小にする最適制御はリカッチ代数方程式を解くことによって求まることを述べた. 最後に, 最適制御の周波数領域での特徴を述べる.

ここでは, 簡単のため 1 入力系だけに限るとする. 制御対象は可制御なシステム

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.10)$$

であり, 評価関数は次式で与えられているとする.

$$J = \int_0^{\infty} \{x^T \Omega^T \Omega x + ru^2\} dt \quad (3.11)$$

評価関数を最小にする最適制御は状態フィードバック制御

$$u = -fx, \quad (3.12)$$

$$f = r^{-1}b^T P \quad (3.13)$$

である. ここで, 外部入力は 0 としている. (3.13) 式の  $P$  はリカッチ代数方程式

$$A^T P + PA - Pbr^{-1}b^T P + \Omega^T \Omega = 0 \quad (3.14)$$

の解である. (3.14) 式に  $s$  を複素数として  $sP - sP = 0$  を左辺に加えると,

$$P(sI - A) - (sI - A^T)P + f^T r f = \Omega^T \Omega \quad (3.15)$$

となる. (3.15) 式を変形すると,

$$\{1 + L(-s)\}\{1 + L(s)\} = 1 + r^{-1}\|\Omega(sI - A)^{-1}b\|^2 \quad (3.16)$$

を得る. ただし,

$$L(s) = f(sI - A)^{-1}b \quad (3.17)$$

は, 一巡伝達関数であり, (3.16) 式をカルマンの方程式という. ここで  $s = j\omega$  と置くと (3.16) 式の右辺第 2 項は,

$$\|\Omega(j\omega I - A)^{-1}b\|^2 \geq 0 \quad (3.18)$$

であるので,

$$\|1 + L(j\omega)\|^2 \geq 1 \quad (3.19)$$

となる. ここで,

$$L(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega) \quad (3.20)$$

と置くと式 (3.19) は,

$$\{1 + p(\omega)\}^2 + q^2(\omega) \geq 1 \quad (3.21)$$

と書ける. これは, (3.17) 式のベクトル軌跡が図 (3.1) のようになることを意味する.

すなわち, 1 入力最適制御系の一巡伝達関数  $L(s)$  のベクトル軌跡は,  $-1 + j0$  を中心とする単位円の外にある. これを円条件という. したがって, ゲイン余有は無限大, またゲインが減少する場合も 50% までは安定性は保たれる. さらに, 位相余有も  $\pm 60^\circ$  あり, この意味では最適制御系がロバストであることを示している.

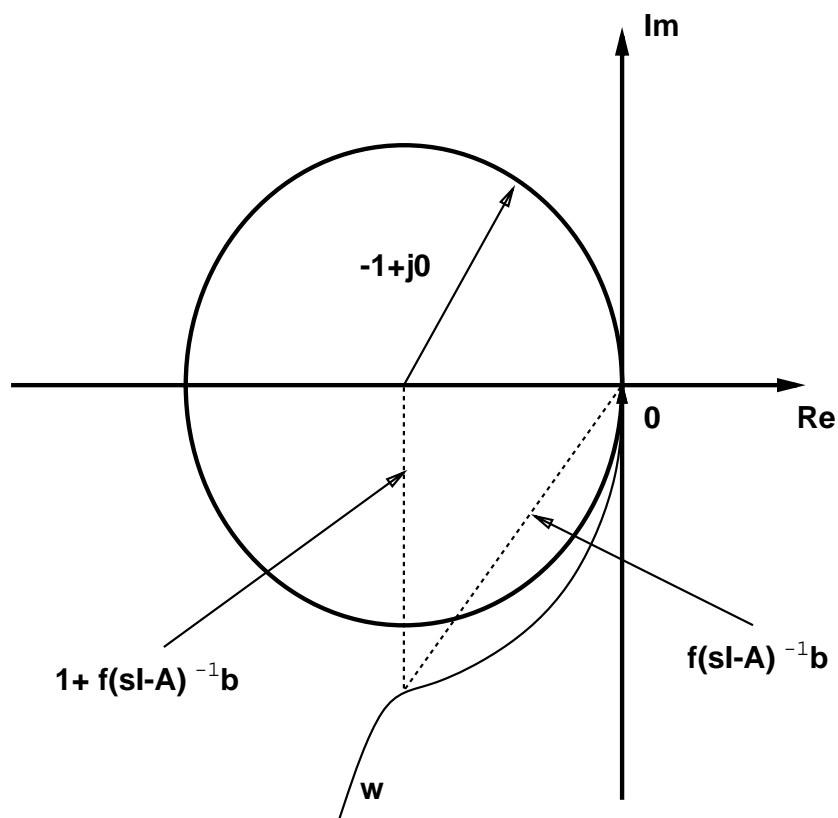


図 3.1: Circle condition

### 3.3 折り返し法

線形系のフィードバックシステムにおいて, 閉ループ系の固有値の位置は, 安定性ばかりでなく速応性などの制御系の評価基準となる重要な指標をも大きく左右する. このこと



を考慮し、閉ループ系の固有値を指定した位置に配置するフィードバック制御系の設計法として極配置法があるが、次元が大きい場合には計算は必ずしも簡単ではない<sup>[27]</sup>。また、固有値の位置をひとつひとつ正確に指定することはまれで、多くの場合固有値がある希望された領域に入っているようにすれば十分であると考えられる。

2次形式評価関数を最小にする最適制御は、2.2節で述べたようにゲイン余有が無限大でさらに、位相余有でも有利である。しかし、評価関数の重み係数  $Q, R$  と応答の関係がはっきりとは解明されていないため、試行錯誤的に重み係数を決定しているのが現状である。したがって、もし最適制御を用いて閉ループを構成し、かつその閉ループ系の固有値を希望された領域に配置することができれば、単に極配置法で構成した閉ループ系より好ましいと考えられる。

制御対象は、 $m$  入力  $r$  出力  $n$  次元定係数線形システム

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.22)$$

$$y = Cx \quad (3.23)$$

で、 $(A, B)$  は可制御、かつ状態変数  $x$  は直接観測が可能であるとする。

連続時間系において図 3.2 の斜線部に存在させる問題を考える。システムのすべての固有値が  $Re(\lambda) = -k$  という直線より左側に分布しているとき、すべての単位インパルス応答は  $e^{-kt}$  より早く減衰する。したがって系への外部入力または系の状態などの変化による過渡現象の減衰の速さを  $k$  により規定することができる。またすべての固有値が図 3.2 のような  $90^\circ$  の角領域、すなわち減衰係数が 0.707 以上になるところに存在するようなシステムでは顕著な振動的モードが事実上あらわれないことが知られている<sup>[17]</sup>。

行列  $A$  の固有値のうち、虚軸を含む左半平面に存在するものを  $\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_\mu^-$  とし、右半平面に存在するものを  $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_\nu^+$ 、 $(\mu + \nu = n)$  とする。さらに、これらに対応する固有ベクトルをそれぞれ  $\xi_1^-, \xi_2^-, \dots, \xi_\mu^-$  および  $\xi_1^+, \xi_2^+, \dots, \xi_\nu^+$  とすると、つぎの補題が成立する。

補題 3.3.1 <sup>[16]</sup>

$$Q\xi_i^- = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, \mu\} \quad (3.24)$$

の関係を満たす半正定な対称行列  $Q$  を用いたリカッチ代数方程式

$$PBR^{-1}B^TP - PA - A^TP - Q = 0 \quad (3.25)$$

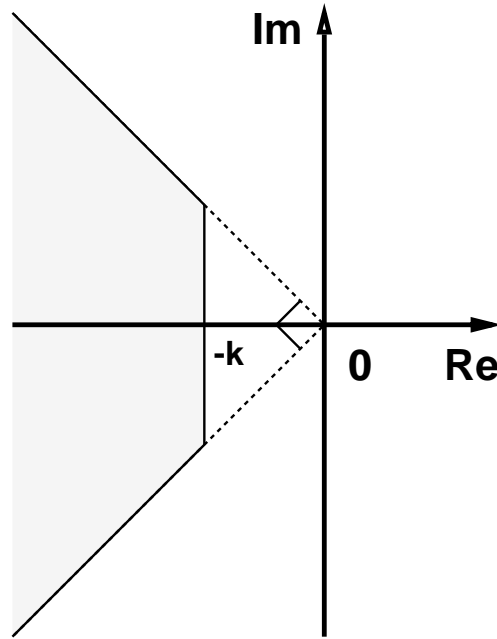


図 3.2: A desired area where the eigenvalues of the closed loop system are to be located  
 の最大解を  $P_+$  とする. このとき,  $\lambda_i^-$  および  $\xi_i^-$  はそれぞれ  $P_+$  によって構成された閉  
 ループ系のシステム行列  $A - BR^{-1}B^T P_+$  の固有値および固有ベクトルになっている.

補題 3.3.2 <sup>[16]</sup> 方程式

$$PBR^{-1}B^T P - PA - A^T P = 0 \quad (3.26)$$

の最大解  $P_+$  を用いた行列  $A - BR^{-1}B^T P_+$  の固有値は

$$\lambda(A - BR^{-1}B^T P_+) = \{\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_\mu^-, -\lambda_1^+, -\lambda_2^+, \dots, -\lambda_\nu^+\} \quad (3.27)$$

となり, 最大解  $P_+$  は,  $\text{Null}(P_+)$  を行列  $P_+$  の零空間,  $\text{Span}(\xi_1^-, \xi_2^-, \dots, \xi_\mu^-)$  はベクトル  
 $\xi_1^-, \xi_2^-, \dots, \xi_\mu^-$  によって張られる部分空間を表すとすると,

$$\text{Null}(P_+) = \text{Span}(\xi_1^-, \xi_2^-, \dots, \xi_\mu^-) \quad (3.28)$$

を満たす.

(3.27) 式を見ると, 式 (3.26) の最大解  $P_+$  によって構成された閉ループ系のシステム行列  
 $A - BR^{-1}B^T P_+$  の固有値は  $A$  の固有値のうち虚軸を含む左半平面にあるものはそのま

まの位置に, 右半平面にあるものは虚軸を対称として左半平面に折り返した位置に配置されていることがわかる. いま,  $A$  の代わりに  $k$  を非負の実数として,  $A + kI$  を考え, これに対してリカッチ代数方程式

$$\hat{P}BR^{-1}B^T\hat{P} - \hat{P}(A + kI) - (A + kI)^T\hat{P} = 0 \quad (3.29)$$

を作り, この最大解を  $\hat{P}_+$  とする. (3.29) 式は

$$\hat{P}BR^{-1}B^T\hat{P} - \hat{P}A - A^T\hat{P} - 2k\hat{P} = 0 \quad (3.30)$$

と書き直せることに注意すると, 補題 3.3.2 からつぎの定理が導かれることがわかる.

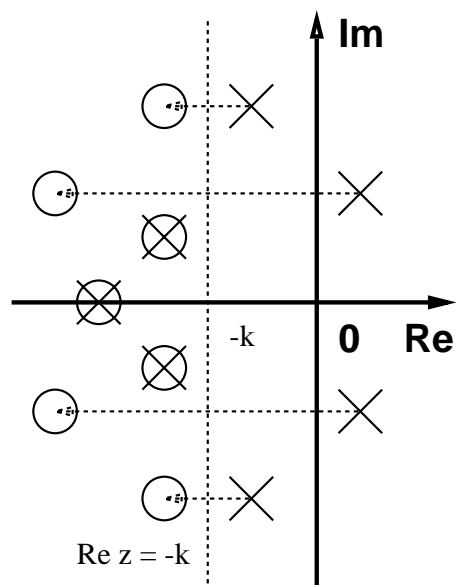
**定理 3.3.1** (3.29) 式の最大解  $\hat{P}_+$  を用いて構成される行列  $A - BR^{-1}B^T\hat{P}_+$  の固有値は,  $A$  の固有値のうち

- 1) 直線  $Re(\lambda) = -k$  より左側にあるものはそのままの位置に
- 2) 直線  $Re(\lambda) = -k$  より右側にあるものは, 直線  $Re(\lambda) = -k$  を対称軸として左側に折り返した位置に配置される. (図 3.3 参照)

また, (3.29) 式の最小解  $\hat{P}_-$  を用いれば,  $A - BR^{-1}B^T\hat{P}_-$  の固有値は,  $A$  の固有値のうち直線  $Re(\lambda) = k$  より左側にあるもののみを直線  $Re(\lambda) = k$  を対称軸として右側に折り返した位置に配置される.

したがって, 実数  $k \geq 0$  を適当に定めることによって, 閉ループ系の固有値をすべて図 3.2 の斜線領域内に配置することができる. 実数  $k \geq 0$  を折り返しパラメータと言う. 以上をまとめると, 設計の手順はつぎのようになる.

- 1) 直線  $Re(\lambda) = -k$  を,  $A$  の固有値のうち, この直線の右側にあるもののみを, これを対称軸として左側に折り返したとき, すべてが図 3.2 の斜線領域内に入るように決定する. このとき, 直線  $Re(\lambda) = -k$  の上に  $A$  の固有値がないように  $k$  を定める.
- 2) ステップ 1) で定めた  $k$  を用いて, (3.29) 式の最大解  $\hat{P}_+$  を求め, これを用いて閉ループ系を構成する. 結果的に得られる状態フィードバック入力  $u = R^{-1}B^T\hat{P}_+$  は,  $(2k\hat{P}_+, R)$  を重み係数とする最適制御問題と一致する.  $Re(\lambda) = -k$  を対称軸として左側に折り返した位置に配置される.



$\times$  : Eigenvalues of matrix A  
 $\circ$  : Eigenvalues of matrix  $A - BB^T P_+$

$\boxtimes$  3.3: Eigenvalues of  $A$  and  $A - BR^{-1}B^T \hat{P}_+$

## 第 4 章

# コントローラのハイゲイン化による設計法

### 4.1 はじめに

3.3 節において、折り返し法には最適制御の利点であるゲイン余有無限大、ゲイン減少の許容範囲 50% という性質があることを述べた。いま、サブシステムが他のサブシステムからの干渉入力の影響を、自身の操作入力で等価的に発生することができると仮定する。そうすると、サブシステムのコントローラのフィードバックゲインを干渉入力の影響がなくなるまで定数倍することによって全体システムの安定性も保たれると考えることができる。具体的にはまず、サブシステム  $S_i$  それぞれを別々に折り返し法で設計する。つぎに、4.2 節で全体システム  $S$  が安定性を保つようにコントローラのゲインを定数倍する条件を求める。ここでは、全システム共通の条件と各システム別々の条件を求める。最後に、4.3 節において設計手順を述べる。

### 4.2 安定性解析

#### 4.2.1 安定条件の導出 1: 全システム共通のハイゲイン化条件

まず、2 章で述べたような分散制御による安定化はつねに可能かという疑問を解決しなければならない。各サブシステム  $S_i$  は可制御であるから、閉ループサブシステムの固有値 (行列  $A_i + B_i K_i$  の固有値) の実部は負のいくらでも大きな値にすることができる。その結果、各サブシステムの安定度を他のサブシステムからの干渉に耐えられるだけ大きく

できて、全体システムの安定性も保たれると考えることができると 3.1 節で述べた。しかし、これはいつも実現するわけではなく、つぎのような例が存在する。

例 4.2.1 二つの可制御なサブシステムから成るつぎの結合システムを考える。

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_2 \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 \quad (4.2)$$

サブシステムごとの状態フィードバック

$$u_1 = [k_{11} \ k_{12}] \quad (4.3)$$

$$u_2 = [k_{21} \ k_{22}] \quad (4.4)$$

をほどこして得られる閉ループ系の全体をまとめると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_{11} - 1 & k_{12} + 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k_{21} - 1 & k_{22} - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

と書くことができる。(4.5) 式の右辺の係数行列は、(4.3) 式、(4.4) 式のフィードバックゲインの選び方にかかわらず、0 という固有値を必ずものから安定にならない。

このようにサブシステムの安定化が全体システムの安定化につながるとは、必ずしもいえない。それではどのような場合に安定化が可能かという、その一つの場合はサブシステム間の結合を表す行列  $A_{ij}$  が

$$\text{Range} A_{ij} \subseteq \text{Range} B_i, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (4.6)$$

という条件を満たす場合である<sup>[3]</sup>。この条件は、ある適当な行列  $X_{ij}$  が存在して

$$A_{ij} = B_i X_{ij} \quad (4.7)$$

が成立することと等価であり, 各サブシステムが他のサブシステムからの干渉を自身の入力で打ち消すことができることを意味している. 以下, 4章, 5章では(4.7)式が成り立つと仮定して議論を進める.

つぎに, 全サブシステム共通のハイゲイン化条件を求めるわけだが, 結合構造の記述を簡単にするためにつぎの補題を与える.

補題 4.2.1 (2.11) 式において(2.2)式のような並列結合構造をしているとき, 結合構造と他のサブシステムへの干渉を表す項

$$\sum_{j=0}^N e_{ij} A_{ij} x_j$$

はつぎのように表すことができる.

$$\sum_{j=0}^N e_{ij} A_{ij} x_j = \hat{E}_p A_c \hat{E}_p \quad (4.8)$$

ただし,

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{N1} & 0 & \cdots & 0 & A_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\hat{E}_p = \begin{bmatrix} s_1 I & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & s_N I \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

(補題 4.2.1の証明)

$$\hat{E}_p A_c \hat{E}_p = \begin{bmatrix} s_1 I & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & s_N I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{N1} & 0 & \cdots & 0 & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 I & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & s_N I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} s_1^2 A_{11} & s_1 s_2 A_{12} & s_1 s_3 A_{13} & \cdots & s_1 s_N A_{1N} \\ s_2 s_1 A_{21} & s_2^2 A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ s_3 s_1 A_{31} & 0 & s_3^2 A_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ s_N s_1 A_{N1} & 0 & \cdots & 0 & s_N^2 A_{NN} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s_1 A_{11} & s_2 A_{12} & s_3 A_{13} & \cdots & s_N A_{1N} \\ s_2 A_{21} & s_2 A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ s_3 A_{31} & 0 & s_3 A_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ s_N A_{N1} & 0 & \cdots & 0 & s_N A_{NN} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=0}^N e_{ij} A_{ij} x_j \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

補題 4.2.2 (2.11) 式において (2.3) 式のような直列結合構造をしているとき, 結合構造と他のサブシステムへの干渉を表した項

$$\sum_{j=0}^N e_{ij} A_{ij} x_j$$

はつぎのように表すことができる.

$$\sum_{j=0}^N e_{ij} A_{ij} x_j = \hat{E}_s A_c \hat{E}_s \quad (4.11)$$

ただし,

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{N-1,N-2} & A_{N-1,N-1} & A_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$





- 全体システムが直列結合構造をとる場合,

$$\alpha > \frac{1}{2} + \max_{\{\hat{E}_s\}} \frac{1}{4} \lambda_M \{ R^{\frac{1}{2}} \hat{E}_s X^T (KP)^{-1} X \hat{E}_s R^{\frac{1}{2}} \} \quad (4.16)$$

を用いれば任意の  $s_i = \{0, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  に対して安定である. ただし,  $P_{i+}$  は  $P_i$  に関するリカッチ代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i + k_i I) - (A_i + k_i I)^T P_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.17)$$

の正定な最大解で,  $R_i$  は正定対称行列,  $k_i$  は折り返しパラメータである.

$$\begin{aligned} X &= (X_{ij}) \\ P &= \text{diag}\{P_{1+}, \dots, P_{N+}\} \\ R &= \text{diag}\{R_1, \dots, R_N\} \\ K &= \text{diag}\{k_1 I, \dots, k_N I\} \end{aligned}$$

(定理 4.2.1 の証明)

いま,

$$\begin{aligned} x &= [x_1^T, \dots, x_N^T]^T \\ u &= [u_1^T, \dots, u_N^T]^T \\ A &= \text{diag}\{A_1, \dots, A_2\} \\ B &= \text{diag}\{B_1, \dots, B_2\} \end{aligned}$$

とすると, 全体システムが並列構造をしている場合, 補題 4.2.1 から全体システム  $S$  は,

$$S: \dot{x} = Ax + Bu + \hat{E}_p A_c \hat{E}_p \quad (4.18)$$

と表され, (4.14) 式は

$$u = -\alpha R^{-1} B^T P x \quad (4.19)$$

となる. その結果得られる閉ループ系は

$$\dot{x} = (A - \alpha B R^{-1} B^T P + \hat{E}_p A_c \hat{E}_p) x \quad (4.20)$$

となる. さらに, リカッチ代数方程式 (4.17) は,

$$PBR^{-1}B^T P - PA - A^T P - 2KP = 0 \quad (4.21)$$

となる. ここで,  $P > 0$  よりリアプノフ関数として

$$V(x) = x^T P x \quad (4.22)$$

を考え, その時間微分が負定になれば全体システム  $S$  は安定となる.  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  とすると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T (A^T - \alpha P B R^{-1} B^T + \hat{E}_p A c^T \hat{E}_p) P x + x^T P (A - \alpha B R^{-1} B^T P + \hat{E}_p A_c \hat{E}_p) x \\ &= x^T \{A^T P + P A - 2\alpha P B R^{-1} B^T P + \hat{E}_p A c^T \hat{E}_p P + P \hat{E}_p A_c \hat{E}_p\} x \\ &= x^T \{(1 - 2\alpha) P B R^{-1} B^T P + 2KP + \hat{E}_p A c^T \hat{E}_p P + P \hat{E}_p A_c \hat{E}_p\} x \\ &= -x^T \{(2\alpha - 1) P B R^{-1} B^T P - 2KP - \hat{E}_p A c^T \hat{E}_p P - P \hat{E}_p A_c \hat{E}_p\} x \\ &\leq -x^T \{(2\alpha - 1) P \hat{E}_p B R^{-1} B^T \hat{E}_p P - 2KP - \hat{E}_p A c^T \hat{E}_p P - P \hat{E}_p A_c \hat{E}_p\} x \\ &= -x^T G x \end{aligned}$$

ここで, (4.7) 式より,  $A_c = BX$  となるから,

$$\begin{aligned} G &= (2\alpha - 1) P \hat{E}_p B R^{-1} B^T \hat{E}_p P - 2KP - \hat{E}_p X^T B^T \hat{E}_p P - P \hat{E}_p B X \hat{E}_p \\ &= \left\{ \sqrt{2\alpha - 1} P \hat{E}_p B - \frac{1}{\sqrt{2\alpha - 1}} \hat{E}_p X^T R \right\} R^{-1} \left\{ \sqrt{2\alpha - 1} B^T \hat{E}_p P - \frac{1}{\sqrt{2\alpha - 1}} R X \hat{E}_p \right\} \\ &\quad + 2KP - \frac{1}{2\alpha - 1} \hat{E}_p X^T R X \hat{E}_p \end{aligned}$$

よって,

$$2KP - \frac{1}{2\alpha - 1} \hat{E}_p X^T R X \hat{E}_p > 0$$

となればよいから,

$$\begin{aligned} 2KP &> \frac{1}{2\alpha - 1} \hat{E}_p X^T R X \hat{E}_p \\ \Leftrightarrow (2\alpha - 1)I &> \frac{1}{2} (KP)^{-\frac{1}{2}} \hat{E}_p X^T R X \hat{E}_p (KP)^{-\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \alpha &> \frac{1}{2} + \max_{\{\hat{E}_p\}} \frac{1}{4} \lambda_M \{ R^{\frac{1}{2}} \hat{E}_p X^T (KP)^{-1} X \hat{E}_p R^{\frac{1}{2}} \} \end{aligned}$$

また, 全体システムが直列結合構造をしている場合も, 同様に証明できる. ■

## 4.2.2 安定条件の導出 2: 各システム別々のハイゲイン化条件

定理 4.2.2 サブシステム  $S_i$  の入力として

$$u_i = -\alpha_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} x_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.23)$$

- 全体システムが並列結合構造をとる場合,

$$\alpha_1 > \frac{1}{2} - \frac{k_1 \lambda_M(P_{1+}) + \lambda_M(P_{1+}) [\|A_{11}\|v_1 + \dots + s_N \|A_{1N}\|v_N]}{v_1 \lambda_M(P_{1+} B_1 R_1^{-1} B_1^T P_{1+})} \quad (4.24)$$

$$\alpha_i > \frac{1}{2} - \frac{k_i \lambda_M(P_{i+}) + \lambda_M(P_{i+}) [\|A_{i1}\|v_1 + \|A_{ii}\|v_i]}{v_i \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+})}, \quad i = 2, \dots, N \quad (4.25)$$

- 全体システムが直列結合構造をとる場合,

$$\alpha_1 > \frac{1}{2} - \frac{k_1 \lambda_M(P_{1+}) + \lambda_M(P_{1+}) [\|A_{11}\|v_1 + \|A_{12}\|v_2]}{v_1 \lambda_M(P_{1+} B_1 R_1^{-1} B_1^T P_{1+})} \quad (4.26)$$

$$\alpha_i > \frac{1}{2} - \frac{k_i \lambda_M(P_{i+}) + \lambda_M(P_{i+}) [\|A_{i,i-1}\|v_{i-1} + \|A_{i,i}\|v_i + \|A_{i,i+1}\|v_{i+1}]}{v_i \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+})}, \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (4.27)$$

$$\alpha_N > \frac{1}{2} - \frac{k_N \lambda_M(P_{N+}) + \lambda_M(P_{N+}) [\|A_{N,N-1}\|v_{N-1} + \|A_{N,N}\|v_N]}{v_N \lambda_M(P_{N+} B_N R_N^{-1} B_N^T P_{N+})} \quad (4.28)$$

を用いれば任意の  $s_i = \{0, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  に対して安定である。ただし,  $P_{i+}$  は  $P_i$  に関するリカッチ代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i + k_i I) - (A_i + k_i I)^T P_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, k_i \in \mathbb{R} \quad (4.29)$$

の正定な最大解で,  $R_i$  は正定対称行列,  $v_i > 0$ ,  $k_i$  は折り返しパラメータである。

(定理 4.2.2 の証明)

個々のシステムのリアプノフ関数を

$$V_i(x_i) = x_i^T P_{i+} x_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.30)$$

で表し, 全体システムのリアプノフ関数を

$$V(x) = \sum_{i=1}^N x_i^T P_i x_i \quad (4.31)$$

で表す事にする.

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dV}{dt} \right]_{(2.11)} &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{dV_i}{dt} \right]_{(2.11)} \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T \left[ \frac{dx_i}{dt} \right]_{(2.11)} \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T \left[ A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T \left[ A_i x_i + B_i u_i \right] + \sum_{i=1}^N \left\{ \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

ここで, 式(4.29)より,  $\alpha_i > \frac{1}{2}$  とすると

$$\begin{aligned} \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T [A_i x_i + B_i u_i] &= x_i^T \{ P_{i+} A_i + A_i^T P_{i+} - 2\alpha_i P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} \} x_i \\ &= x_i^T (A_i^T P_{i+} + P_{i+} A_i - 2\alpha_i P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) x_i \\ &= x_i^T \{ (1 - 2\alpha_i) P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} - 2k_i P_{i+} \} x_i \\ &\leq \left| x_i^T \{ (1 - 2\alpha_i) P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} - 2k_i P_{i+} \} x_i \right| \\ &\leq - \left| x_i^T \{ (2\alpha_i - 1) P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} + 2k_i P_{i+} \} x_i \right| \\ &\leq - \|x_i^T\| \cdot \|(2\alpha_i - 1) P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} + 2k_i P_{i+}\| \cdot \|x_i\| \\ &\leq - \left\{ \|(2\alpha_i - 1) P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}\| + \|2k_i P_{i+}\| \right\} \|x_i\|^2 \\ &= - \left\{ (2\alpha_i - 1) \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+}) \right\} \|x_i\|^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

さらに,

$$\begin{aligned} \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j &\leq \left| \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \left\| \frac{dV_i}{dx_i} \right\| \cdot \|e_{ij} A_{ij} x_j\| \\ &= \sum_{j=1}^N 2 \|P_{i+} x_i\| \cdot \|e_{ij} A_{ij} x_j\| \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=1}^N 2\lambda_M(P_{i+}) \|x_i\| e_{ij} \|A_{ij}\| \cdot \|x_j\| \quad (4.34)$$

よって, (??) 式, (4.34) 式を (4.32) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dV}{dt} \right]_{(4)} &\leq - \sum_{i=1}^N \left\{ (2\alpha_i - 1) \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+}) \right\} \|x_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 2\lambda_M(P_{i+}) \|x_i\| e_{ij} \|A_{ij}\| \|x_j\| \\ &= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^N \left\{ (2\alpha_i - 1) \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+}) - 2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\| \right\} \|x_i\|^2 \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N 2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\| \cdot \|x_i\| \cdot \|x_j\| \\ &= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^N s_{ij} \|x_i\|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N s_{ij} \|x_i\| \cdot \|x_j\| \\ &= - \sum_{i,j=1}^N \|x_i\| s_{ij} \|x_j\| \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \|x_i\| (1 \cdot s_{ij} + s_{ji} \cdot 1) \|x_j\| \\ &= - \frac{1}{2} x^T (IS + S^T I) x \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} x &= [\|x_1\| \cdots \|x_N\|]^T \\ S &= (s_{ij}) \end{aligned}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} (2\alpha_i - 1) \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+}) - 2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\|, & i = j \\ -2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\|, & i \neq j \end{cases} \quad (4.36)$$

よって, 定義 A.0.1, 定理 A.0.1より正のベクトル  $v = [v_1 \cdots v_N]^T$  に対して  $S \cdot v > 0$  となるような条件を求めればよい.

$$S \cdot v > 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ i=j}}^N s_{ij} v_j + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N s_{ij} v_j > 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ i=j}}^N \left\{ (2\alpha_i - 1) \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+}) - 2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\| \right\} v_j - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N 2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\| v_j > 0$$

$$\begin{aligned}
& , \quad i = 1, \dots, N \\
\Leftrightarrow & \{(2\alpha_i - 1)\lambda_M(P_{i+}B_iR_i^{-1}B_i^T P_{i+}) + 2k_i\lambda_M(P_{i+})\}v_i - \sum_{j=1}^N 2\lambda_M(P_{i+})e_{ij}\|A_{ij}\|v_j > 0, \quad i = 1, \dots, N \\
\Leftrightarrow & (2\alpha_i - 1)\lambda_M(P_{i+}B_iR_i^{-1}B_i^T P_{i+}) > \frac{1}{v_i}2\lambda_M(P_{i+})\sum_{j=1}^N e_{ij}\|A_{ij}\|v_j - 2k_i\lambda_M(P_{i+}), \quad i = 1, \dots, N \\
\Leftrightarrow & (2\alpha_i - 1) > \left[ \frac{1}{v_i}2\lambda_M(P_{i+})\sum_{j=1}^N e_{ij}\|A_{ij}\|v_j - 2k_i\lambda_M(P_{i+}) \right] / \lambda_M(P_{i+}B_iR_i^{-1}B_i^T P_{i+}), \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

よって,

$$\alpha_i > \frac{1}{2} + \frac{2\lambda_M(P_{i+})\sum_{j=1}^N e_{ij}\|A_{ij}\|v_j - 2k_i\lambda_M(P_{i+})}{2v_i\lambda_M(P_{i+}B_iR_i^{-1}B_i^T P_{i+})}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.37)$$

ここで,  $e_{ij}$  が

- 全体システムが並列結合構造をとる場合,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 & > \frac{1}{2} - \frac{k_1\lambda_M(P_{1+}) + \lambda_M(P_{1+})[\|A_{11}\|v_1 + \dots + s_N\|A_{1N}\|v_N]}{v_1\lambda_M(P_{1+}B_1R_1^{-1}B_1^T P_{1+})} \\
\alpha_i & > \frac{1}{2} - \frac{k_i\lambda_M(P_{i+}) + \lambda_M(P_{i+})[\|A_{i1}\|v_1 + \|A_{ii}\|v_i]}{v_i\lambda_M(P_{i+}B_iR_i^{-1}B_i^T P_{i+})}, \quad i = 2, \dots, N
\end{aligned} \quad (4.38)$$

- 全体システムが直列結合構造をとる場合,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 & > \frac{1}{2} - \frac{k_1\lambda_M(P_{1+}) + \lambda_M(P_{1+})[\|A_{11}\|v_1 + \|A_{12}\|v_2]}{v_1\lambda_M(P_{1+}B_1R_1^{-1}B_1^T P_{1+})} \\
\alpha_i & > \frac{1}{2} - \frac{k_i\lambda_M(P_{i+}) + \lambda_M(P_{i+})[\|A_{i,i-1}\|v_{i-1} + \|A_{i,i}\|v_i + \|A_{i,i+1}\|v_{i+1}]}{v_i\lambda_M(P_{i+}B_iR_i^{-1}B_i^T P_{i+})} \quad (4.39) \\
& , \quad i = 2, \dots, N-1 \\
\alpha_N & > \frac{1}{2} - \frac{k_N\lambda_M(P_{N+}) + \lambda_M(P_{N+})[\|A_{N,N-1}\|v_{N-1} + \|A_{N,N}\|v_N]}{v_N\lambda_M(P_{N+}B_NR_N^{-1}B_N^T P_{N+})}
\end{aligned} \quad (4.40)$$

となる. ■

以上, 定理 4.2.1 と定理 4.2.2 において, 結合・分離がおこるシステムの安定条件を導出した. 定理 4.2.1 は, 全サブシステム共通の安定条件であるから, 計算も単純であるという利点があるが, 並列結合構造と直列結合構造との違いがほとんど現れず, それだけ保守的な条件であるといえる.

また, 定理 4.2.2 で導出した各サブシステム別々の安定条件は, 計算が複雑であるが, 並列結合構造と直列結合構造の特徴が表されていて, 全サブシステム共通の安定条件に比べると保守性が解消されている.

### 4.3 設計手順

この節では, 4.2 節, 4.3 節で求めた安定条件を用いて設計手順を構築する. ここで, 設計する際に問題となってくるのは, 3.3 節で述べたように通常リカッチ方程式 (4.17) の最大解  $P_{i+}$  は通常半正定であるということである. ところが, サブシステム  $S_i$  のシステム係数行列  $A_i$  の固有値がすべて虚軸を含まない右半平面に存在するときは,  $P_{i+}$  は正定解となり

$$P_{i+} = \left[ \int_0^{\infty} e^{-A_i t} B_i B_i^T e^{-A_i^T t} dt \right]^{-1}$$

として求められる<sup>[17]</sup>.

よって, 設計の最初にシステム係数行列  $A_i$  の固有値をすべて虚軸を含まない右半平面に配置する必要がある. このことは, 5 章でも同様のことが言える.

#### 4.3.1 設計法 1: 全サブシステム共通のハイゲイン化条件を用いた設計手順

Step 1: システム行列  $A_i$  の固有値を求める.

- $A_i$  の固有値がすべて虚軸を含まない右半平面に存在する.  $\rightarrow P_{i-} = 0, i = 1, \dots, N$  とおいて Step 4 へ.
- それ以外.  $\rightarrow$  Step 2 へ.

Step 2: 直線  $\text{Re} z_i = l_i$  を考え, それを対称軸として  $A_i$  の固有値のうち対称軸より左側にあるもののみを右側に折り返し, すべてが虚軸を含まない右半平面に入るように  $l_i$  を決める.

(ただし, 直線  $\text{Re} z_i = l_i$  上に  $A_i$  の固有値がないように  $l_i$  を決める.)

Step 3:  $l_i$  を用いて, 代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i - l_i I) - (A_i - l_i I)^T P_i = 0$$



の最小解  $P_{i-}$  を求め, 入力として,

$$v_i = -R_i^{-1}B_i^T P_{i-}x_i + u_i$$

を構成する. この時閉ループ系は,

$$\dot{x}_i = (A_i - B_iR_i^{-1}B_i^T P_{i-})x_i + B_iu_i$$

となる.

Step 4: 直線  $Rez_i = -k_i$  を考え, それを対称軸として  $(A_i - B_iR_i^{-1}B_i^T P_{i-})$  の固有値が図 3.3 で示した希望される領域内に入るように  $k_i$  を決める.

Step 5:  $k_i$  を用いて, 代数方程式

$$P_iB_iR_i^{-1}B_i^T P_i - P_i(A_i - B_iR_i^{-1}B_i^T P_{i-} + k_iI) - (A_i - B_iR_i^{-1}B_i^T P_{i-} + k_iI)^T P_i = 0$$

の最大解  $P_{i+}$  を求め, 入力として

$$u_i = -\alpha R_i^{-1}B_i^T P_{i+}x_i$$

を構成する.

### 4.3.2 設計法 2: 各システム別々のハイゲイン化条件を用いた設計手順

Step 1: システム行列  $A_i$  の固有値を求める.

- $A_i$  の固有値がすべて虚軸を含まない右半平面に存在する.  $\rightarrow P_{i-} = 0, i = 1, \dots, N$  とおいて Step 4 へ.
- それ以外.  $\rightarrow$  Step 2 へ.

Step 2: 直線  $Rez_i = l_i$  を考え, それを対称軸として  $A_i$  の固有値のうち対称軸より左側にあるもののみを右側に折り返し, すべてが虚軸を含まない右半平面に入るように  $l_i$  を決める.

(ただし, 直線  $Rez_i = l_i$  上に  $A_i$  の固有値がないように  $l_i$  を決める.)

Step 3:  $l_i$  を用いて, 代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i - l_i I) - (A_i - l_i I)^T P_i = 0$$

の最小解  $P_{i-}$  を求め, 入力として,

$$v_i = -R_i^{-1} B_i^T P_{i-} x_i + u_i$$

を構成する. この時閉ループ系は,

$$\dot{x}_i = (A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-}) x_i + B_i u_i$$

となる.

Step 4: 直線  $\text{Re} z_i = -k_i$  を考え, それを対称軸として  $(A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-})$  の固有値が図 3.3 で示した希望される領域内に入るように  $k_i$  を決める.

Step 5:  $k_i$  を用いて, 代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-} + k_i I) - (A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-} + k_i I)^T P_i = 0$$

の最大解  $P_{i+}$  を求め, 入力として

$$u_i = -\alpha_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} x_i$$

を構成する.

## 第 5 章

# 折り返しパラメータの導出による設計法

### 5.1 はじめに

4 章においてコントローラのゲインを定数倍する設計法を述べたが、いくつかの問題点もある。第 1 に、単純に定数倍するため非常にハイゲインとなる可能性がある。第 2 に、各サブシステムを折り返し法で設計しても、ゲインを定数倍することによってサブシステムの固有値が希望する領域からはずれる可能性がある。そこで、求めたコントローラのゲインを定数倍するのではなく、最初からサブシステム  $S_i$ 、全体システム  $S$  とともに安定となるような折り返しパラメータの条件を求める。そうすると、サブシステムの固有値を希望する領域に配置することができるし、とびぬけてハイゲインになることも避けられる。以上から、折り返しパラメータの条件を 5.1.1 節、5.1.2 節で求める。また、5.1.3 節では全体システム  $S$  のおおまかな固有値の存在範囲を示す。最後に、5.2 節において設計手順を述べる。

### 5.2 安定性解析

#### 5.2.1 安定条件の導出 3: 全システム共通の折り返しパラメータ

定理 5.2.1 サブシステム  $S_i$  の折り返しパラメータ  $k \geq 0$  すべてが

- 全体システムが並列結合構造をとる場合、

$$k > \max_{\{\hat{E}_p\}} \frac{1}{2} \lambda_M \{ \hat{E}_p X^T R X \hat{E}_p P^{-1} \} \quad (5.1)$$

- 全体システムが直列結合構造をとる場合,

$$k > \max_{\{\hat{E}_s\}} \frac{1}{2} \lambda_M \{ \hat{E}_s X^T R X \hat{E}_s P^{-1} \} \quad (5.2)$$

を満たすならば全体システム  $S$  は 任意の  $s_i = \{0, 1\}$  に対して安定である. ただし,  $P_{i+}$  は  $P_i$  に関する代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i + kI) - (A_i + kI)^T P_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.3)$$

の正定な最大解で,  $R_i$  は正定対称行列である.

$$\begin{aligned} P &= \text{diag}\{P_{1+}, P_{2+}, \dots, P_{N+}\} \\ R &= \text{diag}\{R_1, R_2, \dots, R_N\} \\ X &= (X_{ij}) \end{aligned}$$

(定理 5.2.1 の証明)

とすると, 全体システムが並列構造をしている場合, 補題 4.2.1 から全体システム  $S$  は,

$$S: \dot{x} = Ax + Bu + \hat{E}_p A_c \hat{E}_p \quad (5.4)$$

と表され, 入力

$$u = -R^{-1} B^T P x$$

を用いると, 閉ループ系は

$$\dot{x} = (A - \alpha B R^{-1} B^T P + \hat{E}_p A_c \hat{E}_p) x \quad (5.5)$$

となる. さらに, リカッチ代数方程式 (5.3) は,

$$P B R^{-1} B^T P - P A - A^T P - 2K P = 0 \quad (5.6)$$

となる. ここで,  $P > 0$  より, リアプノフ関数として

$$V(x) = \sum_{i=1}^N x_i^T P_i x_i \quad (5.7)$$

$$= x^T P x \quad (5.8)$$

を考え, その時間微分が負定になるような  $k$  の条件を求める.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
&= x^T (A^T - P B R^{-1} B^T + \hat{E}_p A_c^T \hat{E}_p) P x + x^T P (A - B R^{-1} B^T P + \hat{E}_p A_c \hat{E}_p) x \\
&= x^T (A^T P + P A - 2 P B R^{-1} B^T P + \hat{E}_p X^T B^T \hat{E}_p P + P \hat{E}_p B X \hat{E}_p) x \\
&= x^T (-P B R^{-1} B^T P + \hat{E}_p X^T B^T \hat{E}_p P + P \hat{E}_p B X \hat{E}_p - 2kP) x \\
&\leq x^T (-P E B R^{-1} B^T \hat{E}_p P + \hat{E}_p X^T B^T \hat{E}_p P + P \hat{E}_p B X \hat{E}_p - 2kP) x \\
&= -x^T G x
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
G &= P \hat{E}_p B R^{-1} B^T \hat{E}_p P - \hat{E}_p X^T B^T \hat{E}_p P - P \hat{E}_p B X \hat{E}_p + 2kP \\
&= \{P E B - E X^T R\} R^{-1} \{B^T E P - R X E\} + 2kP - E X^T R X E
\end{aligned}$$

よって,

$$k > \max_{\{\hat{E}_p\}} \frac{1}{2} \lambda_M \{ \hat{E}_p X^T R X \hat{E}_p P^{-1} \} \tag{5.10}$$

のとき,  $\dot{V}(x)$  は負定で, 全体システムは安定となる. また, 全体システムが直列結合構造をしている場合も, 同様に証明できる. ■

## 5.2.2 安定条件の導出 4: 各システム別々の折り返しパラメータ

定理 5.2.2 サブシステム  $S_i$  の折り返しパラメータ  $k_i \geq 0$  が

- 全体システムが並列結合構造をとる場合,

$$k_1 > \frac{1}{v_1} \sum_{j=1}^N \|A_{1j}\| v_j - \frac{\lambda_M(P_{1+} B_1 R_1^{-1} B_1^T P_{1+})}{2\lambda_M(P_{1+})} \tag{5.11}$$

$$k_i > \frac{v_1}{v_i} \|A_{i1}\| + \|A_{ii}\| - \frac{\lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+})}{2\lambda_M(P_{i+})}, \quad i = 2, \dots, N \tag{5.12}$$

- 全体システムが直列結合構造をとる場合,

$$k_1 > \|A_{11}\| + \frac{v_2}{v_1} \|A_{12}\| - \frac{\lambda_M(P_{1+} B_1 R_1^{-1} B_1^T P_{1+})}{2\lambda_M(P_{1+})} \tag{5.13}$$

$$k_i > \frac{v_{i-1}}{v_i} \|A_{i,i-1}\| + \|A_{ii}\| + \frac{v_{i+1}}{v_i} \|A_{i,i+1}\| - \frac{\lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+})}{2\lambda_M(P_{i+})}, \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (5.14)$$

$$k_N > \frac{v_{N-1}}{v_N} \|A_{N,N-1}\| + \|A_{NN}\| - \frac{\lambda_M(P_{N+} B_N R_N^{-1} B_N^T P_{N+})}{2\lambda_M(P_{N+})} \quad (5.15)$$

を満たすならば全体システム  $S$  は任意の  $s_{ij} = \{0, 1\}$  に対して安定である。

ただし,  $P_{i+}$  は  $P_i$  に関する代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i + k_i I) - (A_i + k_i I)^T P_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, k_i \in R \quad (5.16)$$

の正定な最大解で,  $R_i$  は正定対称行列,  $v_i > 0$  である。

(定理 5.2.2 の証明)

個々のシステムのリアプノフ関数を

$$V_i(x_i) = x_i^T P_{i+} x_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.17)$$

で表し, 全体システムのリアプノフ関数を

$$V(x) = \sum_{i=1}^N x_i^T P_{i+} x_i \quad (5.18)$$

で表す事にする。

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dV}{dt} \right]_{(2.11)} &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{dV_i}{dt} \right]_{(2.11)} \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T \left[ \frac{dx_i}{dt} \right]_{(2.11)} \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T \left[ A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T [A_i x_i + B_i u_i] + \sum_{i=1}^N \left\{ \left( \frac{dV_i}{dx_i} \right)^T \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j \right\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

ここで, 式 (5.19) の第一項と第二項は,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dV_i}{dx_i}\right)^T [A_i x_i + B_i u_i] &= x_i^T \{P_{i+} A_i + A_i^T P_{i+} - 2P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}\} x_i \\
&= x_i^T (A_i^T P_{i+} + P_{i+} A_i - 2P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) x_i \\
&= x_i^T \{-P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} - 2k_i P_{i+}\} x_i \\
&\leq \left| x_i^T \{(-P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} - 2k_i P_{i+}) x_i\} \right| \\
&\leq - \left| x_i^T \{P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} + 2k_i P_{i+}\} x_i \right| \\
&\leq - \|x_i^T\| \cdot \|P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+} + 2k_i P_{i+}\| \cdot \|x_i\| \\
&\leq - \left\{ \|P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}\| + \|2k_i P_{i+}\| \right\} \|x_i\|^2 \\
&= - \left\{ \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+}) \right\} \|x_i\|^2 \quad (5.20)
\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dV_i}{dx_i}\right)^T \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j &\leq \left| \left(\frac{dV_i}{dx_i}\right)^T \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^N \left\| \frac{dV_i}{dx_i} \right\| \cdot \|e_{ij} A_{ij} x_j\| \\
&= \sum_{j=1}^N 2 \|P_{i+} x_i\| \cdot \|e_{ij} A_{ij} x_j\| \\
&\leq \sum_{j=1}^N 2 \lambda_M(P_{i+}) \|x_i\| e_{ij} \|A_{ij}\| \cdot \|x_j\| \quad (5.21)
\end{aligned}$$

となるから, 式 (5.20), (5.21) を式 (5.19) に代入すると,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{dV}{dt}\right]_{(4)} &\leq - \sum_{i=1}^N \left\{ \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+}) \right\} \|x_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 2 \lambda_M(P_{i+}) \|x_i\| e_{ij} \|A_{ij}\| \cdot \|x_j\| \\
&= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^N \left\{ \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+}) - 2 \lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\| \right\} \|x_i\|^2 \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N 2 \lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\| \cdot \|x_i\| \cdot \|x_j\| \\
&= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^N s_{ij} \|x_i\|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N s_{ij} \|x_i\| \cdot \|x_j\| \\
&= - \sum_{i,j=1}^N \|x_i\| s_{ij} \|x_j\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \|x_i\| (1 \cdot s_{ij} + s_{ji} \cdot 1) \|x_j\| \\
&= -\frac{1}{2} x^T (IS + S^T I)x
\end{aligned}$$

ただし,

$$x = [\|x_1\| \cdots \|x_N\|]^T \quad (5.22)$$

$$S = (s_{ij}) \quad (5.23)$$

$$s_{ij} = \begin{cases} \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+}) - 2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\|, & i = j \\ -2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\|, & i \neq j \end{cases} \quad (5.24)$$

よって, 定義 A.0.1, 定理 A.0.1より正のベクトル  $v = [v_1 \cdots v_N]^T$  に対して  $S \cdot v > 0$  となるような条件を求めればよい.

$$\begin{aligned}
&S \cdot v > 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ i=j}}^N s_{ij} v_j + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N s_{ij} v_j > 0, \quad i = 1, \dots, N \\
&\Leftrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ i=j}}^N \{\lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+}) - 2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\|\} v_j - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N 2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\| v_j > 0 \\
&\hspace{20em}, \quad i = 1, \dots, N \\
&\Leftrightarrow \{\lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) + 2k_i \lambda_M(P_{i+})\} v_i - \sum_{j=1}^N 2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\| v_j > 0, \quad i = 1, \dots, N \\
&\Leftrightarrow 2k_i \lambda_M(P_{i+}) v_i > \sum_{j=1}^N 2\lambda_M(P_{i+}) e_{ij} \|A_{ij}\| v_j - \lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+}) v_i, \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

よって,

$$k_i > \frac{1}{v_i} \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| v_j - \frac{\lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+})}{2\lambda_M(P_{i+})} \quad (5.25)$$

ここで,  $e_{ij}$  が並列型するとき,

$$k_1 > \frac{1}{v_1} \sum_{j=1}^N \|A_{1j}\| v_j - \frac{\lambda_M(P_{1+} B_1 R_1^{-1} B_1^T P_{1+})}{2\lambda_M(P_{1+})} \quad (5.26)$$

$$k_i > \frac{v_1}{v_i} \|A_{i1}\| + \|A_{ii}\| - \frac{\lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+})}{2\lambda_M(P_{i+})}, \quad i = 2, \dots, N \quad (5.27)$$



また, 直列型するとき,

$$k_1 > \|A_{11}\| + \frac{v_2}{v_1} \|A_{12}\| - \frac{\lambda_M(P_{1+} B_1 R_1^{-1} B_1^T P_{1+})}{2\lambda_M(P_{1+})} \quad (5.28)$$

$$k_i > \frac{v_{i-1}}{v_i} \|A_{i,i-1}\| + \|A_{ii}\| + \frac{v_{i+1}}{v_i} \|A_{i,i+1}\| - \frac{\lambda_M(P_{i+} B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i+})}{2\lambda_M(P_{i+})}$$

,  $i = 2, \dots, N-1$  (5.29)

$$k_N > \frac{v_{N-1}}{v_N} \|A_{N,N-1}\| + \|A_{NN}\| - \frac{\lambda_M(P_{N+} B_N R_N^{-1} B_N^T P_{N+})}{2\lambda_M(P_{N+})} \quad \blacksquare \quad (5.30)$$

### 5.2.3 固有値の存在範囲

この節では、全体システムの固有値の大まかな存在範囲について考える。そこで、まずつぎのような補題を考える。

補題 5.2.1 <sup>[17]</sup> 行列  $A$  とスカラ値  $h$  が存在して

$$\operatorname{Re} \lambda \{ (A - hI)(A - hI) \} \geq 0$$

( $\operatorname{Re} \lambda(\cdot) \leq 0$  はすべての固有値の実部が非負の意味) ならば  $A$  の固有値はすべて図 5.1 の斜線部分に存在する。

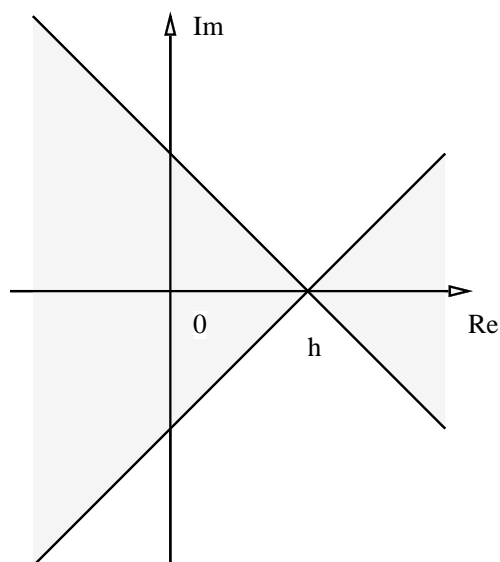


図 5.1: Location of eigenvalue

定理 5.2.3 全節より、全体システム  $S$

$$S: \dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P + EA_C E)x \quad (5.31)$$

は定理 1 の条件のもとで安定である。このとき、全体システムの固有値はスカラ値  $h$  を用いた図 5.2 の斜線部分に存在する。

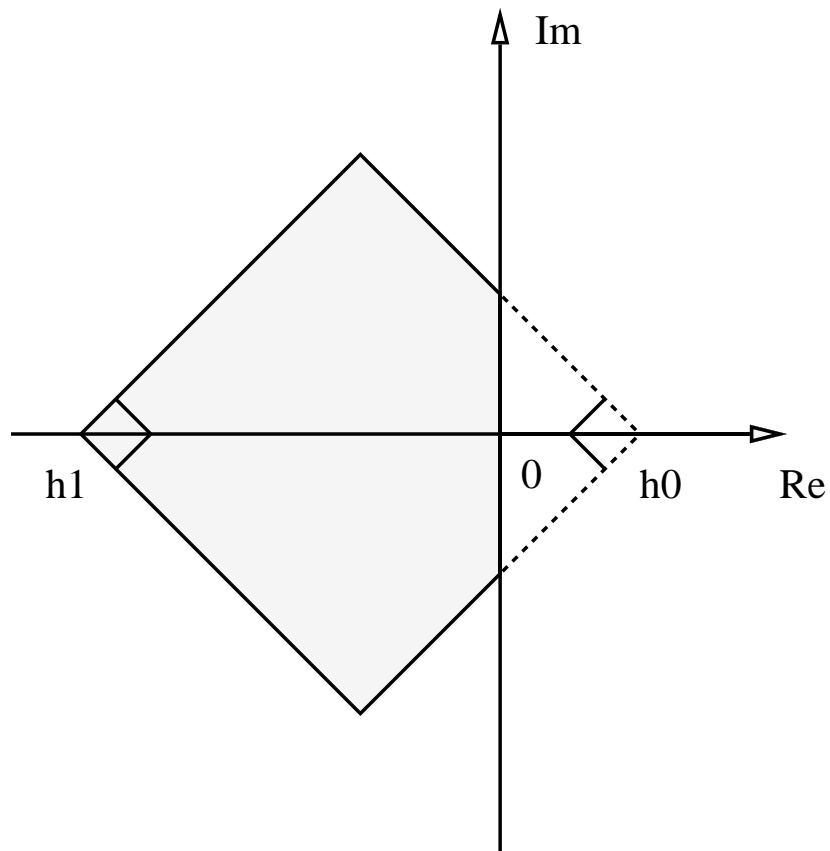


図 5.2: Location of eigenvalue for overall system

(定理 5.2.3 の証明)

全体システム  $S$

$$S: \dot{x} = (\tilde{A} - BR^{-1}B^T P)x \quad (5.32)$$

$$\tilde{A} = A + EA_c E \quad (5.33)$$

は安定であるから,  $Re(\tilde{A} - BR^{-1}B^T P) < 0$  となる. 次に, システム

$$\dot{x} = -(\tilde{A} - BR^{-1}B^T P - hI)(\tilde{A} - BR^{-1}B^T P - hI)x, \quad h \in R \quad (5.34)$$

を考える. このシステムが安定ならば

$$Re\{(\tilde{A} - BR^{-1}B^T P - hI)(\tilde{A} - BR^{-1}B^T P - hI)\} > 0 \quad (5.35)$$

となるため, 補題 1 により全体システムの存在範囲を示すことができる. リアプノフ関数として

$$V(x) = x^T P x \quad (5.36)$$

を考え,

$$P(\tilde{A} - BR^{-1}B^T P) + (\tilde{A} - BR^{-1}B^T P)^T P = -Q \quad (5.37)$$

において, リアプノフ関数を式 (5.34) の解軌道に沿って時間微分すると

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) |_{(5.34)} &= -x^T P(\tilde{A} - BR^{-1}B^T P - hI)(\tilde{A} - BR^{-1}B^T P - hI)x \\ &\quad - x^T (\tilde{A} - BR^{-1}B^T P - hI)^T (\tilde{A} - BR^{-1}B^T P - hI)^T P x \\ &= -x^T \{P(\tilde{A}\tilde{A} + BR^{-1}B^T Q) + (\tilde{A}\tilde{A} + BR^{-1}B^T Q)^T P \\ &\quad - 2h(P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - 2PBR^{-1}B^T P) + 2h^2 P\} x \\ &= -x^T \{P(\tilde{A}\tilde{A} + BR^{-1}B^T Q) + (\tilde{A}\tilde{A} + BR^{-1}B^T Q)^T P \\ &\quad + 2hQ + 2h^2 P\} x \end{aligned} \quad (5.38)$$

ここで  $P > 0$  より, 式 (5.34) を負値とする 正値  $h_0$  と負値  $h_1$  は必ず存在する. よって, 補題 1 より  $(\tilde{A} - BR^{-1}B^T P)$  の固有値はすべて図 5.2 の斜線部分に存在することがわかる. ■

## 5.3 設計手順

### 5.3.1 設計法 3: 全システム共通の折り返しパラメータを用いた設計手順

Step 1: システム行列  $A_i$  の固有値を求める.

- $A_i$  の固有値がすべて虚軸を含まない右半平面に存在する.  $\rightarrow P_{i-} = 0, i = 1, \dots, N$  において Step 4 へ.
- それ以外.  $\rightarrow$  Step 2 へ.

Step 2: 直線  $\text{Re}z_i = l_i$  を考え, それを対称軸として  $A_i$  の固有値のうち対称軸より左側にあるもののみを右側に折り返し, すべてが虚軸を含まない右半平面に入るように  $l_i$  を決める.

(ただし, 直線  $\text{Re}z_i = l_i$  上に  $A_i$  の固有値がないように  $l_i$  を決める.)

Step 3:  $l_i$  を用いて, 代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i - l_i I) - (A_i - l_i I)^T P_i = 0$$

の最小解  $P_{i-}$  を求め, 入力として,

$$v_i = -R_i^{-1} B_i^T P_{i-} x_i + u_i$$

を構成する. この時閉ループ系は,

$$\dot{x}_i = (A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-}) x_i + B_i u_i$$

となる.

Step 4: 定理 5.2.1 で求めた安定条件を満たす直線  $\text{Re} z_i = -k$  を考え, それを対称軸として  $(A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-})$  の固有値が図 3.3 で示した希望される領域内に入るように  $k$  を決める.

Step 5:  $k_i$  を用いて, 代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-} + kI) - (A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-} + kI)^T P_i = 0$$

の最大解  $P_{i+}$  を求め, 入力として

$$u_i = -R_i^{-1} B_i^T P_{i+} x_i$$

を構成する.

### 5.3.2 設計法 4: 各システム別々の折り返しパラメータを用いた設計手順

Step 1: システム行列  $A_i$  の固有値を求める.

- $A_i$  の固有値がすべて虚軸を含まない右半平面に存在する.  $\rightarrow P_{i-} = 0, i = 1, \dots, N$  において Step 4 へ.
- それ以外.  $\rightarrow$  Step 2 へ.

Step 2: 直線  $Re z_i = l_i$  を考え, それを対称軸として  $A_i$  の固有値のうち対称軸より左側にあるもののみを右側に折り返し, すべてが虚軸を含まない右半平面に入るように  $l_i$  を決める.

(ただし, 直線  $Re z_i = l_i$  上に  $A_i$  の固有値がないように  $l_i$  を決める.)

Step 3:  $l_i$  を用いて, 代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i - l_i I) - (A_i - l_i I)^T P_i = 0$$

の最小解  $P_{i-}$  を求め, 入力として,

$$v_i = -R_i^{-1} B_i^T P_{i-} x_i + u_i$$

を構成する. この時閉ループ系は,

$$\dot{x}_i = (A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-}) x_i + B_i u_i$$

となる.

Step 4: 定理 5.2.2 で求めた安定条件を満たす直線  $Re z_i = -k_i$  を考え, それを対称軸として  $(A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-})$  の固有値が図 3.3 で示した希望される領域内に入るように  $k_i$  を決める.

Step 5:  $k_i$  を用いて, 代数方程式

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-} + k_i I) - (A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_{i-} + k_i I)^T P_i = 0$$

の最大解  $P_{i+}$  を求め, 入力として

$$u_i = -R_i^{-1} B_i^T P_{i+} x_i$$

を構成する.

## 第 6 章

# シミュレーション

### 6.1 はじめに

この章では 4 章, 5 章で示した設計法について簡単でかつ有効であることを例題によって示し, それぞれの設計法について比較検討する. 制御対象には倒立振子を用いる. 倒立振子とは, 振子が鉛直軸からずれたとき, 入力によって台車を移動させ, 再び振子を鉛直に保つ 1 つのシステムある.

## 6.2 倒立振子の運動方程式と状態方程式の導出

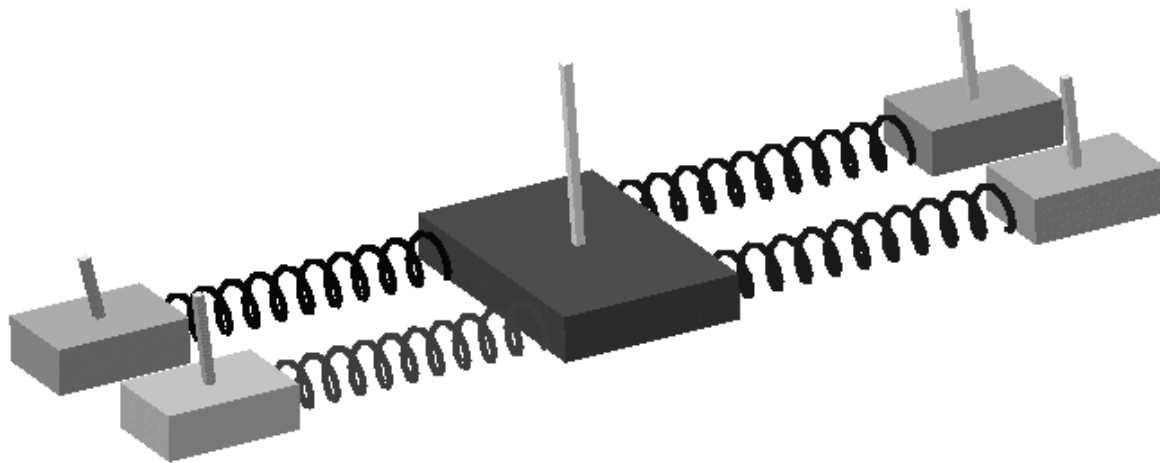


図 6.1: Five inverted pendulums:parallel structure

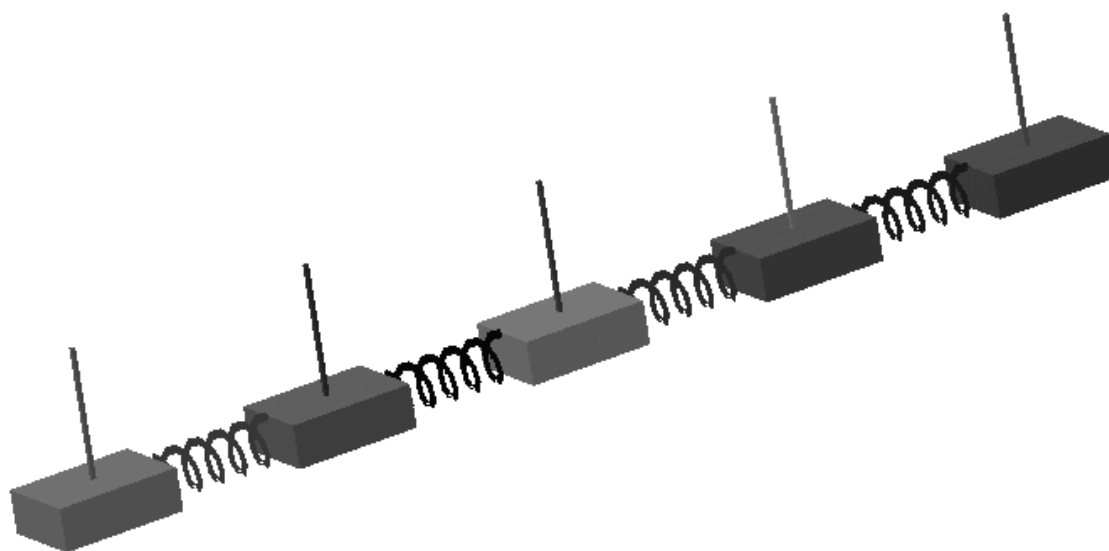


図 6.2: Five inverted pendulums:series structure



運動エネルギー  $\mathcal{J}$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M_3\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}M_4\dot{x}_4^2 + \frac{1}{2}M_5\dot{x}_5^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1l_1^2\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + 2l_1\theta_1\dot{x}_1\cos\theta_1 + l_1^2\dot{\theta}_1^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_2l_2^2\right)\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + 2l_2\theta_2\dot{x}_2\cos\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_3l_3^2\right)\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3^2 + 2l_3\theta_3\dot{x}_3\cos\theta_3 + l_3^2\dot{\theta}_3^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_4l_4^2\right)\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}m_4(\dot{x}_4^2 + 2l_4\theta_4\dot{x}_4\cos\theta_4 + l_4^2\dot{\theta}_4^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_5l_5^2\right)\dot{\theta}_5^2 + \frac{1}{2}m_5(\dot{x}_5^2 + 2l_5\theta_5\dot{x}_5\cos\theta_5 + l_5^2\dot{\theta}_5^2) \\
&= \frac{1}{2}(M_1 + m_1)x_1^2 + \frac{2}{3}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_1l_1\dot{x}_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}(M_2 + m_2)x_2^2 + \frac{2}{3}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_2\dot{x}_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(M_3 + m_3)x_3^2 + \frac{2}{3}m_3l_3^2\dot{\theta}_3^2 + m_3l_3\dot{x}_3\dot{\theta}_3\cos\theta_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}(M_4 + m_4)x_4^2 + \frac{2}{3}m_4l_4^2\dot{\theta}_4^2 + m_4l_4\dot{x}_4\dot{\theta}_4\cos\theta_4 \\
&\quad + \frac{1}{2}(M_5 + m_5)x_5^2 + \frac{2}{3}m_5l_5^2\dot{\theta}_5^2 + m_5l_5\dot{x}_5\dot{\theta}_5\cos\theta_5 \tag{6.1}
\end{aligned}$$

位置エネルギー  $\mathcal{U}$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= m_1gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2 + m_3gl_3\cos\theta_3 \\
&\quad + m_4gl_4\cos\theta_4 + m_5gl_5\cos\theta_5 \\
&\quad + \frac{1}{2}K_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}K_3(x_1 - x_3)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}K_4(x_4 - x_1)^2 + \frac{1}{2}K_5(x_1 - x_5)^2 \tag{6.2}
\end{aligned}$$

損失エネルギー  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \frac{1}{2}D_{\theta_1}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}D_{x_1}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}D_{\theta_2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}D_{x_2}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}D_{\theta_3}\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}D_{x_3}\dot{x}_3^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}D_{\theta_4}\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}D_{x_4}\dot{x}_4^2 + \frac{1}{2}D_{\theta_5}\dot{\theta}_5^2 + \frac{1}{2}D_{x_5}\dot{x}_5^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}D_{d_2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{1}{2}D_{d_3}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) \\
&\quad + \frac{1}{2}D_{d_4}(\dot{x}_4 - \dot{x}_1) + \frac{1}{2}D_{d_5}(\dot{x}_1 - \dot{x}_5) \tag{6.3}
\end{aligned}$$

## ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_1} = u_1 \quad (6.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_2} = u_2 \quad (6.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_3} = u_3 \quad (6.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}_3} = 0 \quad (6.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{x}_4} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_4} = u_4 \quad (6.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\theta}_4} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta_4} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_4} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}_4} = 0 \quad (6.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{x}_5} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_5} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_5} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_5} = u_5 \quad (6.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\theta}_5} \right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta_5} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_5} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}_5} = 0 \quad (6.13)$$

ここで、平衡点  $\theta = \dot{\theta} = x = \dot{x} = u = 0$  の近傍で線形近似するため、 $\sin \theta = \theta$ ,  $\cos \theta = 0$  とおく。

### 台車 1 の運動方程式

$$\begin{aligned} u_1 = & (M_1 + m_1)\ddot{x}_1 + m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 \\ & - K_2(x_2 - x_1) + K_3(x_1 - x_3) - K_2(x_4 - x_1) + K_3(x_1 - x_5) \\ & + D_{x_1} \dot{x}_1 - D_{d_2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + D_{d_3}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) \\ & - D_{d_4}(\dot{x}_4 - \dot{x}_1) + D_{d_5}(\dot{x}_1 - \dot{x}_5) \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$0 = \frac{4}{3} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 \ddot{x}_1 - m_1 g l_1 \theta_1 + D_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \quad (6.15)$$

### 台車 2 の運動方程式

$$u_2 = (M_2 + m_2)\ddot{x}_2 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + K_2(x_2 - x_1) + D_{x_2} \dot{x}_2 + D_{d_2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (6.16)$$

$$0 = \frac{4}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \ddot{x}_2 - m_2 g l_2 \theta_2 + D_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \quad (6.17)$$

### 台車 3 の運動方程式

$$u_3 = (M_3 + m_3)\ddot{x}_3 + m_3 l_2 \ddot{\theta}_3 - K_3(x_1 - x_3) + D_{x_3} \dot{x}_3 - D_{d_3}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) \quad (6.18)$$

$$0 = \frac{4}{3} m_3 l_3^2 \ddot{\theta}_3 + m_3 l_3 \ddot{x}_3 - m_3 g l_3 \theta_3 + D_{\theta_3} \dot{\theta}_3 \quad (6.19)$$

### 台車 4 の運動方程式

$$u_4 = (M_4 + m_4)\ddot{x}_4 + m_4 l_4 \ddot{\theta}_4 + K_4(x_4 - x_1) + D_{x_4} \dot{x}_4 + D_{d_4}(\dot{x}_4 - \dot{x}_1) \quad (6.20)$$

$$0 = \frac{4}{3} m_4 l_4^2 \ddot{\theta}_4 + m_4 l_4 \ddot{x}_4 - m_4 g l_4 \theta_4 + D_{\theta_4} \dot{\theta}_4 \quad (6.21)$$

### 台車 5 の運動方程式

$$u_5 = (M_5 + m_5)\ddot{x}_5 + m_5 l_5 \ddot{\theta}_5 - K_5(x_1 - x_5) + D_{x_5} \dot{x}_5 - D_{d_5}(\dot{x}_1 - \dot{x}_5) \quad (6.22)$$

$$0 = \frac{4}{3} m_5 l_5^2 \ddot{\theta}_5 + m_5 l_5 \ddot{x}_5 - m_5 g l_5 \theta_5 + D_{\theta_5} \dot{\theta}_5 \quad (6.23)$$

$\theta = \dot{\theta} = x = \dot{x} = u = 0$  の近傍で線形近似した状態方程式は,

- 全体システムが並列結合構造をとる場合,

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 + A_{14} x_4 + A_{15} x_5 \quad (6.24)$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 + A_{21} x_1 + A_{22} x_2 \quad (6.25)$$

$$\dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 u_3 + A_{31} x_1 + A_{33} x_3 \quad (6.26)$$

$$\dot{x}_4 = A_4 x_4 + B_4 u_4 + A_{41} x_1 + A_{44} x_4 \quad (6.27)$$

$$\dot{x}_5 = A_5 x_5 + B_5 u_5 + A_{51} x_1 + A_{55} x_5 \quad (6.28)$$

$$x_1 = [\theta_1, \dot{\theta}_1, x_1, \dot{x}_1]^T \quad (6.29)$$

$$x_2 = [\theta_2, \dot{\theta}_2, x_2, \dot{x}_2]^T \quad (6.30)$$

$$x_3 = [\theta_3, \dot{\theta}_3, x_3, \dot{x}_3]^T \quad (6.31)$$

$$x_4 = [\theta_4, \dot{\theta}_4, x_4, \dot{x}_4]^T \quad (6.32)$$

$$x_5 = [\theta_5, \dot{\theta}_5, x_5, \dot{x}_5]^T \quad (6.33)$$

- 全体システムが直列結合構造をとる場合,

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \quad (6.34)$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 + A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + A_{23} x_3 \quad (6.35)$$

$$\dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 u_3 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 + A_{34} x_4 \quad (6.36)$$

$$\dot{x}_4 = A_4 x_4 + B_4 u_4 + A_{43} x_3 + A_{44} x_4 + A_{45} x_5 \quad (6.37)$$

$$\dot{x}_5 = A_5 x_5 + B_5 u_5 + A_{54} x_4 + A_{55} x_5 \quad (6.38)$$

$$x_1 = [\theta_1, \dot{\theta}_1, x_1, \dot{x}_1]^T \quad (6.39)$$

$$x_2 = [\theta_2, \dot{\theta}_2, x_2, \dot{x}_2]^T \quad (6.40)$$

$$x_3 = [\theta_3, \dot{\theta}_3, x_3, \dot{x}_3]^T \quad (6.41)$$

$$x_4 = [\theta_4, \dot{\theta}_4, x_4, \dot{x}_4]^T \quad (6.42)$$

$$x_5 = [\theta_5, \dot{\theta}_5, x_5, \dot{x}_5]^T \quad (6.43)$$

- 全体システムが並列結合構造をとる場合,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(M_1+m_1)}{l_1(4M_1+m_1)} & -\frac{3D_{\theta_1}(M_1+m_1)}{m_1 l_1^2(4M_1+m_1)} & 0 & \frac{3D_{x_1}}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3m_1 g}{4M_1+m_1} & \frac{3D_{\theta_1}}{l_1(4M_1+m_1)} & 0 & -\frac{4D_{x_1}}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 \\ \frac{4}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3(K_2+K_3+K_4+K_5)}{l_1(4M_1+m_1)} & \frac{3(D_{d_2}+D_{d_3}+D_{d_4}+D_{d_5})}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4(K_2+K_3+K_4+K_5)}{4M_1+m_1} & -\frac{4(D_{d_2}+D_{d_3}+D_{d_4}+D_{d_5})}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_2}{l_1(4M_1+m_1)} & -\frac{3D_{d_2}}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_2}{4M_1+m_1} & \frac{4D_{d_2}}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_3}{l_1(4M_1+m_1)} & -\frac{3D_{d_3}}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_3}{4M_1+m_1} & \frac{4D_{d_3}}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}$$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_4}{l_1(4M_1+m_1)} & -\frac{3D_{d_4}}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_4}{4M_1+m_1} & \frac{4D_{d_4}}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}, \quad A_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_5}{l_1(4M_1+m_1)} & -\frac{3D_{d_5}}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_5}{4M_1+m_1} & \frac{4D_{d_5}}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(M_2+m_2)}{l_2(4M_2+m_2)} & -\frac{3D_{\theta_2}(M_2+m_2)}{m_2 l_2^2(4M_2+m_2)} & 0 & \frac{3D_{x_2}}{l_2(4M_2+m_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3m_2 g}{4M_2+m_2} & \frac{3D_{\theta_2}}{l_2(4M_2+m_2)} & 0 & -\frac{4D_{x_2}}{4M_2+m_2} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l_2(4M_2+m_2)} \\ 0 \\ \frac{4}{4M_2+m_2} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_2}{l_2(4M_2+m_2)} & -\frac{3D_{d_2}}{l_2(4M_2+m_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_2}{4M_2+m_2} & \frac{4D_{d_2}}{4M_2+m_2} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3K_2}{l_2(4M_2+m_2)} & \frac{3D_{d_2}}{l_2(4M_2+m_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4K_2}{4M_2+m_2} & -\frac{4D_{d_2}}{4M_2+m_2} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(M_3+m_3)}{l_3(4M_3+m_3)} & -\frac{3D_{\theta_3}(M_3+m_3)}{m_3 l_3^3(4M_3+m_3)} & 0 & \frac{3D_{x_3}}{l_3(4M_3+m_3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3m_3 g}{4M_3+m_3} & \frac{3D_{\theta_3}}{l_3(4M_3+m_3)} & 0 & -\frac{4D_{x_3}}{4M_3+m_3} \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l_3(4M_3+m_3)} \\ 0 \\ \frac{4}{4M_3+m_3} \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_3}{l_3(4M_3+m_3)} & -\frac{3D_{d_3}}{l_3(4M_3+m_3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_3}{4M_3+m_3} & \frac{4D_{d_3}}{4M_3+m_3} \end{bmatrix}, \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3K_3}{l_3(4M_3+m_3)} & \frac{3D_{d_3}}{l_3(4M_3+m_3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4K_3}{4M_3+m_3} & -\frac{4D_{d_3}}{4M_3+m_3} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(M_4+m_4)}{l_4(4M_4+m_4)} & -\frac{3D_{\theta_4}(M_4+m_4)}{m_4 l_4^3(4M_4+m_4)} & 0 & \frac{3D_{x_4}}{l_4(4M_4+m_4)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3m_4 g}{4M_4+m_4} & \frac{3D_{\theta_4}}{l_4(4M_4+m_4)} & 0 & -\frac{4D_{x_4}}{4M_4+m_4} \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l_4(4M_4+m_4)} \\ 0 \\ \frac{4}{4M_4+m_4} \end{bmatrix}$$

$$A_{41} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_4}{l_4(4M_4+m_4)} & -\frac{3D_{d_4}}{l_4(4M_4+m_4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_4}{4M_4+m_4} & \frac{4D_{d_4}}{4M_4+m_4} \end{bmatrix}, \quad A_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3K_4}{l_4(4M_4+m_4)} & \frac{3D_{d_4}}{l_4(4M_4+m_4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4K_4}{4M_4+m_4} & -\frac{4D_{d_4}}{4M_4+m_4} \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(M_5+m_5)}{l_5(4M_5+m_5)} & -\frac{3D_{\theta_5}(M_5+m_5)}{m_5 l_5^3(4M_5+m_5)} & 0 & \frac{3D_{x_5}}{l_5(4M_5+m_5)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3M_5 g}{4M_5+m_5} & \frac{3D_{\theta_3}}{l_5(4M_5+m_5)} & 0 & -\frac{4D_{x_5}}{4M_5+m_5} \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l_5(4M_5+m_5)} \\ 0 \\ \frac{4}{4M_5+m_5} \end{bmatrix}$$

$$A_{51} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_5}{l_5(4M_5+m_5)} & -\frac{3D_{d_5}}{l_5(4M_5+m_5)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_5}{4M_5+m_5} & \frac{4D_{d_5}}{4M_5+m_5} \end{bmatrix}, \quad A_{55} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3K_5}{l_5(4M_5+m_5)} & \frac{3D_{d_5}}{l_5(4M_5+m_5)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4K_5}{4M_5+m_5} & -\frac{4D_{d_5}}{4M_5+m_5} \end{bmatrix}$$

• 全体システムが直列結合構造をとる場合,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(M_1+m_1)}{l_1(4M_1+m_1)} & -\frac{3D_{\theta_1}(M_1+m_1)}{m_1 l_1^2(4M_1+m_1)} & 0 & \frac{3D_{x_1}}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3m_1 g}{4M_1+m_1} & \frac{3D_{\theta_1}}{l_1(4M_1+m_1)} & 0 & -\frac{4D_{x_1}}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 \\ \frac{4}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3K_2}{l_1(4M_1+m_1)} & \frac{3D_{d_2}}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4K_2}{4M_1+m_1} & -\frac{4D_{d_2}}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_2}{l_1(4M_1+m_1)} & -\frac{3D_{d_2}}{l_1(4M_1+m_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_2}{4M_1+m_1} & \frac{4D_{d_2}}{4M_1+m_1} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(M_2+m_2)}{l_2(4M_2+m_2)} & -\frac{3D_{\theta_2}(M_2+m_2)}{m_2 l_2^2(4M_2+m_2)} & 0 & \frac{3D_{x_2}}{l_2(4M_2+m_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3m_2 g}{4M_2+m_2} & \frac{3D_{\theta_2}}{l_2(4M_2+m_2)} & 0 & -\frac{4D_{x_2}}{4M_2+m_2} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l_2(4M_2+m_2)} \\ 0 \\ \frac{4}{4M_2+m_2} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_2}{l_2(4M_2+m_2)} & -\frac{3D_{d_2}}{l_2(4M_2+m_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_2}{4M_2+m_2} & \frac{4D_{d_2}}{4M_2+m_2} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3(K_2+K_3)}{l_2(4M_2+m_2)} & \frac{3(D_{d_2}+D_{d_3})}{l_2(4M_2+m_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4(K_2+K_3)}{4M_2+m_2} & -\frac{4(D_{d_2}+D_{d_3})}{4M_2+m_2} \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_3}{l_2(4M_2+m_2)} & -\frac{3D_{d_3}}{l_2(4M_2+m_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_3}{4M_2+m_2} & \frac{4D_{d_3}}{4M_2+m_2} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(M_3+m_3)}{l_3(4M_3+m_3)} & -\frac{3D_{\theta_3}(M_3+m_3)}{m_3 l_3^3(4M_3+m_3)} & 0 & \frac{3D_{x_3}}{l_3(4M_3+m_3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3m_3 g}{4M_3+m_3} & \frac{3D_{\theta_3}}{l_3(4M_3+m_3)} & 0 & -\frac{4D_{x_3}}{4M_3+m_3} \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l_3(4M_3+m_3)} \\ 0 \\ \frac{4}{4M_3+m_3} \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_3}{l_3(4M_3+m_3)} & -\frac{3D_{d_3}}{l_3(4M_3+m_3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_3}{4M_3+m_3} & \frac{4D_{d_3}}{4M_3+m_3} \end{bmatrix}, \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3(K_3+K_4)}{l_3(4M_3+m_3)} & \frac{3(D_{d_3}+D_{d_4})}{l_3(4M_3+m_3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4(K_3+K_4)}{4M_3+m_3} & -\frac{4(D_{d_3}+D_{d_4})}{4M_3+m_3} \end{bmatrix}$$

$$A_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_4}{l_3(4M_3+m_3)} & -\frac{3D_{d_4}}{l_3(4M_3+m_3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_4}{4M_3+m_3} & \frac{4D_{d_4}}{4M_3+m_3} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(M_4+m_4)}{l_4(4M_4+m_4)} & -\frac{3D_{\theta_4}(M_4+m_4)}{m_4 l_4^3(4M_4+m_4)} & 0 & \frac{3D_{x_4}}{l_4(4M_4+m_4)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3m_4 g}{4M_4+m_4} & \frac{3D_{\theta_4}}{l_4(4M_4+m_4)} & 0 & -\frac{4D_{x_4}}{4M_4+m_4} \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l_4(4M_4+m_4)} \\ 0 \\ \frac{4}{4M_4+m_4} \end{bmatrix}$$

$$A_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_4}{l_4(4M_4+m_4)} & -\frac{3D_{d_4}}{l_4(4M_4+m_4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_4}{4M_4+m_4} & \frac{4D_{d_4}}{4M_4+m_4} \end{bmatrix}, \quad A_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3(K_4+K_5)}{l_4(4M_4+m_4)} & \frac{3(D_{d_4}+D_{d_5})}{l_4(4M_4+m_4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4(K_4+K_5)}{4M_4+m_4} & -\frac{(D_{d_4}+D_{d_5})}{4M_4+m_4} \end{bmatrix}$$

$$A_{45} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_5}{l_4(4M_4+m_4)} & -\frac{3D_{d_5}}{l_4(4M_4+m_4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_5}{4M_4+m_4} & \frac{4D_{d_5}}{4M_4+m_4} \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(M_5+m_5)}{l_5(4M_5+m_5)} & -\frac{3D_{\theta_5}(M_5+m_5)}{m_5 l_5^3(4M_5+m_5)} & 0 & \frac{3D_{x_5}}{l_5(4M_5+m_5)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3M_5 g}{4M_5+m_5} & \frac{3D_{\theta_3}}{l_5(4M_5+m_5)} & 0 & -\frac{4D_{x_5}}{4M_5+m_5} \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{l_5(4M_5+m_5)} \\ 0 \\ \frac{4}{4M_5+m_5} \end{bmatrix}$$

$$A_{54} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3K_5}{l_5(4M_5+m_5)} & -\frac{3D_{d_5}}{l_5(4M_5+m_5)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4K_5}{4M_5+m_5} & \frac{4D_{d_5}}{4M_5+m_5} \end{bmatrix}, \quad A_{55} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3K_5}{l_5(4M_5+m_5)} & \frac{3D_{d_5}}{l_5(4M_5+m_5)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4K_5}{4M_5+m_5} & -\frac{4D_{d_5}}{4M_5+m_5} \end{bmatrix}$$

### 6.3 固有値の位置と応答

倒立振子の物理パラメータは次のように設定した。

	Subsystem 1	Subsystem 2	Subsystem 3	Subsystem 4	Subsystem 5
Cartmass	$M_1 = 2.0[kg]$	$M_2 = 1.2[kg]$	$M_3 = 1.0[kg]$	$M_4 = 1.4[kg]$	$M_5 = 1.3[kg]$
Rod mass	$m_1 = 0.14[kg]$	$m_2 = 0.2[kg]$	$m_3 = 0.1[kg]$	$m_4 = 0.15[kg]$	$m_5 = 0.2[kg]$
Rod length	$l_1 = 0.7[m]$	$l_2 = 0.5[m]$	$l_3 = 0.4[m]$	$l_4 = 0.4[m]$	$l_5 = 0.5[m]$
Friction (cart,ground)	$D_{x_1} = 0.01$ [kg/s]	$D_{x_2} = 0.01$ [kg/s]	$D_{x_3} = 0.01$ [kg/s]	$D_{x_4} = 0.01$ [kg/s]	$D_{x_5} = 0.01$ [kg/s]
Friction (cart,rod)	$D_{\theta_1} = 0.01$ [kgm <sup>2</sup> /s]	$D_{\theta_2} = 0.01$ [kgm <sup>2</sup> /s]	$D_{\theta_3} = 0.01$ [kgm <sup>2</sup> /s]	$D_{\theta_4} = 0.01$ [kgm <sup>2</sup> /s]	$D_{\theta_5} = 0.01$ [kgm <sup>2</sup> /s]

Spring	$K_2 = 10.0[N/m]$	$K_3 = 10.0[N/m]$	$K_4 = 10.0[N/m]$	$K_5 = 10.0[N/m]$
Damper	$Dd_2 = 1.0[Ns/m]$	$Dd_3 = 1.0[Ns/m]$	$Dd_4 = 1.0[Ns/m]$	$Dd_5 = 1.0[Ns/m]$



つぎに, 時間応答のグラフを示す. ただし, グラフにおいて, y 軸は並列結合構造と直列結合構造における結合・分離の 16 パターンを表していて, 図 6.3, 図 6.4 のようになっている.

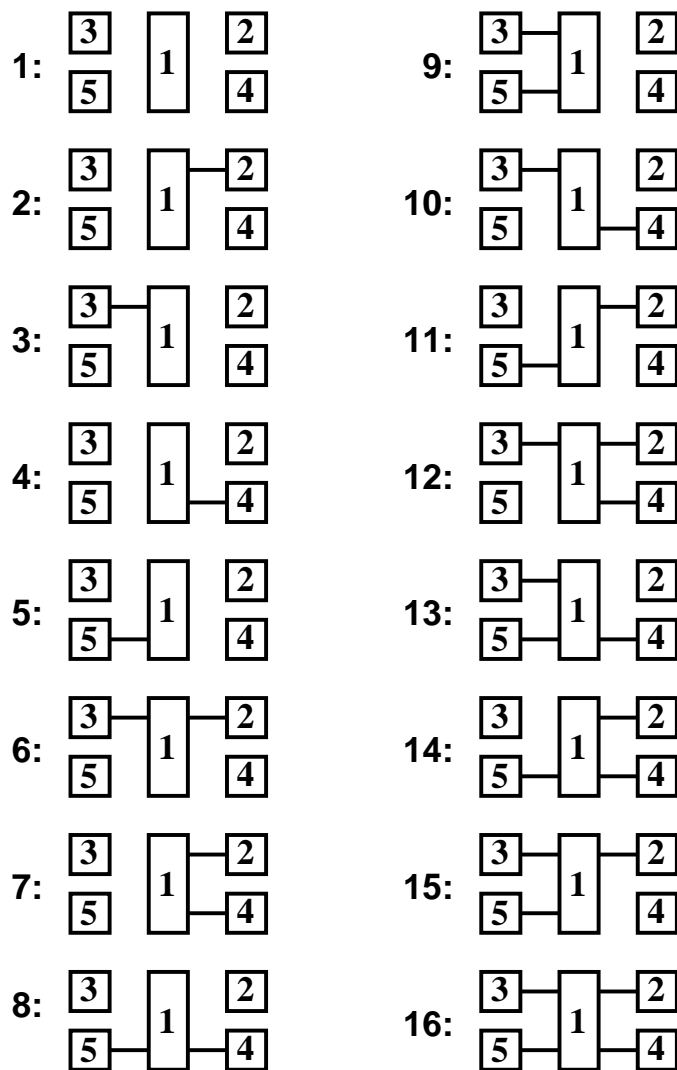


図 6.3: Parallel structure

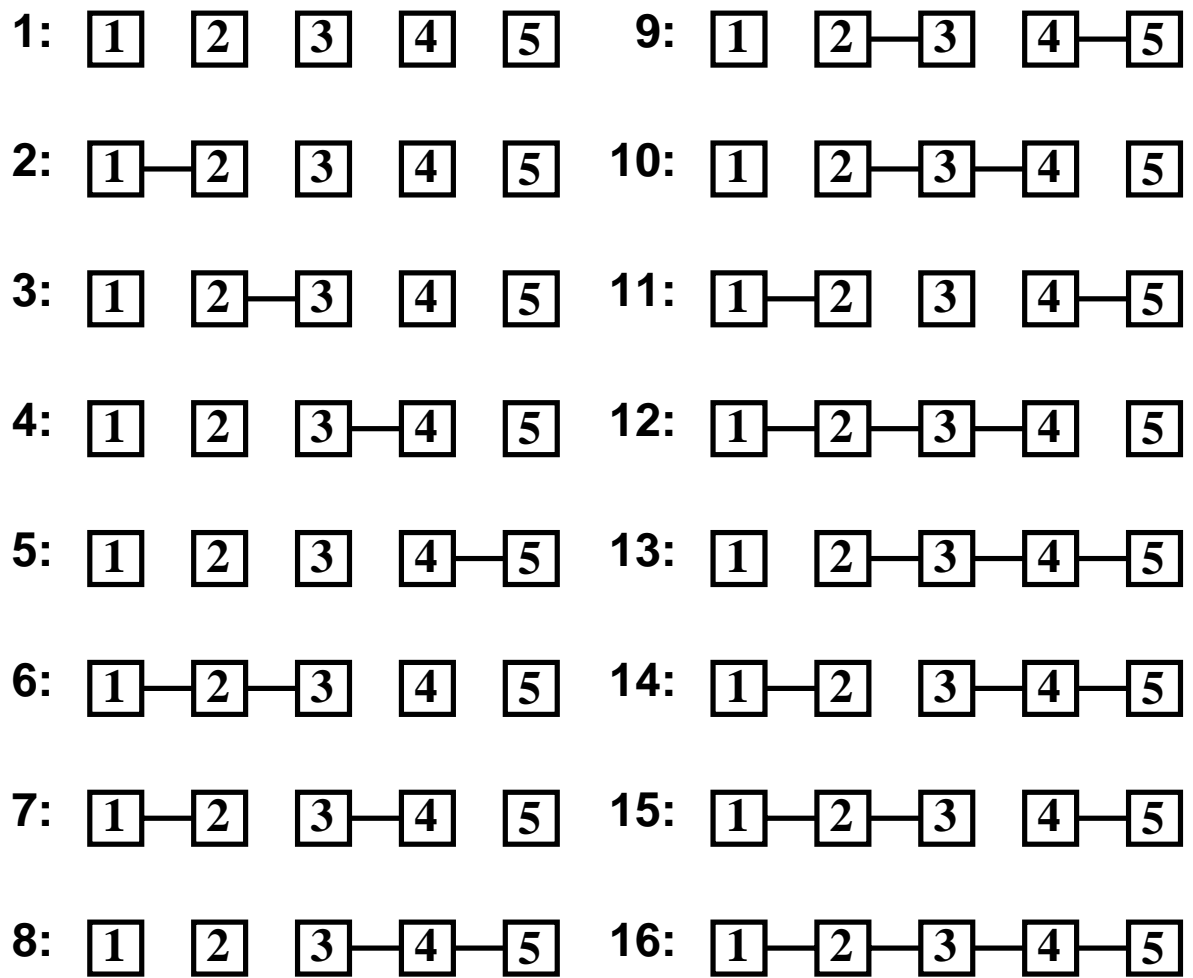
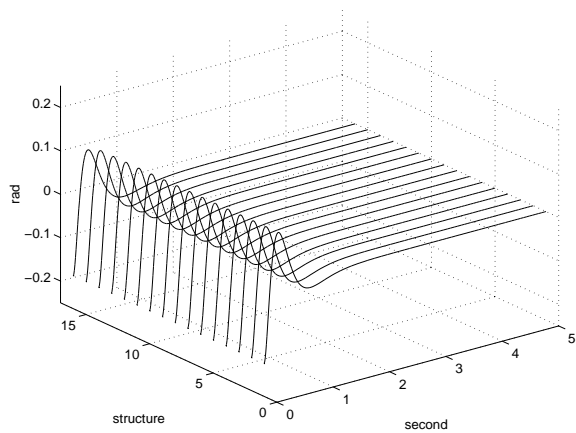
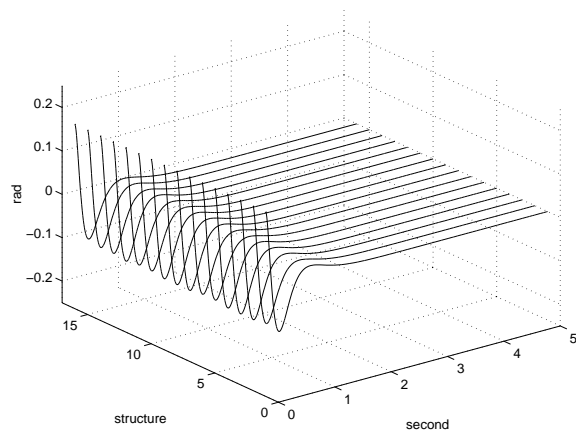


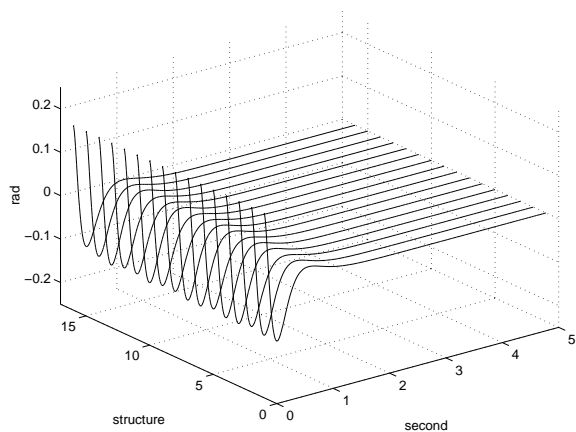
图 6.4: Series structure



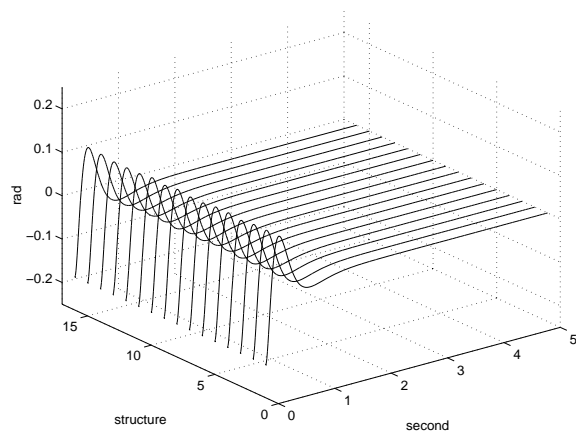
☒ 6.5:  $\theta_1$



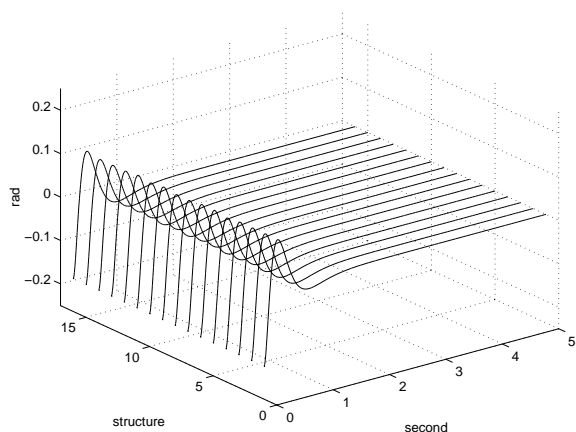
☒ 6.6:  $\theta_2$



☒ 6.7:  $\theta_3$



☒ 6.8:  $\theta_4$



☒ 6.9:  $\theta_5$

設計法 1, 並列結合構造

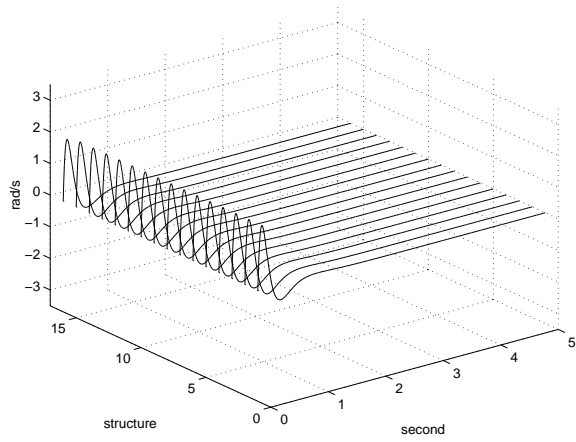


圖 6.10:  $\dot{\theta}_1$

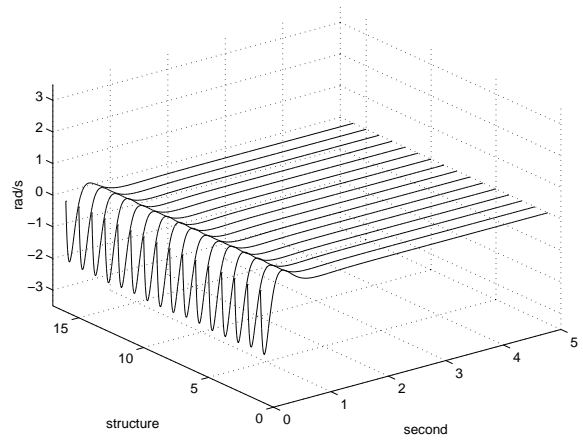


圖 6.11:  $\dot{\theta}_2$

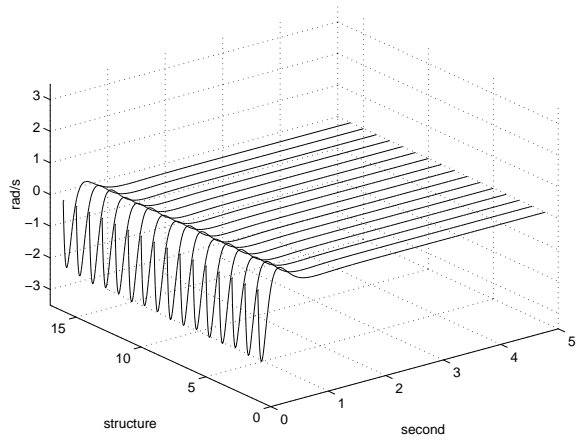


圖 6.12:  $\dot{\theta}_3$

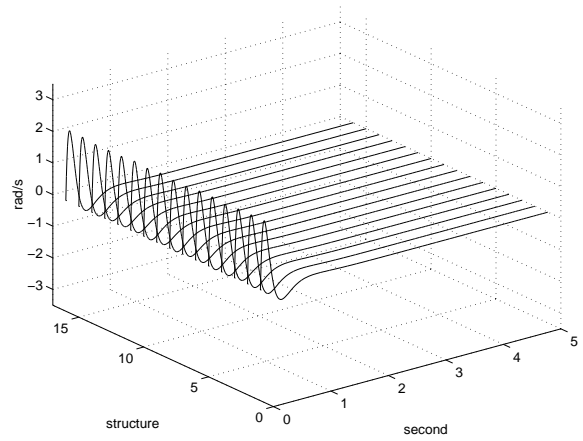


圖 6.13:  $\dot{\theta}_4$

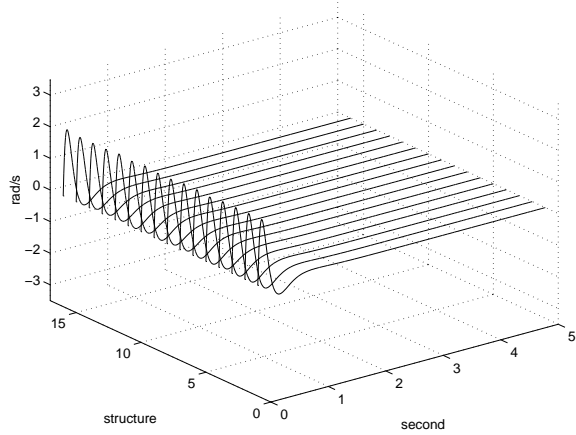
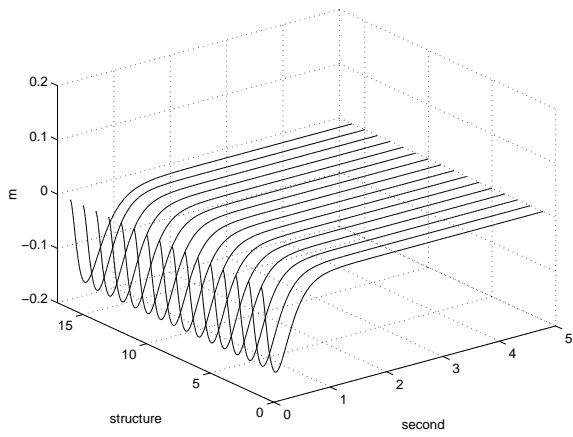
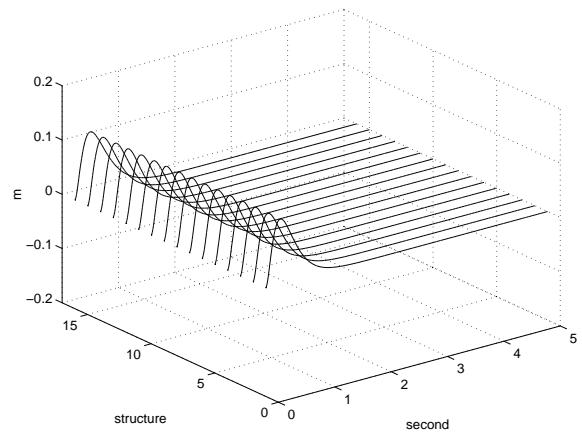


圖 6.14:  $\dot{\theta}_5$

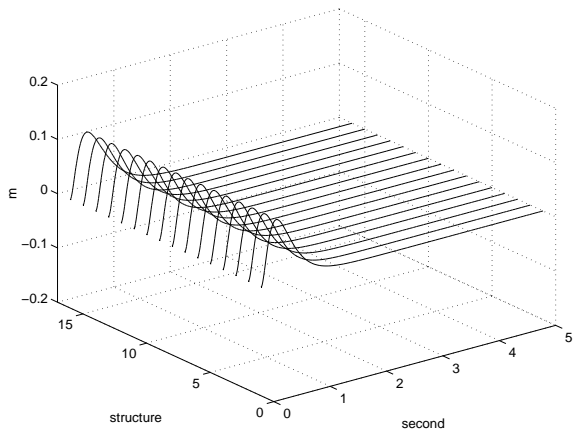
設計法 1, 並列結合構造



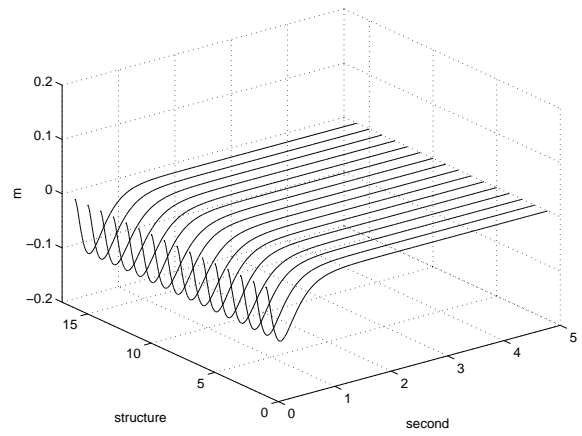
☒ 6.15:  $x_1$



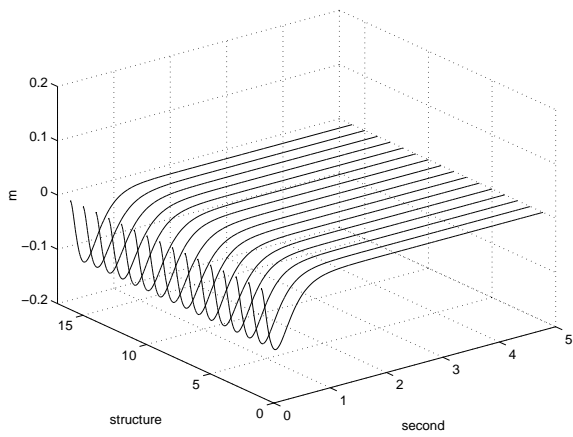
☒ 6.16:  $x_2$



☒ 6.17:  $x_3$

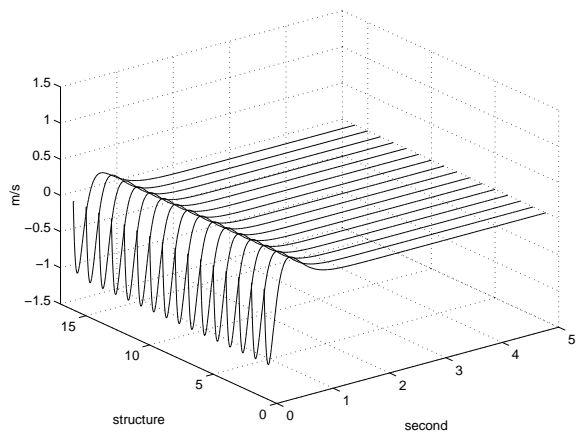


☒ 6.18:  $x_4$

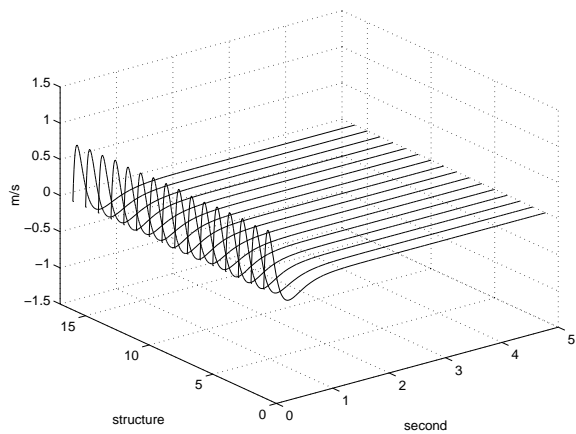


☒ 6.19:  $x_5$

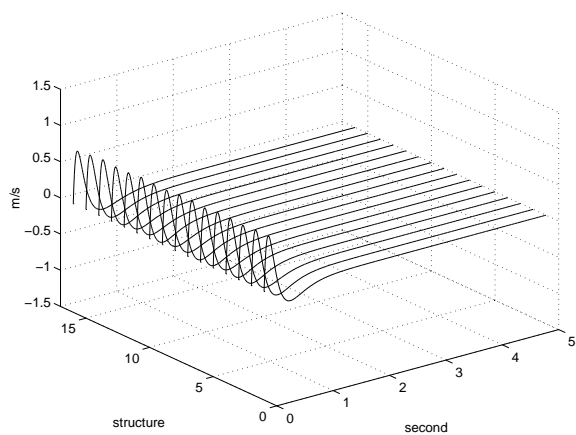
設計法 1, 並列結合構造



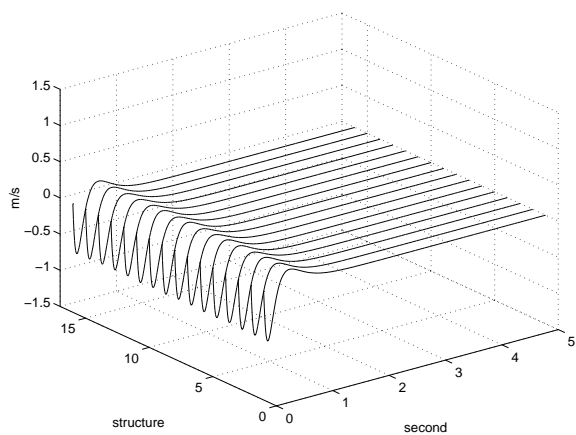
☒ 6.20:  $\dot{x}_1$



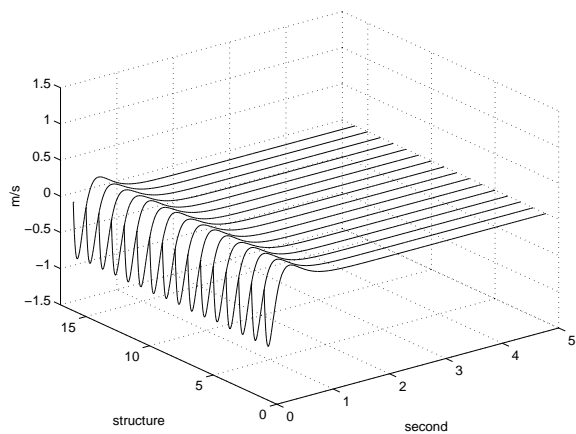
☒ 6.21:  $\dot{x}_2$



☒ 6.22:  $\dot{x}_3$



☒ 6.23:  $\dot{x}_4$



☒ 6.24:  $\dot{x}_5$

設計法 1, 並列結合構造

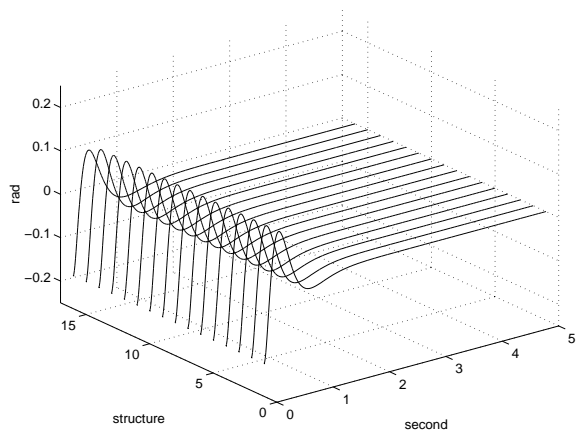


図 6.25:  $\theta_1$

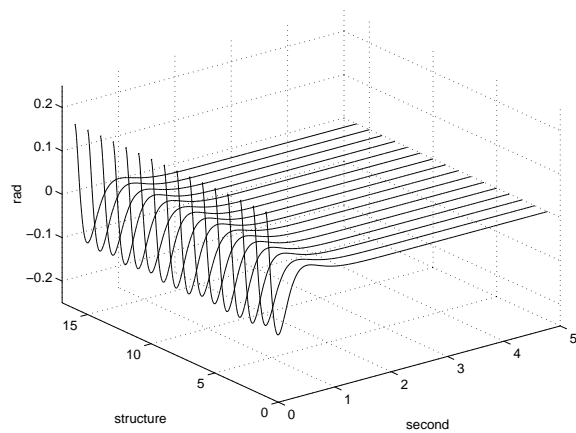


図 6.26:  $\theta_2$

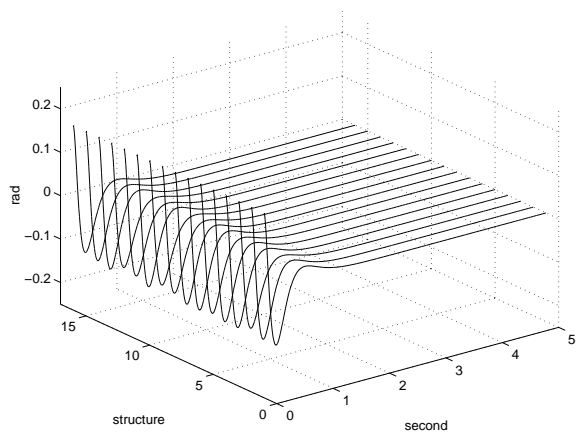


図 6.27:  $\theta_3$

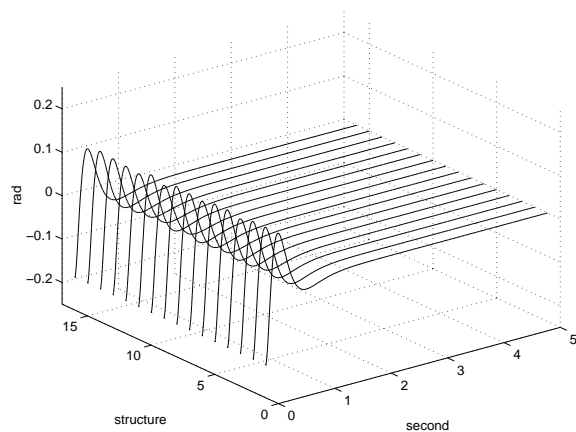


図 6.28:  $\theta_4$

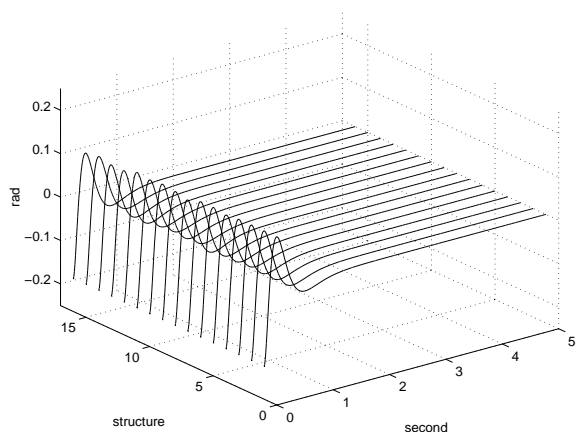


図 6.29:  $\theta_5$

設計法 1, 直列結合構造

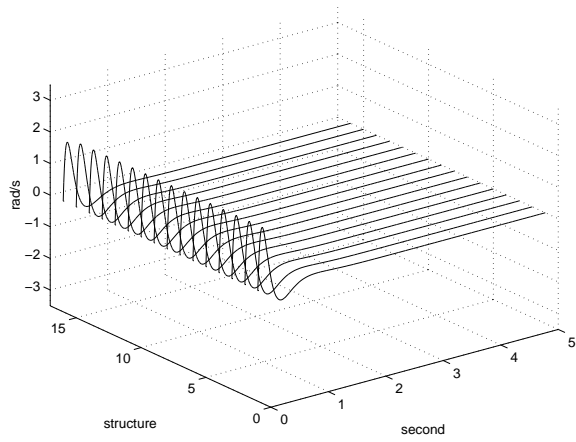


圖 6.30:  $\dot{\theta}_1$

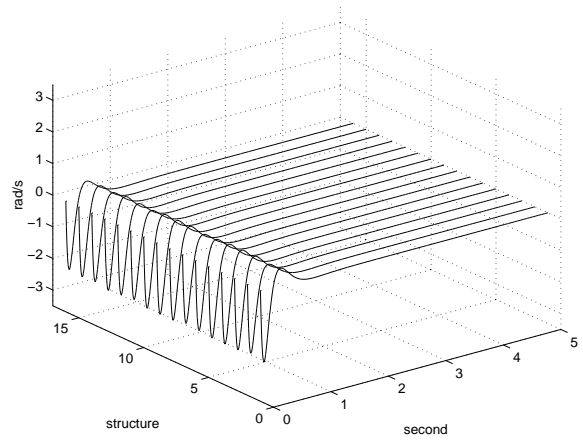


圖 6.31:  $\dot{\theta}_2$

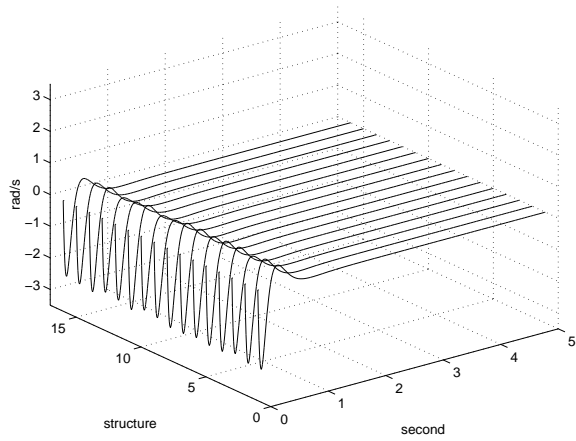


圖 6.32:  $\dot{\theta}_3$

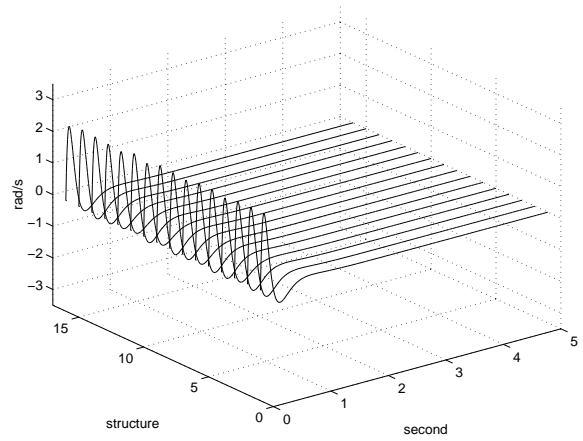


圖 6.33:  $\dot{\theta}_4$

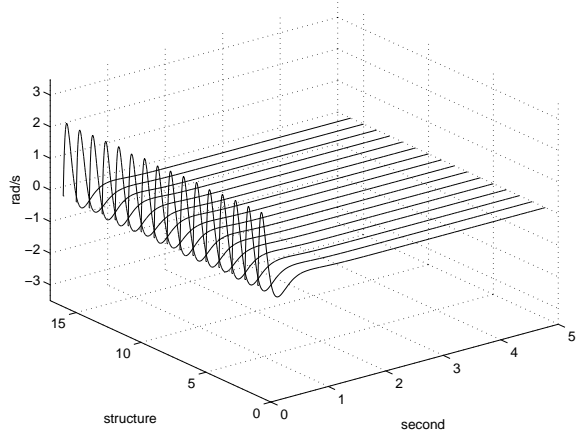
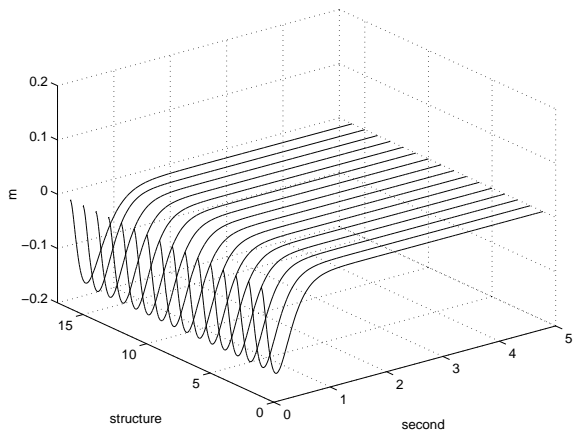


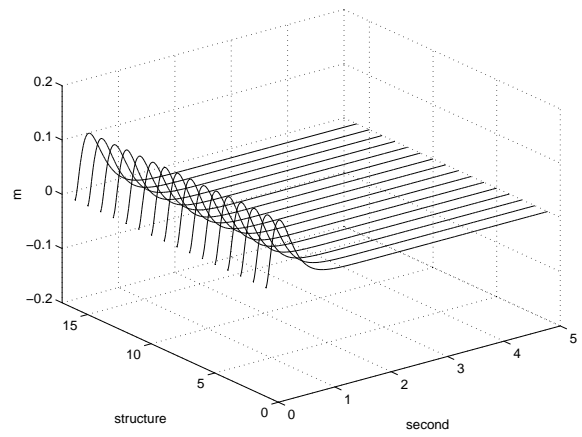
圖 6.34:  $\dot{\theta}_5$

設計法 1, 直列結合構造

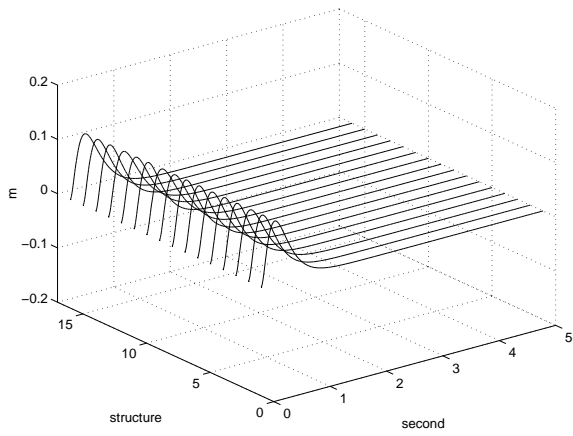




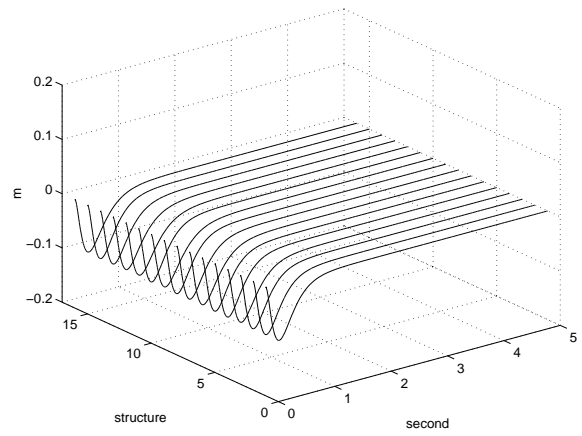
☒ 6.35:  $x_1$



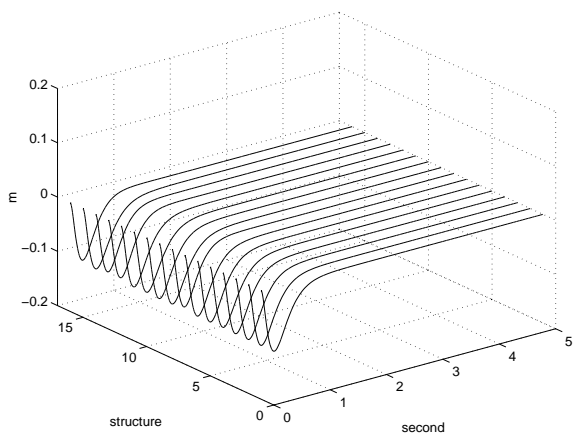
☒ 6.36:  $x_2$



☒ 6.37:  $x_3$



☒ 6.38:  $x_4$



☒ 6.39:  $x_5$

設計法 1, 直列結合構造

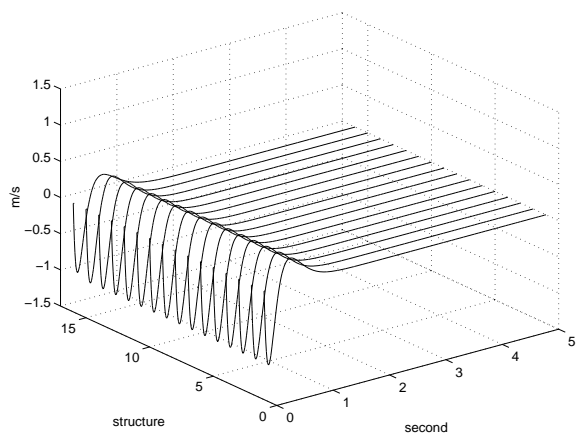


図 6.40:  $\dot{x}_1$

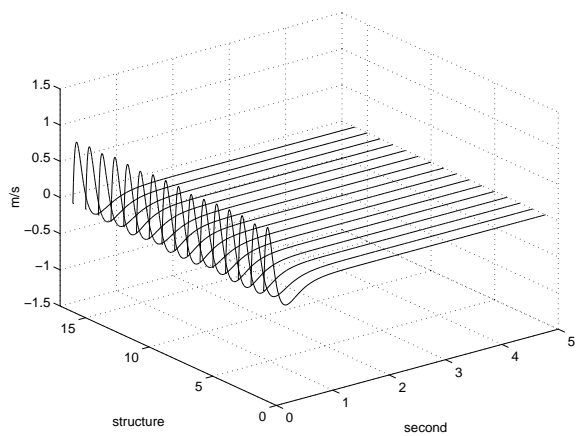


図 6.41:  $\dot{x}_2$

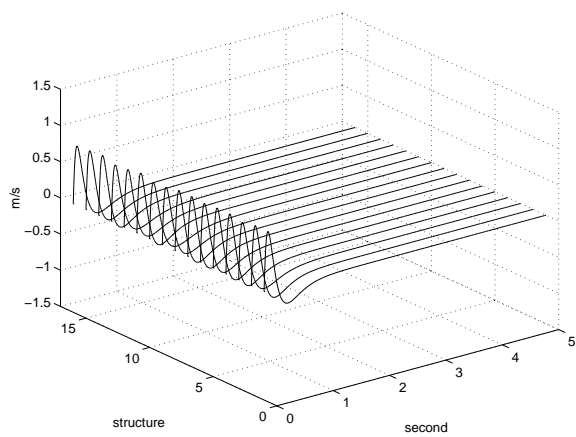


図 6.42:  $\dot{x}_3$

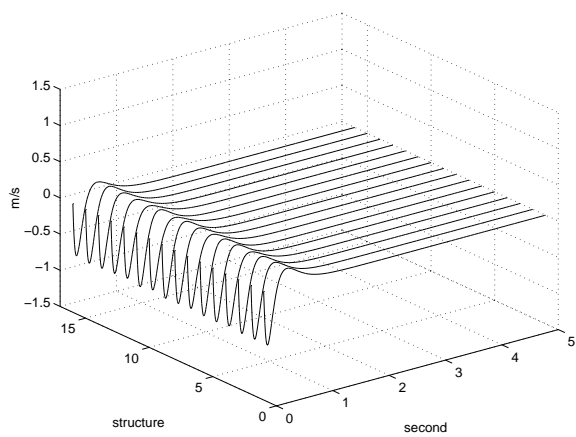


図 6.43:  $\dot{x}_4$

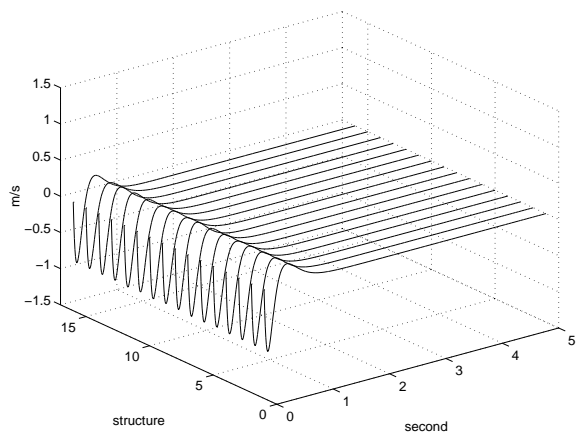
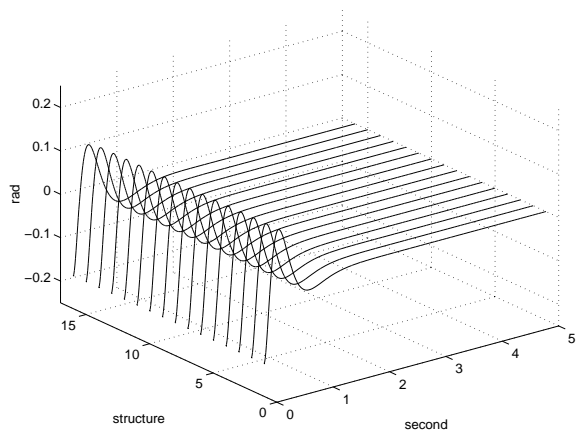
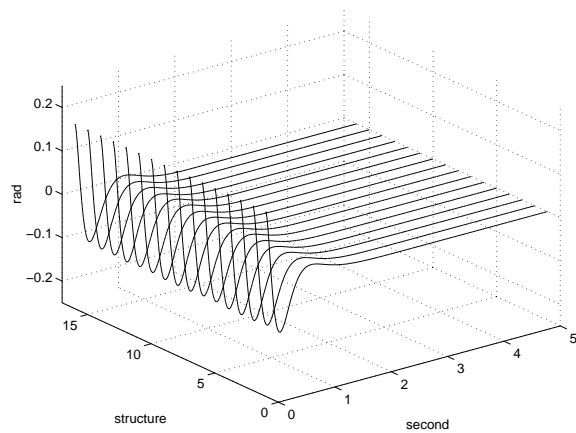


図 6.44:  $\dot{x}_5$

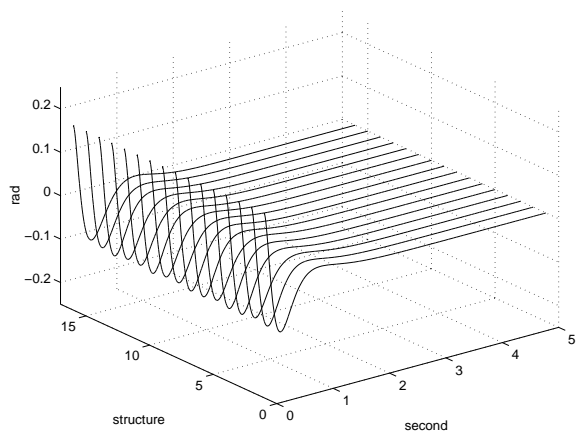
設計法 1, 直列結合構造



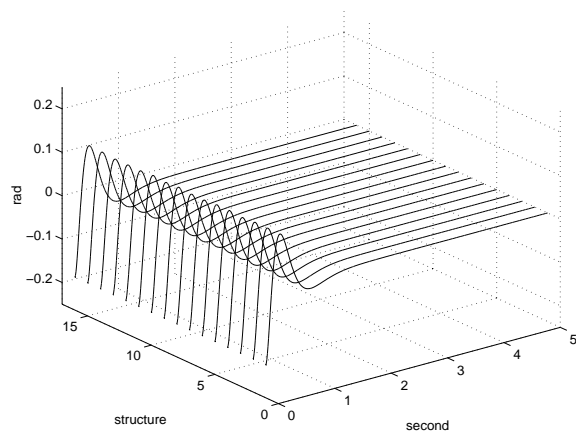
6.45:  $\theta_1$



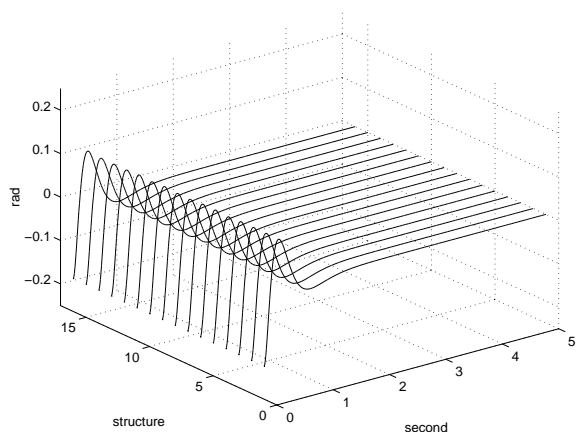
6.46:  $\theta_2$



6.47:  $\theta_3$



6.48:  $\theta_4$



6.49:  $\theta_5$

設計法 2, 並列結合構造

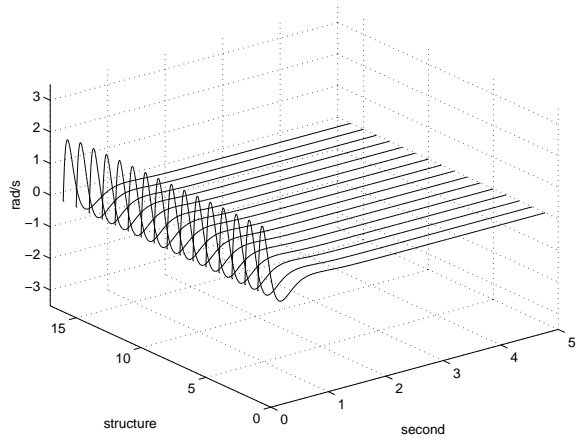


圖 6.50:  $\dot{\theta}_1$

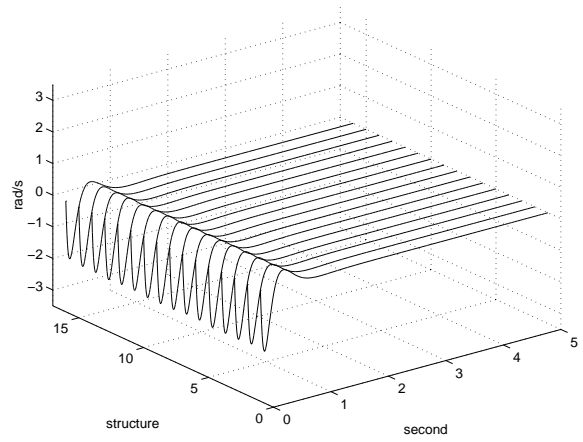


圖 6.51:  $\dot{\theta}_2$

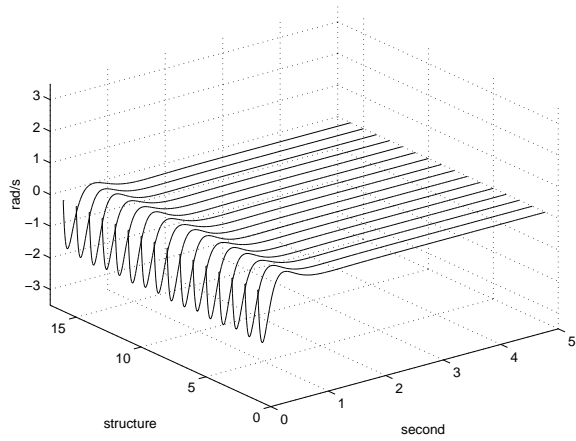


圖 6.52:  $\dot{\theta}_3$

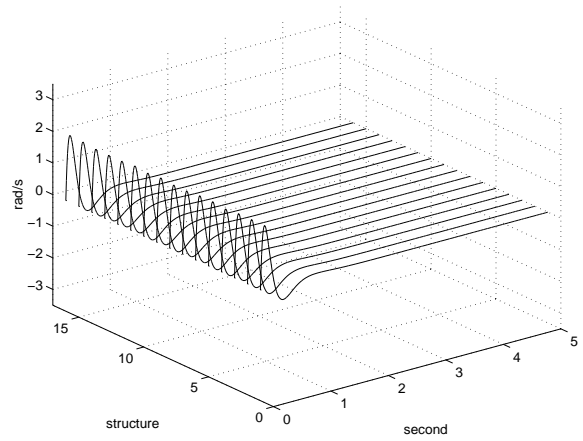


圖 6.53:  $\dot{\theta}_4$

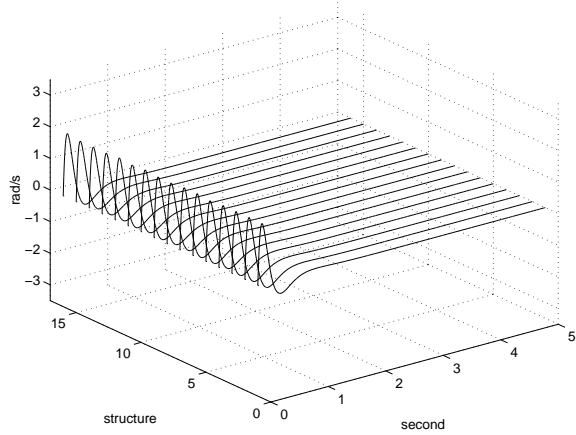
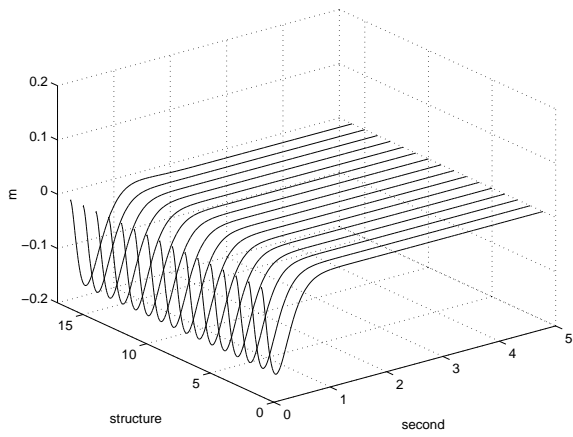
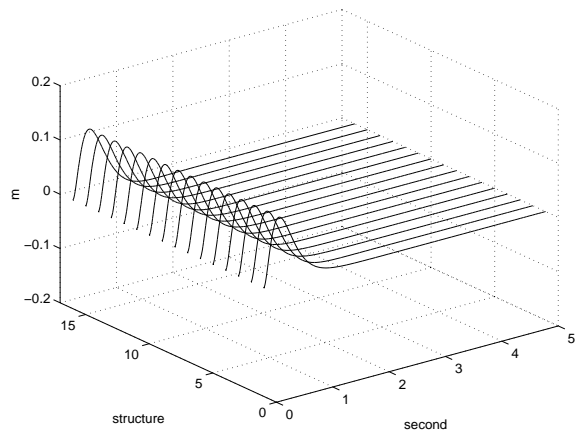


圖 6.54:  $\dot{\theta}_5$

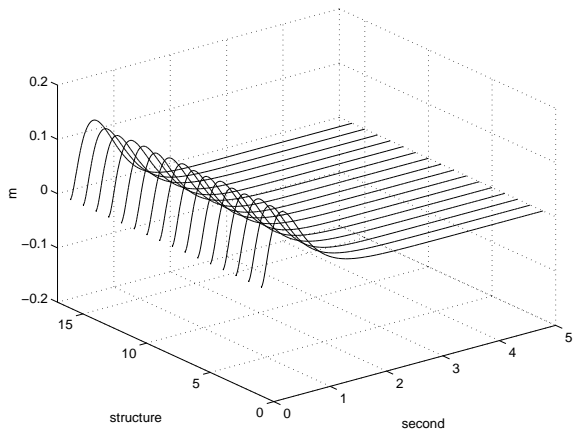
設計法 2, 並列結合構造



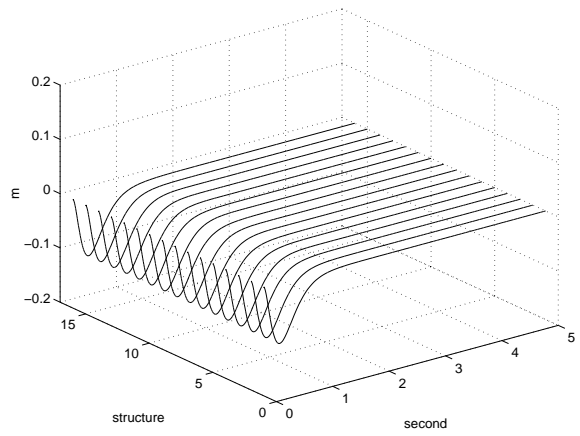
☒ 6.55:  $x_1$



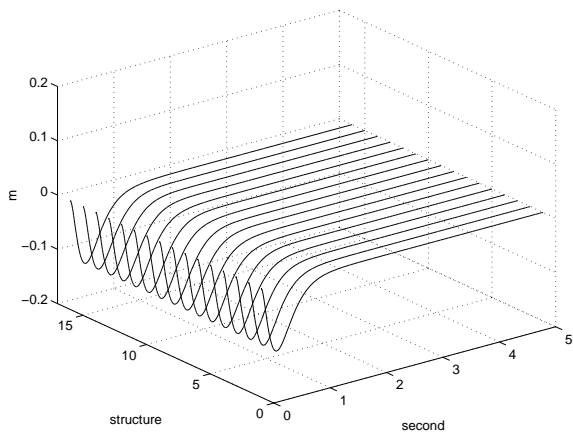
☒ 6.56:  $x_2$



☒ 6.57:  $x_3$

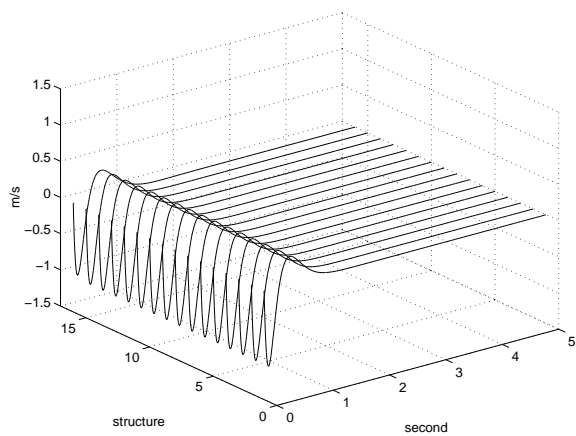


☒ 6.58:  $x_4$

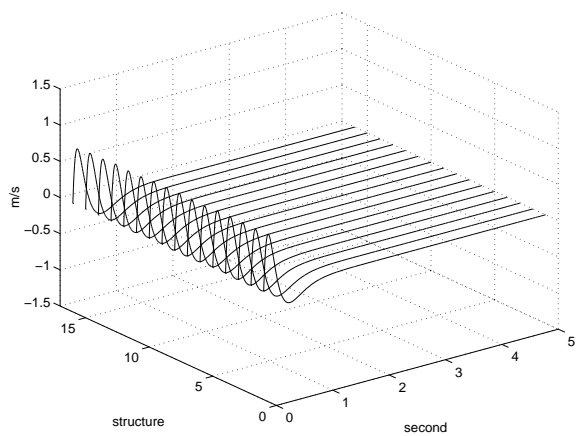


☒ 6.59:  $x_5$

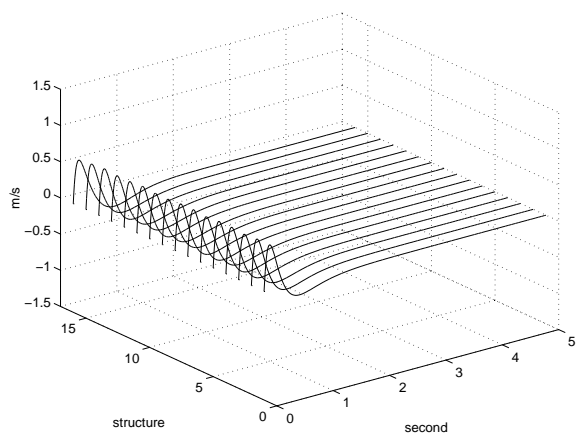
設計法 2, 並列結合構造



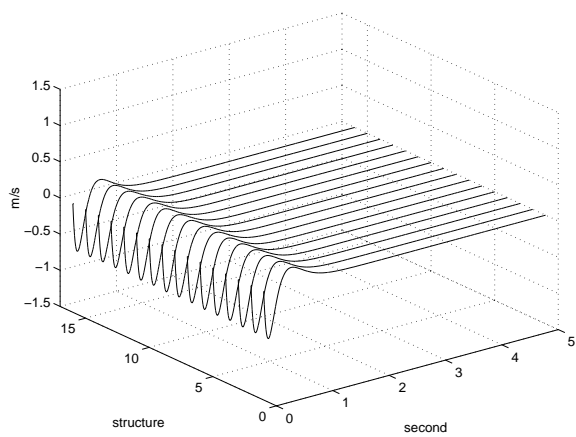
☒ 6.60:  $\dot{x}_1$



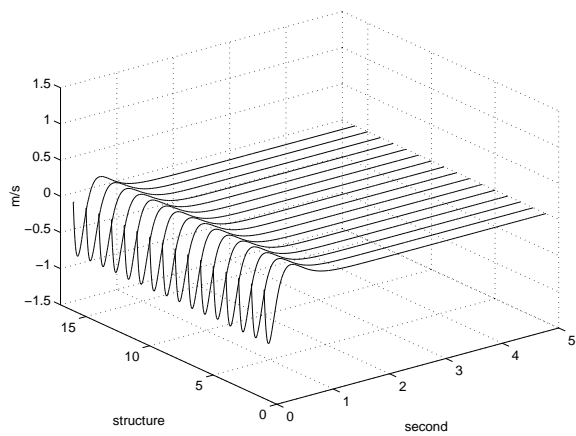
☒ 6.61:  $\dot{x}_2$



☒ 6.62:  $\dot{x}_3$

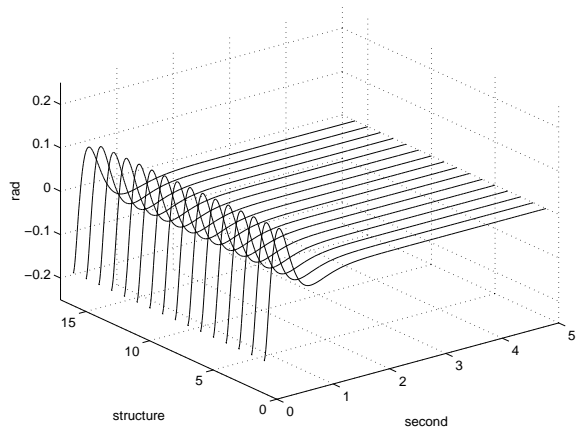


☒ 6.63:  $\dot{x}_4$

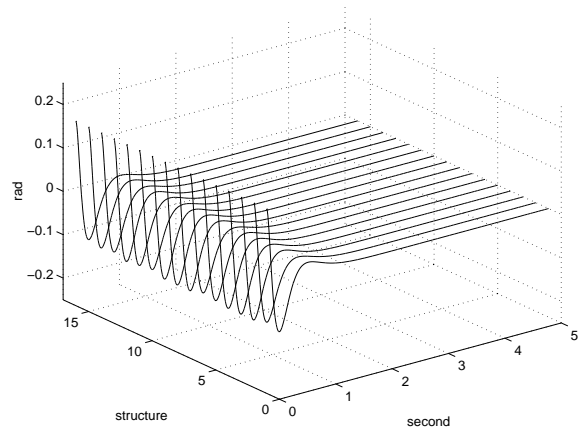


☒ 6.64:  $\dot{x}_5$

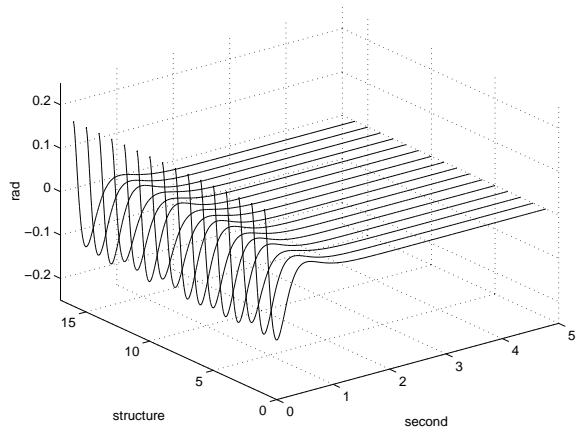
設計法 2, 並列結合構造



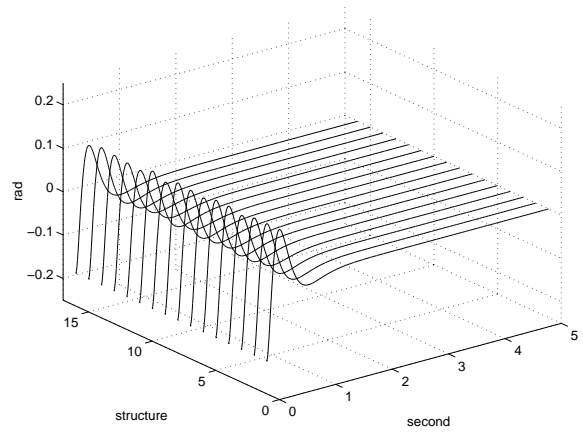
6.65:  $\theta_1$



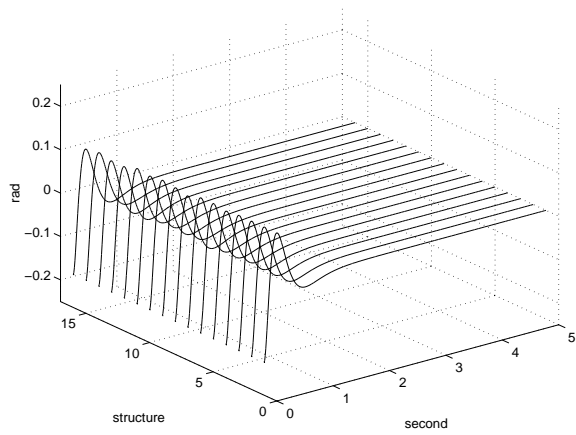
6.66:  $\theta_2$



6.67:  $\theta_3$

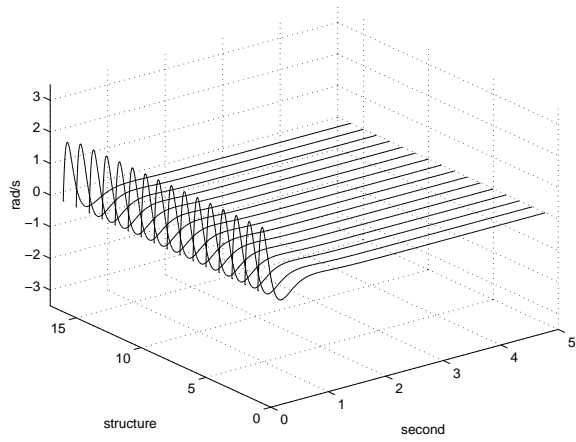


6.68:  $\theta_4$

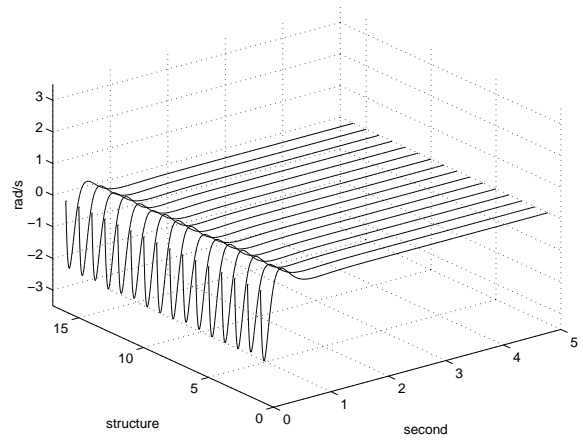


6.69:  $\theta_5$

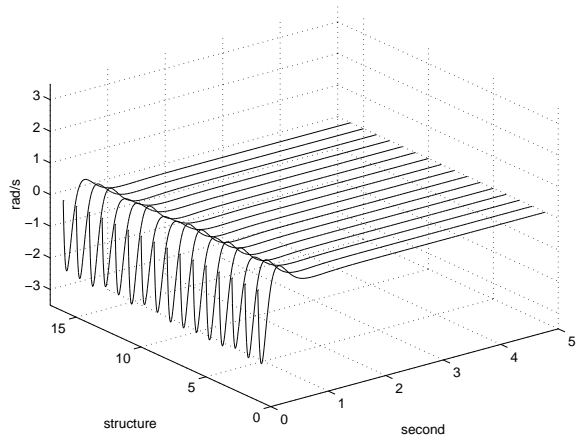
設計法 2, 直列結合構造



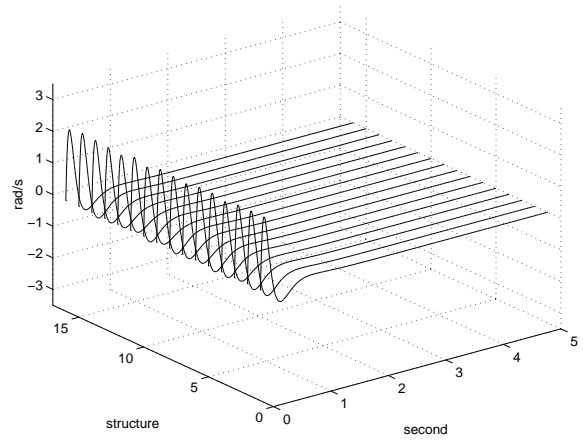
☒ 6.70:  $\dot{\theta}_1$



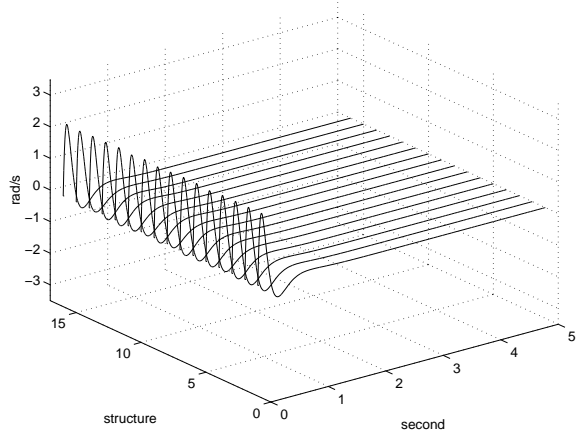
☒ 6.71:  $\dot{\theta}_2$



☒ 6.72:  $\dot{\theta}_3$



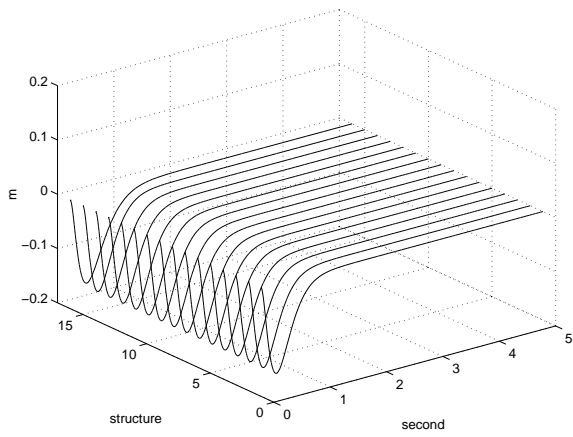
☒ 6.73:  $\dot{\theta}_4$



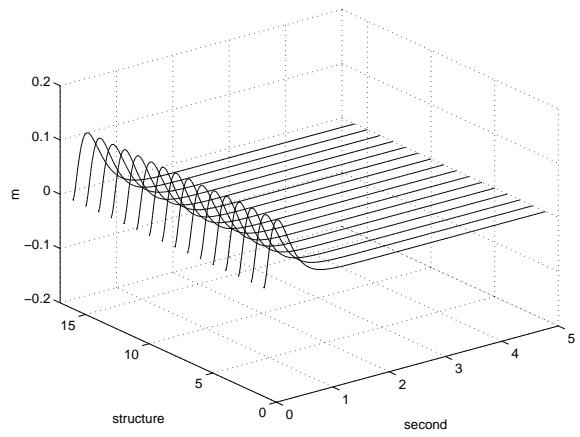
☒ 6.74:  $\dot{\theta}_5$

設計法 2, 直列結合構造

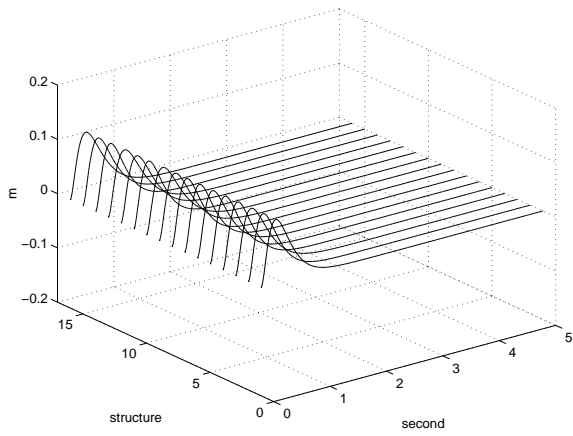




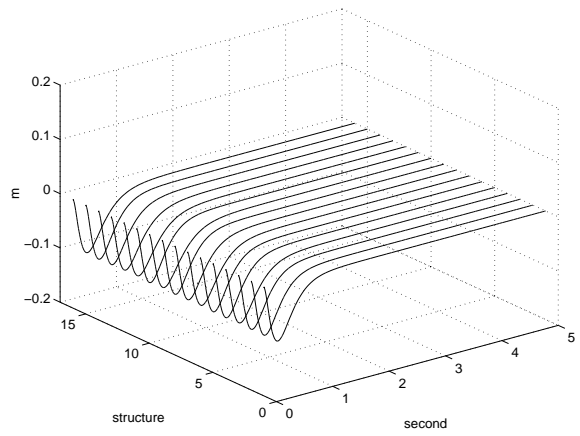
☒ 6.75:  $x_1$



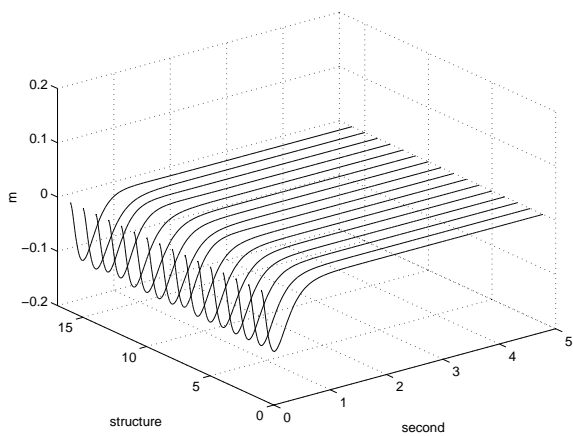
☒ 6.76:  $x_2$



☒ 6.77:  $x_3$

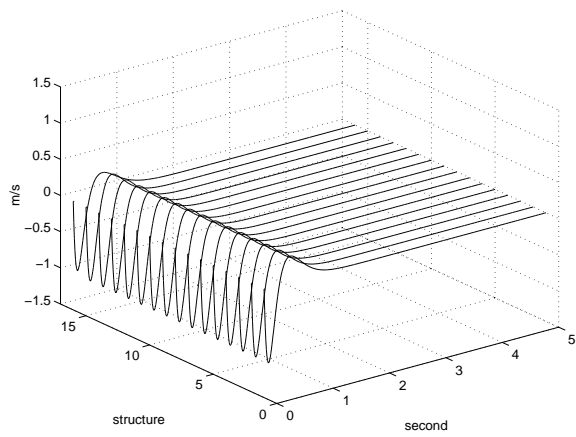


☒ 6.78:  $x_4$

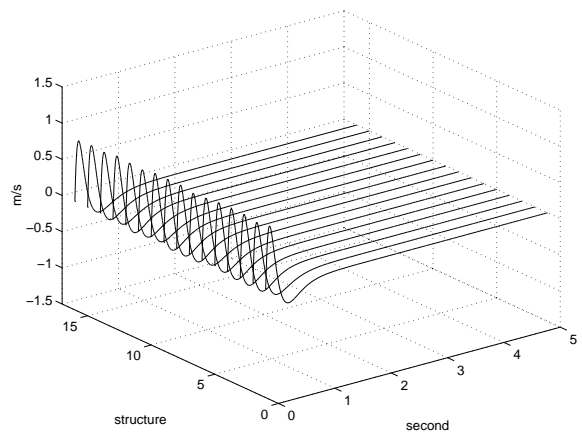


☒ 6.79:  $x_5$

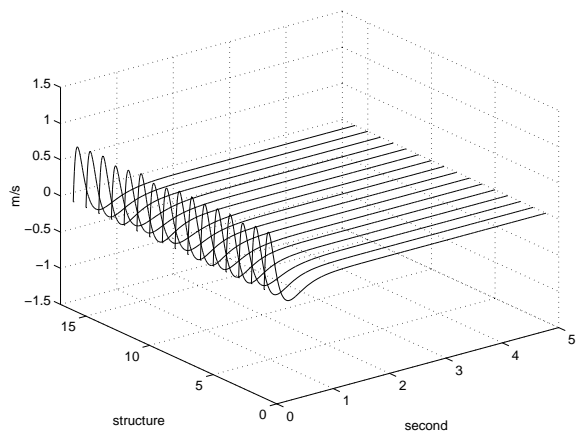
設計法 2, 直列結合構造



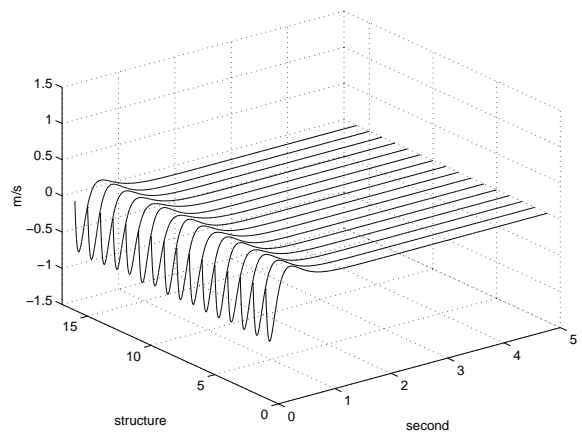
☒ 6.80:  $\dot{x}_1$



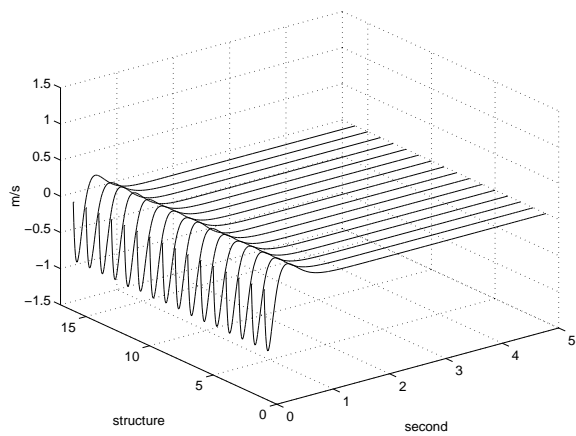
☒ 6.81:  $\dot{x}_2$



☒ 6.82:  $\dot{x}_3$

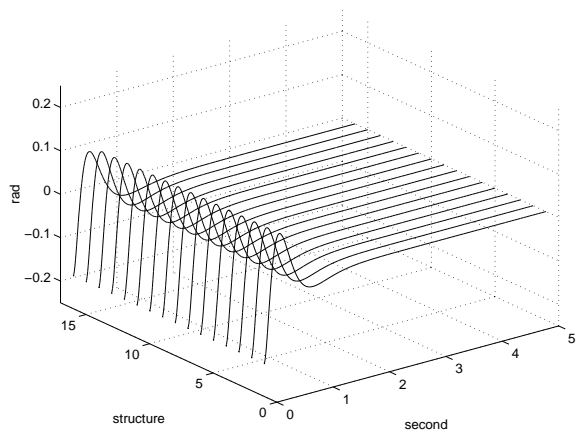


☒ 6.83:  $\dot{x}_4$

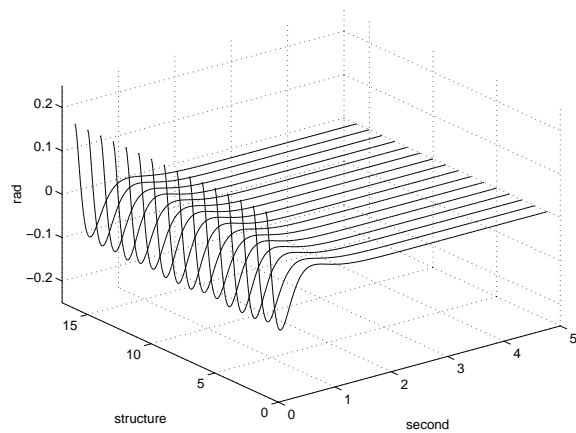


☒ 6.84:  $\dot{x}_5$

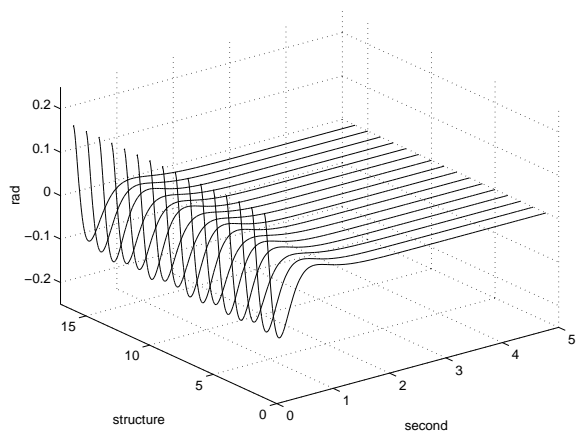
設計法 2, 直列結合構造



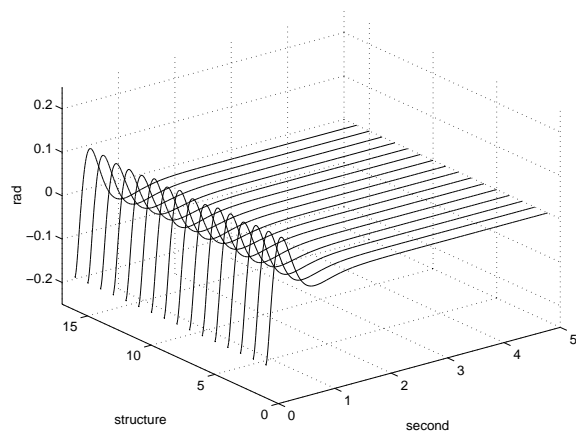
6.85:  $\theta_1$



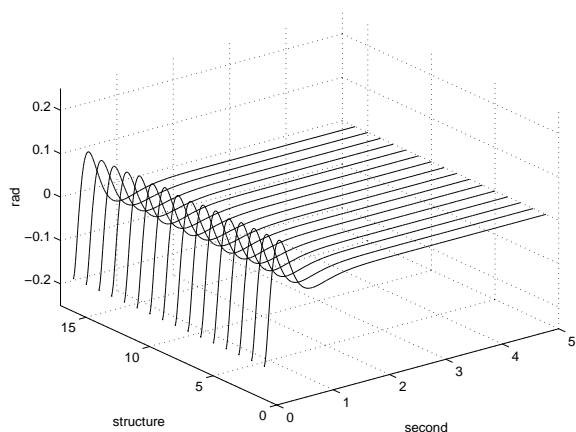
6.86:  $\theta_2$



6.87:  $\theta_3$



6.88:  $\theta_4$



6.89:  $\theta_5$

設計法 3, 並列結合構造

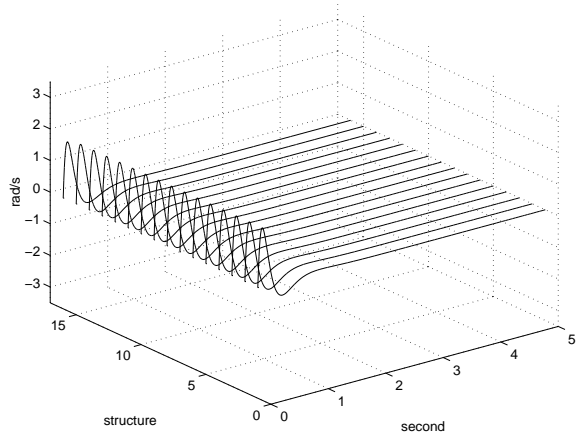


圖 6.90:  $\dot{\theta}_1$

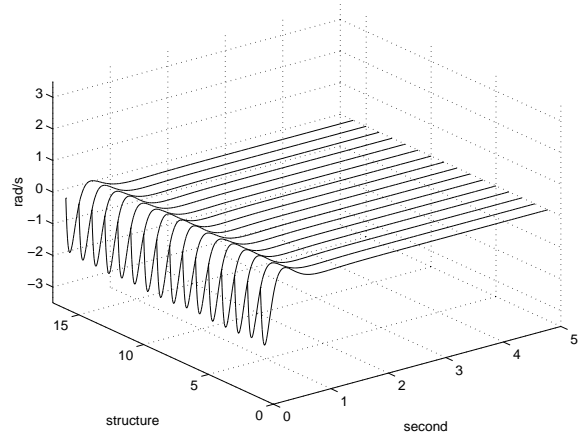


圖 6.91:  $\dot{\theta}_2$

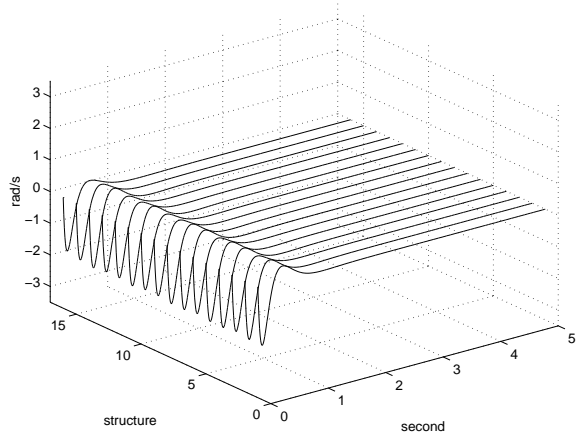


圖 6.92:  $\dot{\theta}_3$

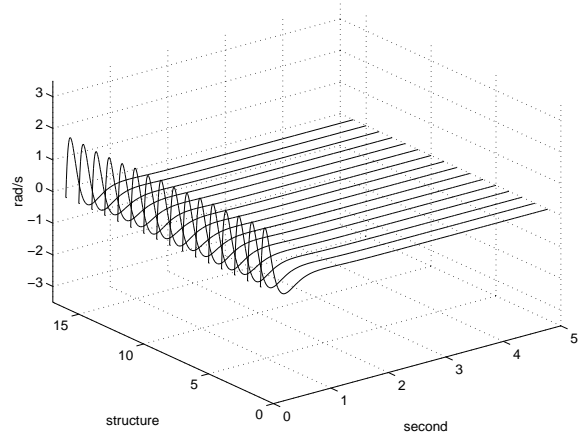


圖 6.93:  $\dot{\theta}_4$

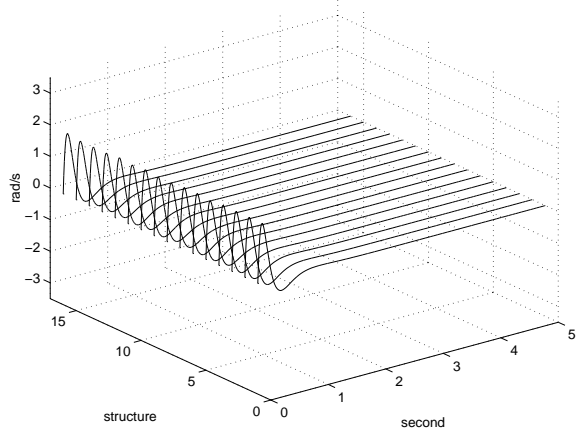
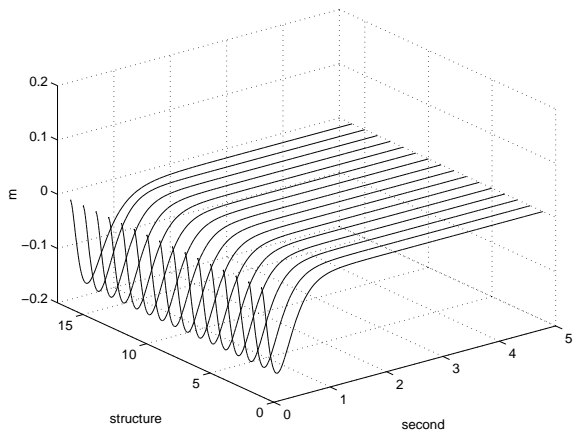
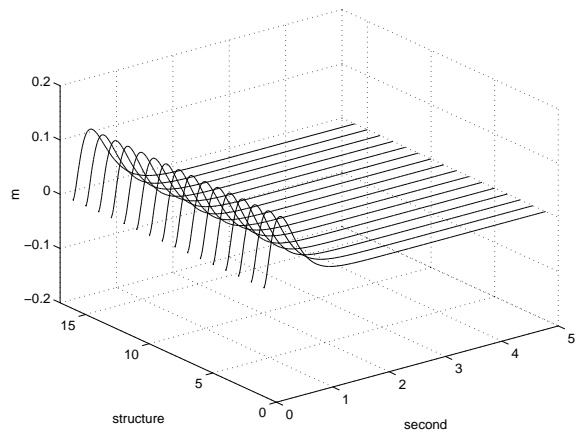


圖 6.94:  $\dot{\theta}_5$

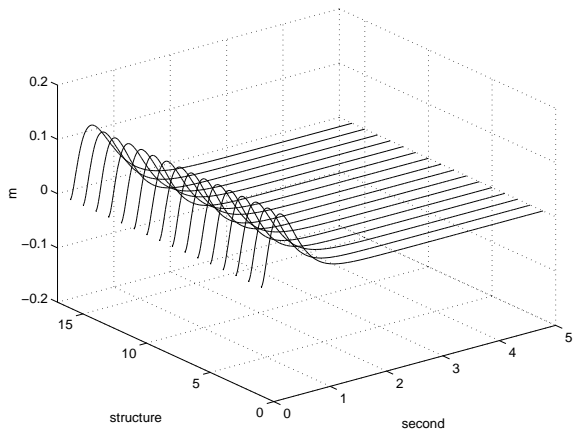
設計法 3, 並列結合構造



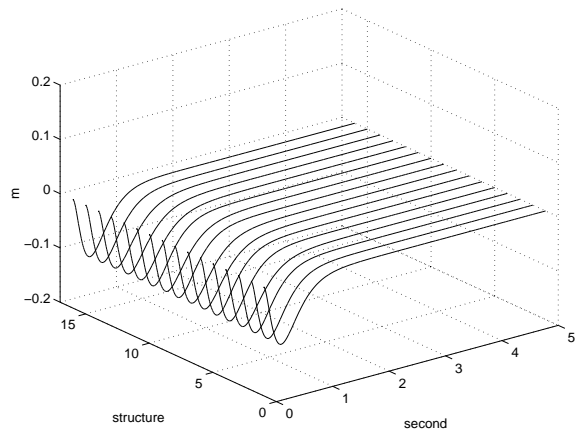
☒ 6.95:  $x_1$



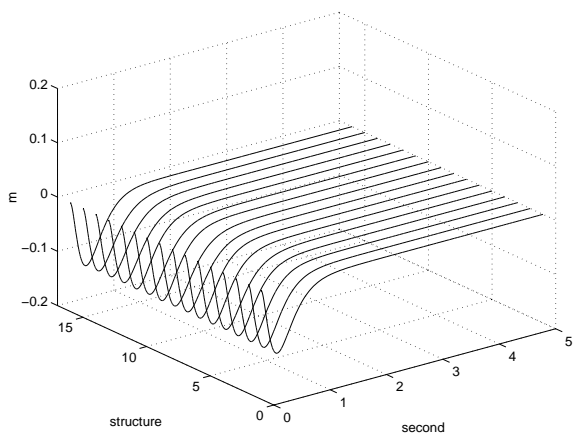
☒ 6.96:  $x_2$



☒ 6.97:  $x_3$

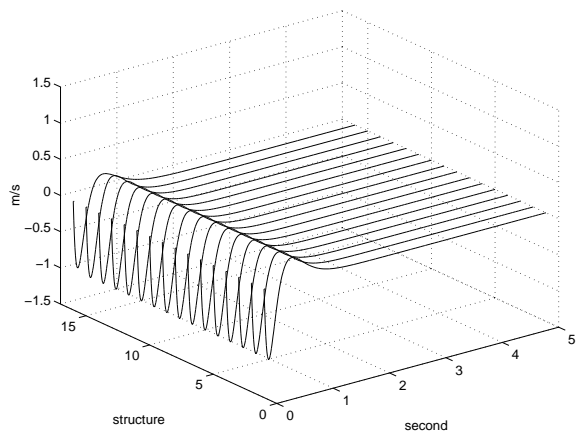


☒ 6.98:  $x_4$

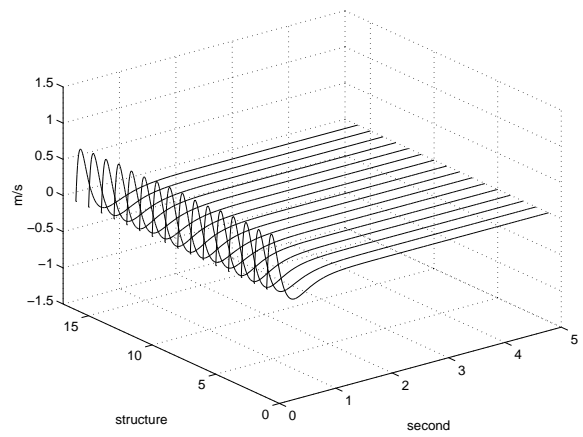


☒ 6.99:  $x_5$

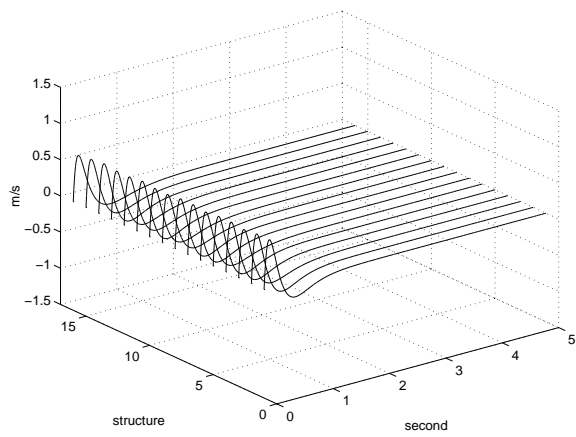
設計法 3, 並列結合構造



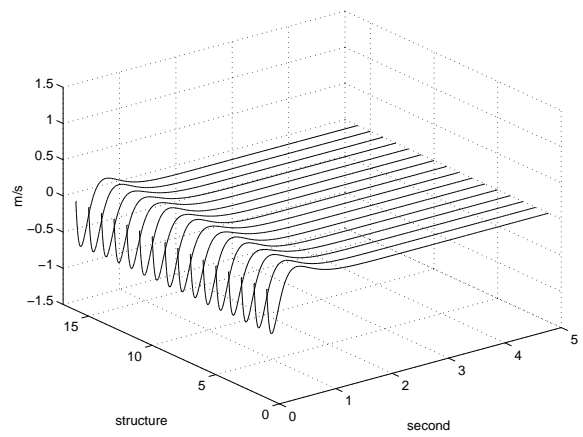
☒ 6.100:  $\dot{x}_1$



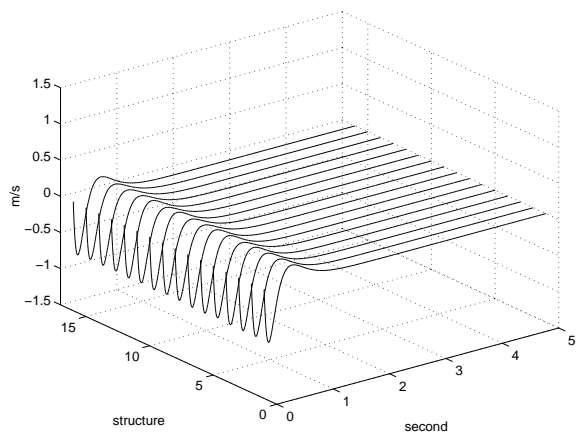
☒ 6.101:  $\dot{x}_2$



☒ 6.102:  $\dot{x}_3$



☒ 6.103:  $\dot{x}_4$



☒ 6.104:  $\dot{x}_5$

設計法 3, 並列結合構造

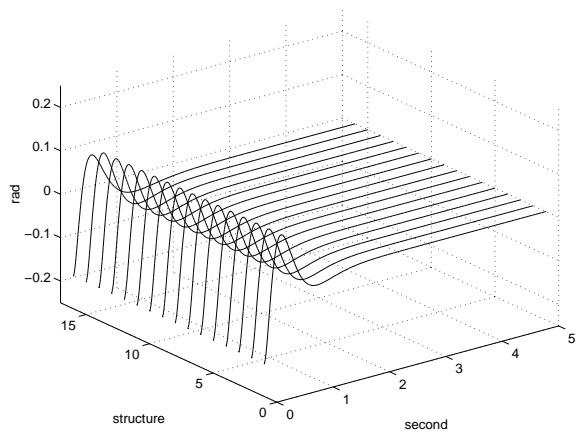


図 6.105:  $\theta_1$

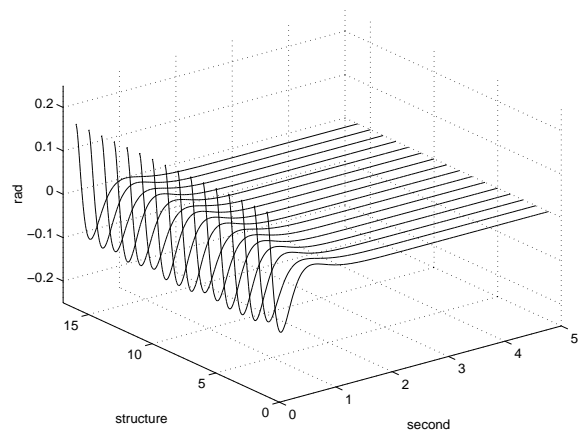


図 6.106:  $\theta_2$

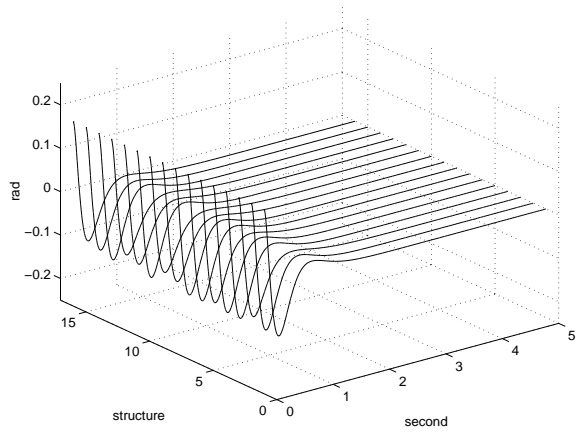


図 6.107:  $\theta_3$

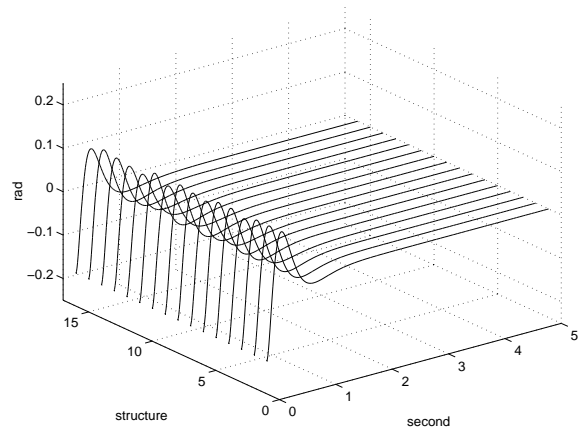


図 6.108:  $\theta_4$

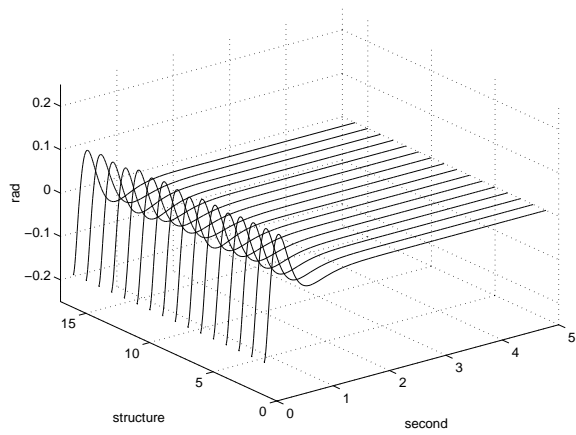
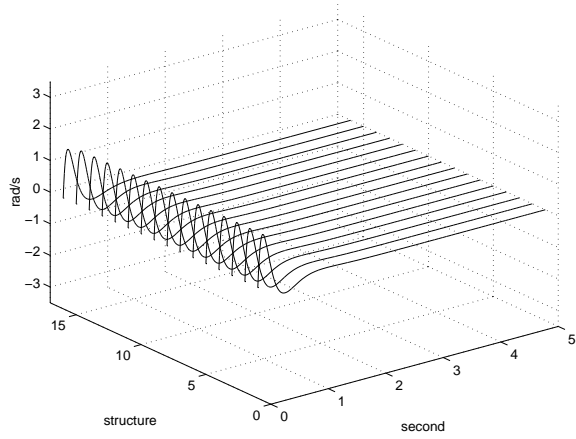
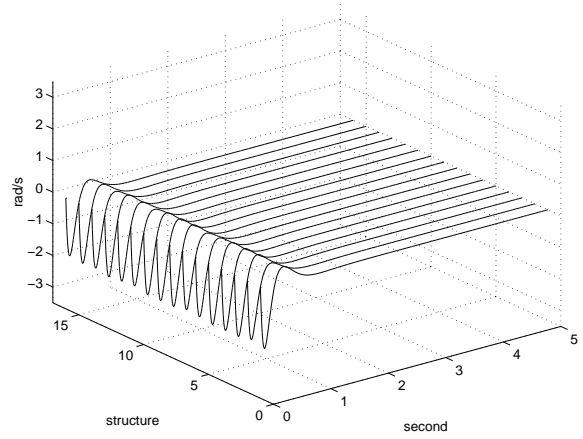


図 6.109:  $\theta_5$

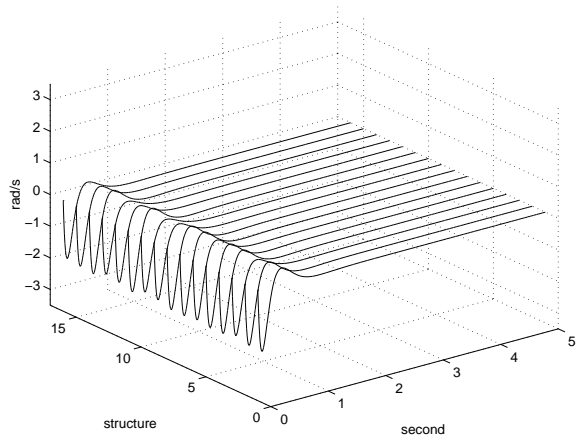
設計法 3, 直列結合構造



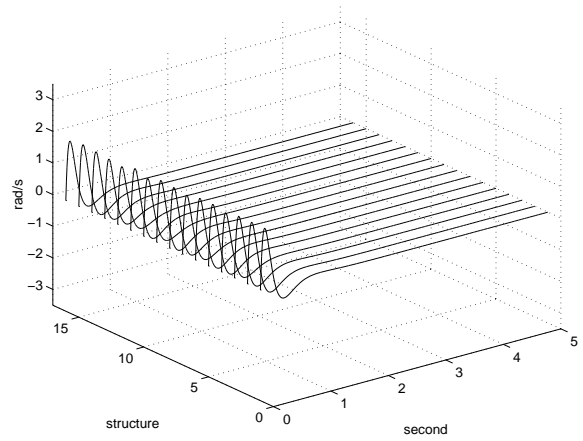
☒ 6.110:  $\dot{\theta}_1$



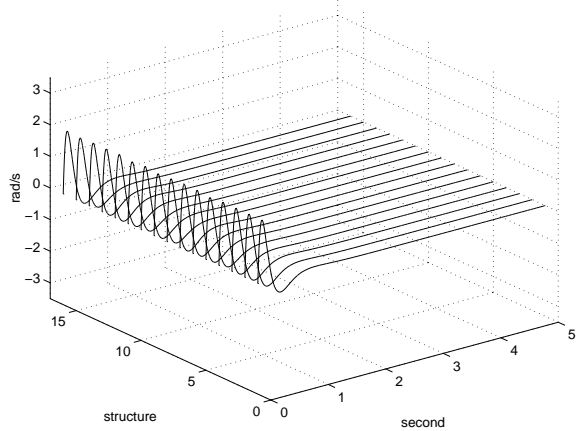
☒ 6.111:  $\dot{\theta}_2$



☒ 6.112:  $\dot{\theta}_3$



☒ 6.113:  $\dot{\theta}_4$



☒ 6.114:  $\dot{\theta}_5$

設計法 3, 直列結合構造



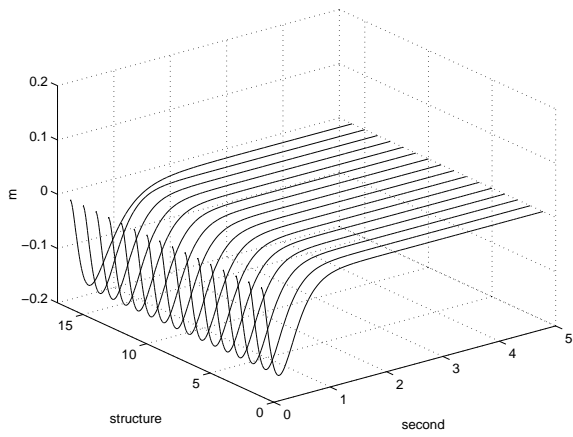


図 6.115:  $x_1$

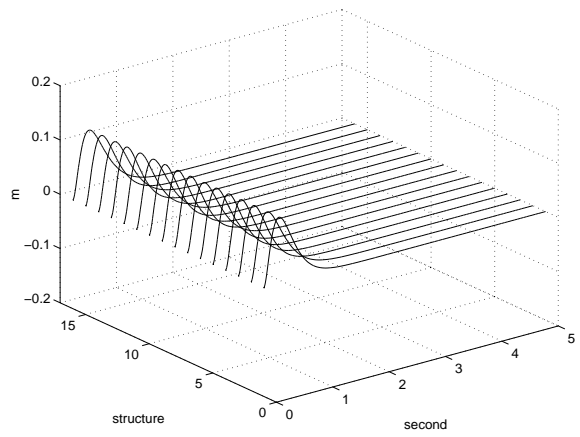


図 6.116:  $x_2$

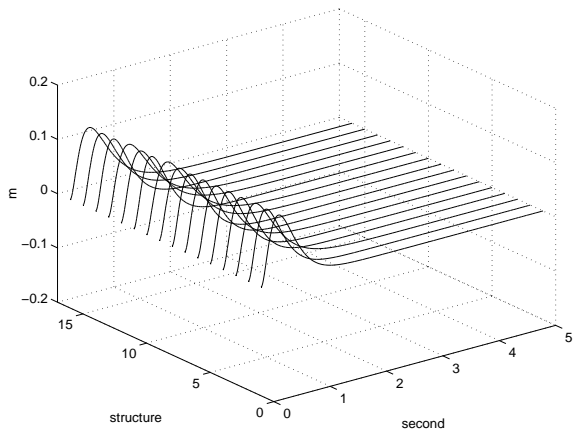


図 6.117:  $x_3$

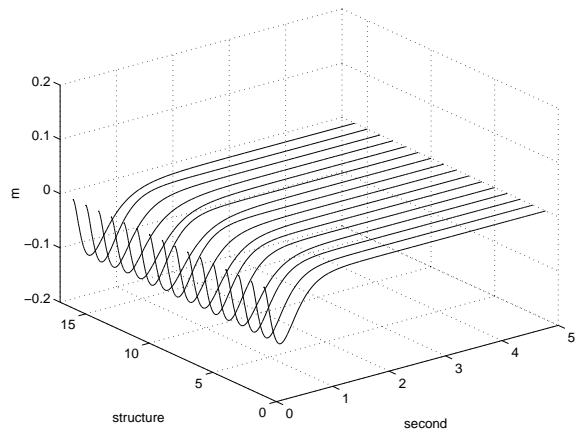


図 6.118:  $x_4$

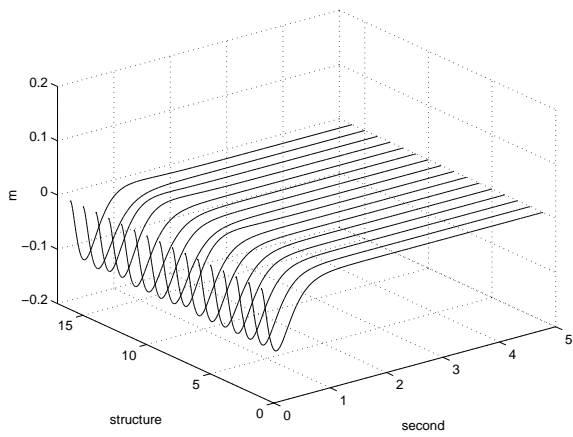
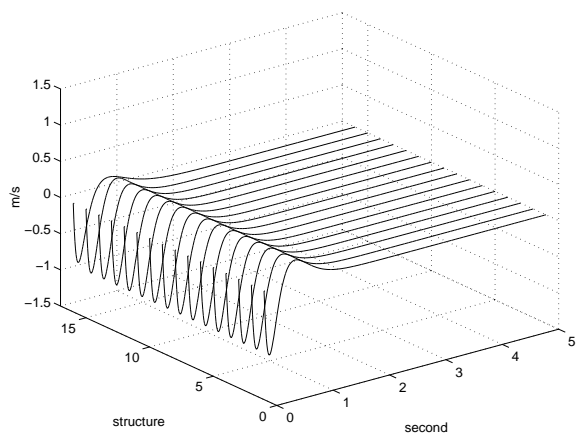
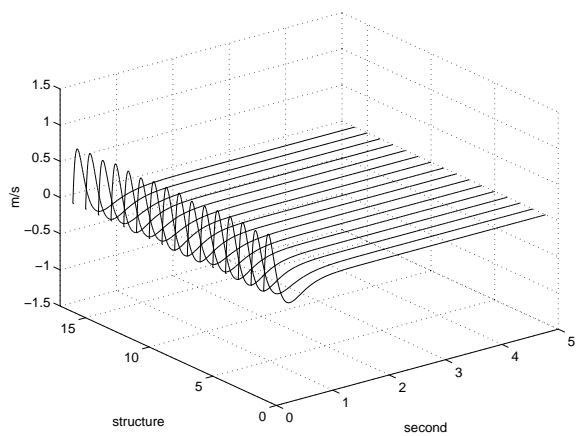


図 6.119:  $x_5$

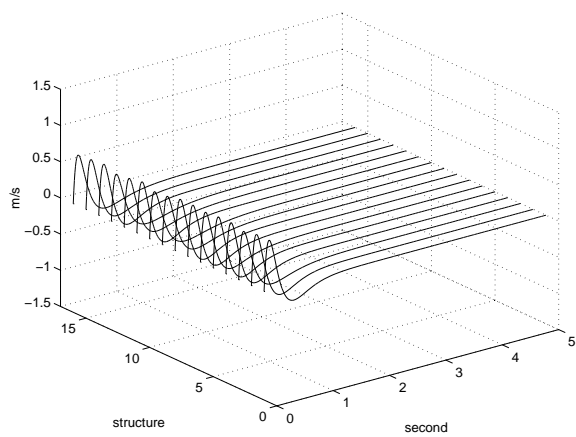
設計法 3, 直列結合構造



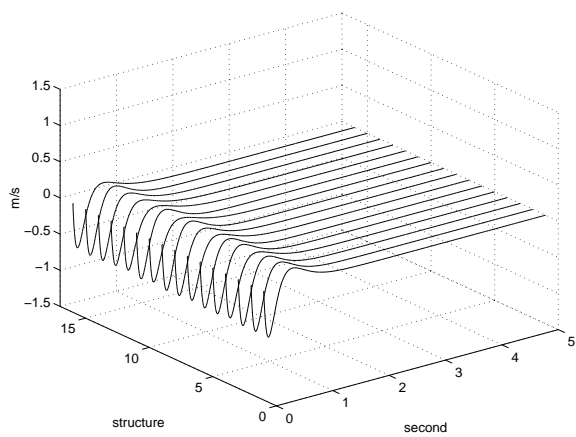
☒ 6.120:  $\dot{x}_1$



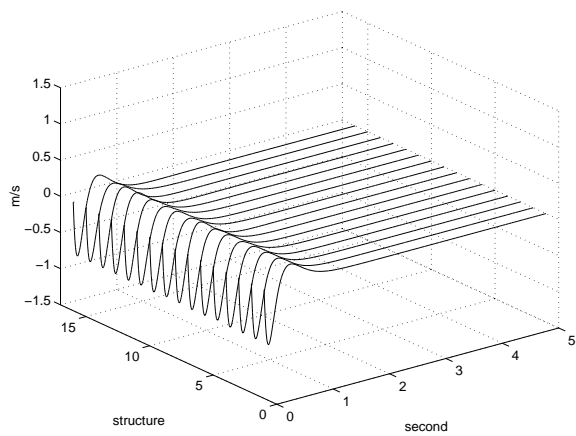
☒ 6.121:  $\dot{x}_2$



☒ 6.122:  $\dot{x}_3$

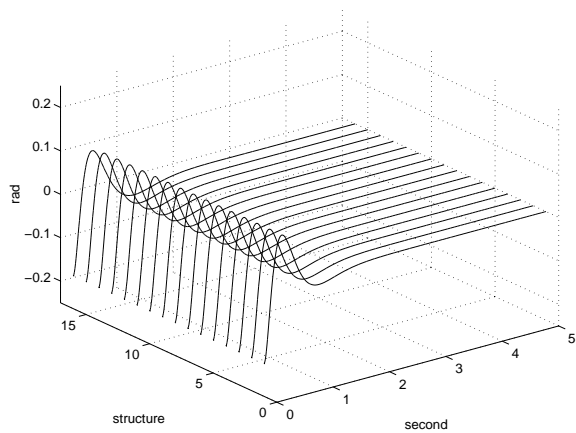


☒ 6.123:  $\dot{x}_4$

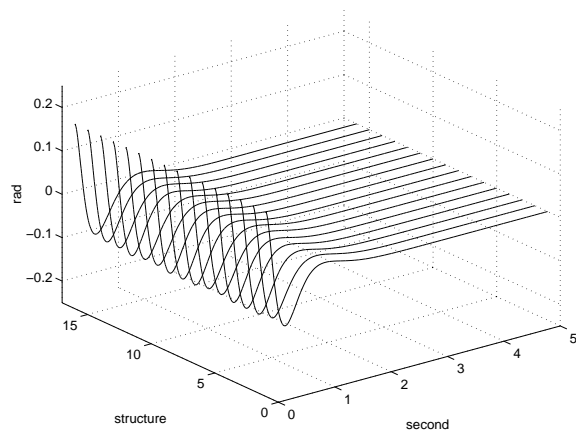


☒ 6.124:  $\dot{x}_5$

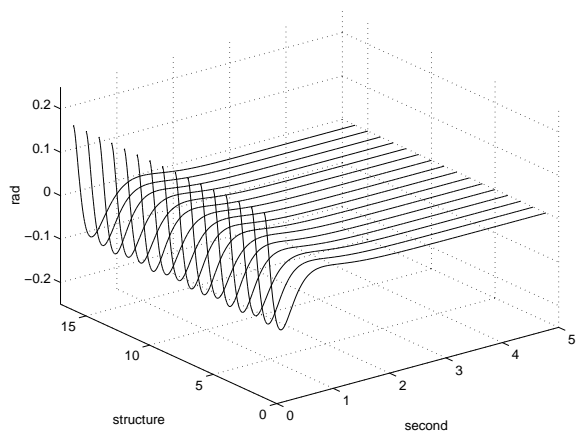
設計法 3, 直列結合構造



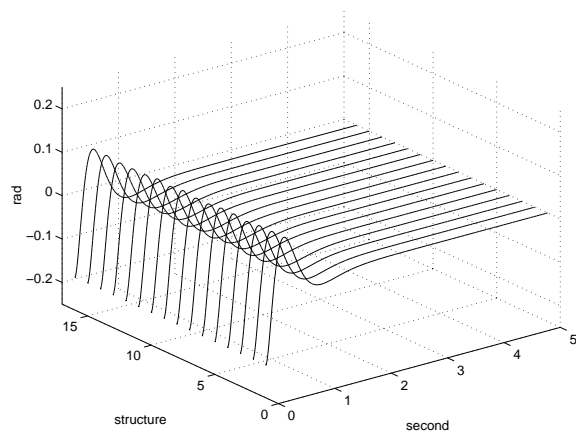
☒ 6.125:  $\theta_1$



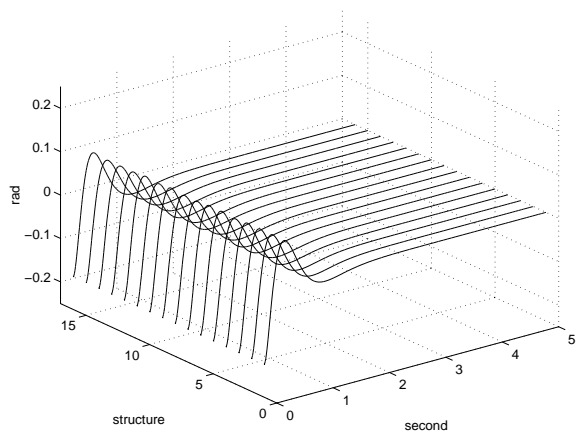
☒ 6.126:  $\theta_2$



☒ 6.127:  $\theta_3$

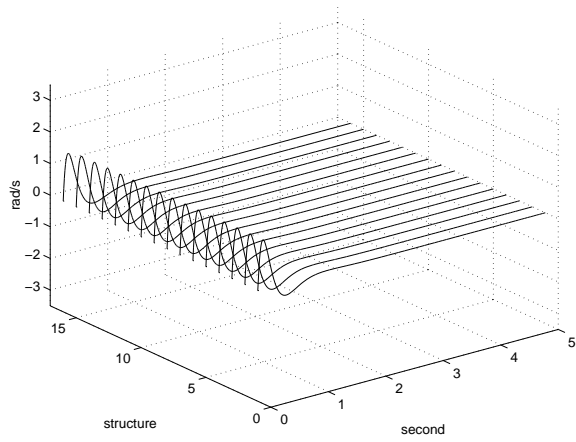


☒ 6.128:  $\theta_4$

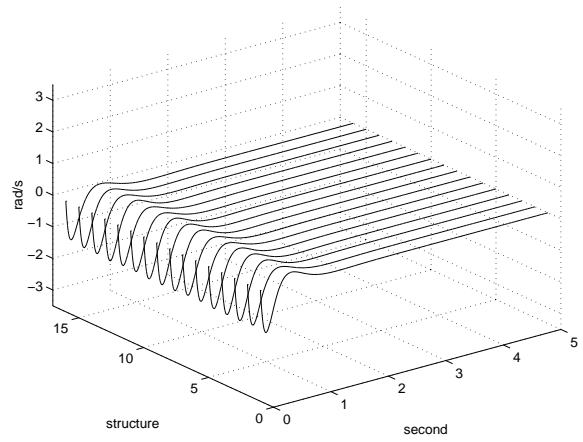


☒ 6.129:  $\theta_5$

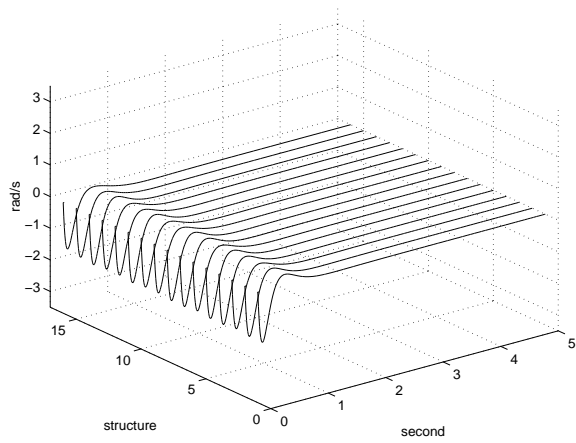
設計法 4, 並列結合構造



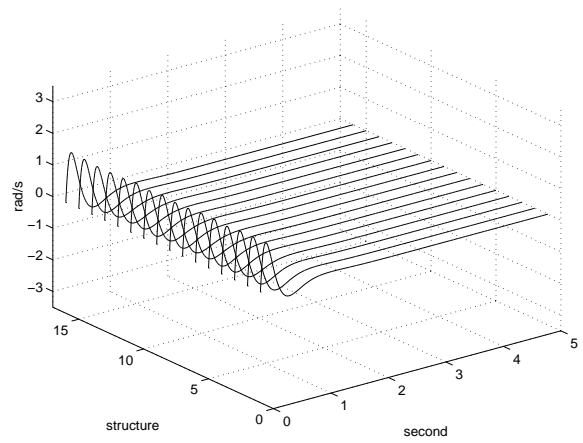
☒ 6.130:  $\dot{\theta}_1$



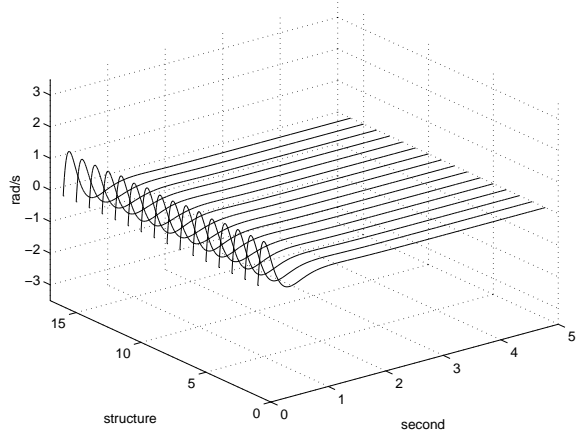
☒ 6.131:  $\dot{\theta}_2$



☒ 6.132:  $\dot{\theta}_3$

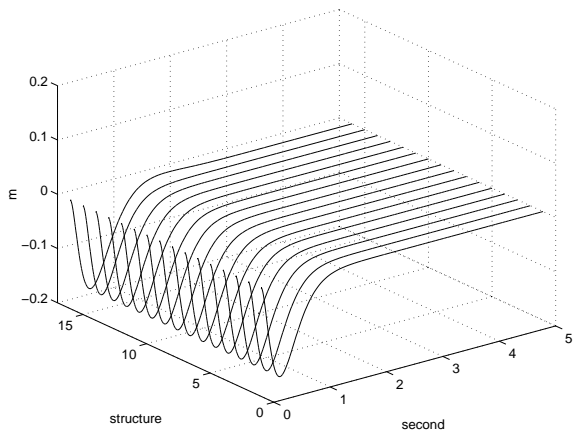


☒ 6.133:  $\dot{\theta}_4$

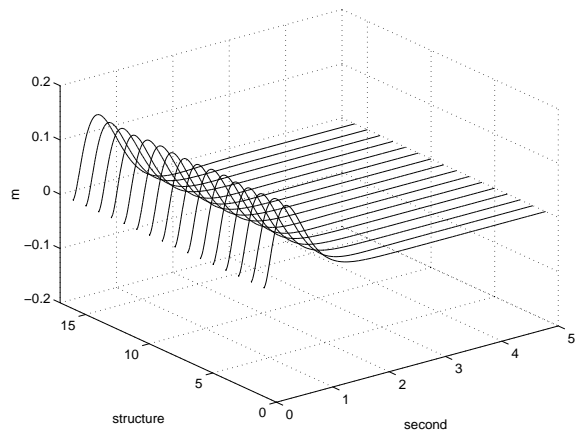


☒ 6.134:  $\dot{\theta}_5$

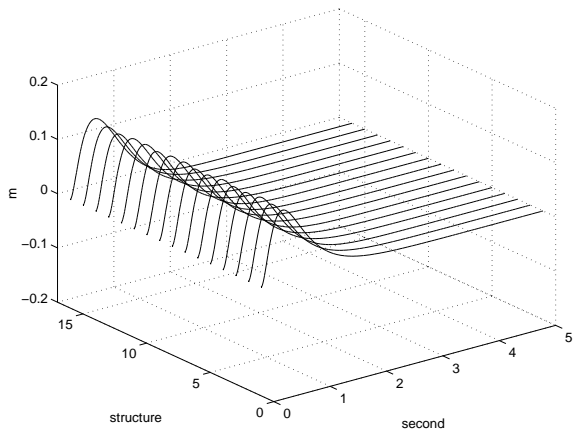
設計法 4, 並列結合構造



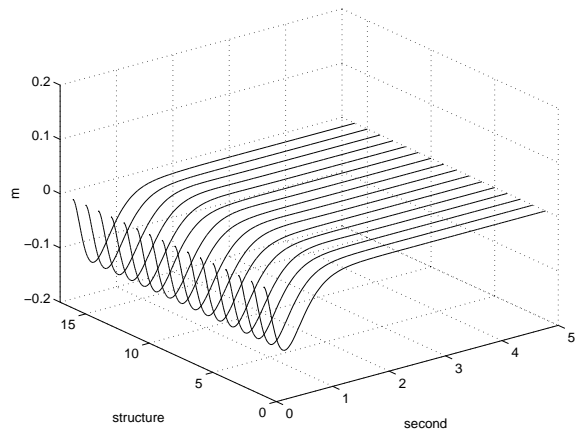
☒ 6.135:  $x_1$



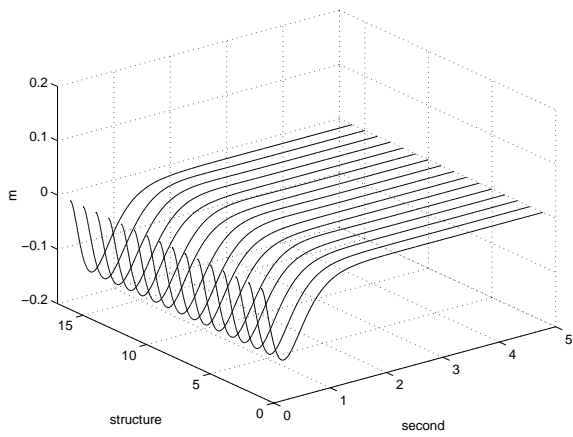
☒ 6.136:  $x_2$



☒ 6.137:  $x_3$

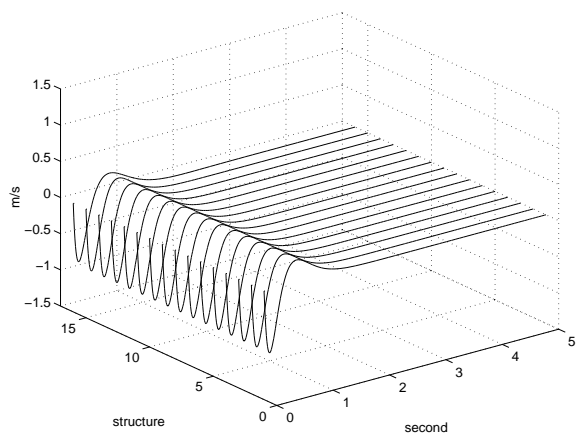


☒ 6.138:  $x_4$

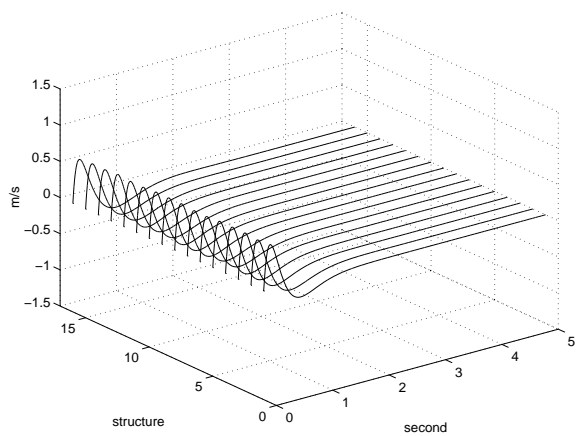


☒ 6.139:  $x_5$

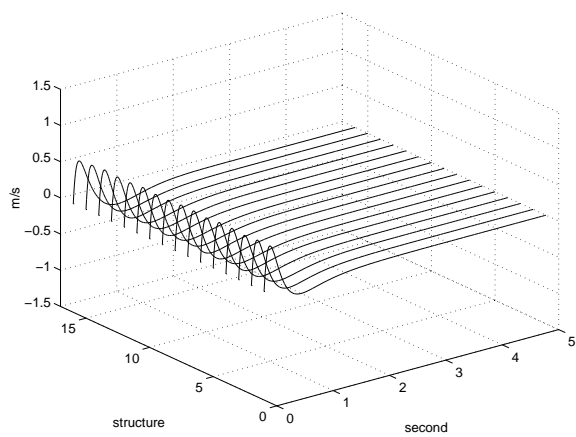
設計法 4, 並列結合構造



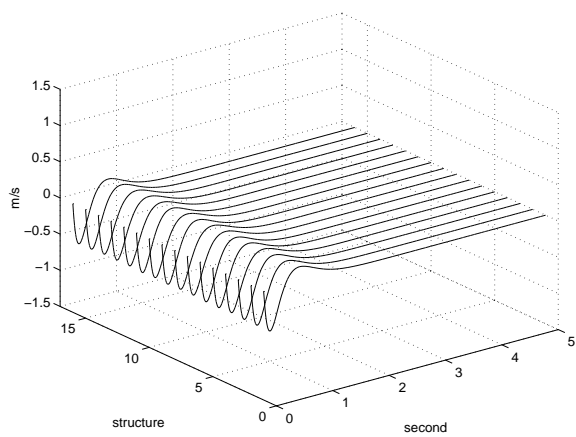
☒ 6.140:  $\dot{x}_1$



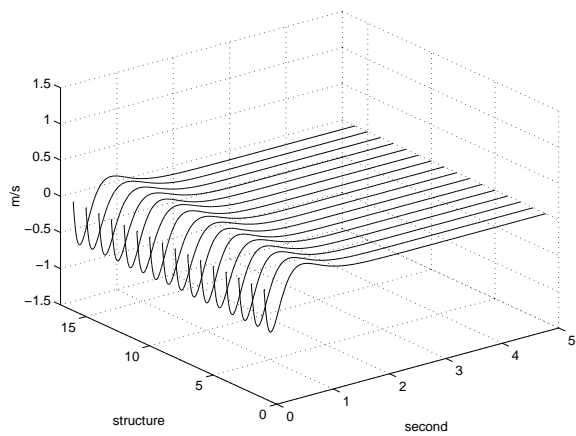
☒ 6.141:  $\dot{x}_2$



☒ 6.142:  $\dot{x}_3$

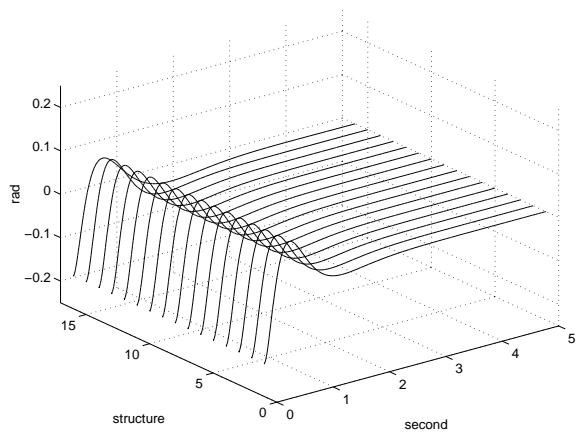


☒ 6.143:  $\dot{x}_4$

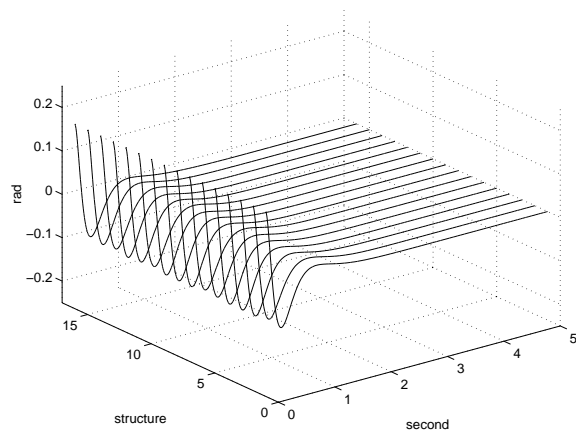


☒ 6.144:  $\dot{x}_5$

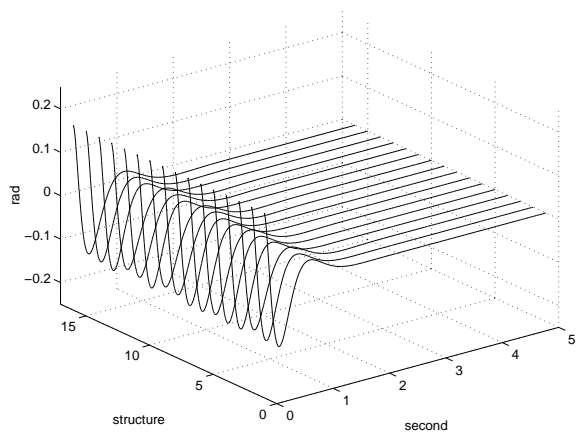
設計法 4, 並列結合構造



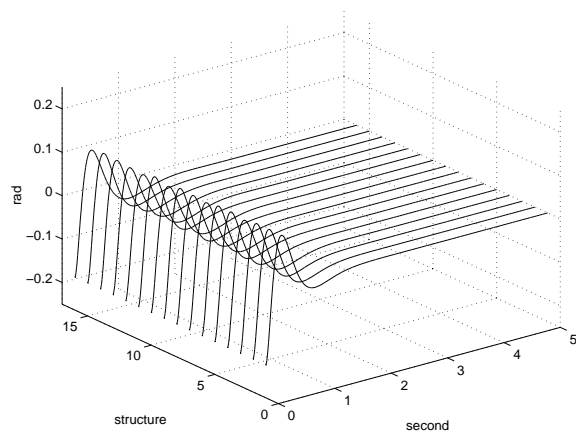
☒ 6.145:  $\theta_1$



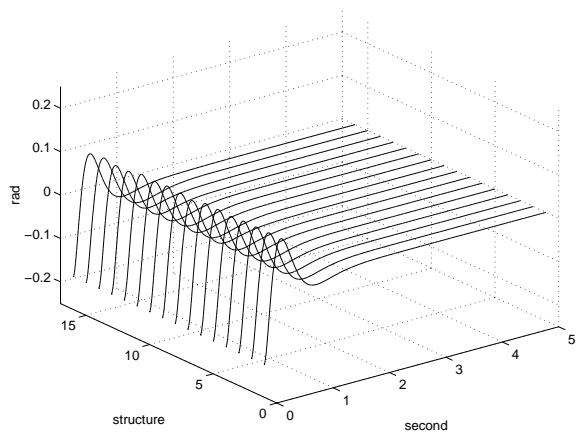
☒ 6.146:  $\theta_2$



☒ 6.147:  $\theta_3$

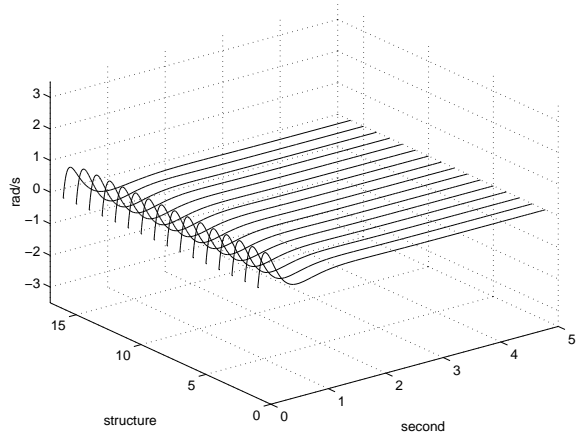


☒ 6.148:  $\theta_4$

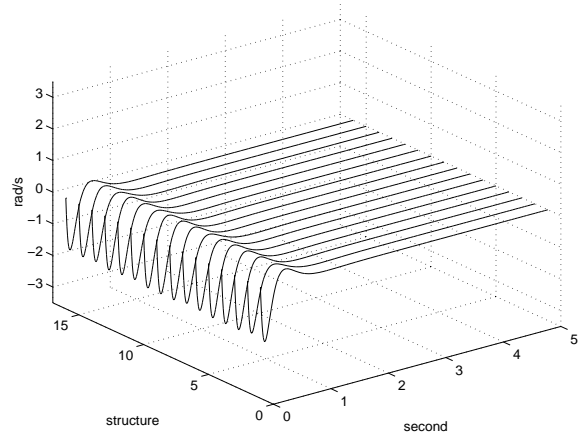


☒ 6.149:  $\theta_5$

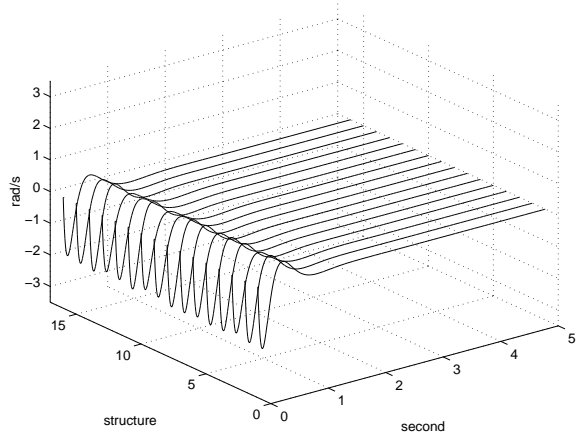
設計法 4, 直列結合構造



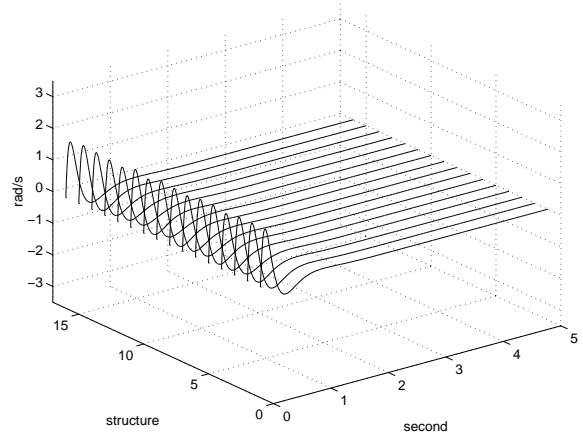
6.150:  $\dot{\theta}_1$



6.151:  $\dot{\theta}_2$



6.152:  $\dot{\theta}_3$



6.153:  $\dot{\theta}_4$

