Title	線形論理とモデルとしてのペトリネットの研究
Author(s)	石原，啓子
Citation	
Issue Date	1997-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1022
Rights	
Description	Supervisor:平石 邦彦，情報科学研究科，修士

線形論理とモデルとしてのペトリネットの研究

石原 啓子

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1997 年 2 月 14 日

キーワード： ペトリネット、線形論理、代数モデル、 健全性、完全性.

歴史的には、ペトリネット (Petri net) の概念は、Carl Adam Petri により定義された (1960-1962). ペトリネットは、多くのシステムに適用可能な視覚的で数学的なモデル化ツールで、並行的、非同期的、分散的、並列的、非決定的、確率的な動作を特徴とする情報処理システムを記述、研究するツールとして有力なものである。またペトリネットにおいて token の配置を変化させていくことにより、システムの並行的でダイナミックな事象をシミュレートすることができる。一方、数学的なツールとしては、システムの挙動を表現する状態方程式や代数方程式その他の数学モデルを立てることが可能である。ペトリネットは、構造的には place 及び transition と呼ばれる 2 種類のノードを持つ 2 部有向グラフである。このシステムの静的で位相的な接続状態を示すペトリネット構造に、システムの動的な性質を示す token を導入したのがペトリネットシステムである。それらは多重集合で表現され (marking と呼ばれる)、プレイスの集合から自然数の集合への写像である [7], [10]。

線形論理 (linear logic) は、J. Y. Girard により提案され (1987)、現在情報科学において最もポピュラーな論理の一つである [3], [4], [13], [14]。線形論理はゲンツェンの LK から派生した体系で、それらの違いは、線形論理は LK から contraction と weakening の規則を取り除いたことにある。直観主義に対するゲンツェンの sequent calculus は、式 A_1, ... , $A_n \to A$ に対しては、論理式 (formula)A_1 ,..., A_n (論理式の列の省略形としては Γ等を用いる) を仮定すると論理式 A が導かれることを意味する。LK には次のような 2 つの構造規則があり、

$$\frac{\Gamma \to B}{\Gamma, A \to B}\ (\text{weakening}),$$

$$\frac{\Gamma, A, A \to B}{\Gamma, A \to B}\ (\text{contraction}),$$

これらの規則により、次の 2 つの規則を導くことができる。

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to A \wedge B}\ (1),$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}\ (2).$$

線形論理では、これらの 2 つの構造規則が存在しないので、(1)、(2) はもはや導くことができない、つまり仮定に命題を任意に加えることも、仮定より重複を取り去ることもできない。こういう意味で、線形論理とは resource conscious logic といわれている。

最近この線形論理とペトリネットとの間の関係を調べる研究がされており、種々の結果が得られている [2], [5], [6]。線形論理は resource conscious な論理であるということより、むしろ並行性を表すのに非常に有効な論理であると考えられている [6]。線形論理において、ペトリネットの place と transition はそれぞれ論理式と証明可能性に関係づけられる [10]。例えば線形論理の $A \to B$ は、A と B はそれぞれ place の名前であり、transition により A の marking から Bの marking に移ることを表している。ペトリネットと線形論理の関係を、線形論理の代数的モデルである quantale [1], [9], [11], [12], [15] を用いて考える。Engberg と Winskel [2] は、直観主義論理のモデルとして、直接ペトリネットから quantale をつくることにより双方の関係を調べた。彼らは、このペトリネットからつくった quantale により、直観主義線形論理とペトリネットモデルに対する健全性は示すことになるが、完全性の証明は示していなかった。

本研究で我々は、ペトリネットからつくられた quantale に対する、直観主義線形論理の完全性を証明した。まず [2] で提案された quantale では完全性が証明できないのは次の理由による。次の式は直観主義線形論理で証明可能である (証明は以下のとおり)。

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C),$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{A \wedge C \to A}\,(\wedge \to) \qquad \dfrac{\dfrac{B \to B}{B \to B \vee C}\,(\to \vee)}{A \wedge B \to B \vee C}\,(\wedge \to)}{A \wedge B \to A \wedge (B \vee C)}\,(\to \wedge) \qquad \dfrac{\dfrac{A \to A}{A \wedge C \to A}\,(\wedge \to) \qquad \dfrac{\dfrac{C \to C}{C \to B \vee C}\,(\to \vee)}{A \wedge C \to B \vee C}\,(\wedge \to)}{A \wedge C \to A \wedge (B \vee C)}\,(\to \wedge)}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)}\,(\vee \to).$$

しかし次の式は、直観主義線形論理で証明することはできない。

$$A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

これは直観主義線形論理では、$\wedge$と$\vee$との間の分配律が成り立たないことによる。[2] の quantale はこの分配律が常に成り立つため、もしこの quantale で完全性が証明できると仮定したら、直観主義線形論理においても分配律が成り立たなければならない。[2] の$\wedge$と$\vee$との間の分配律は、quantale をつくるときの closure のとりかたによる。本研究では、closure のとりかたを変えて分配律が成り立たないような quantale をつくり、それに対す

る直観主義線形論理の完全性を証明した。また、直観主義線形論理に modal operator を加えた体系についての完全性も証明した。

Chapter 2 では、ペトリネットと代数モデルについて概説し [8]、直観主義線形論理のモデルとして quantale を紹介する。また quantale 上での種々の closure oparation についても考察する。またここで、ペトリネットから順序付き可換モノイドを構成する。

Chapter 3 では、直観主義線形論理の syntax と semantics について述べ、ペトリネットからつくられた quantale に対する健全性を示し、[2] の quantale ではなぜ完全性が示せなかったのかを考察する。最後に、ペトリネットより quantale を生成する新たな方法を示し、直観主義線形論理の完全性を証明する。

Chapter 4 では、直観主義線形論理の modal operator of course ! を加えた体系の syntax と semantics について述べ、ペトリネットからつくられた quantale に対する完全性を証明する。

Chapter 5 では、今後の課題として古典線形論理とその代数モデルについて述べ、古典線形論理とペトリネットからつくった classical quantale との関係について考察する。

参考文献

[1] V.M.Abrusci, *Sequent Calculus for Intuitionistic Linear Propositional Logic*, Mathematical Logic, Edited by P.P.Petkov, Plenum Press, New York, (1990), pp.223-242.

[2] U.Engberg and G.Winskel, *Petri Nets as Models of Linear Logic*, LNCS, 431, Springer, (1990), pp.147-161.

[3] J.Y.Girard, *Linear Logic : its syntax and semantics*, Advances in Linear Logic, Edited by J.Y.Girard, Y.Lafont and L.Regnier, (1995), pp.1-42.

[4] J.Y.Girard and Y.Lafont, *Linear Logic and Lazy Computation*, In proc. TAPSOFT 87 (Pisa), vol. 2, Springer-Verlag (LNCS 250), (1987), pp.52-66.

[5] J.Lilius, *High-level Nets and Linear Logic*, LNCS, 612, Springer, (1992), pp.310-327.

[6] Narciso Marti-Oliet and Jose Meseguer. *From Petri Nets to Linear Logic*, In Category Theory and Computer Science, Manchester, UK. Spring-Verlag (LNCS 389), (1989).

[7] 村田忠夫 : ペトリネットの解析と応用 , 近代科学社 , (1992).

[8] H Ono, *Algebraic aspect of logics without structural rules*, in: Contemporary Mathematics, Proceedings of the International Conference on Algebra Honoring A. Mal'cev, Novosibirsk,(1989), L.A. Bokut, Yu.L.Ershov, O.H.Kegel and A.I.Kostrikin eds., American Mathematical Society.

[9] H Ono, *Semantics for Substructural Logics*, in: Substructural logics, Oxford Univ. Press, (1993), pp.259-291.

[10] Wolfgang Reisig, *Petri Nets*, An Introduction, Volume 4 of EATCS Monogaphs on Theoretical Computer Science. Spring-Verlag, (1985).

[11] K.I. Rosenthal, *A note on Girard quantales*, Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle Categoriques 31, 3-11, (1990).

[12] K.I. Rosenthal, *Quantales and their Applications*, Longman Scientific & Technical, (1990).

[13] 竹内外史：線形論理入門，日本評論社，(1995).

[14] A.S.Troelstra *Lectures on Linear Logic*, CSLI, (1991).

[15] D.N.Yetter, *Quantales and (noncommutative) linear logic*, The Journal of Symbolic Logic 55, 41-64, (1990).