

Title	粘弾性脚を持つ歩行ロボットの歩容生成と不整地適応に関する研究
Author(s)	河本, 隼治
Citation	
Issue Date	2012-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/10400">http://hdl.handle.net/10119/10400</a>
Rights	
Description	Supervisor:浅野文彦, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

粘弾性脚を持つ歩行ロボットの歩容生成と不整地  
適応に関する研究

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報科学専攻

河本 隼治

2012年3月

## 修士論文

# 粘弾性脚を持つ歩行ロボットの歩容生成と不整地 適応に関する研究

指導教官 浅野 文彦 准教授

審査委員主査 浅野 文彦 准教授  
審査委員 丁 洛榮 教授  
審査委員 前園 涼 准教授

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報科学専攻

1010019 河本 隼治

提出年月: 2012年2月

## 概要

本論文では、脚に粘弾性要素を付加することで生み出される順応性を利用した、両脚支持期を含むリミットサイクル型歩行の運動特性について論ずる。また、段差乗り越えと柔軟路面踏破などの不整地適応能力についても検討する。

# 目次

第1章	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	研究の目的	2
1.3	本論文の構成	2
第2章	粘弾性脚を持つ Rimless wheel の受動歩行	3
2.1	仕様	3
2.2	数学モデルの導出	3
2.2.1	運動方程式	4
2.2.2	立脚相における拘束条件式	5
2.2.3	衝突方程式	7
2.3	数値シミュレーション	8
第3章	上体の付加	12
3.1	仕様	12
3.2	数学モデルの導出	13
3.2.1	運動方程式	13
3.2.2	立脚相における拘束条件式	14
3.2.3	衝突方程式	16
3.2.4	制御入力	17
3.3	数値シミュレーション	17
第4章	2脚モデルへの拡張	22
4.1	仕様	22
4.2	数学モデルの導出	23
4.2.1	運動方程式	23
4.2.2	立脚相における拘束条件式	23
4.2.3	衝突方程式	25
4.2.4	制御入力	25
4.3	数値シミュレーション	27

第5章	段差踏破	31
5.1	段差モデル	31
5.2	数値シミュレーション	32
5.3	実験的検証	34
5.3.1	実験器	34
5.3.2	実験	34
第6章	柔軟路面踏破	37
6.1	柔軟路面モデル	37
6.1.1	運動方程式	37
6.1.2	立脚相における拘束条件式	38
6.1.3	衝突方程式	40
6.2	数値シミュレーション	42
第7章	結論	45
7.1	結論	45
7.2	今後の予定	45
	参考文献	47
	付録A 運動方程式の詳細	48

# 第1章 序論

## 1.1 研究背景

1990年にMcGeerによって提唱された受動歩行[1]に代表されるリミットサイクルを規範としたアプローチは、高効率な歩行運動を実現する有効な手段として注目されている。受動歩行とは、動力源を一切持たない単純な構造のロボットが緩やかな斜面を歩き下る現象である。ロボットが持つ力学的特性を積極的に利用することで、まるで人間が歩いているかのような「自然な」歩行を生成することが可能である。歩行運動は人間の体の形状が持つ力学的特性によって生まれる受動的な現象であり、複雑な制御系設計に依らず、系のダイナミクスを活用することで容易に生成できることが示され、多くの研究者が受動歩行ロボットについて研究・開発を行なってきた[2][3]。

実用的な歩行ロボットの不可欠な条件として、コンクリートなどの整った路面から、砂地・泥地などの様々な悪条件を持つ路面にまで幅広く適応し、安定な歩行運動を継続する技能を持つことが挙げられる。これまでに行われてきた受動歩行研究においては、遊脚と床面との衝突に関して、

- (a) 遊脚（前脚）先端が接地する際、非弾性衝突により跳ね返ることなく床面に拘束される
- (b) 同時に前支持脚（後脚）は速やかに床面から離れ、無時間的に支持脚交換が完了する

という仮定をおくのが常であり、運動方程式は単脚支持状態（Single-limb support；以下SLS）のみを考慮したものとなっていた。そして、これに非弾性衝突式により定まる状態の更新則を加えることで、精密な数学モデルが導出されたと認識していた。しかし、SLSのみを考慮したモデルでは、コンクリートのように堅く整った路面では安定歩容を生成できるが、砂地や泥地などの柔らかい路面では同じ制御則での歩容生成が難しいという問題があった。そして、人間の歩行は約65%の立脚相と約35%の遊脚相から形成されており、このサイクルの中で両脚支持状態（Double-limb support；以下DLS）は約10%を占めることが知られていることから[4][5][6]、SLSのみの受動歩行が人間に近い自然な歩行形態であるとする主張に対しても、しばしば批判がなされてきた。受動歩行ロボットの不整地適応能力の低さは、これまで幾度も指摘されてきた大きな弱点であり、脚の順応性やDLSの影響を無視した数学モデルが、人間の歩行運動原理を知る手段として妥当であるかという議論は、収束しないまま現在に至っている。

これらの問題を解決する一つの方法として、粘弾性脚の順応性の利用が考えられる。脚の順応性は人間が安定かつ多様な歩行運動を実現する上で不可欠な要素であり、ロボットのリミットサイクル型動歩行においてもその効果を発揮するものと期待される。以上の観点から本研究では、粘弾性脚の順応性が生み出す DLS の効果の深い数理解理解を通して、適応的かつ高性能なリミットサイクル型動歩行の設計論の構築を目指す。理論と実験の両面から DLS を持つリミットサイクル型動歩行を精密に定式化し、これに内在する力学的特性を有効かつ最大限に引き出す制御則の設計を行う。

## 1.2 研究の目的

本研究の目的は、歩行ロボットの脚に粘弾性要素を付加することで生み出される順応性を利用し、DLS の生成を通して不整地に適応する歩容を実現することである。

歩行ロボットには、最も簡単な歩行系である Rimless wheel (以下 RW) および 2 脚ロボットを用いる。従来のリミットサイクル型歩行研究では、支持脚交換の衝突が瞬間的に行われるモデルが用いられていた。これに対し本研究では、粘弾性要素を持つ遊脚が床面と衝突する際に順応し、更にこれが収縮することによって DLS が現れるモデルを考案する。そして、このモデルに上体と駆動力を付加することによって、平地歩行の実現を試みる。最後に多様な不整地への適応能力の考察を行う。

## 1.3 本論文の構成

本論文は、本章を含めて 7 章から構成される。第 2 章では、粘弾性脚を持つ RW の数学モデルの導出し、運動特性の解析を行う。第 3 章では、第 2 章で導出した数学モデルに上体を付加し、平地歩行の実現を試みる。第 4 章では、2 脚モデルへと拡張し、平地歩行の実現を試みる。第 5 章、第 6 章では、段差と柔軟路面を用いて不整地適応能力について検討する。第 7 章では、本論文で述べる研究の内容とその成果を総括する。また、残された今後の研究課題についても述べる。

## 第2章 粘弾性脚を持つ Rimless wheel の受動歩行

本章では粘弾性脚を持つ Rimless wheel の受動歩行を生成し，運動解析を行う．解析は数値シミュレーションによって行い，ソフトウェアには MATLAB を使用する．

### 2.1 仕様

本章では図 2.1 に示す粘弾性脚を持つ RW を扱う．数値シミュレーションにおいて以下の仮定をおく．

- 動力源を持たない完全受動型である．
- 脚と地面との接地点は滑らない．
- 脚フレームの直動関節には粘弾性要素を持つ．
- 脚先端フレームの質量を  $m$  [kg]，本体の質量を  $m_H$  [kg] とする．
- 全ての隣り合う脚フレーム間の相対角度を  $\alpha = \pi/4$  [rad] (=45 [deg]) とする（対称形状）．
- 両脚支持状態における前脚を Leg 1，後脚を Leg 2 と呼ぶ．
- 伸縮運動は Leg 1, 2 のみ行い，他の 6 脚は弾性力によりストッパーに固定されたまま動かない．また，このときの長さを  $L_0$  [m] とする．

### 2.2 数学モデルの導出

Lagrange 方程式により数学モデルを導出する．受動歩行のようなリミットサイクルを規範とした歩行は，支持脚の接地点を支点に運動する立脚相と，遊脚が衝突し支持脚交換が起こる衝突相とが連続して繰り返されることになる．このため，立脚相における運動方程式の導出と，衝突相における衝突方程式の導出が必要となる．

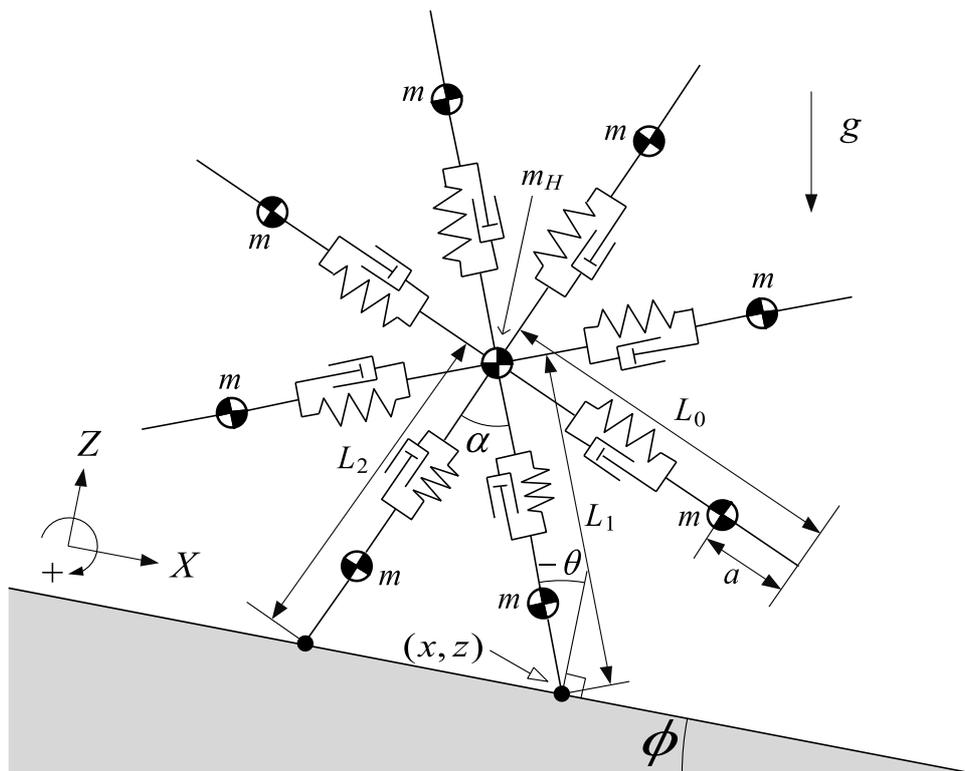


図 2.1: 粘弾性脚を持つ Rimless wheel

一般化座標ベクトル  $q$  は  $q^T = [x \ z \ \theta \ L_1 \ L_2]$  とする． $(x, z)$  は Leg 1 の脚先端位置の座標， $\theta$  [rad] は Leg 1 の角度， $L_1$  [m] および  $L_2$  [m] はそれぞれ Leg 1 および Leg 2 の長さを表す．

### 2.2.1 運動方程式

運動方程式は Lagrange 方程式により，以下のように表される．

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}, \phi) = \tau_{ve}(q, \dot{q}) + J(q)^T \lambda \quad (2.1)$$

$$J(q)\dot{q} = 0 \quad (2.2)$$

ここで， $\tau_{ve}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^5$  は Leg 1 と Leg 2 に作用する粘弾性力であり， $J(q)^T \lambda \in \mathbb{R}^5$  はホロノミック拘束力である．また，式 (2.2) はホロノミック拘束の速度拘束条件式であり，ヤコビアン  $J(q)$  は状況に応じて切り替わるものである．式 (2.1)(2.2) から未定乗数ベクトル  $\lambda$  を消去すると，次のように整理される．

$$M(q)\ddot{q} = Y(q) (\tau_{ve}(q, \dot{q}) - h(q, \dot{q}, \phi)) - J(q)^T X(q)^{-1} \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} \quad (2.3)$$

$$Y(q) := I_5 - J(q)^T X(q)^{-1} J(q) M(q)^{-1} \quad (2.4)$$

ここで  $X(\mathbf{q}) := \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{q})^T$  であり, 粘弾性力  $\tau_{ve}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  は次式で定まるものである.

$$\tau_{ve}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -k(L_1 - L^*) - c\dot{L}_1 \\ -k(L_2 - L^*) - c\dot{L}_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

ただし,  $k$  [N/m] は弾性係数,  $c$  [N·s/m] は粘性係数,  $L^*$  [m] はバネの自然長である. 慣性行列  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ , コリオリ力・中心力項に重力項を加えたベクトル  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^5$  の詳細は付録に記載する.

### 2.2.2 立脚相における拘束条件式

粘弾性脚を持つ RW の受動歩行運動は, 次の 5 つの相から構成され (図 2.2 参照), 1 ~ 5 の順序で遷移しない歩行は全て歩行不成立とみなした (整定条件).

1. 衝突相 I (Leg 1 と床面との衝突)
2. 立脚相・両脚支持期 (1 自由度)
3. 立脚相・単脚支持期 I (3 自由度)
4. 衝突相 II (Leg 2 のストッパーへの衝突)
5. 立脚相・単脚支持期 II (2 自由度)

ホロノミック拘束の速度拘束条件のヤコビアン  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  は, 立脚相である 2, 3, 5 の 3 つの状況によってそれぞれ異なる. 各拘束条件式の詳細を以下に述べる.

#### 両脚支持期

次の 2 条件:

- (A) Leg 1 の先端位置が床面に滑らずに接している
- (B) Leg 2 の先端位置が床面に滑らずに接している

から 4 つの速度拘束条件式が導かれ, これらをまとめるとヤコビアンが

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_4(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & J_{33} & \sin \theta & J_{35} \\ 0 & 1 & J_{43} & \cos \theta & J_{45} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

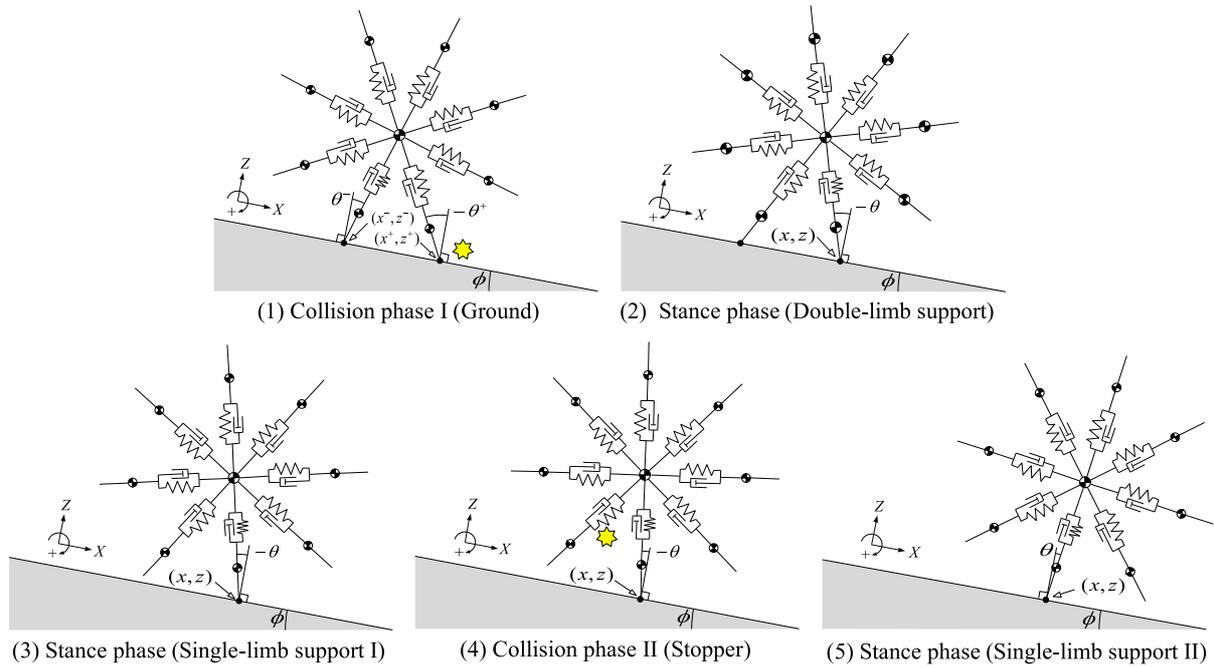


図 2.2: 運動の遷移

と求まる．ただし，

$$\begin{aligned}
 J_{33} &= L_1 \cos \theta - L_2 \cos(\theta + \alpha), & J_{35} &= -\sin(\theta + \alpha) \\
 J_{43} &= -L_1 \sin \theta - L_2 \sin(\theta + \alpha), & J_{45} &= -\cos(\theta + \alpha)
 \end{aligned}$$

である．この相では 5 自由度のシステムに 4 つの拘束が加わっているため，実質的に 1 自由度の運動となる．このとき中心点の軌道は，股角度が  $\pi/4$  [rad] のまま一定であるため，一つの円周上を移動することになる [7]．

ホロノミック拘束力は

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{J}_1^T \lambda_1 + \mathbf{J}_2^T \lambda_2 + \mathbf{J}_3(\mathbf{q})^T \lambda_3 + \mathbf{J}_4(\mathbf{q})^T \lambda_4 \quad (2.7)$$

と分解される．Leg 1 の脚先に作用する床反力の斜面に垂直な方向成分は  $\lambda_2$ ，Leg 2 のそれは  $\lambda_4$  となる．Leg 2 が床面から浮上する瞬間は， $\lambda_4$  の符号を観測することで検知することができる．

### 単脚支持期 I

ここでは条件 (A) のみが作用するため，ヤコビアンは

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

となる．

## 単脚支持期 II

ここでは

(C) 弾性力により Leg 2 が伸び切ったまま動かない

という条件が付加される．これは数学的に  $\dot{L}_2 = 0$  で与えられるため，ヤコビアンは式 (2.8) にこの条件を加えた次式となる．

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

### 2.2.3 衝突方程式

Leg 1 の床面との衝突

非弾性衝突モデルを解く前に衝突直前の状態量  $\mathbf{q}^-$ ,  $\dot{\mathbf{q}}^-$  を，Leg 1 と Leg 2 を次のそれへと置き換えた  $\mathbf{q}^\dagger$ ,  $\dot{\mathbf{q}}^\dagger$  に修正する必要がある．具体的には以下のように定まる．

$$\mathbf{q}^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \theta^- - \alpha \\ L_0 \\ L_1^- \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}^\dagger = \begin{bmatrix} \dot{x}^\dagger \\ \dot{z}^\dagger \\ \dot{\theta}^- \\ 0 \\ \dot{L}_1^- \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\dot{x}^\dagger = \dot{x}^- + (L_1^- \cos \theta^- - L_0 \cos(\alpha - \theta^-)) \dot{\theta}^- + \dot{L}_1 \sin \theta^- \quad (2.11)$$

$$\dot{z}^\dagger = \dot{z}^- - (L_1^- \sin \theta^- + L_0 \sin(\alpha - \theta^-)) \dot{\theta}^- + \dot{L}_1 \cos \theta^- \quad (2.12)$$

次の仮定

(D) Leg 1 は非弾性衝突により接地するが Leg 2 も離陸せず床面上に留まる

の下で，以下の非弾性衝突モデルを適用する．

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}^\dagger) \dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{M}(\mathbf{q}^\dagger) \dot{\mathbf{q}}^\dagger - \mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger)^T \boldsymbol{\lambda}_I \quad (2.13)$$

$$\mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger) \dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{0}_{4 \times 1} \quad (2.14)$$

この場合の拘束条件は (A)(B) の二つであるので， $\mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger) \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$  は式 (2.6) のそれに等しい．式 (2.13)(2.14) を解くことで，衝突直後の速度ベクトルが次のように求まる．

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = (\mathbf{I}_5 - \mathbf{M}(\mathbf{q}^\dagger)^{-1} \mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger)^T \mathbf{X}_I(\mathbf{q}^\dagger)^{-1} \mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger)) \dot{\mathbf{q}}^\dagger \quad (2.15)$$

$$\mathbf{X}_I(\mathbf{q}^\dagger) := \mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger) \mathbf{M}(\mathbf{q}^\dagger)^{-1} \mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger)^T \quad (2.16)$$

## Leg 2 のストッパーへの衝突

拘束条件 (C) が衝突直後に成り立つという仮定の下で，非弾性衝突モデルが次のように与えられる．ただし，この瞬間の状態量を  $q_s^-$ ， $\dot{q}_s^-$  とした．

$$M(q_s^-)\dot{q}_s^+ = M(q_s^-)\dot{q}_s^- - J_s^T \lambda_s \quad (2.17)$$

$$J_s \dot{q}_s^+ = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (2.18)$$

この衝突は単脚支持期に起こることを仮定しているため，ヤコビアン  $J_s \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$  は式 (2.9) のそれと同一になる．式 (2.17)(2.18) を解くことで，衝突直後の速度ベクトルが以下のよう求められる．

$$\dot{q}_s^+ = (\mathbf{I}_5 - M(q_s^-)^{-1} J_s^T X_s(q_s^-)^{-1} J_s) \dot{q}_s^- \quad (2.19)$$

$$X_s(q_s^-) := J_s M(q_s^-)^{-1} J_s^T \quad (2.20)$$

なお，この衝突が起こるための必要条件として，バネの自然長  $L^*$  が脚長の基本値  $L_0$  よりも大きいことが必要である．

## 2.3 数値シミュレーション

傾斜角度  $0.30$  [rad] 上における受動歩行のシミュレーション結果を図 2.3，図 2.4 に示す．RW の物理パラメータは表 2.1 のように設定した．

図 2.3 は  $\theta = 0$  [rad]， $L_1 = L_0$  [m]， $L_2 = L_0$  [m]， $\dot{\theta} = 0$  [rad/s]， $\dot{L}_1 = 0$  [m/s]， $\dot{L}_2 = 0$  [m/s] の姿勢から開始したときの位相平面図であり，図 2.4 は定常歩行時における，(a) が支持脚角度の，(a) が Leb 1・Leg 2 の長さの，(a) が Leb 1・Leg 2 の床反力の，(a) が Leg 2 の脚先端位置の時間変化を示している．図 2.3，図 2.4(a)(b) より，1 周期の定常歩行へ収束していることが分かる．図 2.5 は Leg 1 と Leg 2 のスティック線図である．他に以下の特徴が観測された．

- 1 サイクルの半分以上（約 53 %）を両脚支持期が占めている．
- 床反力の分布は衝突直後から Leg 2（後脚）よりも Leg 1（前脚）へとシフトしている．
- 単脚支持に移行した後，Leg 2 の脚先端位置は単調に上昇している．

図 2.4(c) より，SLS に切り替わる瞬間に  $\lambda_4$  がゼロであるにもかかわらず  $\lambda_2$  が不連続変化を起こしていることが分かるが，これは  $\lambda_3$ （Leg 2 脚先の斜面方向の拘束力）が非ゼロからゼロへとジャンプすることに起因するものである．

$c$  が小さい場合には，Leg 2 が床面から離れた（単脚支持期 II に移行した）直後に伸長し床面に衝突する傾向（パンチング現象の発生）が見られた．図 2.6 は三通りの  $c$  に対す

表 2.1: 物理パラメータおよび粘弾性係数

$m_H$	10.0	kg	$L_0$	1.0	m
$m$	1.0	kg	$L^*$	1.02	m
$\alpha$	$\pi/4$	rad	$k$	500	N/m
$a$	0.3	m	$c$	200	N·s/m

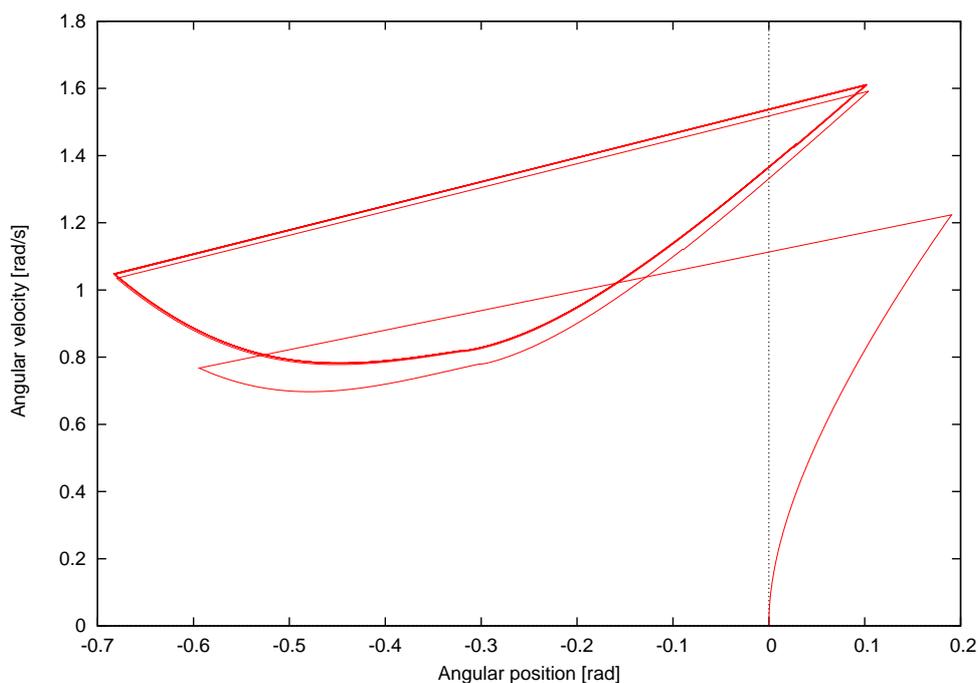
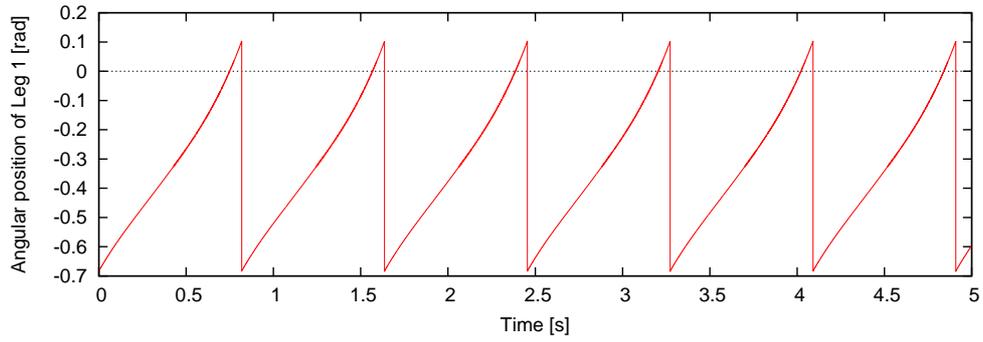


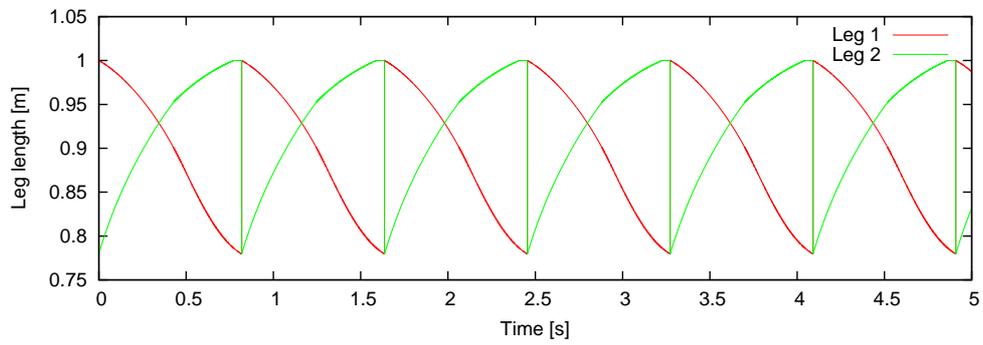
図 2.3: Leg 1 の角度の位相平面図

る定常軌道を比較してプロットしたものである． $c = 200$  [N·s/m] 以外の場合は，パンチング現象が発生している．

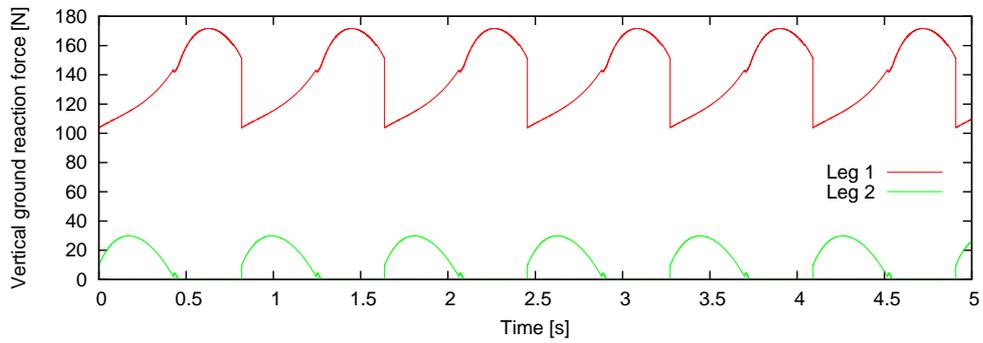
図 2.7 は  $c$  を 3 通りに設定して Leg 2 の床反力の垂直方向成分をプロットしたものである． $c$  が大きくなるにつれて衝突直後の値がゼロに近づいている様子が分かる． $c$  を 200 [N·s/m] よりも更に大きくしていけば値がゼロに到達し，衝突直後に Leg 2 が床面から拘束を受けることができなくなる．この結果，全ての床反力は Leg 1 に集中し，Leg 2 は床面から離れることになる．これが従来の非弾性衝突モデルにより生成される支持脚交換運動に相当するものと考えられる． $c$  が大きいということは，脚フレームの瞬間剛性が高いことを意味する，つまり伸縮自由度を持つが高剛性である脚フレームの場合には，従来のゼロ時間非弾性衝突モデルが妥当ということになる．



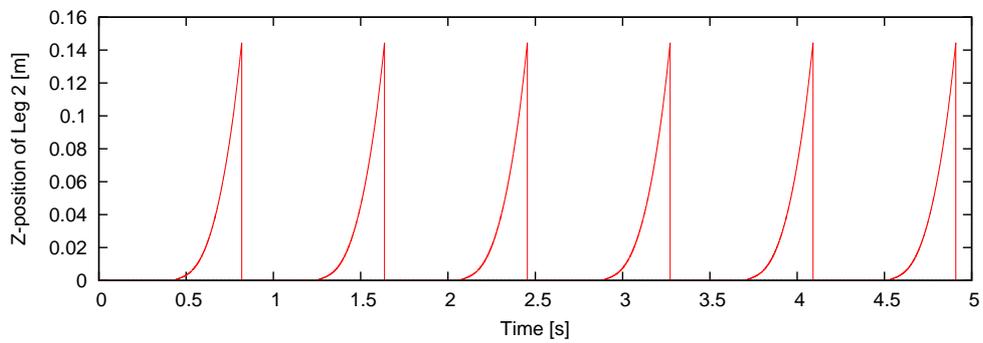
(a) Leg 1 の角度



(b) Leg 1/Leg 2 の長さ



(c) 床反力



(d) Leg 2 の脚先端位置の Z 座標

図 2.4: 受動歩行のシミュレーション結果

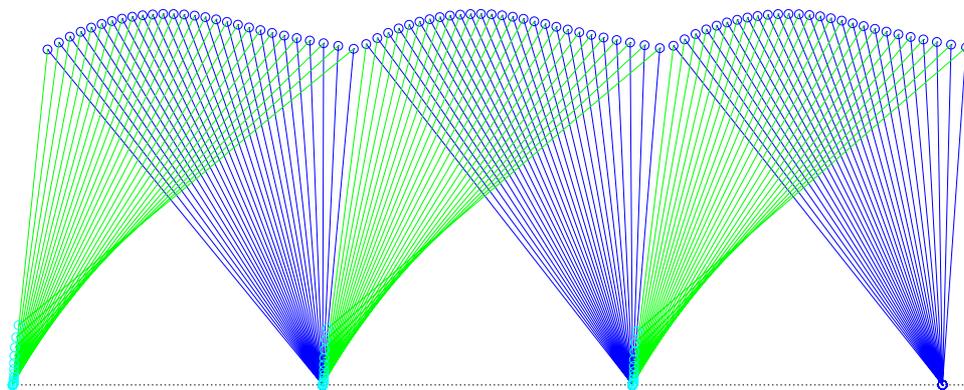


図 2.5: 定常歩行のスティック線図

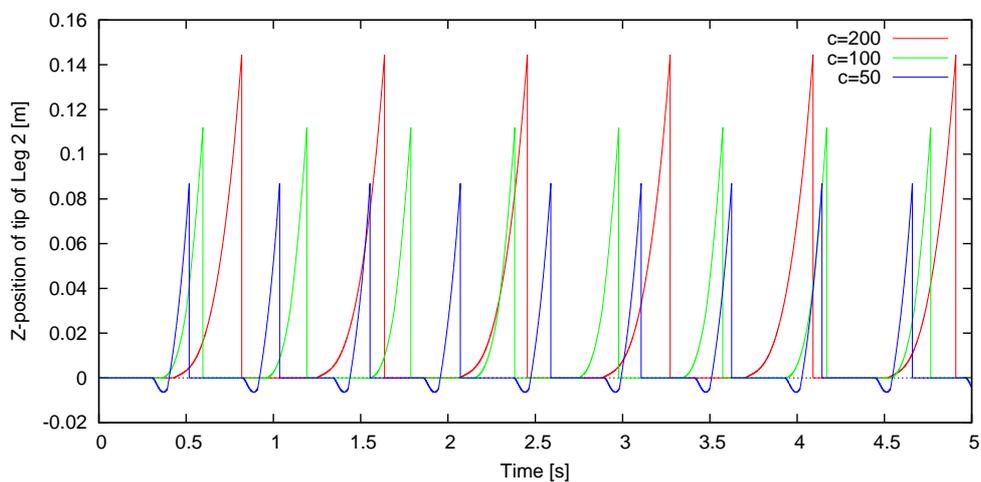


図 2.6: Leg 2 の脚先端位置の  $z$  座標の時間変化

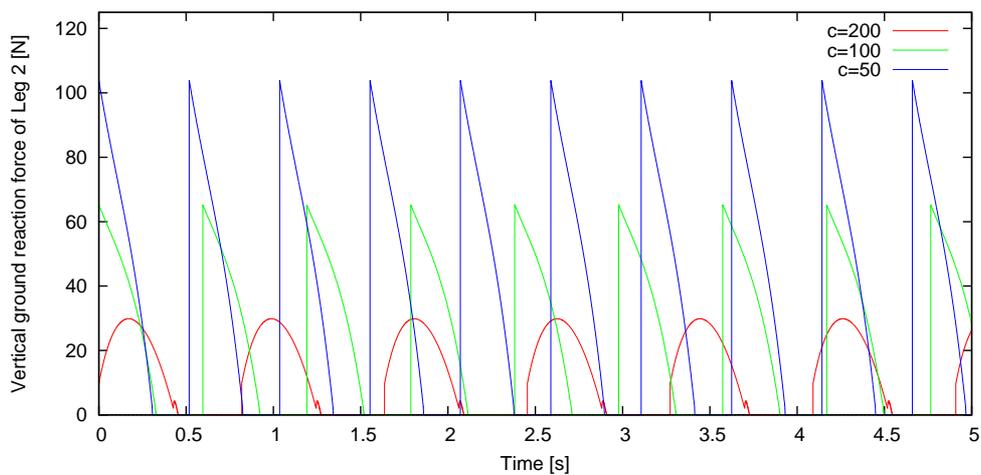


図 2.7: Leg 2 の垂直床反力の時間変化



## 3.2 数学モデルの導出

第2章と同様に Lagrange 方程式により，数学モデルを導出する．立脚相における運動方程式と衝突相における衝突方程式それぞれについて導出する．

一般化座標ベクトル  $\mathbf{q}$  は  $\mathbf{q}^T = [x \ z \ \theta \ \psi \ L_1 \ L_2]$  とする． $(x, z)$  は Leg 1 の脚先端位置の座標， $\theta$  [rad] は Leg 1 の角度， $\psi$  [rad] は上体の角度， $L_1$  [m] および  $L_2$  [m] はそれぞれ Leg 1 および Leg 2 の長さを表す．

### 3.2.1 運動方程式

運動方程式は Lagrange 方程式により，以下のように表される．

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = S\mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_{ve}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

ただし，

$$S\mathbf{u} = [0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0]^T \mathbf{u} \quad (3.3)$$

は制御入力ベクトルであり， $\boldsymbol{\tau}_{ve}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^6$  は Leg 1 と Leg 2 に作用する粘弾性力， $\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^6$  はホロノミック拘束力である．式 (3.2) はホロノミック拘束の速度拘束条件式であり，ヤコビアン  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  は状況に応じて切り替わるものである．式 (3.1)(3.2) から未定乗数ベクトル  $\boldsymbol{\lambda}$  を消去すると，次のように整理される．

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Y}(\mathbf{q})(S\mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_{ve}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) - \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{X}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}) := \mathbf{I}_6 - \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{X}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q}) M(\mathbf{q})^{-1} \quad (3.5)$$

ここで， $\mathbf{X}(\mathbf{q}) := \mathbf{J}(\mathbf{q}) M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q})^T$  であり，粘弾性力  $\boldsymbol{\tau}_{ve}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  は次式で定まるものである．

$$\boldsymbol{\tau}_{ve}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ -k(L_1 - L^*) - c\dot{L}_1 \\ -k(L_2 - L^*) - c\dot{L}_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

ただし， $k$  [N/m] は弾性係数， $c$  [N·s/m] は粘性係数， $L^*$  [m] はバネの自然長である．慣性行列  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ，コリオリ力・中心力項に重力項を加えたベクトル  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^6$  の詳細は付録に記載する．

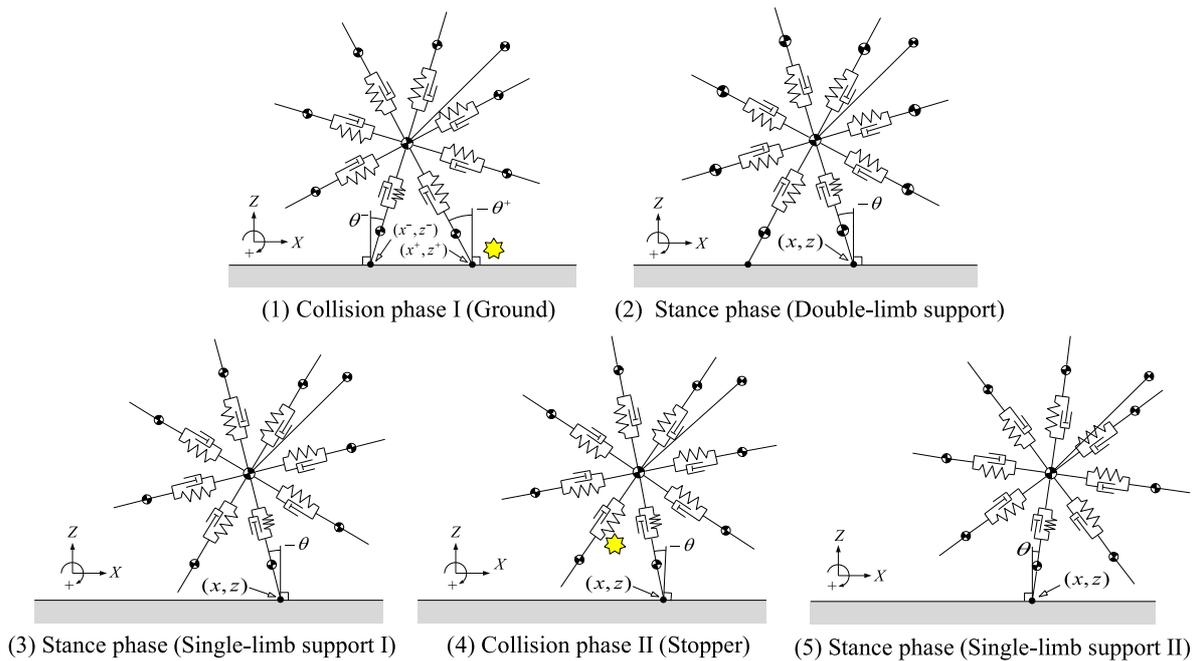


図 3.2: 運動の遷移

### 3.2.2 立脚相における拘束条件式

粘弾性脚を持つ RW の歩行運動は、次の 5 つの相から構成され ( 図 3.2 参照 ) , 1 ~ 5 の順序で遷移しない歩行は全て歩行不成立とみなした ( 整定条件 ) .

1. 衝突相 I ( Leg 1 と床面との衝突 )
2. 立脚相・両脚支持期 ( 2 自由度 )
3. 立脚相・単脚支持期 I ( 4 自由度 )
4. 衝突相 II ( Leg 2 のストッパーへの衝突 )
5. 立脚相・単脚支持期 II ( 3 自由度 )

ホロノミック拘束の速度拘束条件のヤコビアン  $J(q)$  は、立脚相である 2 , 3 , 5 の 3 つの状況によってそれぞれ異なる . 各拘束条件式の詳細を以下に述べる .

#### 両脚支持期

次の 2 条件 :

- (A) Leg 1 の先端位置が床面に滑らずに接している
- (B) Leg 2 の先端位置が床面に滑らずに接している

から4つの速度拘束条件式が導かれ、これらをまとめるとヤコビアンが

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_4(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & J_{33} & 0 & \sin \theta & J_{36} \\ 0 & 1 & J_{43} & 0 & \cos \theta & J_{46} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

と求まる。ただし、

$$\begin{aligned} J_{33} &= L_1 \cos \theta - L_2 \cos(\theta + \alpha), & J_{36} &= -\sin(\theta + \alpha) \\ J_{43} &= -L_1 \sin \theta - L_2 \sin(\theta + \alpha), & J_{46} &= -\cos(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

である。

ホロノミック拘束力は

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{J}_1^T \lambda_1 + \mathbf{J}_2^T \lambda_2 + \mathbf{J}_3(\mathbf{q})^T \lambda_3 + \mathbf{J}_4(\mathbf{q})^T \lambda_4 \quad (3.8)$$

と分解される。Leg 1の脚先に作用する床反力の斜面に垂直な方向成分は $\lambda_2$ 、Leg 2のそれは $\lambda_4$ となる。Leg 2が床面から浮上する瞬間は、 $\lambda_4$ の符号を観測することで検知することができる。

### 単脚支持期 I

ここでは条件 (A) のみが作用するため、ヤコビアンは

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

となる。

### 単脚支持期 II

ここでは

(C) 弾性力により Leg 2 が伸び切ったまま動かない

という条件が付加される。これは数学的に $\dot{L}_2 = 0$ で与えられるため、ヤコビアンは式 (3.9) にこの条件を加えた次式となる。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.2.3 衝突方程式

#### Leg 1 の床面との衝突

非弾性衝突モデルを解く前に衝突直前の状態量  $q^-$ ,  $\dot{q}^-$  を, Leg 1 と Leg 2 を次のそれへと置き換えた  $q^\dagger$ ,  $\dot{q}^\dagger$  に修正する必要がある. 具体的には以下のように定まる.

$$q^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \theta^- - \alpha \\ \psi^- \\ L_0 \\ L_1^- \end{bmatrix}, \quad \dot{q}^\dagger = \begin{bmatrix} \dot{x}^\dagger \\ \dot{z}^\dagger \\ \dot{\theta}^- \\ \dot{\psi}^- \\ 0 \\ \dot{L}_1^- \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\dot{x}^\dagger = \dot{x}^- + (L_1^- \cos \theta^- - L_0 \cos(\alpha - \theta^-)) \dot{\theta}^- + \dot{L}_1 \sin \theta^- \quad (3.12)$$

$$\dot{z}^\dagger = \dot{z}^- - (L_1^- \sin \theta^- + L_0 \sin(\alpha - \theta^-)) \dot{\theta}^- + \dot{L}_1 \cos \theta^- \quad (3.13)$$

#### 次の仮定

(D) Leg 1 は非弾性衝突により接地するが Leg 2 も離陸せず床面上に留まる

の下で, 以下の非弾性衝突モデルを適用する.

$$M(q^\dagger)\dot{q}^+ = M(q^\dagger)\dot{q}^\dagger - J_I(q^\dagger)^T \lambda_I \quad (3.14)$$

$$J_I(q^\dagger)\dot{q}^+ = \mathbf{0}_{4 \times 1} \quad (3.15)$$

この場合の拘束条件は (A)(B) の二つであるので,  $J_I(q^\dagger) \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$  は式 (3.7) のそれに等しい. 式 (3.14)(3.15) を解くことで, 衝突直後の速度ベクトルが次のように求まる.

$$\dot{q}^+ = (\mathbf{I}_6 - M(q^\dagger)^{-1} J_I(q^\dagger)^T X_I(q^\dagger)^{-1} J_I(q^\dagger)) \dot{q}^\dagger \quad (3.16)$$

$$X_I(q^\dagger) := J_I(q^\dagger) M(q^\dagger)^{-1} J_I(q^\dagger)^T \quad (3.17)$$

#### Leg 2 のストッパーへの衝突

拘束条件 (C) が衝突直後に成り立つという仮定の下で, 非弾性衝突モデルが次のように与えられる. ただし, この瞬間の状態量を  $q_s^-$ ,  $\dot{q}_s^-$  とした.

$$M(q_s^-)\dot{q}_s^+ = M(q_s^-)\dot{q}_s^- - J_s^T \lambda_s \quad (3.18)$$

$$J_s \dot{q}_s^+ = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (3.19)$$

この衝突は単脚支持期に起こることを仮定しているため, ヤコビアン  $J_s \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  は式 (3.10) のそれと同一になる. 式 (3.18)(3.19) を解くことで, 衝突直後の速度ベクトルが以下のよ

うに求まる．

$$\dot{q}_s^+ = (\mathbf{I}_6 - \mathbf{M}(\mathbf{q}_s^-)^{-1} \mathbf{J}_s^T \mathbf{X}_s(\mathbf{q}_s^-)^{-1} \mathbf{J}_s) \dot{q}_s^- \quad (3.20)$$

$$\mathbf{X}_s(\mathbf{q}_s^-) := \mathbf{J}_s \mathbf{M}(\mathbf{q}_s^-)^{-1} \mathbf{J}_s^T \quad (3.21)$$

なお，この衝突が起こるための必要条件として，バネの自然長  $L^*$  が脚長の基本値  $L_0$  よりも大きいことが必要である．

### 3.2.4 制御入力

制御量として上体の絶対角度  $\psi$  [rad] をとり，それを一定値  $\psi_d$  [rad] で維持するように出力追従制御を行う． $\psi$  の 2 階微分は，式 (3.4) を代入して以下のように表される．

$$\ddot{\psi} = \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}u - \mathbf{B} \quad (3.22)$$

ただし，

$$\mathbf{A} := \mathbf{C} \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{Y}(\mathbf{q}) \mathbf{S} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{B} := \mathbf{C} \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} (\mathbf{Y}(\mathbf{q}) (\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \boldsymbol{\tau}_{ve}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{X}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.24)$$

である． $\psi \rightarrow \psi_d$  を達成するために，制御入力  $u$  は式 (3.22) より以下のように表される．

$$u = \mathbf{A}^{-1}(v + \mathbf{B}) \quad (3.25)$$

$$v = -K_D \dot{\psi} + K_P(\psi_d - \psi) \quad (3.26)$$

ただし， $K_D$ ， $K_P$  はそれぞれ，微分ゲインと比例ゲイン（正定数）である．

## 3.3 数値シミュレーション

上体角度の目標値  $\psi_d$  を  $\pi/4$  [rad] に設定したときの平地歩行におけるシミュレーション結果を図 3.3，図 3.4 に示す．RW の物理パラメータは Table 3.1 のように設定した．図 3.5 は Leg 1，Leg 2 および上体のスティック線図である．

図 3.3 は  $\theta = 0$  [rad]， $\psi = \pi/4$  [rad]， $L_1 = L_0$  [m]， $L_2 = L_0$  [m]， $\dot{\theta} = 0.1$  [rad/s]， $\dot{\psi} = 0$  [rad/s]， $\dot{L}_1 = 0$  [m/s]， $\dot{L}_2 = 0$  [m/s] の姿勢から開始したときの位相平面図であり，図 3.4 はそれぞれ，(a) が Leg 1 の角度の，(b) が Leg 1・Leg 2 の長さの，(c) が Leg 1・Leg 2 の床反力の，(d) が Leg 2 の脚先端位置の，(e) が上体角度の時間変化を示している．図 3.3，図 3.4(a)(b) より，1 周期の定常歩行へ収束していることが確認できる．また，Leg 2 がストッパーの働きによって  $L_0 = 1.0$  [m] で固定されていることも確認できる．(c) より，Leg 1，Leg 2 の両脚に床反力が働いている区間がある．この区間は歩行における DLS であり，Leg 2 から Leg 1 へシフトしている．そして (d) より，DLS から SLS へ移行後，Leg 2 の

表 3.1: 物理パラメータ

$m_T$	10.0	kg	$L_T$	1.0	m
$m_H$	10.0	kg	$L_0$	1.0	m
$m$	1.0	kg	$L^*$	1.02	m
$\alpha$	$\pi/4$	rad	$k$	500	N/m
$a$	0.3	m	$c$	200	N·s/m

脚先端位置は単調に上昇している。つまり、図 3.2 の状態遷移で歩行が生成できていることが確認できる。(e) より、上体の角度は支持脚交換の衝突時に少し変動するものの、 $\pi/4$  [rad] で維持されていることが確認できる。これらの結果から、上体の角度を一定値で維持するように制御することにより、平地において DLS を含む安定な定常歩行が実現できることが分かる。

図 3.6 は五通りの上体長さ  $L_T$  に対して、目標角度  $\psi_d$  を  $\pi/36$  [rad] ずつ変化させ、定常歩行が生成できたときの歩行速度を示している。 $L_T = 0.9$  [m] のときの  $\psi_d = 5\pi/12 \sim 11\pi/18$  [rad] および、 $L_T = 1.0$  [m] のときの  $\psi_d = \pi/3 \sim 25\pi/36$  [rad] の範囲において定常歩行が生成できていないのは、歩行速度が速くなることで「ストッパー衝突後に支持脚交換の衝突が起こる」という整定条件を満たさなくなるためである。その他で定常歩行が生成できていないのは、支持脚交換の衝突直後からの DLS において、床反力が Leg 2 から Leg 1 へ移行しないことによって歩行が継続しなかったためである。図 3.6 から確認できることは、上体の長さが大きくなるにつれて歩行速度が速くなっていることである。また、目標角度が  $\pi/2$  [rad] に近づくにつれて歩行速度が速くなっていることも確認できる。つまり、モーメントを大きくすることによって歩行速度は速くなることが分かる。

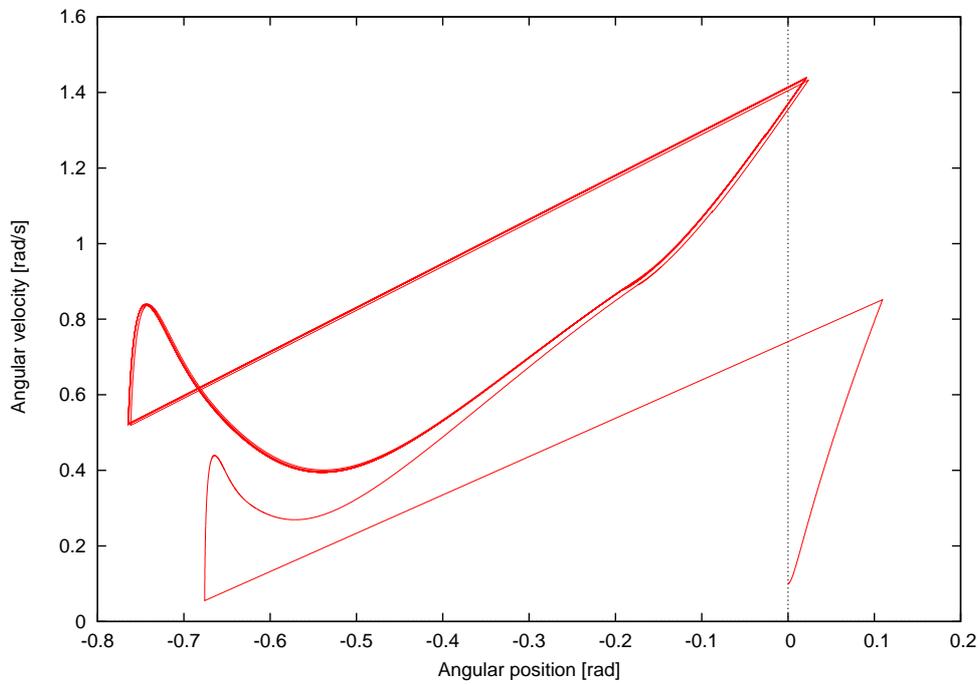
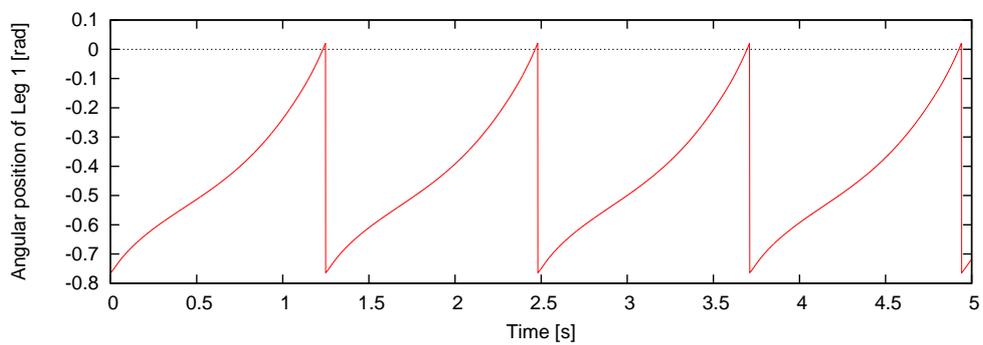
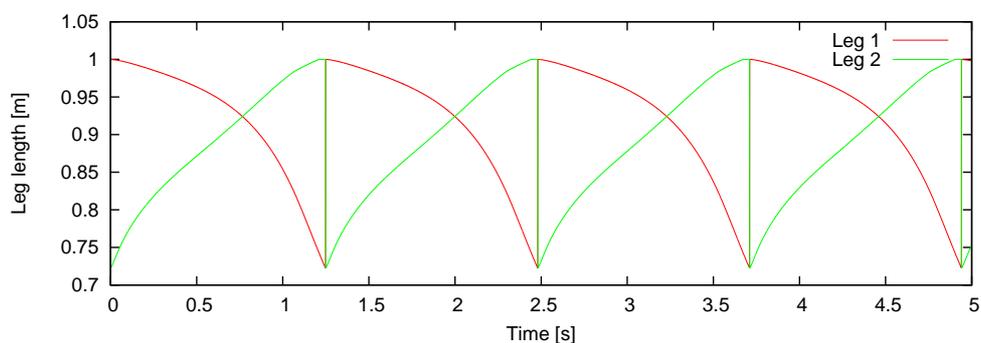


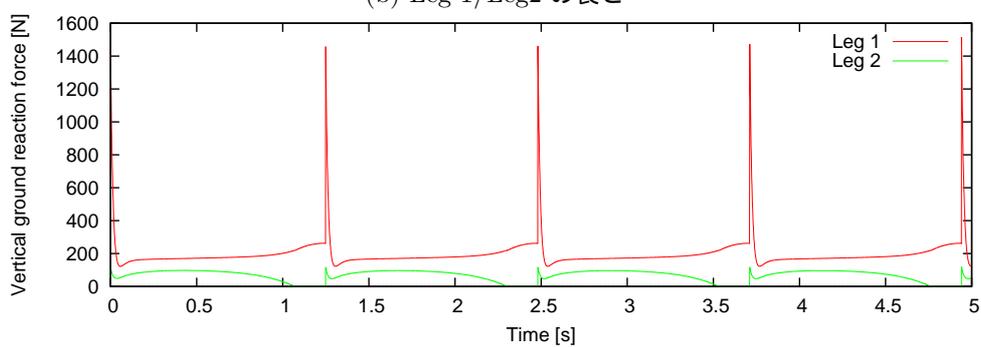
図 3.3: Leg 1 の角度の位相平面図



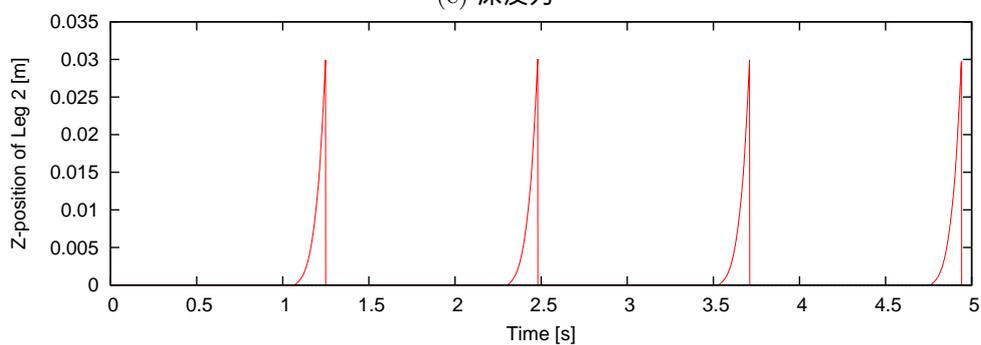
(a) Leg 1 の角度



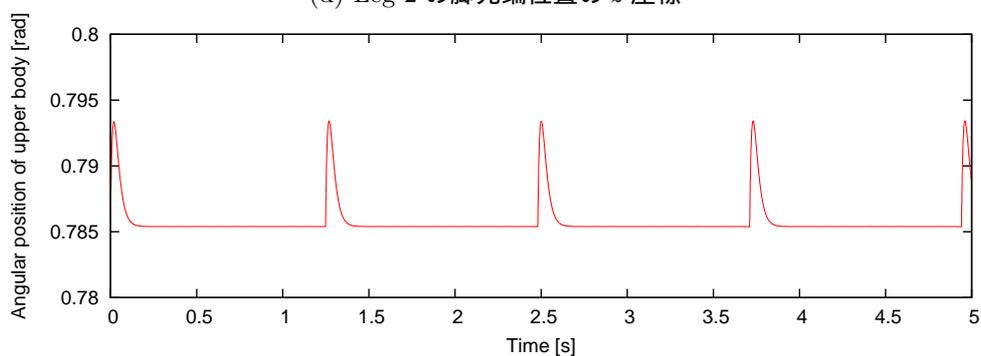
(b) Leg 1/Leg2 の長さ



(c) 床反力



(d) Leg 2 の脚先端位置の z 座標



(e) 上体の角度

図 3.4: 平地歩行のシミュレーション結果

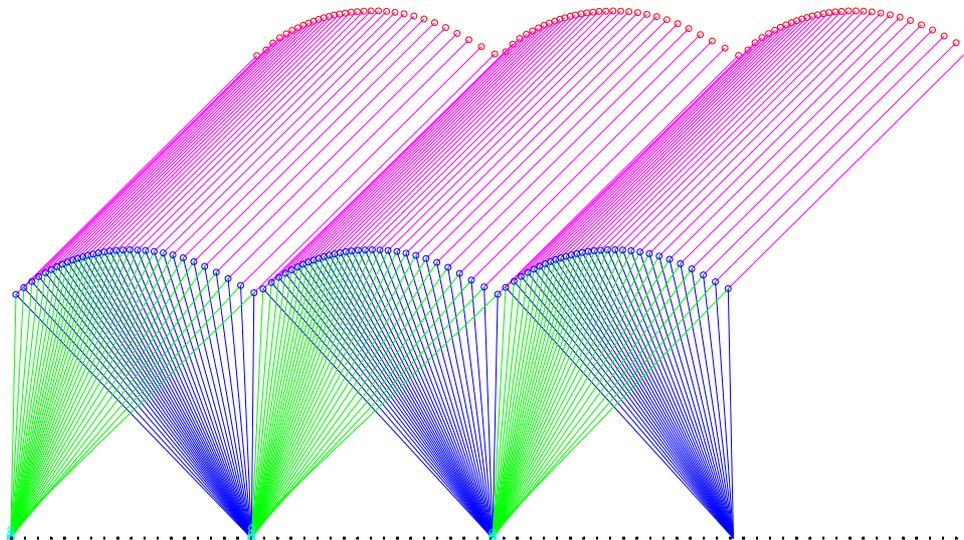


図 3.5: 定常歩行のスティック線図

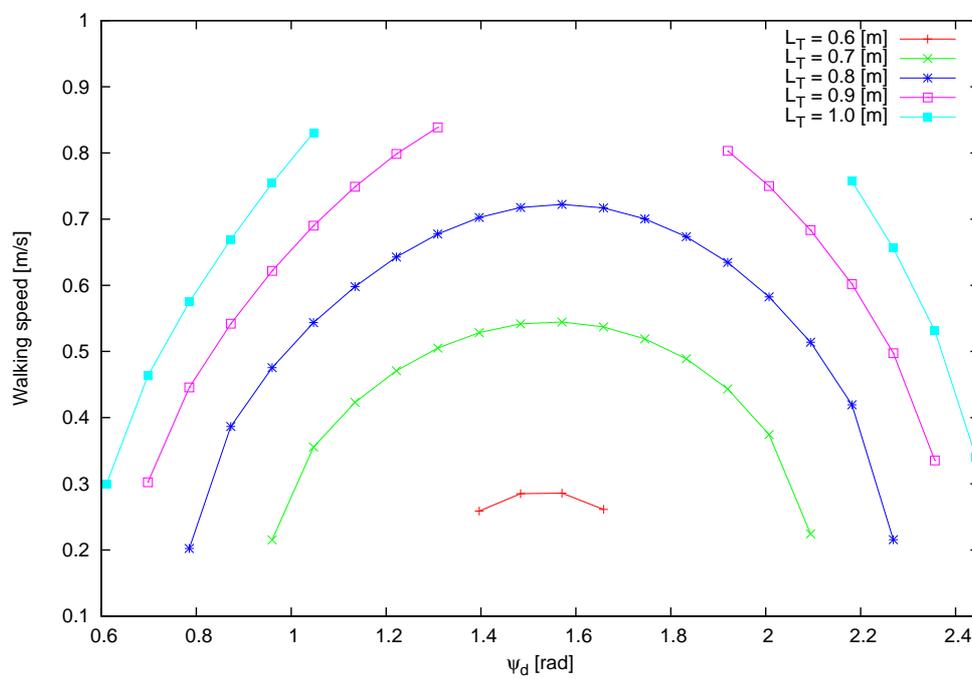


図 3.6: 上体長さ  $L_T$  と目標角度  $\psi_d$  に対する歩行速度の変化

## 第4章 2脚モデルへの拡張

本章は第3章で構築した図3.1のモデルを図4.1に示す2脚モデルへと拡張する。

### 4.1 仕様

本章では図4.1に示す上体と粘弾性脚を持つ2脚ロボットを扱う。2脚モデルではRWとは異なり、遊脚を前方へ振り出さなければならない。そのため、上体と支持脚の間に印加する上体角度を維持する制御トルク  $u_1$  の他に、新たに支持脚と遊脚の間に遊脚を前方へ振り出す制御トルク  $u_2$  を印加する。

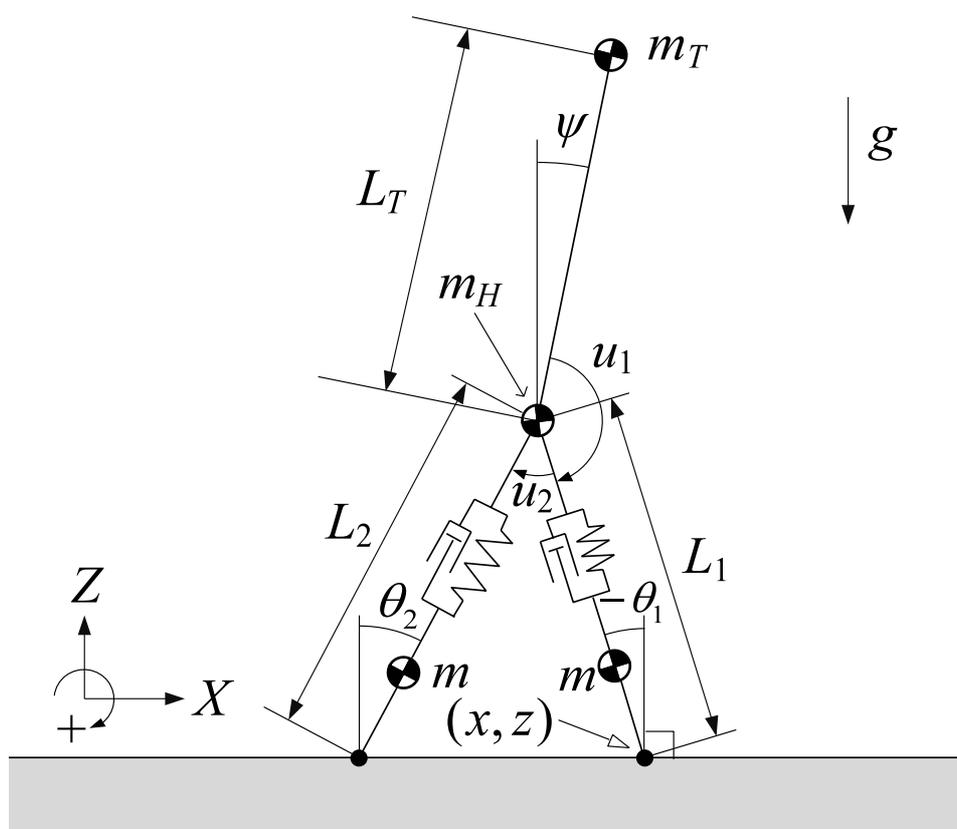


図 4.1: 上体と粘弾性脚を持つ2脚ロボット

## 4.2 数学モデルの導出

3章の一般化座標ベクトルに新たに遊脚の角度を追加して,  $\mathbf{q}^T = [x \ z \ \theta_1 \ \theta_2 \ \psi \ L_1 \ L_2]$  とする.

### 4.2.1 運動方程式

運動方程式は式 (3.1)(3.2) で与えられ, これらより未定乗数ベクトル  $\lambda$  を消去すると, 次のように整理される.

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Y}(\mathbf{q})(S\mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_{ve}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) - \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{X}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}) := \mathbf{I}_7 - \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{X}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q}) M(\mathbf{q})^{-1} \quad (4.2)$$

ここで,  $\mathbf{X}(\mathbf{q}) := \mathbf{J}(\mathbf{q}) M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q})^T$  であり, 支持脚と遊脚に作用する粘弾性力  $\boldsymbol{\tau}_{ve}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  は次式で定まるものである.

$$\boldsymbol{\tau}_{ve}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ -k(L_1 - L^*) - c\dot{L}_1 \\ -k(L_2 - L^*) - c\dot{L}_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

ただし,  $k$  [N/m] は弾性係数,  $c$  [N·s/m] は粘性係数,  $L^*$  [m] はバネの自然長である. 慣性行列  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ , コリオリ力・中心力項に重力項を加えたベクトル  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^7$  の詳細は付録に記載する.

### 4.2.2 立脚相における拘束条件式

2脚モデルも RW と同様に以下の 1~5 の順序で歩行運動が遷移する.

1. 衝突相 I (遊脚と床面との衝突)
2. 立脚相・両脚支持期 (3 自由度)
3. 立脚相・単脚支持期 I (5 自由度)
4. 衝突相 II (遊脚のストッパーへの衝突)
5. 立脚相・単脚支持期 II (4 自由度)

立脚相におけるホロノミック拘束の速度拘束条件のヤコビアン  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  は, それぞれ以下のようになる.

## 両脚支持期

次の2条件：

(A) 支持脚の先端位置が床面に滑らずに接している

(B) 遊脚の先端位置が床面に滑らずに接している

から4つの速度拘束条件式が導かれ、これらをまとめるとヤコビアンが

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_4(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & J_{33} & J_{34} & 0 & \sin \theta_1 & J_{37} \\ 0 & 1 & J_{43} & J_{44} & 0 & \cos \theta_1 & J_{47} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

と求まる。ただし、

$$\begin{aligned} J_{33} &= L_1 \cos \theta_1, & J_{34} &= -L_2 \cos(-\theta_2), & J_{37} &= \sin(-\theta_2) \\ J_{43} &= -L_1 \sin \theta_1, & J_{44} &= -L_2 \sin(-\theta_2), & J_{47} &= -\cos(-\theta_2) \end{aligned}$$

である。

## 単脚支持期 I

ここでは条件 (A) のみが作用するため、ヤコビアンは

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

となる。

## 単脚支持期 II

ここでは

(C) 弾性力により遊脚が伸び切ったまま動かない

という条件が付加される。これは数学的に  $\dot{L}_2 = 0$  で与えられるため、ヤコビアンは式 (4.5) にこの条件を加えた次式となる。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

### 4.2.3 衝突方程式

遊脚の床面との衝突

次の仮定

(D) Leg 1 は非弾性衝突により接地するが Leg 2 も離陸せず床面上に留まる

の下で，式 (3.14)(3.15) の非弾性衝突モデルを適用する．ただし，式中の  $q^\dagger, \dot{q}^\dagger$  をそれぞれ衝突直前の状態量  $q^-, \dot{q}^-$  へと変更する．この2式を解くことで，衝突後の速度ベクトルは次のように求まる．

$$\dot{q}^+ = (\mathbf{I}_7 - \mathbf{M}(q^-)^{-1} \mathbf{J}_I(q^-)^T \mathbf{X}_I(q^-)^{-1} \mathbf{J}_I(q^-)) \dot{q}^- \quad (4.7)$$

$$\mathbf{X}_I(q^-) := \mathbf{J}_I(q^-) \mathbf{M}(q^-)^{-1} \mathbf{J}_I(q^-)^T \quad (4.8)$$

この場合の拘束条件は (A)(B) の二つであるので， $\mathbf{J}_I(q^-) \in \mathbb{R}^{4 \times 7}$  は式 (4.4) のそれに等しい．

遊脚のストッパーへの衝突

SLS へ移行後，遊脚は長さ  $L_0$  [m] でストッパーへ衝突する．

拘束条件 (C) が衝突直後に成り立つという仮定の下で，式 (3.18)(3.19) の非弾性衝突モデルを適用する．この2式を解くことで，衝突後の速度ベクトルは次のように求まる．

$$\dot{q}_s^+ = (\mathbf{I}_7 - \mathbf{M}(q_s^-)^{-1} \mathbf{J}_s^T \mathbf{X}_s(q_s^-)^{-1} \mathbf{J}_s) \dot{q}_s^- \quad (4.9)$$

$$\mathbf{X}_s(q_s^-) := \mathbf{J}_s \mathbf{M}(q_s^-)^{-1} \mathbf{J}_s^T \quad (4.10)$$

この場合の拘束条件は (A)(C) の二つであるので， $\mathbf{J}_s \in \mathbb{R}^{3 \times 7}$  は式 (4.6) のそれに等しい．

### 4.2.4 制御入力

今回の2脚モデルでは上体角度を目標値  $\psi_d$  に維持する制御の他に，新たに遊脚を支持脚の前方へ振り出す制御が加わる．このため，制御入力ベクトルは以下のようになる．

$$\mathbf{S} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$u_1$  は3章と同様に，上体角度を目標値  $\psi_d$  で維持するように出力追従制御を行う． $u_2$  は支持脚と遊脚の間の股角度  $\theta_H = \theta_1 - \theta_2$  [rad] を，設計した目標軌道に収束させることによって，遊脚を支持脚の前方へ振り出すことを考える．

目標軌道として，支持脚と遊脚の間の股角度  $\theta_H$  を，整定時間  $T_{\text{set}}$  [s] の間に  $\theta_{H_s}$  [rad] から  $\theta_{H_e}$  [rad] へ変化させることを考える．なお， $\theta_{H_s}$  は遊脚が地面から離れた直後の角度である．今回は拳動をスムーズなものにするため，目標軌道は5次の時間関数として設定し，目標軌道を設計する．目標軌道を  $\theta_{H_d}$  とおくと，以下のように表せる．

$$\theta_{H_d}(t) = \begin{cases} a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 & (0 \leq t < T_{\text{set}}) \\ \theta_e & (t \geq T_{\text{set}}) \end{cases} \quad (4.12)$$

$T_{\text{set}}$  は先に述べたとおり股角度の整定時間を示すものとする，境界条件は

- $\theta_{H_d}(0) = \theta_{H_s}$
- $\dot{\theta}_{H_d}(0) = \dot{\theta}_{H_s}$
- $\ddot{\theta}_{H_d}(0) = \ddot{\theta}_{H_s}$
- $\theta_{H_d}(T_{\text{set}}) = \theta_{H_e}$
- $\dot{\theta}_{H_d}(T_{\text{set}}) = 0$
- $\ddot{\theta}_{H_d}(T_{\text{set}}) = 0$

と書ける．ただし， $\theta_{H_s}$ ， $\dot{\theta}_{H_s}$ ， $\ddot{\theta}_{H_s}$  は遊脚が地面から離れた直後の状態量であり， $t$  は衝突と同時に毎回0にリセットされ，遊脚が地面から離れた直後から時間がスタートする．これを解くと，境界条件より直ちに  $a_0 = \theta_{H_s}$ ， $a_1 = \dot{\theta}_{H_s}$ ， $a_2 = \ddot{\theta}_{H_s}/2$  が決まり，残りの  $a_3$ ， $a_4$ ， $a_5$  については

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{\text{set}}^5 & T_{\text{set}}^4 & T_{\text{set}}^3 \\ 5T_{\text{set}}^4 & 4T_{\text{set}}^3 & 3T_{\text{set}}^2 \\ 20T_{\text{set}}^3 & 12T_{\text{set}}^2 & 6T_{\text{set}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_{H_e} - \theta_{H_s} - \dot{\theta}_{H_s} T_{\text{set}} - \frac{\ddot{\theta}_{H_s}}{2} T_{\text{set}}^2 \\ -\dot{\theta}_{H_s} - \ddot{\theta}_{H_s} T_{\text{set}} \\ -\ddot{\theta}_{H_s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{12\theta_{H_e} - 12\theta_{H_s} - 6\dot{\theta}_{H_s} T_{\text{set}} - \ddot{\theta}_{H_s} T_{\text{set}}^2}{2T_{\text{set}}^5} \\ \frac{-30\theta_{H_e} + 30\theta_{H_s} + 16\dot{\theta}_{H_s} T_{\text{set}} + 3\ddot{\theta}_{H_s} T_{\text{set}}^2}{2T_{\text{set}}^4} \\ \frac{20\theta_{H_e} - 20\theta_{H_s} - 12\dot{\theta}_{H_s} T_{\text{set}} + 3\ddot{\theta}_{H_s} T_{\text{set}}^2}{2T_{\text{set}}^3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

によって導出される．

目標軌道が設計できたので，制御対象である股角度  $\theta_H$  を拳動をこれに追従させる．システムの出力を  $\mathbf{y} = [\psi \ \theta_1 - \theta_2]^T$  とおと， $\mathbf{y}$  の2階微分は，式(4.1)を代入して以下のように表される．

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{B} \quad (4.14)$$

ただし，

$$A := CM(\mathbf{q})^{-1}Y(\mathbf{q})S \quad (4.15)$$

$$B := CM(\mathbf{q})^{-1}(Y(\mathbf{q})(\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \boldsymbol{\tau}_{ve}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{X}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.16)$$

である．上体角度  $\psi$ ，股角度  $\theta_H$  それぞれの軌道を達成するために，制御入力  $\mathbf{u}$  は式 (4.14) より以下のように表される．

$$\mathbf{u} = A^{-1}(\mathbf{v} + B) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_D \dot{\psi} + K_P(\psi_d - \psi) \\ \ddot{\theta}_{Hd} + K_D(\dot{\theta}_{Hd} - \dot{\theta}_H) + K_P(\theta_{Hd} - \theta_H) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

ただし， $K_D$ ， $K_P$  はそれぞれ，微分ゲインと比例ゲイン（正定数）である．

### 4.3 数値シミュレーション

上体角度の目標値  $\psi_d$  を  $\pi/12$  [rad] に設定したときの平地歩行におけるシミュレーション結果を図 4.2，図 4.3 に示す．シミュレーションにおけるパラメータは表 4.1 のように設定した．

図 4.2 は  $\theta_1 = -\pi/9$  [rad]， $\theta_2 = \pi/9$  [rad]， $\psi = 2\pi/9$  [rad]， $L_1 = 0.9$  [m]， $L_2 = 0.9$  [m]， $\dot{\theta}_1 = 0$  [rad/s]， $\dot{\theta}_2 = 0$  [rad/s]， $\dot{\psi} = 0$  [rad/s]， $\dot{L}_1 = 0$  [m/s]， $\dot{L}_2 = 0$  [m/s] の姿勢から開始したときの位相平面図であり，図 4.3 はそれぞれ，(a) が支持脚・遊脚の角度の，(b) が股角度の，(c) が上体角度の，(d) が支持脚・遊脚の長さの，(e) が支持脚・遊脚の床反力の，(f) が遊脚の脚先端位置の  $z$  座標の時間変化を示している．主に以下のような結果が得られた．

- 1 周期の DLS を含む定常歩行へ収束している．
- 股角度  $\theta_H$  は目標値  $\theta_{He}$  までスムーズに遷移している．
- 上体角度  $\psi$  は衝突により少し変化するものの，目標値  $\psi_d$  で維持できている．
- 遊脚がストッパーの働きによって  $L_0 = 1.0$  [m] で固定されている．

これらの結果から，上体角度を一定値で維持し，股角度を目標値へスムーズに移動するように制御することにより，2 脚口ボットが平地において DLS を含む定常歩行を実現できることが分かる．しかし，(f) を見ると遊脚の脚先端位置の  $z$  座標が負の値を示している範囲がある．これは，遊脚先端が床面を削りながら脚を前方へ振り出していることを意味している．今回のシミュレーションにおいてはこれを無視したが，脚伸縮制御を追加することによって解決できる可能性がある．

表 4.1: シミュレーションパラメータ

$m_T$	10.0	kg	$L_T$	1.0	m
$m_H$	10.0	kg	$L_0$	1.0	m
$m$	1.0	kg	$L^*$	1.02	m
$a$	0.3	m	$\theta_{He}$	$2\pi/9$	rad
$k$	1000	N/m	$T_{set}$	0.4	s
$c$	200	N·s/m			

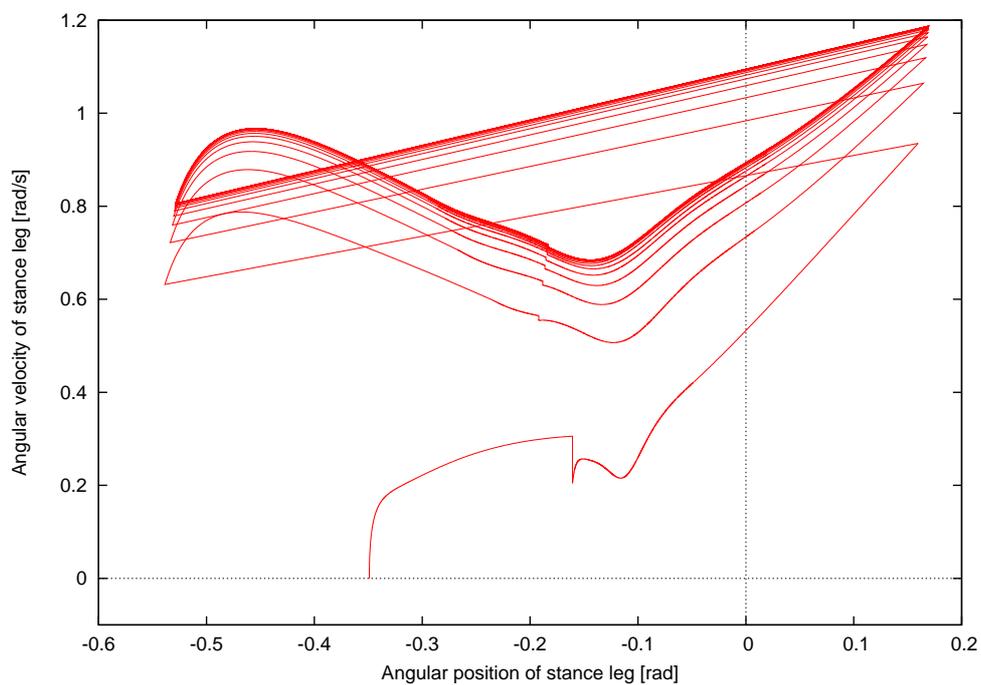
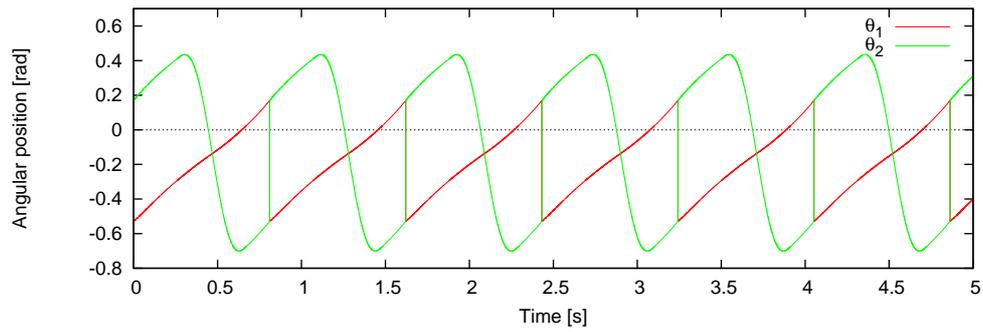
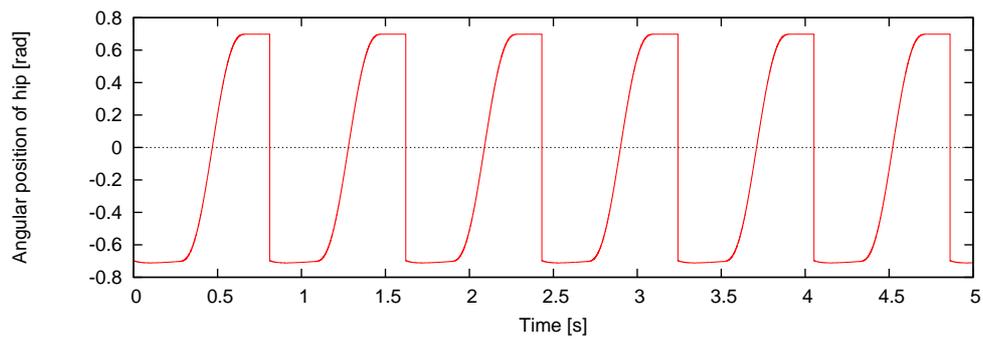


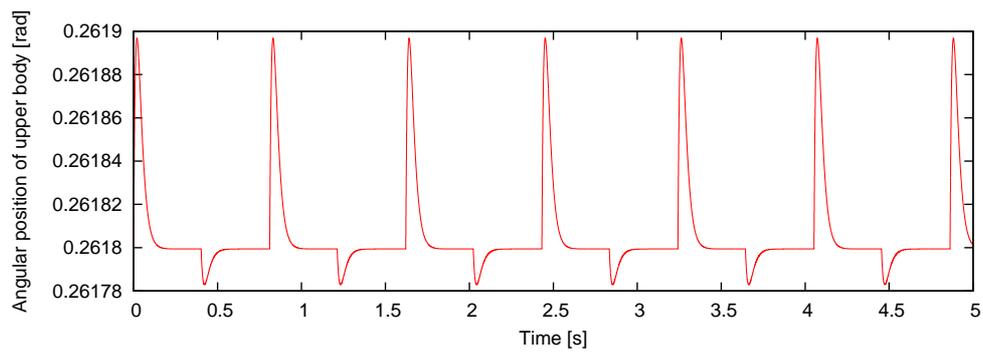
図 4.2: 位相平面図



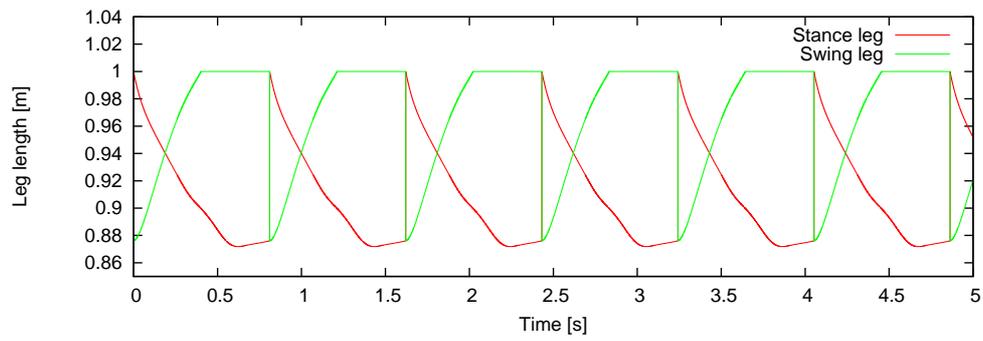
(a) 支持脚/遊脚の角度



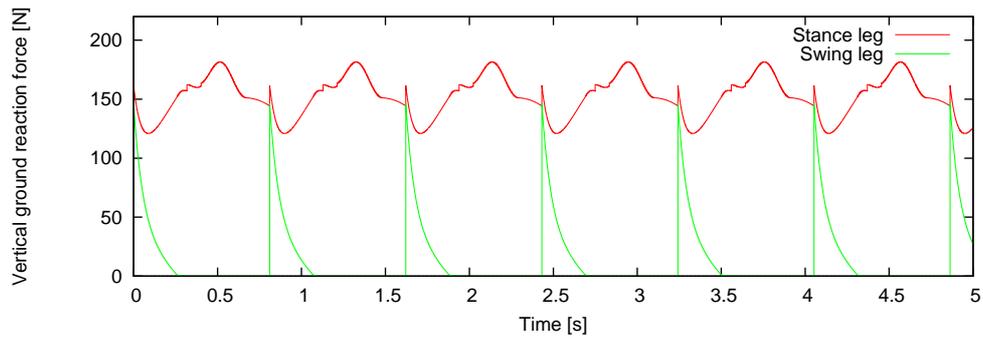
(b) 股角度



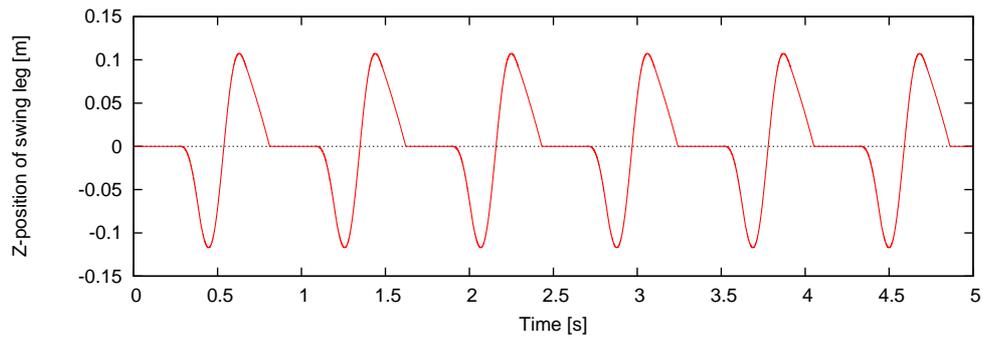
(c) 上体角度



(d) 支持脚/遊脚の長さ



(e) 床反力



(f) 遊脚の脚先端位置の  $z$  座標

図 4.3: シミュレーション結果

## 第5章 段差踏破

粘弾性脚の順応性を利用した DLS を含む歩行の不整地踏破能力の基礎的考察として、段差乗り越え問題について検討する。

### 5.1 段差モデル

第3章で用いた図3.1のモデルを使用する。図5.1に示すような段差  $w$  [m] を設定し、弾性係数  $k$  と歩行速度をそれぞれ変化させたときに、乗り越えることのできた段差の最大値  $w_{\max}$  [m] 調査する。剛体脚を用いたモデルでも  $w_{\max}$  を調査し、粘弾性脚モデルとの比較を行う。歩行速度は上体角度の目標値  $\psi_d$  を変化させることで調節し、段差へは定常歩行時に突入するものとする。

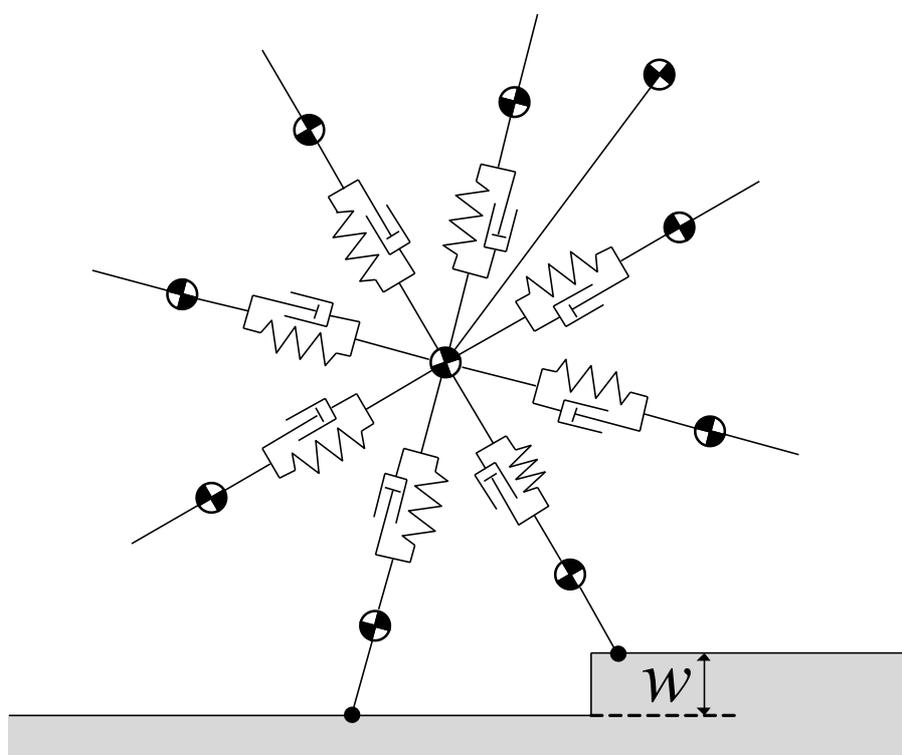


図 5.1: 段差のシミュレーションモデル

## 5.2 数値シミュレーション

段差踏破のシミュレーション結果を図 5.2 に示す． $k$  を除く物理パラメータは表 3.1 のように設定した．なお，定常歩行時や段差踏破時にパンチング現象が見られたが，これを無視した．しかし，図 3.2 のように状態遷移しない歩行については歩行不成立と見なした．図 5.3 は  $\psi_d = 71\pi/360$  [rad] ,  $k = 1100$  [N/m] ,  $w = 0.09$  [m] のときの Leg 1 , Leg 2 および上体のスティック線図である．図 5.4 , 図 5.5 は，粘弾性脚モデルと剛体脚モデルが歩行速度 1.1 [m/s] で 0.09 [m] の段差を乗り越えるときの，重心 (Center of mass; 以下 COM) 軌道およびポテンシャル・バリア (Potential barrier; 以下 PB) の遷移を示したものである．

図 5.2 から分かることは，歩行が生成できた範囲においては粘弾性脚が剛体脚よりも段差踏破には有利になるということである．また，弾性係数が小さいほど踏破可能な最大段差が大きくなっていることも分かる．この理由の一つとして考えられるのが，PB の平坦化である．図 5.5 を見ると，粘弾性脚は剛体脚よりも段差踏破時の PB の変化が小さくなっていることが分かる．これは，剛体脚よりも段差踏破時の PB の突破が容易なることを意味しており，粘弾性脚が段差踏破において有利な理由の一つとして挙げられる．なお，図 5.2 の解析においては，弾性係数が小さい場合には整定条件を満たさなくなるため  $k = 900$  [N/m] 未満は解析を行っていないが，整定条件を無視して解析を行うと，踏破可能な最大段差が更に大きくなる可能性がある．

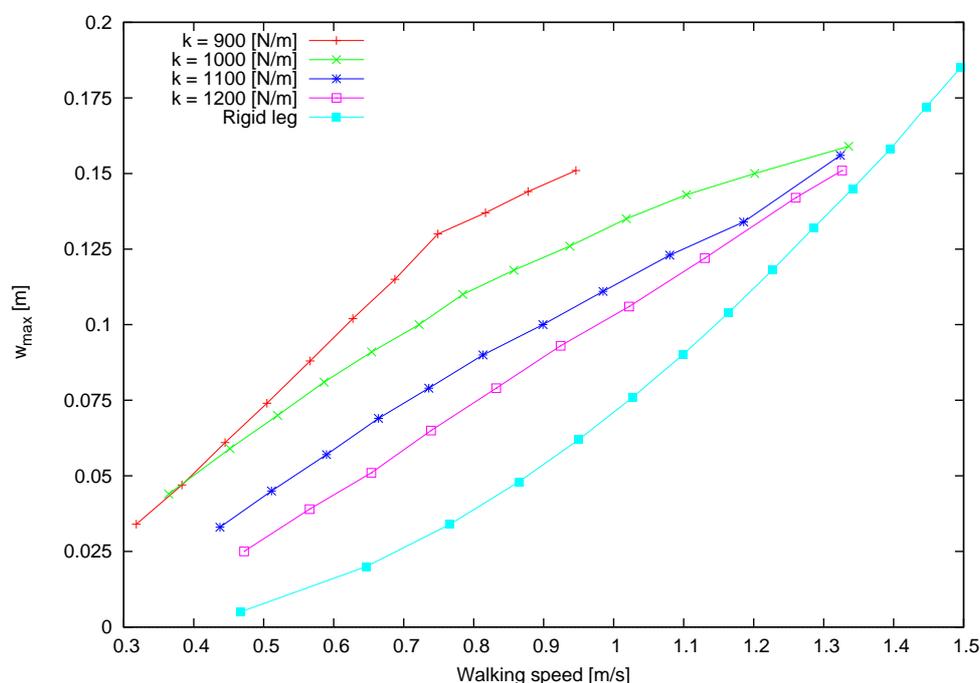


図 5.2: 4 種類の弾性係数  $k$  と剛体脚の歩行速度に対する最大乗り越え段差

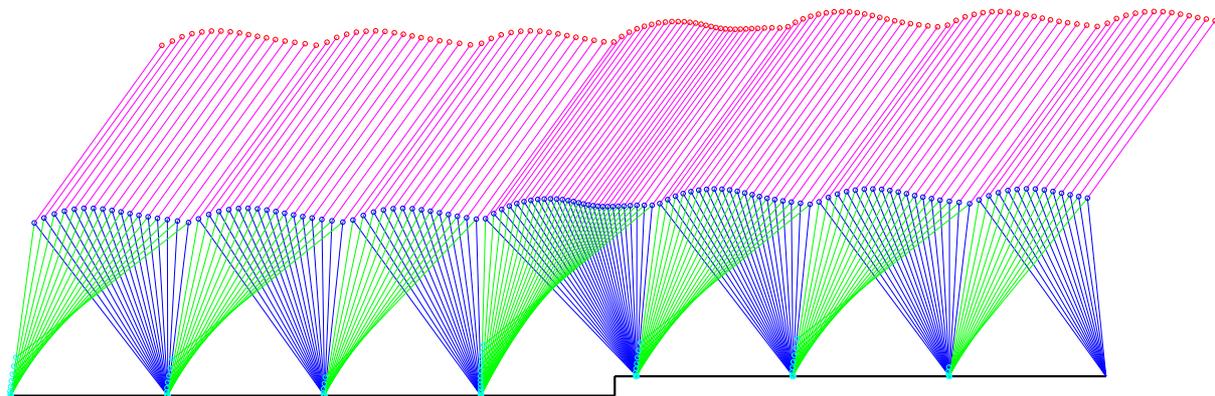


図 5.3: 段差踏破のスティック線図

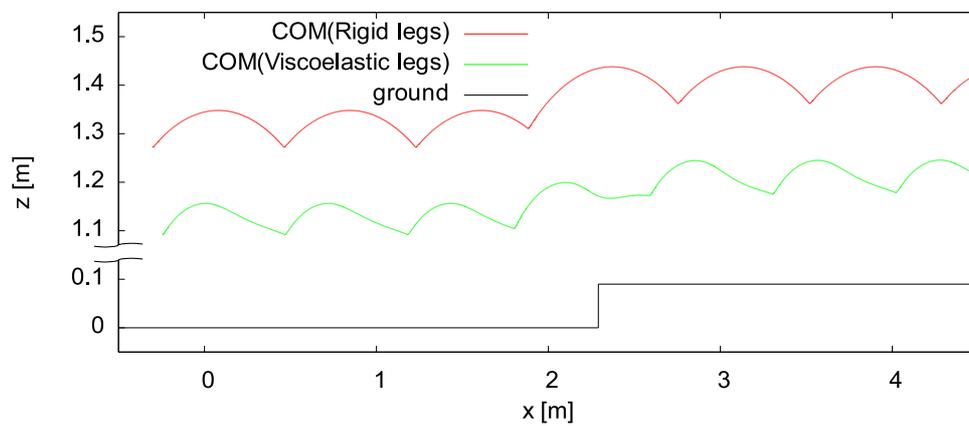


図 5.4: 重心軌道

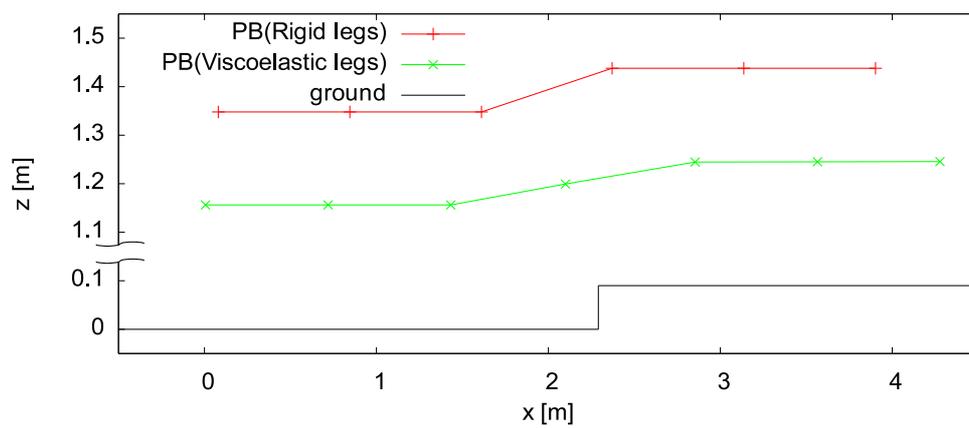


図 5.5: ポテンシャル・バリアの遷移

## 5.3 実験的検証

前節での数値シミュレーション結果から，粘弾性脚は剛体脚よりも段差の乗り越えには有利であることが示された．本節では，図 5.6(a) に示す弾性脚 RW 実験器および図 5.6(b) に示す剛体脚 RW 実験器を使用し，段差乗り越えの実験的検証を行う．

### 5.3.1 実験器

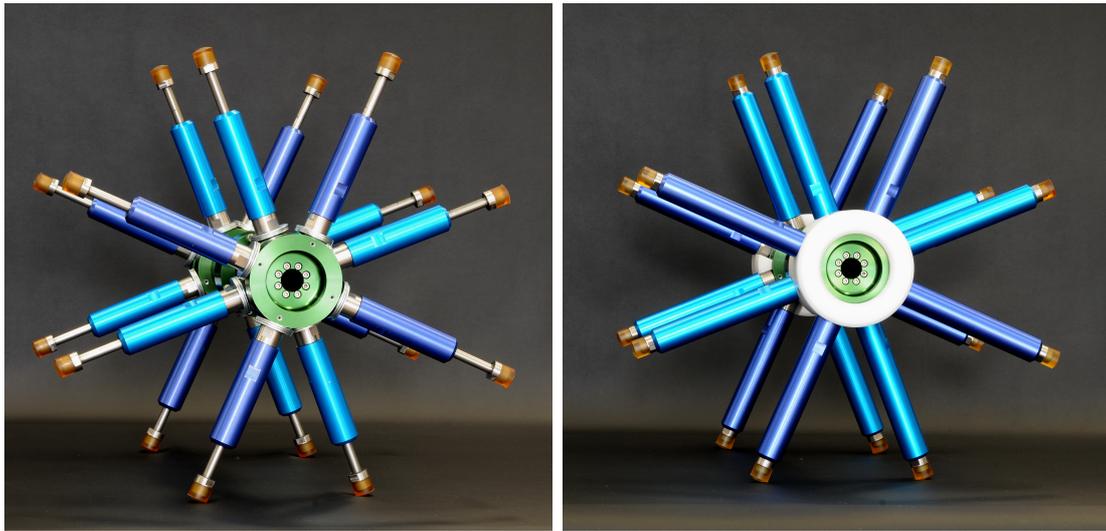
図 5.6(a) の弾性脚 RW は，それぞれの脚の中にバネが装着されているため伸縮運動が可能となっており，それによって DLS を含む歩行を生成する（図 5.7）．脚と本体との間には，剛体脚 RW と脚の長さを合わせるためにワッシャーが取り付けられている．

図 5.6(b) の剛体脚 RW は，それぞれの脚が伸縮運動をしないため，SLS のみの歩行を生成する．本体には，弾性脚 RW と質量を合わせるために，股角度を  $\pi/4$  [rad] に調節するカバーが取り付けられている．両実験器ともアクチュエータは搭載されておらず，受動歩行によって検証を行う．

### 5.3.2 実験

実験は，両実験器をトレッドミル上でそれぞれ 4 種類の歩行速度に収束させ，各歩行速度で乗り越え可能な最大の段差  $w_{\max}$  [m] を調べた．なお，歩行速度は斜面角度（トレッドミルの角度）によって調節し，段差にはベニヤ板を使用した．また，段差の高さの調節にはワッシャーを用いた．実験結果を表 5.1，図 5.8 に示す．

表 5.1，図 5.8 より，同じ歩行速度に対する  $w_{\max}$  を比較してみると，弾性脚 RW の方が剛体脚 RW よりも  $w_{\max}$  が大きいことが確認できる．また，同じ斜面角度に対する  $w_{\max}$  を比較してみると，弾性脚 RW の方が歩行速度が小さいにもかかわらず，剛体脚 RW よりも  $w_{\max}$  が大きいことも確認できる．すなわち，数値シミュレーション結果と同様に，剛体脚よりも弾性脚の方が段差の乗り越えにおいては有利であることが分かる．



(a) 弾性脚 RW

(b) 剛体脚 RW

図 5.6: 実験器

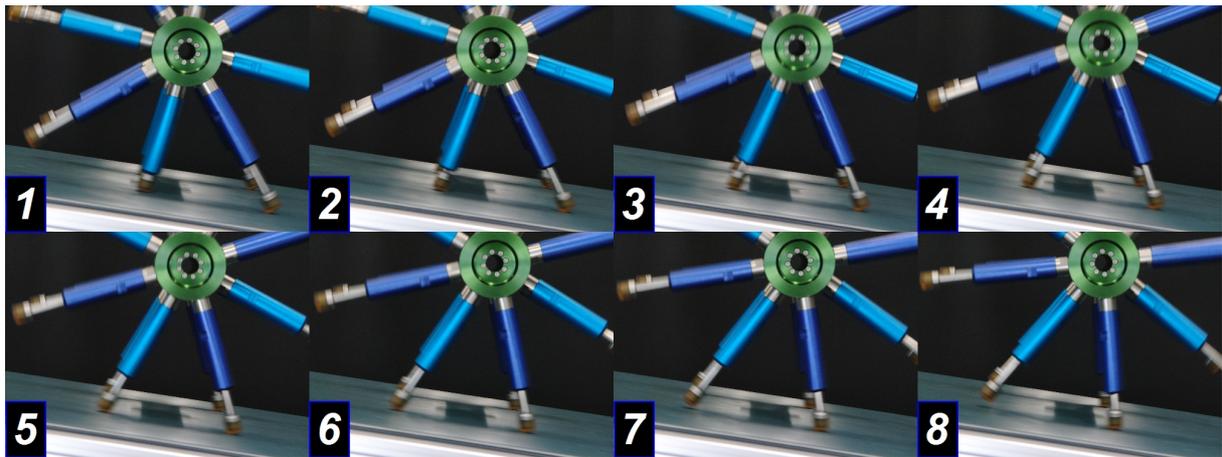


図 5.7: 弾性脚 RW の運動の推移

表 5.1: 段差乗り越え実験結果

	歩行速度 [m/s]	斜面角度 [deg]	$w_{\max}$ [m]
弾性脚 RW	0.300	3.5	0.006
	0.351	4	0.009
	0.402	4.5	0.0109
	0.439	5	0.0154
剛体脚 RW	0.299	3.2	0.0034
	0.351	3.5	0.004
	0.400	4	0.009
	0.439	4.5	0.01

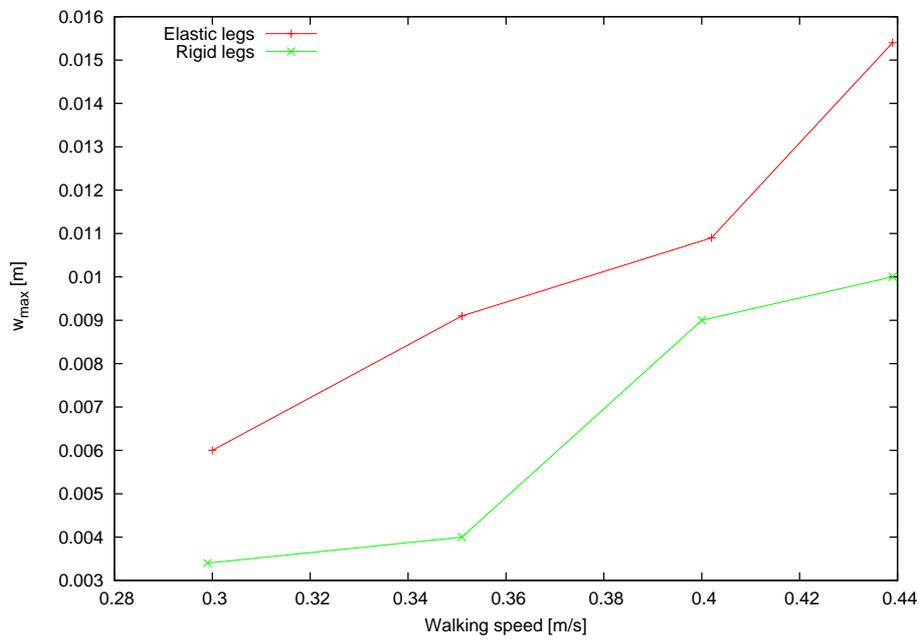


図 5.8: 段差乗り越え実験結果

## 第6章 柔軟路面踏破

粘弾性脚の順応性を利用した DLS を含む歩行の不整地踏破能力の考察として，柔軟路面踏破問題について検討する．

### 6.1 柔軟路面モデル

第3章で用いた図3.1のモデルを使用する．図6.1に示すように，バネ ( $k_0$ ) とダンパー ( $c_0$ ) を用いて柔軟路面を表現する．数値シミュレーションにおいて，以下の仮定をおく．

- 脚と路面との接地点は滑らない．
- 路面からの粘弾性力は，堅い路面 ( $z=0$ ) より  $z_0$  [m] の位置から Leg 1 (前脚) のみに作用し，堅い路面に到達すると作用しなくなる．
- Leg 1 が堅い路面に到達すると脚先端位置は固定される．
- Leg 2 には路面からの粘弾性力は作用せず，脚先端位置は堅い路面に固定されている．

#### 6.1.1 運動方程式

路面からの粘弾性力が作用することにより，運動方程式は式(3.1)(3.2)から以下のように変更される．

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = Su + \tau_{ve}(q, \dot{q}) + \tau_{grf}(q, \dot{q}) + J(q)^T \lambda \quad (6.1)$$

$$J(q)\dot{q} = 0 \quad (6.2)$$

制御入力ベクトル  $Su$  および脚の粘弾性力  $\tau_{ve}$  は，式(3.3)(3.25)(3.6)である．式(6.1)(6.2)から未定乗数ベクトル  $\lambda$  を消去すると，次のように整理される．

$$M(q)\ddot{q} = Y(q)(Su + \tau_{ve}(q, \dot{q}) + \tau_{grf}(q, \dot{q}) - h(q, \dot{q})) - J(q)^T X(q)^{-1} \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} \quad (6.3)$$

$$Y(q) := I_6 - J(q)^T X(q)^{-1} J(q) M(q)^{-1} \quad (6.4)$$

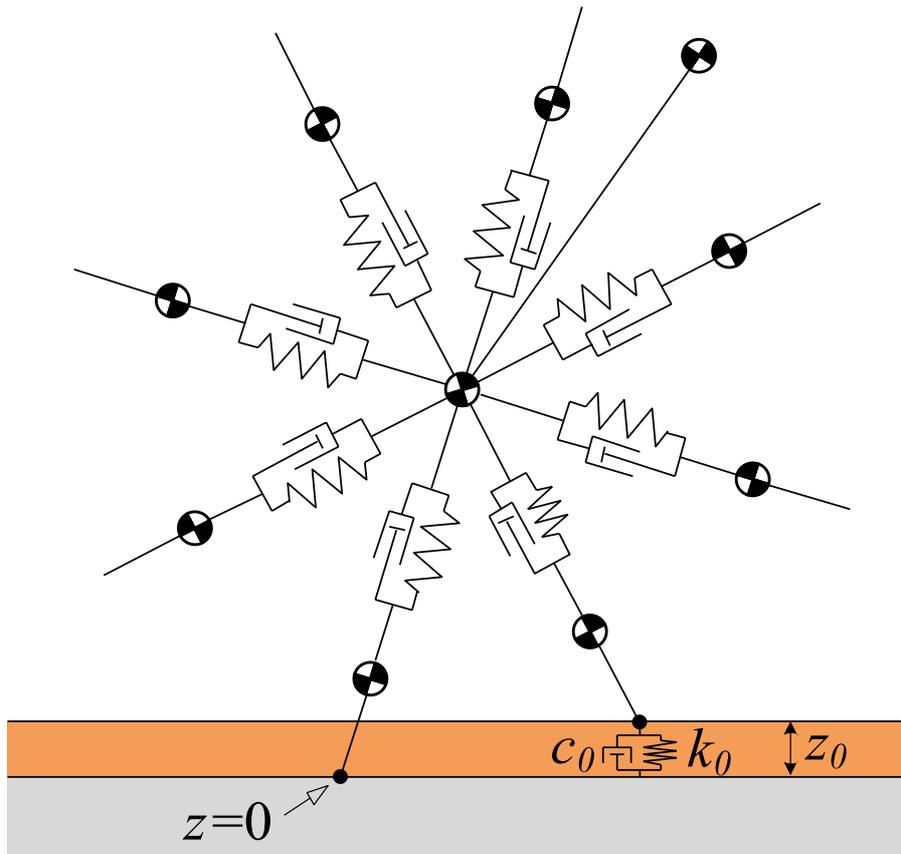


図 6.1: 柔軟路面のシミュレーションモデル

ここで,  $X(\mathbf{q}) := \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{q})^T$  であり, 路面からの粘弾性力  $\tau_{grf}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  は次式で定まるものである.

$$\tau_{grf}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -k_0(z - z_0) - c_0\dot{z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T & (0 < z \leq z_0) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T & (z = 0) \end{cases} \quad (6.5)$$

ただし,  $k_0$  は弾性係数,  $c_0$  は粘性係数,  $z_0$  は柔軟路面に衝突するときの高さである.

### 6.1.2 立脚相における拘束条件式

柔軟路面の歩行運動は, 次の7つの相から構成される.

1. 衝突相 I (Leg 1 と柔軟路面との衝突)
2. 立脚相・両脚支持期 I (3 自由度)
3. 衝突相 II (Leg 1 と堅い路面との衝突)

4. 立脚相・両脚支持期 II (2 自由度)
5. 立脚相・単脚支持期 I (4 自由度)
6. 衝突相 III (Leg 2 のストッパーへの衝突)
7. 立脚相・単脚支持期 II (3 自由度)

ホロノミック拘束の速度拘束条件のヤコビアン  $J(q)$  は, 立脚相である 2, 4, 5, 7 の 4 つの状況によってそれぞれ異なる. 各拘束条件式の詳細を以下に述べる.

#### 両脚支持期 I

次の 2 条件:

- (A) Leg 1 の水平位置が床面に滑らずに接している
- (B) Leg 2 の先端位置が動かない

から 3 つの速度拘束条件式が導かれ, これらをまとめると, ヤコビアンは式 (3.7) の  $J_1$ ,  $J_3(q)$ ,  $J_4(q)$  より

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_3(q) \\ J_4(q) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

と求まる.

#### 両脚支持期 II

ここでは条件 (B) および次の

- (C) Leg 1 の先端位置が動かない

という条件が付加され, ヤコビアンは式 (3.7) と同様に

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3(q) \\ J_4(q) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

となる.

ホロノミック拘束力は

$$J(q)^T \lambda = J_1^T \lambda_1 + J_2^T \lambda_2 + J_3(q)^T \lambda_3 + J_4(q)^T \lambda_4 \quad (6.8)$$

と分解される. Leg 1 の脚先に作用する床反力の斜面に垂直な方向成分は  $\lambda_2$ , Leg 2 のそれは  $\lambda_4$  となる. Leg 2 が床面から浮上する瞬間は,  $\lambda_4$  の符号を観測することで検知することができる.

### 単脚支持期 I

ここでは条件 (C) のみが作用するため，ヤコビアンは式 (3.9) と同様に

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

となる．

### 単脚支持期 II

ここでは条件 (C) および

(D) 弾性力により Leg 2 が伸び切ったまま動かない

という条件が付加されるため，式 (3.10) と同様に

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

## 6.1.3 衝突方程式

### Leg 1 と柔軟路面との衝突

柔軟路面との衝突直前の状態量  $\mathbf{q}^-$ ， $\dot{\mathbf{q}}^-$  を，Leg 1 と Leg 2 の次のそれへと置き換えた  $\mathbf{q}^\dagger$ ， $\dot{\mathbf{q}}^\dagger$  に修正し，以下のように定める．

$$\mathbf{q}^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \theta^- - \alpha \\ \psi^- \\ L_0 \\ L_1^- \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}^\dagger = \begin{bmatrix} \dot{x}^\dagger \\ \dot{z}^\dagger \\ \dot{\theta}^- \\ \dot{\psi}^- \\ 0 \\ \dot{L}_1^- \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\dot{x}^\dagger = \dot{x}^- + (L_1^- \cos \theta^- - L_0 \cos(\alpha - \theta^-)) \dot{\theta}^- + \dot{L}_1 \sin \theta^- \quad (6.12)$$

$$\dot{z}^\dagger = \dot{z}^- - (L_1^- \sin \theta^- + L_0 \sin(\alpha - \theta^-)) \dot{\theta}^- + \dot{L}_1 \cos \theta^- \quad (6.13)$$

これを次の衝突方程式に適用する．

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}^\dagger) \dot{\mathbf{q}}^\dagger = \mathbf{M}(\mathbf{q}^\dagger) \dot{\mathbf{q}}^\dagger - \mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger)^T \boldsymbol{\lambda}_I \quad (6.14)$$

$$\mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger) \dot{\mathbf{q}}^\dagger = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (6.15)$$

ヤコビアン  $J_I(\mathbf{q}^\dagger)$  は「Leg 1 の先端位置の水平成分および Leg 2 の先端位置は動かない」という拘束条件より、式 (6.6) のそれと等しくなる。式 (6.14)(6.15) より、衝突直後の速度ベクトル  $\dot{\mathbf{q}}^+$  は次のようになる。

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = (\mathbf{I}_6 - \mathbf{M}(\mathbf{q}^\dagger)^{-1} \mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger)^\top \mathbf{X}_I(\mathbf{q}^\dagger)^{-1} \mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger)) \dot{\mathbf{q}}^\dagger \quad (6.16)$$

$$\mathbf{X}_I(\mathbf{q}^\dagger) := \mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger) \mathbf{M}(\mathbf{q}^\dagger)^{-1} \mathbf{J}_I(\mathbf{q}^\dagger)^\top \quad (6.17)$$

### Leg 1 と堅い路面との衝突

堅い路面との衝突直前の状態量を  $\mathbf{q}_{ri}^-$  ,  $\dot{\mathbf{q}}_{ri}^-$  とすると、衝突方程式は次のように表される。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{ri}^-) \dot{\mathbf{q}}_{ri}^+ = \mathbf{M}(\mathbf{q}_{ri}^-) \dot{\mathbf{q}}_{ri}^- - \mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q}_{ri}^-) \lambda_{ri} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q}_{ri}^-) \dot{\mathbf{q}}_{ri}^+ = \mathbf{0}_{4 \times 1} \quad (6.19)$$

ヤコビアン  $\mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q}_{ri}^-)$  は「Leg 1 および Leg 2 の先端位置は動かない」という拘束条件より、式 (6.7) のそれと等しくなる。式 (6.18)(6.19) より、衝突直後の速度ベクトル  $\dot{\mathbf{q}}_{ri}^+$  は次のようになる。

$$\dot{\mathbf{q}}_{ri}^+ = (\mathbf{I}_6 - \mathbf{M}(\mathbf{q}_{ri}^-)^{-1} \mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q}_{ri}^-)^\top \mathbf{X}_{ri}(\mathbf{q}_{ri}^-)^{-1} \mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q}_{ri}^-)) \dot{\mathbf{q}}_{ri}^- \quad (6.20)$$

$$\mathbf{X}_{ri}(\mathbf{q}_{ri}^-) := \mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q}_{ri}^-) \mathbf{M}(\mathbf{q}_{ri}^-)^{-1} \mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q}_{ri}^-)^\top \quad (6.21)$$

### Leg 2 のストッパーへの衝突

ストッパーとの衝突直前の状態量を  $\mathbf{q}_s^-$  ,  $\dot{\mathbf{q}}_s^-$  とすると、衝突方程式は次のように表される。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_s^-) \dot{\mathbf{q}}_s^+ = \mathbf{M}(\mathbf{q}_s^-) \dot{\mathbf{q}}_s^- - \mathbf{J}_s \lambda_s \quad (6.22)$$

$$\mathbf{J}_s \dot{\mathbf{q}}_s^+ = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (6.23)$$

この衝突は単脚支持期に起こることを仮定しているため、ヤコビアン  $\mathbf{J}_s$  は「Leg 1 の先端位置は動かないおよび、Leg 2 が伸び切ったまま動かない」という拘束条件より、式 (6.10) のそれと等しくなる。式 (6.22)(6.23) より、衝突直後の速度ベクトル  $\dot{\mathbf{q}}_s^+$  は次のようになる。

$$\dot{\mathbf{q}}_s^+ = (\mathbf{I}_5 - \mathbf{M}(\mathbf{q}_s^-)^{-1} \mathbf{J}_s^\top \mathbf{X}_s(\mathbf{q}_s^-)^{-1} \mathbf{J}_s) \dot{\mathbf{q}}_s^- \quad (6.24)$$

$$\mathbf{X}_s(\mathbf{q}_s^-) := \mathbf{J}_s \mathbf{M}(\mathbf{q}_s^-)^{-1} \mathbf{J}_s^\top \quad (6.25)$$

## 6.2 数値シミュレーション

上体角度の目標値  $\psi_d$  を 14 [deg] に設定し，定常歩行中に堅い路面から柔軟路面へと変化したときのシミュレーション結果を図 6.2，図 6.3，図 6.4 に示す．図 6.2，図 6.4 は粘弾性脚 RW の結果であり，図 6.3 は粘弾性脚と剛体脚を比較するために，剛体脚 RW を使用したときの位相平面図である．剛体脚 RW の物理パラメータは  $k, c$  を除いて粘弾性脚 RW と同じである．なお，1~4 歩目までは堅い路面であり，5 歩目から柔軟路面である．RW の物理パラメータは表 6.1，柔軟路面のパラメータは表 6.2 のように設定した．

以下ような結果が得られた．

- 粘弾性 RW は柔軟路面へ衝突後に歩行速度は低下するものの，1 周期の定常歩行へ収束している．
- 剛体脚 RW は柔軟路面へ衝突後に歩行速度が低下していき，やがて歩行を生成しなくなる．
- 図 6.4(c)(d) より，Leg 1 の脚先端速度は柔軟路面へ衝突後，急激に低下している．

表 6.1: Rimless wheel の物理パラメータ

$m_T$	10.0	kg	$L_T$	1.0	m
$m_H$	10.0	kg	$L_0$	1.0	m
$m$	1.0	kg	$L^*$	1.02	m
$\alpha$	$\pi/4$	rad	$k$	1000	N/m
$a$	0.3	m	$c$	200	N·s/m

表 6.2: 柔軟路面のパラメータ

$z_0$	0.05	m
$k_0$	$\frac{(m_T+m_H+m)g}{2z_0} = 2746.8$	N/m
$c_0$	400	Ns/m

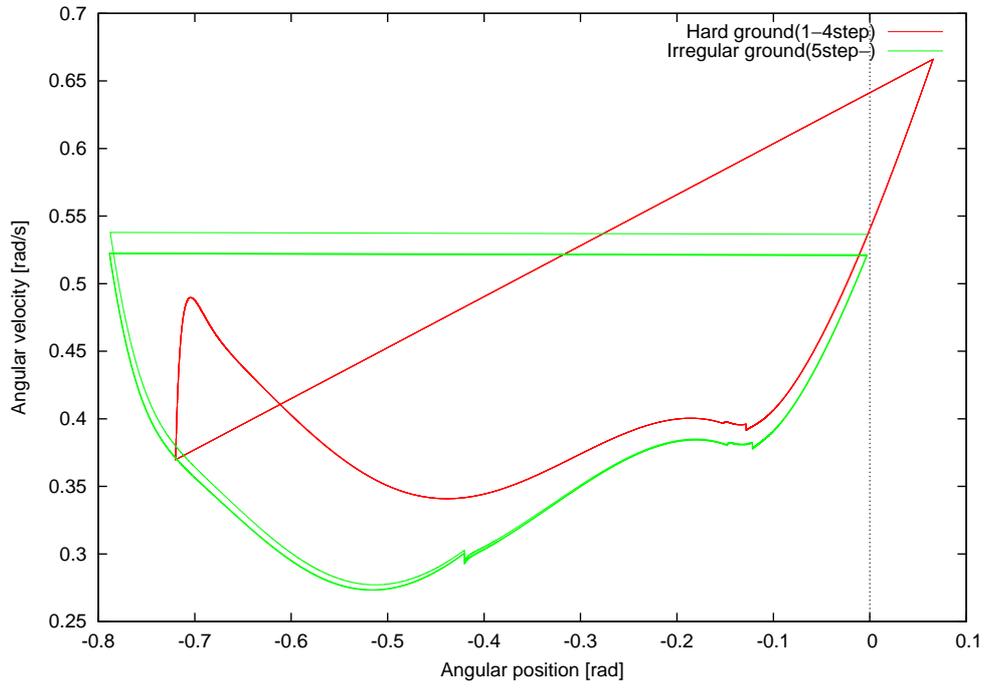


図 6.2: 粘弾性脚 RW の位相平面図

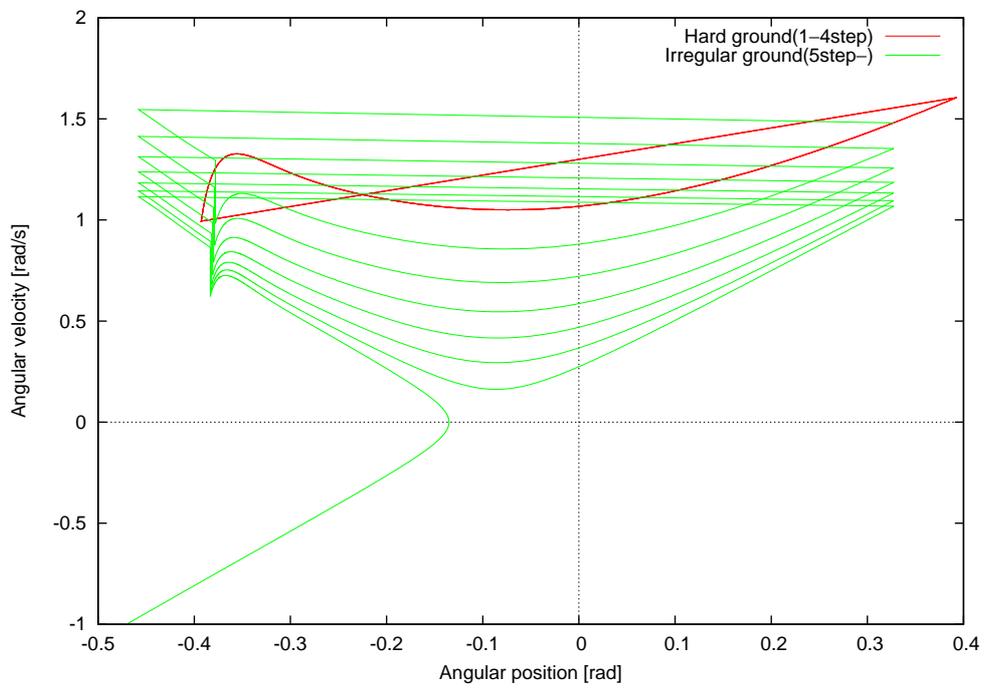
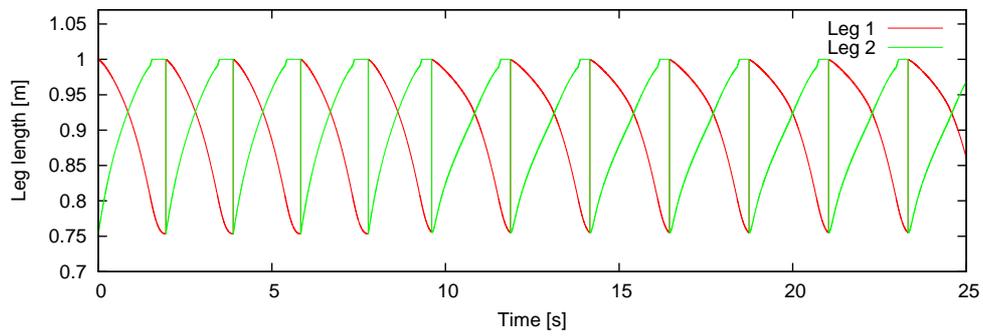
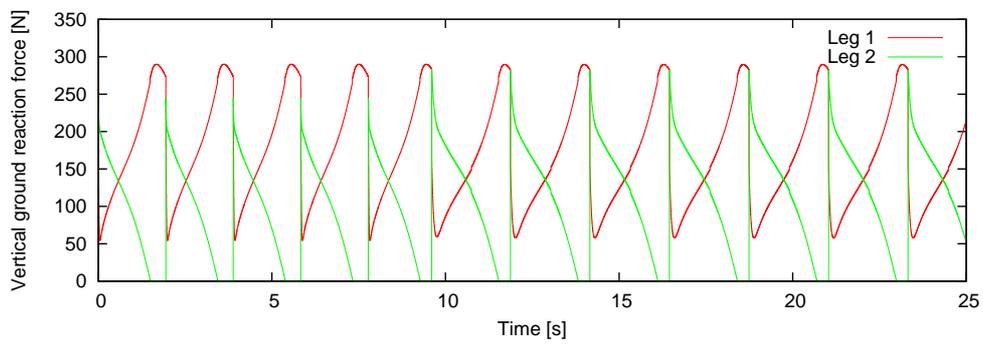


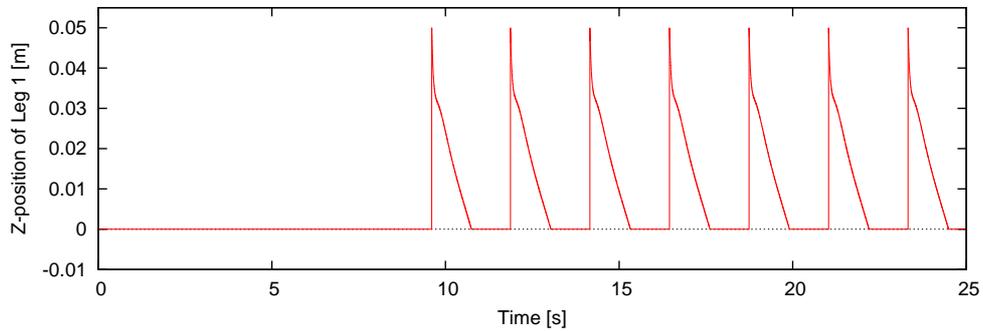
図 6.3: 剛体脚 RW の位相平面図



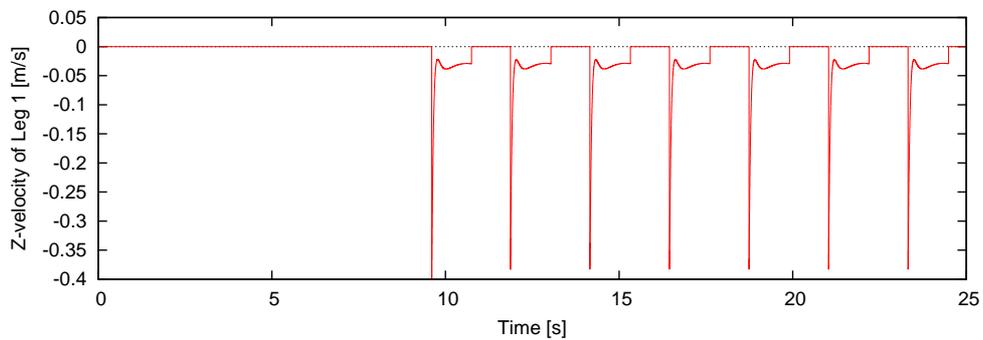
(a) Leg 1/Leg2 の長さ



(b) 床反力



(c) Leg 1 の先端位置の  $z$  座標



(d) Leg 1 の先端位置の  $z$  方向の速度

図 6.4: 粘弾性脚 RW の柔軟路面のシミュレーション結果

## 第7章 結論

### 7.1 結論

本論文では、粘弾性脚を持つ歩行ロボットの数学モデルを構築し、数値シミュレーションを通して運動特性の解析を行った。また、段差乗り越えと柔軟路面踏破の数値シミュレーションを行い、不整地適応能力の解析も行った。さらに、段差乗り越えにおいては実機実験も行い、数値シミュレーション結果との比較を行った。

以下に明らかになった知見を示す。

- 粘弾性脚を用いることで DLS を含む安定なりミットサイクル型歩容が生成可能である。
- 粘弾性脚を持つ RW に上体を付加し、支持脚との間の制御トルクを用いて前傾姿勢を維持することで、平地歩容生成が可能である。
- 上体の長さを大きくするほど歩行速度は上昇する。
- 上体の維持角度  $\psi_d$  を  $\pi/4$  [rad] へ近づけるほど歩行速度は上昇する。
- 2脚ロボットへ拡張した場合、上体の制御の他に、遊脚を支持脚前方へ振り出すための股角度の制御を加えることで、2脚ロボットの平地歩容生成が可能である。
- 剛体脚よりも粘弾性脚を用いた方が不整地適応において有利である。

### 7.2 今後の予定

今後の課題としては、上体が持つ力学的効果の制御応用が挙げられる。本論文においては上体角度を常に一定値に維持するように制御を行ったが、例えば、段差乗り越え時に上体を起こす制御を行うと、乗り越え可能な最大段差が大きくなる可能性がある。

また、本論文ではバネとダンパーを用いた柔軟路面の解析を行ったが、砂地、雪道、泥地といった路面へと発展させていく必要がある。

# 謝辞

本研究にあたり，熱心に指導していただいた浅野文彦准教授に心より深謝致します．ロボティクスの観点から鋭いご指摘を頂いた丁洛榮准教授に感謝致します．浅野文彦研究室のメンバーであり，討論，論文作成，実験において貴重な意見・助言を頂いた田中大樹氏，大島正嵩氏，安田芳樹氏，肖軒氏に感謝致します．

## 参考文献

- [1] T. McGeer: “Passive dynamic walking,” *Int. J. of Robotics Research*, vol. 9, no. 2, pp. 62–82, 1990.
- [2] A. Goswami, B. Thuilot, B. Espiau: “Compass-like biped robot Part I: Stability and bifurcation of passive gaits,” Technical report, INRIA, No. 2996, Oct 1996
- [3] M. Garcia, A. Chatterjee, A. Ruina, M. Coleman: “The simplest walking model: Stability, complexity, and scaling,” *ASME J. of Biomechanical Engineering*, Vol. 120, No. 2, pp.281–288, 1998.
- [4] M. W. Whittle: *Gait analysis: an introduction*, Butterworth-Heinemann, 2001.
- [5] M. P. Murray, A. B. Drought and R. C. Kory: “Walking patterns of normal men,” *The J. of Bone and Joint Surgery*, vol. 46, no. 2, pp. 335–360, 1964.
- [6] M. Bouysset, Y. Tourné and K. Tillmann: *Foot and ankle in rheumatoid arthritis*, Springer, 2005.
- [7] 池俣，佐野，宮本，大竹，藤本：“バネ付きリムレスホイールによる受動走行の基礎的研究”，*日本機械学会論文集（C編）*，vol. 76，no. 766，pp. 1532–1538，2010。

## 付録A 運動方程式の詳細

第2章式(2.1)における行列  $M(\mathbf{q})$ ,  $h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  の詳細な項について述べる。  
 $M(\mathbf{q})$  について,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

とおいたとき,

$$M_{11} = 8m + m_H$$

$$M_{12} = 0$$

$$M_{13} = (am + 7L_1m + L_1m_H + (2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha + (a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \\ \times \cos \theta + m((L_2 - L_0) \sin \alpha + (a - L_0) \sin 4\alpha) \sin \theta$$

$$M_{14} = (7m + m_H) \sin \theta$$

$$M_{15} = -m \sin(\alpha + \theta)$$

$$M_{21} = 0$$

$$M_{22} = 8m + m_H$$

$$M_{23} = m \cos \theta((L_2 - L_0) \sin \alpha + (a - L_0) \sin 4\alpha) - (am + 7L_1m + L_1m_H + (2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha \\ + (a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \sin \theta$$

$$M_{24} = (7m + m_H) \cos \theta$$

$$M_{25} = -m \cos(\alpha + \theta)$$

$$M_{31} = (am + 7L_1m + L_1m_H + (2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha + (a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \\ \times \cos \theta + m((L_2 - L_0) \sin \alpha + (a - L_0) \sin 4\alpha) \sin \theta$$

$$M_{32} = m \cos \theta((L_2 - L_0) \sin \alpha + (a - L_0) \sin 4\alpha) - (am + 7L_1m + L_1m_H + (2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha \\ + (a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \sin \theta$$

$$M_{33} = (8a^2 + 7L_1^2 + L_2^2 + 6L_0^2 - 2a(L_2 + 6L_0))m + L_1^2m_H + 2L_1m((2a - L_2 - L_0) \cos \alpha \\ + (a - L_0)(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha))$$

$$M_{34} = m((L_2 - L_0) \sin \alpha + (a - L_0) \sin 4\alpha)$$

$$M_{35} = -L_1m \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}
M_{41} &= (7m + m_H) \sin \theta \\
M_{42} &= (7m + m_H) \cos \theta \\
M_{43} &= (L_2 - L_0)m \sin \alpha + (a - L_0)m \sin 4\alpha \\
M_{44} &= 7m + m_H \\
M_{45} &= -m \cos \alpha \\
M_{51} &= -m \sin(\alpha + \theta) \\
M_{52} &= -m \cos(\alpha + \theta) \\
M_{53} &= -L_1 m \sin \alpha \\
M_{54} &= -m \cos \alpha \\
M_{55} &= m
\end{aligned}$$

となる .

$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  についても ,

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

とおいたとき ,

$$\begin{aligned}
h_1 &= \dot{\theta} \cos \theta (2\dot{L}_1(7m + m_H) - 2\dot{L}_2 m \cos \alpha + \dot{\theta}(L_2 - L_0)m \sin \alpha + \dot{\theta}(a - L_0)m \sin 4\alpha) \\
&\quad - g \cos \phi (8m + m_H) \sin \phi + \dot{\theta}(-\dot{\theta}(am + 7L_1 m + L_1 m_H) + \dot{\theta}(-2a + L_2 + L_0)m \cos \alpha \\
&\quad - \dot{\theta}(a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha) + 2\dot{L}_2 m \sin \alpha) \sin \theta \\
h_2 &= g \cos \phi (8m + m_H) + \dot{\theta} \cos \theta (-\dot{\theta}(am + 7L_1 m + L_1 m_H) + \dot{\theta}(-2a + L_2 + L_0)m \cos \alpha \\
&\quad - \dot{\theta}(a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha) + 2\dot{L}_2 m \sin \alpha) + \dot{\theta}(-2\dot{L}_1(7m + m_H) \\
&\quad + 2\dot{L}_2 m \cos \alpha + \dot{\theta}(-L_2 + L_0)m \sin \alpha + \dot{\theta}(-a + L_0)m \sin 4\alpha) \sin \theta \\
h_3 &= 2\dot{\theta}(-a\dot{L}_2 m + 7\dot{L}_1 L_1 m + \dot{L}_2 L_2 m + \dot{L}_1 L_1 m_H + (2a\dot{L}_1 - \dot{L}_2 L_1 - \dot{L}_1(L_2 + L_0))m \cos \alpha \\
&\quad + \dot{L}_1(a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) + g \cos \phi m(L_2 - L_0 + 2(a - L_0)(\cos \alpha + \cos 3\alpha)) \\
&\quad \times \cos \theta \sin \alpha - g \cos \phi (am + L_1(7m + m_H) + (2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha + (a - L_0)m(2(\cos 2\alpha \\
&\quad + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \sin \theta - g \cos \phi \sin \phi ((am + 7L_1 m + L_1 m_H + (2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha \\
&\quad + (a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \cos \theta + m((L_2 - L_0) \sin \alpha + (a - L_0) \sin 4\alpha) \sin \theta) \\
h_4 &= \dot{\theta}^2(-2a + L_2 + L_0)m \cos \alpha + 2\dot{\theta}^2(-a + L_0)m \cos 2\alpha + 2\dot{\theta}^2(-a + L_0)m \cos 3\alpha + \dot{\theta}^2(-a + L_0) \\
&\quad \times m \cos 4\alpha + (7m + m_H)(-\dot{\theta}^2 L_1 + g \cos \phi \cos \theta) + 2\dot{L}_2 \dot{\theta} m \sin \alpha - g \cos \phi (7m + m_H) \sin \phi \sin \theta \\
h_5 &= m(\dot{\theta}^2 L_1 \cos \alpha - g \cos \phi \cos(\alpha + \theta) + \dot{\theta}(a\dot{\theta} - \dot{\theta} L_2 - 2\dot{L}_1 \sin \alpha) + g \cos \phi \sin \phi \sin(\alpha + \theta))
\end{aligned}$$

となる .

次に，第3章式(3.1)における行列  $M(\mathbf{q})$  ,  $h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  の詳細な項について述べる．  
 $M(\mathbf{q})$  について，

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

とおいたとき，

$$\begin{aligned} M_{11} &= 8m + m_H + m_T \\ M_{12} &= 0 \\ M_{13} &= (am + L_1(7m + m_H + m_T) + (2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha + (a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \\ &\quad \times \cos \theta + m(L_2 - L_0 + 2(a - L_0)(\cos \alpha + \cos 3\alpha)) \sin \alpha \sin \theta \\ M_{14} &= L_T m_T \cos \psi \\ M_{15} &= (7m + m_H + m_T) \sin \theta \\ M_{16} &= -m \sin(\alpha + \theta) \\ M_{21} &= 0 \\ M_{22} &= 8m + m_H + m_T \\ M_{23} &= m(L_2 - L_0 + 2(a - L_0)(\cos \alpha + \cos 3\alpha)) \cos \theta \sin \alpha - (am + L_1(7m + m_H + m_T) \\ &\quad + (2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha + (a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \sin \theta \\ M_{24} &= -L_T m_T \sin \psi \\ M_{25} &= (7m + m_H + m_T) \cos \theta \\ M_{26} &= -m \cos(\alpha + \theta) \\ M_{31} &= (am + L_1(7m + m_H + m_T) + (2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha + (a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \\ &\quad \times \cos \theta + m(L_2 - L_0 + 2(a - L_0)(\cos \alpha + \cos 3\alpha)) \sin \alpha \sin \theta \\ M_{32} &= m(L_2 - L_0 + 2(a - L_0)(\cos \alpha + \cos 3\alpha)) \cos \theta \sin \alpha - (am + L_1(7m + m_H + m_T) \\ &\quad + (2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha + (a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \sin \theta \\ M_{33} &= 8a^2 m - 2a(L_2 + 6L_0)m + (L_2^2 + 6L_0^2)m + L_1^2(7m + m_H + m_T) + 2L_1 m((2a - L_2 - L_0) \cos \alpha \\ &\quad + (a - L_0)(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha)) \\ M_{34} &= L_1 L_T m_T \cos(\theta - \psi) \\ M_{35} &= m((L_2 - L_0) \sin \alpha + (a - L_0) \sin 4\alpha) \\ M_{36} &= -L_1 m \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{41} &= L_T m_T \cos \psi \\
M_{42} &= -L_T m_T \sin \psi \\
M_{43} &= L_1 L_T m_T \cos(\theta - \psi) \\
M_{44} &= L_T^2 m_T \\
M_{45} &= L_T m_T \sin(\theta - \psi) \\
M_{46} &= 0 \\
M_{51} &= (7m + m_H + m_T) \sin \theta \\
M_{52} &= (7m + m_H + m_T) \cos \theta \\
M_{53} &= (L_2 - L_0)m \sin \alpha + (a - L_0)m \sin 4\alpha \\
M_{54} &= L_T m_T \sin(\theta - \psi) \\
M_{55} &= 7m + m_H + m_T \\
M_{56} &= -m \cos \alpha \\
M_{61} &= -m \sin(\alpha + \theta) \\
M_{62} &= -m \cos(\alpha + \theta) \\
M_{63} &= -L_1 m \sin \alpha \\
M_{64} &= 0 \\
M_{65} &= -m \cos \alpha \\
M_{66} &= m
\end{aligned}$$

となる .

$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  についても ,

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

とおいたとき ,

$$\begin{aligned}
h_1 &= \dot{\theta} \cos \theta (2\dot{L}_1(7m + m_H + m_T) - 2\dot{L}_2 m \cos \alpha + \dot{\theta}(L_2 - L_0)m \sin \alpha + \dot{\theta}(a - L_0)m \sin 4\alpha) \\
&\quad - \dot{\theta}(\dot{\theta}(am + L_1(7m + m_H + m_T)) + \dot{\theta}(2a - L_2 - L_0)m \cos \alpha + \dot{\theta}(a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) \\
&\quad + \cos 4\alpha) - 2\dot{L}_2 m \sin \alpha) \sin \theta - \dot{\psi}^2 L_T m_T \sin \psi \\
h_2 &= g(8m + m_H + m_T) - \dot{\psi}^2 L_T m_T \cos \psi + \dot{\theta} \cos \theta (-\dot{\theta}(am + L_1(7m + m_H + m_T)) \\
&\quad + \dot{\theta}(-2a + L_2 + L_0)m \cos \alpha - \dot{\theta}(a - L_0)m(2(\cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 4\alpha) + 2\dot{L}_2 m \sin \alpha) \\
&\quad + \dot{\theta}(-2\dot{L}_1(7m + m_H + m_T) + 2\dot{L}_2 m \cos \alpha + \dot{\theta}(-L_2 + L_0)m \sin \alpha + \dot{\theta}(-a + L_0)m \sin 4\alpha) \sin \theta \\
h_3 &= 2\dot{\theta}(-a\dot{L}_2 m + \dot{L}_2 L_2 m + \dot{L}_1 L_1(7m + m_H + m_T)) + 2\dot{\theta}(2a\dot{L}_1 - \dot{L}_2 L_1 - \dot{L}_1(L_2 + L_0))m \cos \alpha \\
&\quad + 4\dot{L}_1 \dot{\theta}(a - L_0)m \cos 2\alpha + 4a\dot{L}_1 \dot{\theta} m \cos 3\alpha - 4\dot{L}_1 \dot{\theta} L_0 m \cos 3\alpha + 2a\dot{L}_1 \dot{\theta} m \cos 4\alpha \\
&\quad - 2\dot{L}_1 \dot{\theta} L_0 m \cos 4\alpha + agm \sin(\alpha - \theta) - gL_0 m \sin(\alpha - \theta) + agm \sin(2\alpha - \theta) - gL_0 m \sin(2\alpha - \theta) \\
&\quad + agm \sin(3\alpha - \theta) - gL_0 m \sin(3\alpha - \theta) + agm \sin(4\alpha - \theta) - gL_0 m \sin(4\alpha - \theta) - agm \sin \theta \\
&\quad - 7gL_1 m \sin \theta - gL_1 m_H \sin \theta - gL_1 m_T \sin \theta - agm \sin(\alpha + \theta) + gL_2 m \sin(\alpha + \theta) \\
&\quad - agm \sin(2\alpha + \theta) + gL_0 m \sin(2\alpha + \theta) - agm \sin(3\alpha + \theta) + gL_0 m \sin(3\alpha + \theta) \\
&\quad + \dot{\psi}^2 L_1 L_T m_T \sin(\theta - \psi) \\
h_4 &= L_T m_T (2\dot{L}_1 \dot{\theta} \cos(\theta - \psi) - \dot{\theta}^2 L_1 \sin(\theta - \psi) - g \sin \psi) \\
h_5 &= -\dot{\theta}^2 L_1(7m + m_H + m_T) + \dot{\theta}^2(-2a + L_2 + L_0)m \cos \alpha + 2\dot{\theta}^2(-a + L_0)m \cos 2\alpha - 2a\dot{\theta}^2 m \cos 3\alpha \\
&\quad + 2\dot{\theta}^2 L_0 m \cos 3\alpha - a\dot{\theta}^2 m \cos 4\alpha + \dot{\theta}^2 L_0 m \cos 4\alpha + 7gm \cos \theta + gm_H \cos \theta + gm_T \cos \theta \\
&\quad - \dot{\psi}^2 L_T m_T \cos(\theta - \psi) + 2\dot{L}_2 \dot{\theta} m \sin \alpha \\
h_6 &= m(\dot{\theta}^2 L_1 \cos \alpha - g \cos(\alpha + \theta) + \dot{\theta}(a\dot{\theta} - \dot{\theta} L_2 - 2\dot{L}_1 \sin \alpha))
\end{aligned}$$

となる .

最後に，第4章式(4.1)における行列  $M(\mathbf{q})$  ,  $h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  の詳細な項について述べる．  
 $M(\mathbf{q})$  について，

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} & M_{17} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} & M_{27} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} & M_{37} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} & M_{47} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} & M_{57} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} & M_{67} \\ M_{71} & M_{72} & M_{73} & M_{74} & M_{75} & M_{76} & M_{77} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

とおいたとき，

$$\begin{aligned} M_{11} &= 2m + m_H + m_T \\ M_{12} &= 0 \\ M_{13} &= (am + L_1(m + m_H + m_T)) \cos \theta_1 \\ M_{14} &= (a - L_2)m \cos \theta_2 \\ M_{15} &= L_T m_T \cos \psi \\ M_{16} &= (m + m_H + m_T) \sin \theta_1 \\ M_{17} &= -m \sin \theta_2 \\ M_{21} &= 0 \\ M_{22} &= 2m + m_H + m_T \\ M_{23} &= -(am + L_1(m + m_H + m_T)) \sin \theta_1 \\ M_{24} &= (-a + L_2)m \sin \theta_2 \\ M_{25} &= -L_T m_T \sin \psi \\ M_{26} &= (m + m_H + m_T) \cos \theta_1 \\ M_{27} &= -m \cos \theta_2 \\ M_{31} &= (am + L_1(m + m_H + m_T)) \cos \theta_1 \\ M_{32} &= -(am + L_1(m + m_H + m_T)) \sin \theta_1 \\ M_{33} &= a^2 m + L_1^2(m + m_H + m_T) \\ M_{34} &= L_1(a - L_2)m \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ M_{35} &= L_1 L_T m_T \cos(\theta_1 - \psi) \\ M_{36} &= 0 \\ M_{37} &= L_1 m \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{41} &= (a - L_2)m \cos \theta_2 \\
M_{42} &= (-a + L_2)m \sin \theta_2 \\
M_{43} &= L_1(a - L_2)m \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
M_{44} &= (a - L_2)^2 m \\
M_{45} &= 0 \\
M_{46} &= (a - L_2)m \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
M_{47} &= 0 \\
M_{51} &= L_T m_T \cos \psi \\
M_{52} &= -L_T m_T \sin \psi \\
M_{53} &= L_1 L_T m_T \cos(\theta_1 - \psi) \\
M_{54} &= 0 \\
M_{55} &= L_T^2 m_T \\
M_{56} &= L_T m_T \sin(\theta_1 - \psi) \\
M_{57} &= 0 \\
M_{61} &= (m + m_H + m_T) \sin \theta_1 \\
M_{62} &= (m + m_H + m_T) \cos \theta_1 \\
M_{63} &= 0 \\
M_{64} &= (a - L_2)m \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
M_{65} &= L_T m_T \sin(\theta_1 - \psi) \\
M_{66} &= m + m_H + m_T \\
M_{67} &= -m \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
M_{71} &= -m \sin \theta_2 \\
M_{72} &= -m \cos \theta_2 \\
M_{73} &= L_1 m \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
M_{74} &= 0 \\
M_{75} &= 0 \\
M_{76} &= -m \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
M_{77} &= m
\end{aligned}$$

となる .

$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  についても ,

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

とおいたとき ,

$$\begin{aligned}
h_1 &= 2\dot{L}_1\dot{\theta}_1(m + m_H + m_T) \cos \theta_1 - 2\dot{L}_2\dot{\theta}_2m \cos \theta_2 - a\dot{\theta}_1^2m \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1^2L_1m \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1^2L_1m_H \sin \theta_1 \\
&\quad - \dot{\theta}_1^2L_1m_T \sin \theta_1 - a\dot{\theta}_2^2m \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2L_2m \sin \theta_2 - \dot{\psi}^2L_Tm_T \sin \psi \\
h_2 &= g(2m + m_H + m_T) - \dot{\theta}_1^2(am + L_1(m + m_H + m_T)) \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2(-a + L_2)m \cos \theta_2 \\
&\quad - \dot{\psi}^2L_Tm_T \cos \psi - 2\dot{L}_1\dot{\theta}_1(m + m_H + m_T) \sin \theta_1 + 2\dot{L}_2\dot{\theta}_2m \sin \theta_2 \\
h_3 &= -2\dot{L}_2\dot{\theta}_2L_1m \cos(\theta_1 - \theta_2) - g(am + L_1(m + m_H + m_T)) \sin \theta_1 + L_1(2\dot{L}_1\dot{\theta}_1(m + m_H + m_T) \\
&\quad + \dot{\theta}_2^2(a - L_2)m \sin(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\psi}^2L_Tm_T \sin(\theta_1 - \psi)) \\
h_4 &= -(a - L_2)m(2\dot{L}_2\dot{\theta}_2 - 2\dot{L}_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1^2L_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2) \\
h_5 &= L_Tm_T(2\dot{L}_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \psi) - \dot{\theta}_1^2L_1 \sin(\theta_1 - \psi) - g \sin \psi) \\
h_6 &= -\dot{\theta}_1^2L_1(m + m_H + m_T) + g(m + m_H + m_T) \cos \theta_1 - \dot{\psi}^2L_Tm_T \cos(\theta_1 - \psi) \\
&\quad + \dot{\theta}_2m(\dot{\theta}_2(-a + L_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2\dot{L}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\
h_7 &= m(\dot{\theta}_2^2(a - L_2) + \dot{\theta}_1^2L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - g \cos \theta_2 + 2\dot{L}_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2))
\end{aligned}$$

となる .