

Title	不確かさを考慮した制御系のモデリングとロバスト性 解析に関する研究-磁気浮上系における解析-
Author(s)	松尾, 誠一
Citation	
Issue Date	1997-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1053
Rights	
Description	Supervisor: 藤田 政之, 情報科学研究科, 修士

修士論文

不確かさを考慮した制御系のモデリングとロバスト性解析に 関する研究 -磁気浮上系における解析-

指導教官 藤田 政之 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

松尾 誠一

1997年2月14日

目次

1	はじめに	1
1.1	研究の背景	1
1.2	従来研究	3
1.3	研究の目的	3
1.4	概要と構成	4
2	数学的準備	5
2.1	LFT(Linear Fractional Transformation, 線形分数変換)	5
2.2	μ 解析	6
2.2.1	構造化特異値	6
2.2.2	構造化特異値を用いたロバスト性解析	8
3	磁気浮上系の構成	12
3.1	電磁石の構造および電磁石アンプ	13
3.2	センサ	13
3.3	デジタル制御装置	14
3.4	ホスト・コンピュータ	14
4	磁気浮上系のモデリングと不確かさの記述	16
4.1	磁気浮上系の構成図	16
4.2	磁気浮上系の数学モデル	17
4.2.1	理想的な数学モデル	17
4.2.2	制御系設計のための数学モデル	18
4.3	電磁石パラメータの決定	18

4.3.1	吸引力パラメータの同定	18
4.3.2	等価回路のパラメータの同定	20
4.4	公称モデル	22
4.5	非構造的な不確かさによるモデリング	22
4.6	構造的な不確かさによるモデリング	24
4.6.1	モデルに存在する不確かさについて	25
4.6.2	線形化による不確かさ	25
4.6.3	パラメータの不確かさ	27
4.6.4	モデル化されない動特性	27
4.7	不確かさのモデル	28
5	ロバスト性解析	30
5.1	不確かさを考慮しないモデルにたいする制御系の解析	30
5.2	不確かさを考慮したモデルにたいする制御系のロバスト性解析	32
5.2.1	設計におけるパラメータの変動に対するロバスト安定性	32
5.2.2	それぞれの不確かさのロバスト安定性への影響	36
5.2.3	ロバスト安定性をみだす不確かさについての考察	37
5.2.4	ロバスト制御性能解析	41
5.3	他のコントローラとの比較検証	42
5.3.1	ロバスト安定性解析	43
5.3.2	ロバスト制御性能	44
6	実験結果からみた解析結果の検証	46
6.1	実験結果	46
6.1.1	浮上特性	46
6.1.2	外乱応答特性	47
6.2	解析結果の検証	50
6.2.1	ロバスト安定性についての考察	50
6.2.2	ロバスト制御性能についての考察	51
7	結論	57

A	制御系設計	59
A.1	PID 制御による設計	59
A.2	混合感度問題による設計	60
A.2.1	制御問題	60
A.2.2	制御系設計	60
A.3	μ 設計法による設計	61
A.3.1	制御問題	61
A.3.2	非構造的な不確かさのモデリング	63
A.3.3	制御系設計	66

第 1 章

はじめに

1.1 研究の背景

近年, 実システムとモデル間の不確かさを考慮し, 制御系の解析および, 設計を行なうロバスト制御 [4][5] に関する研究がおこなわれている. また, 制御系設計のための CAD [10][11] の発展によりこのような難しい理論をもちいた解析, 設計も比較的容易に利用できるようになってきている.

ロバスト制御を実システムへ適応した例として多くの研究があげられるが, 磁気浮上系もまたそのひとつにあげられる. この系は非常に複雑な要素が多く, 実システムをモデルとして表すことは難しい. そのため, 制御系設計のモデルを導出するには多くの理想的な仮定をおいた上での大胆な簡略化が行なわれ, 数学モデルでは表わすことのできない不確かさが存在してしまう. そこで, 不確かさを考慮し設計, 解析をおこなうロバスト制御を適用することにより制御性能の向上が求められている. しかし, ここでロバスト制御をもちいる設計者に求められるものは設計よりもむしろ, どのように不確かさを含めたモデリングをおこなうかということが問題になってくる.

制御対象が数学モデルとして記述されるようになったのは, 1950 年代に体系化された古典制御理論においてからである. それまでの制御では, PID 制御などにみられるようにモデリングはなされておらず, 経験や現場での思考錯誤にもとづきフィードバック系のコントローラのパラメータを決定していた.

それに対して古典制御では微分方程式などを用い制御対象を伝達関数としてモデリングすることが行なわれた. ここでは周波数応答や根軌跡などから設計がおこなわれ, ゲイ

ン余裕や位相余裕といった概念を用いてモデル誤差にたいする安定性の解析も行なわれている。

1960年頃からは現代制御理論が展開され、さらに制御対象の表現形式として状態方程式が導入されるようになった。これにより、状態フィードバック制御を中心に極配置、最適レギュレータ、オブザーバなどを用いた制御理論主体の研究が展開されてきた。

しかしながら、現代制御理論では数学モデルの不確かさへの対応が必ずしも十分ではなく、制御対象を表す数学モデルに対して良い制御性能が得られたとしても、実システムでは良い制御性能が得られない場合が生じることがあった。これらの理由により、実装する際には、ある程度の大きさの不確かさが存在しても良好な制御性能を保つ、ロバスト性が要求されるようになってきた。

これらの要求に対し、1980年頃からは、このようなモデル誤差を不確かさとしてモデルに記述し、制御系を構成するロバスト制御の研究がなされるようになった。これらの設計法として H_∞ 制御や μ 設計法が提案されている。そこで、問題となってくるのが不確かさをどのように記述するかということである。

不確かさの記述としては、有限個のスカラーパラメータにより表現される構造的な不確かさとプラントの伝達関数が複数個集まって記述する非構造的な不確かさの記述が考えられる。

従来、不確かさは非構造的な不確かさとして記述されることが多かった。その大きな理由として、非構造的な不確かさは、円板状の不確かさとして取り扱われるために数学的な解析が容易になることがあげられる。しかしながら、その代償としては不確かさの記述が保守的なために得られた結果も保守的となることが考えらる。

そこで、より保守的でないモデリングをするために、構造的に不確かさを記述することが望まれる。これらの構造的な不確かさに対するロバスト性解析は構造化特異値を用いることにより解析される [2]。従来、実数の不確かさの摂動にたいする構造化特異値を求めることは難しいとされてきた。しかし、近年、実数と複素数を混合した摂動についての計算アルゴリズムの研究がなされこれらの不確かさにたいしても上限値、下限値をもとに計算することが可能となった [3]。

このような研究の進展により、構造的な不確かさに対するロバスト性の解析および設計が可能状況になりつつある。そのためにも解析に有効となる不確かさを考慮したモデルが必要となってくる。文献 [1] では、ロバスト性解析をおこなうためにある例題を用い、公

称モデルに存在する不確かさについての検討がなされ、信頼性のある不確かさのモデリングについての一考察がなされている。

しかしながらどのように不確かさを考慮するかについては、ロバスト性解析を行なう者の意志に任せられており、制御対象の有する特性により異なってくる。このような理由からロバスト性を考慮した解析、設計をおこなうにはこれらをどのように記述するかということが大変重要な問題となってくる。

1.2 従来研究

本研究では、制御対象として磁気浮上系をもちいる。この系は本来、不安定系であるために多くの研究がなされており、初期の安定化のための研究では PID 制御、極配置、最適レギュレータなどにより制御系設計がおこなわれている [13]。しかしながら、これらの研究では、モデルの不確かさは制御系に加わる外乱の要素のひとつのとして扱われており、具体的な記述はなされなかった。その後文献 [14],[15] ではロバスト制御の枠組を取り入れ、不確かさを考慮したモデリングのもとに制御系を構成する研究がなされている。しかしながら、これらの研究では不確かさの記述は非構造的な不確かさとして取り扱われており、構造的な不確かさについての解析はおこなわれていない。そのため、その解析結果は保守的なものとなっている可能性が残される。

実際に、実験結果からモデルの変動に対する安定性について考察してみると、設計の際に考慮している変動だけでなく、さらに広い変動に対しても安定に浮上しているようである。しかしながら、これらについては理論的には保証されていない。そこで、構造的に不確かさを記述し解析をおこなうことによりこの相違を軽減できる可能性がある。

1.3 研究の目的

本研究では、構造的な不確かさにたいする磁気浮上系のロバスト性解析を行う。これらの解析から、不確かさを非構造的に記述した場合の解析結果の保守性について検討する。

これらの解析のために磁気浮上系に影響を及ぼす不確かさについての検討をおこない、その検討をふまえたうえで解析に有効な不確かさを考慮した磁気浮上系のモデルの一提案をおこなう。また、従来の手法で設計したコントローラにたいし、提案したモデルをも

ちいてのロバスト性解析をおこなう。このときのロバスト性解析については実数、複素数の摂動についても解析をおこなえる構造化特異値 (mixed μ) をもちいる。

最後にこれらのロバスト性解析の有効性を検証するために実験結果をもちいて考察をおこなう。

なお、ここで用いるコントローラはPID制御、混合感度問題に基づく H_∞ 制御、 μ 設計法により設計したものをもちいた。

1.4 概要と構成

本論文の構成はつぎのようになっている。

第2章に数学的準備としてロバスト性解析の指標となる構造化特異値について説明をおこなう。また、その指標をもちいたロバスト安定性および、ロバスト制御性能について簡単に説明する。

第3章では本論文で用いた磁気浮上装置についての構成について述べる。ここでは、電磁石などの使用した機器についての説明を行なう。

第4章では磁気浮上系のモデリングについて検討をおこなっていく。最初に、不確かさを考慮しない磁気浮上系のモデリングを導出し、パラメータの同定から公称モデルを求める。さらにそのモデルが有する不確かさについて検討し、構造的な不確かさによる磁気浮上系のモデルを提案する。

第5章では第4章で提案したモデルについてのロバスト性解析をおこなう。このときの指標としては構造化特異値を用い、ロバスト安定性およびロバスト制御性能について検討する。

第6章では、第5章であらわされた解析結果の有効性について検討するために実験をおこない、その結果から解析結果についての考察をおこなう。

第7章では本研究のまとめをおこなう。

最後に本研究で解析のために設計したコントローラの設計手順を付録として記載している。

第 2 章

数学的準備

本章では, ロバスト性解析をするための数学的な準備として, LFT(Linear Fractional Transformation, 線形分数変換), ロバスト性解析のための指標となる構造化特異値 μ について述べる [2][3]. さらにそれらを用いてのロバスト安定性, ロバスト制御性能についての解析法について簡単にまとめる [19].

2.1 LFT(Linear Fractional Transformation, 線形分数変換)

最初に μ 解析でよく使われる LFT 表現について述べる. LFT 表現は行列変換に用いられ, 線形システムの表現や解析に関して有効であり, 特に不確かさを考慮したシステムを記述するのに有効な表現形式である.

図 2.1, 2.2 のように G と K を結合して w から z への伝達関数 T_{zw} を構成する変換を LFT(Linear Fractional Transformation, 線形分数変換) と呼ぶ.

ここで,

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

と K があるとする. この G と K についてこれらは, それぞれ,

$$T_{zw} = \mathcal{F}_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (2.2)$$

$$T_{zw} = \mathcal{F}_u(G, K) = G_{22} + G_{21}K(I - G_{11}K)^{-1}G_{12} \quad (2.3)$$

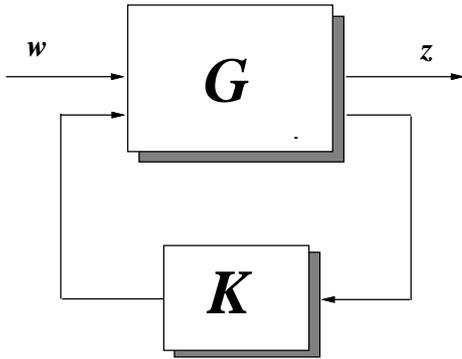


図 2.1: Lower LFT

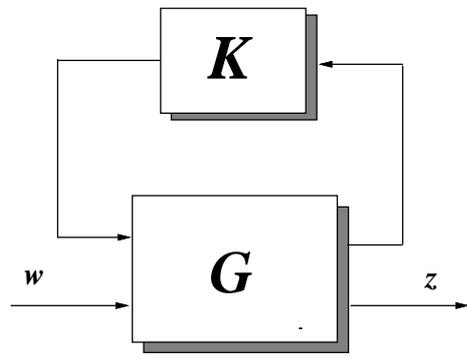


図 2.2: Upper LFT

と定義される. 図 2.1の場合を lower LFT , 図 2.2の場合を upper LFT , と呼ぶ. ただし, $\det|I - G_{22}K| \neq 0$ とする.

2.2 μ 解析

2.2.1 構造化特異値

LFT 表現を用い不確かさを考慮したモデルが得られると, つぎに, その不確かさにたいして, 制御系のロバスト性を解析する. フィードバック系の構造的な不確かさにたいする制御系のロバスト性を解析するためには, 構造化特異値 μ が使われる [2].

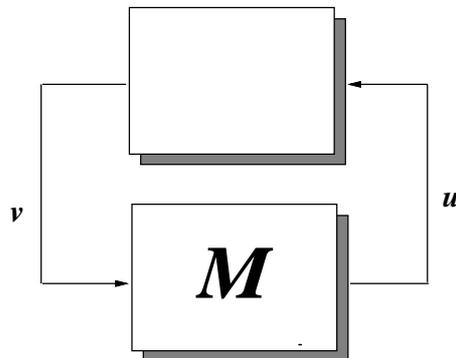


図 2.3: Closed loop for μ analysis

ここで、構造化特異値 μ について定義する。図 2.3 について考えていく。ここで、行列 M, Δ は安定であるとする。まず、構造的な不確かさを表現するためにつぎのようなブロック構造を考える。

$$\Delta = \{\text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbf{C}, \Delta_j \in \mathbf{C}^{m_j \times m_j}\} \quad (2.4)$$

ここで、

$$\sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n \quad (2.5)$$

である。 δI の形のものを重複スカラーブロックと呼び、さらに、 Δ のかたちのものをフルブロックと呼ぶ。ここで、以下の記号を準備する。

$$\mathbf{B}\Delta = \{\Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\} \quad (2.6)$$

定義 2.2.1 ブロック構造 Δ が与えられているとする。このとき、行列 $M \in \mathbf{C}^{n \times n}$ に対し、構造化特異値 $\mu_\Delta(M)$ をつぎのように定義する。

$$\mu_\Delta(M) := \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}} \quad (2.7)$$

ただし、 $\det(I - M\Delta) = 0$ となる $\Delta \in \Delta$ が存在しない場合には $\mu_\Delta(M) := 0$ とする。

このように構造化特異値は、行列 M に対してだけでなく、ブロック構造 Δ にも依存している。

構造化特異値のための直観的な解釈として、つぎのように考えられる。図 2.3 についてこの系は、

$$u = Mv, \quad v = \Delta u \quad (2.8)$$

と表される。もし、 $I - M\Delta$ が正則ならば、 $u = v = 0$ が式 (2.8) の唯一の解となる。しかしながら、もし、 $I - M\Delta$ が正則でない場合、その解は無数に存在し、したがって $\|u\|$ や $\|v\|$ はいくらでも大きくなってしまふ。そこで、図 2.3 に対して便宜的にこのような場合を不安定と呼ぶことにする。また、 $u = v = 0$ が唯一の解となる場合を安定と呼ぶことにする。そうすると、 $\mu_\Delta(M)$ は、この系において、不安定性を引き起こす最小の構造 Δ の大きさを示していることになる。

ここで定義された $\mu_\Delta(M)$ は、複素値の摂動ブロックのみを扱う complex μ についてであり、複素値の摂動 Δ のもとでの安定性や性能の評価を行なっている。しかしながら、

制御対象のモデルなどのパラメータ変動による摂動などは、複素数の摂動でなく実数の摂動として表すことが自然であると考えられる。複素数の摂動を取り扱う complex μ は解析が容易であるが、その結果は保守的となってしまうことが問題点としてあげられる。近年、実数と複素値の摂動を混合したブロック構造に対して構造化特異値 mixed μ を計算するアルゴリズム [3] が発展されている。そこで、これ以後は不確かさの摂動を表すブロック構造は、

$$\Delta = \{diag[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbf{R}, \Delta_j \in \mathbf{C}^{m_j \times m_j}\} \quad (2.9)$$

とし、実数、複素値の摂動に関して構造化特異値 μ による解析を行なう。

2.2.2 構造化特異値を用いたロバスト性解析

現実には、プラントの数学モデルに不確かさが存在することは避けられない。そこでその数学モデルをひとつのノミナルモデルだけでなく、つぎのようなプラントの集合と考える。

$$G_{real} = \{(I + w_{del}\Delta_{out})G_{nom} : \|\Delta_{out}\| \leq 1\} \quad (2.10)$$

ここで、 Δ_{out} は不確かさを表しており、また、スカラの周波数重み w_{del} はノミナルモデルに対する不確かさの相対的な大きさを表す。この式 (2.10) は、プラントの出力側における非構造的な乗法変動を記述している。

このようにプラントの集合を考えることによりロバスト性の概念をつぎのように定義する。

定義 2.2.2

- i) コントローラ K が、 G_{real} で表されるプラントの集合すべてに対して安定性を保持するとき、それはロバスト安定性 (robust stability) を達成するという。
- ii) フィードバック系の制御性能を $\|w_{perf}S\|_\infty < 1$ となるように要求する。ここで、 S は感度関数とし $S := (I + GK)^{-1}$ である。また、 w_{perf} は制御性能に関する周波数重みを表す。このとき、コントローラ K が、 G_{real} で定義されるプラントの集合すべてにたいして安定性および制御性能を保持するとき、それはロバスト制御性能 (robust performance) を達成するという。

つぎに構造化特異値 μ をもちいてロバスト安定性を解析するための枠組について考える。

この解析を行なうために、一般化プラント P を用いて記述することが必要となる。一般化プラント P は、ノミナルプラント G_{nom} に加えて、制御性能に関する重みや不確かさに関する重みなどのロバスト性の指標となる情報が記述されている。ここで、図 2.4 より一般化プラント P は、三つの入力と三つの出力を持つことからこれに対応するように次式で表す。

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & B_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

つぎに、このプラントの閉ループ系を安定にするコントローラ K が設計されたとすると、観測出力 y から、制御入力 u へのフィードバック $u = Ky$ により図 2.5 の閉ループ系が構成される。

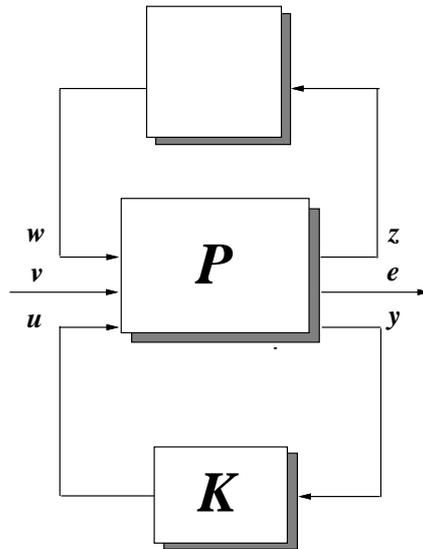


図 2.4: Uncertain closed loop system

ここで、

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix};$$

$$M_{i,j} := P_{ij} + P_{i3}(I - KP_{33})^{-1}KP_{3j},$$

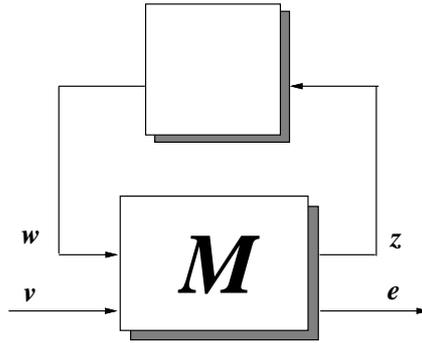


図 2.5: Robustness analysis problem

$$i, j = 1, 2 \quad (2.12)$$

である。また、図 2.5 のブロック Δ 、 $\|\Delta\|_\infty < 1$ は不確かさを表しているものである。ここでは特にその構造について考慮せずに議論を進めていく。まず、 $\Delta \equiv 0$ のときを考えると、入力 v から出力 e までの伝達関数 M_{22} は、ノミナル制御性能を表すことになる。一方、入力 w から出力 z までの伝達関数 M_{11} は、ロバスト安定性に関して表すことになる。いま、図 2.4 において M は安定とするとこの制御系に対するロバスト性の解析に関して、つぎの結果が得られる。

定理 2.2.1

- i) ノミナル制御性能であるための必要十分条件は、つぎの式が成り立つことである。

$$\bar{\sigma}[M_{22}(j\omega)] < 1, \quad \forall \omega \in R \quad (2.13)$$

- ii) ロバスト安定であるための必要十分条件はつぎの式が成り立つことである。

$$\bar{\sigma}[M_{11}(j\omega)] < 1, \quad \forall \omega \in R \quad (2.14)$$

- iii) ロバスト制御性能であるための必要十分条件はつぎの式が成り立つことである。

$$\mu[M(j\omega)] < 1, \quad \forall \omega \in R \quad (2.15)$$

ここで, μ は構造化特異値を表す. ここで, ロバスト制御性能問題について考える. 図 2.4 の閉ループ系がロバスト制御性能であるということは, すべての変動 $\Delta, \|\Delta\|_\infty \leq 1$ に対して

$$\bar{\sigma} [M_{22} + M_{21}(I - \Delta M_{11})^{-1} \Delta M_{12}] < 1, \forall \omega \in R \quad (2.16)$$

が成り立つことである. ここで, $\Delta \equiv 0$ のときは, 式 (2.13) のノミナル制御性能となる. 図 2.5 の閉ループ系について, e から v への仮想的な変動 Δ_{perf} でループを閉じた図 2.6 の系を考える. すると, 式 (2.16) のロバスト制御性能条件は図 2.6 のような構造的な不確かさ

$$\left\{ \left[\begin{array}{cc} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_{perf} \end{array} \right] : \|\Delta\|_\infty \leq 1, \|\Delta_{perf}\|_\infty \leq 1, \right\} \quad (2.17)$$

をもつ系がロバスト安定であることと等価となる. この構造的な不確かさをもつ系のロバスト安定条件はすべての $\omega \in R$ にたいして, $\det [I - \text{diag}(\Delta, \Delta_{perf})M(j\omega)] \neq 0$ となることである. なお, 式 (2.13) の構造化特異値 μ はブロック構造 $\text{diag}(\Delta, \Delta_{perf})$ に対して定義されている. このときのロバスト制御性能条件は構造的な不確かさに対するロバスト安定条件に帰着され, 構造化特異値 μ により解析することができる.

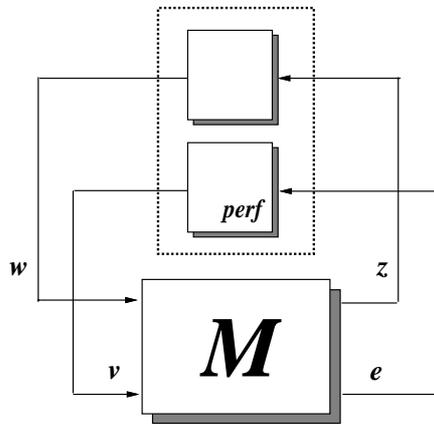


図 2.6: Robust performance problem

第 3 章

磁気浮上系の構成

本稿で用いる磁気浮上制御系の実験装置を図 3.1 に示す。この実験装置は、電磁石装置部、センサ装置部、デジタル制御装置部、ホストコンピュータの部分に大きく分けられる。この装置は、電磁石の発生する吸引力を能動的に制御することにより直径 7.7 cm、質量 1.75 kg の鉄球をある所定の位置で浮上させるものである。

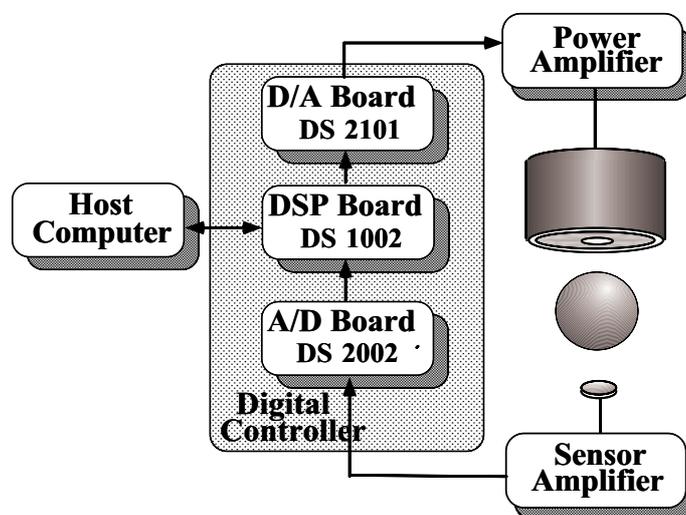


図 3.1: System Environment

この磁気浮上制御系の信号の流れについて説明する。最初にセンサでギャップの変位を測定する。つぎに、その位置信号を A/D コンバータでデジタル化する。この信号をもとにデジタル制御装置で制御則を演算し、制御入力となる電圧指令値を D/A コンバー

タに出力する。さらに、D/A コンバータからのアナログの出力信号を電磁石アンプで増幅し、電磁石の吸引力を制御する。

3.1 電磁石の構造および電磁石アンプ

本稿で用いる電磁石の外形を 図 3.2 に示す。電磁石は円筒形電磁石を用い、その内側には直径 0.8 mm の導線を 3130 回巻いたコイルが取り付けられている。電磁石アンプには Nachi 製の FCDDL1-4-5040 を用いる。この仕様については 表 3.1 に示す。

3.2 センサ

鉄球の鉛直方向には非接触の渦電流型の位置センサーが取り付けられている。これにより、鉄球の鉛直方向の位置を知ることができる。このセンサは、距離に比例した電圧を 0 ~ 10[V] の範囲で出力するセンサである。このセンサにより 2.98 ~ 6.97[mm] の測定が可能である。

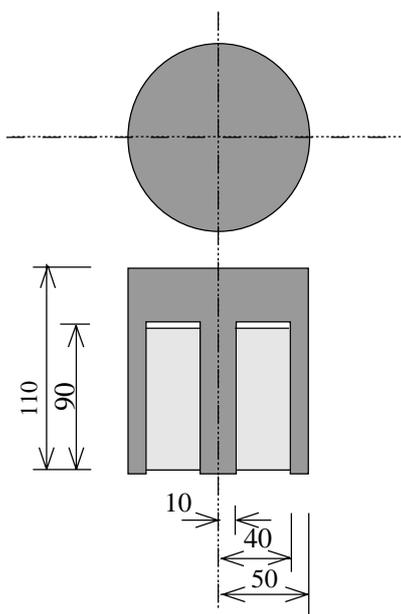


図 3.2: Electro Magnet

表 3.1: Amplifier of Electromagnet Specification

型式	リニア式 DC 電流アンプ model FCDL 1-4-5040
最大出力電圧/電流	± 50 [V] /+4[A](連続 3[A])
電流検出抵抗	1[Ω]
出力電流/入力電圧	0.4 [S]
バイアス設定範囲	0 ~ 3 [A]
電圧増幅段 GB 積	1[MHz]
入力極性	正負極性 設定可
電源	AC 100[V] 3[A]
寸法	W420 × H190 × D450 [mm]
重量	15 [kg]

3.3 デジタル制御装置

コントローラには DSP(Digital Signal Processor) を用いたデジタル制御系を構成し, dSPACE 社の デジタル制御装置 DSP-CITpro を用いる. DSP-CITpro は A/D コンバータボード DS2002, 浮動小数点演算ボード DS1002, D/A コンバータボード DS2101 から構成されている. その中枢となるボードには TEXAS INSTRUMENT 社製の DSP TMS320C30 を使用している. TMS320C30 は最大 33MHz の RISC 型で 32bit 浮動小数点が可能な DSP である.

3.4 ホスト・コンピュータ

ホスト・コンピュータには日本 DEC 社製の DECpc4662MTE を用いた. これより, デジタル制御装置への指令を与える.

表 3.2: DS2002 A/D converter specification

DS2002	A/D コンバータボード
A/D 変換時間	5[μ sec]
分解能	16 [bit]
入力電圧	± 10 [V]

表 3.3: DS2101 D/A converter specification

DS2101	D/A コンバータボード
D/A 変換時間	3 [μ sec]
分解能	12 [bit]
入力電圧	± 10 [V]

表 3.4: Digital controller specification

DS1002	プロセッサボード
DSP データ幅	32 [floating bit]
DSP 命令サイクル	60 [nsec]
DSP クロック周波数	33 [MHz]

第 4 章

磁気浮上系のモデリングと不確かさの記述

4.1 磁気浮上系の構成図

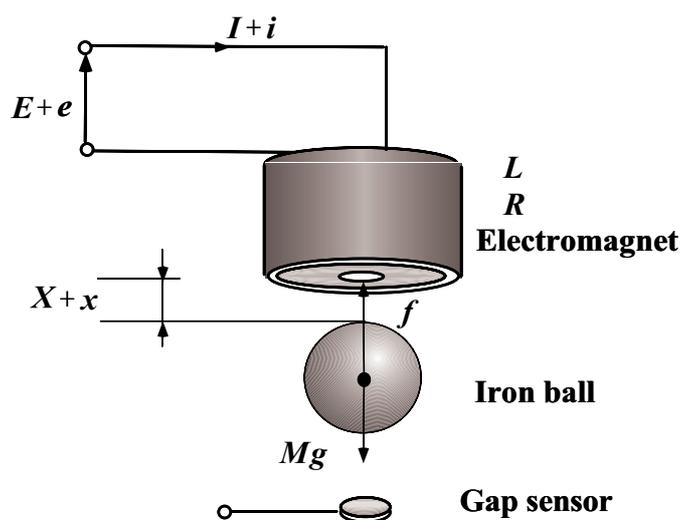


図 4.1: M.S.S.(Magnetic Suspension System)

図 4.1 に本稿で用いる磁気浮上系の構成図を示す. この図から, 一般的なモデリングが展開されていく. しかしながら, この構成図には実際に存在する磁気浮上系を物理的なモデルとして扱うためのある程度の簡略化がすでに行なわれている.

4.2 磁気浮上系の数学モデル

4.2.1 理想的な数学モデル

図 4.1 に示す磁気浮上系に対して理想的な仮定をおいたうえで物理的な法則などを用い、理想的な数学モデルを導出する [13]。最初に鉄球の運動について考える。鉄球の運動は鉛直方向 1 自由度についてのみ考え、鉛直方向以外の運動はしないものと仮定する。系の座標軸は鉛直下向きを正にとる。以上の仮定より、鉄球の運動は次式で表すことができる。

$$M \frac{d^2(X + x)}{dt^2} = Mg - f \quad (4.1)$$

ここで、それぞれのパラメータは、 M : 鉄球の質量、 X : 定常ギャップ、 x : 定常ギャップからの微小変位、 f : 電磁石吸引力とする。

このときの電磁石の吸引力をあらわす方程式を導くために、以下のような仮定をおく。

- 電磁石には磁気飽和、ヒステリシスは無い。
- 電磁石内、電磁石-鉄球間の漏れ磁束はない。
- 鉄心の透磁率は無限大。

上記の理想的な仮定のもとで電磁石の吸引力を表す数学モデルが導出される。

$$f = k \left(\frac{I + i}{X + x + x_0} \right)^2 \quad (4.2)$$

ここで、それぞれのパラメータは、 I : 定常電流、 i : 定常電流からの微小変位、 k : 吸引力係数、 x_0 : 実際の電磁石の特性を補正する定数とする。

次に電磁石の等価回路について考える。ここでは、次のような仮定をおく。

- 鉄心中に生じる渦電流は無視できる。
- 平衡点近傍で電磁石のインダクタンス L は一定とし、速度起電力の項を無視できる。

このような仮定のもとで、電磁石の等価回路を次式として表す。

$$L \frac{d(I + i)}{dt} + R(I + i) = E + e \quad (4.3)$$

ここで、それぞれのパラメータは、 E : 定常電圧、 e : 定常電圧からの微小変位、 L, R : 電磁石のインダクタンス、および抵抗とする。

4.2.2 制御系設計のための数学モデル

つぎに、制御系設計をおこなうために線形化などをおこない制御系設計のための数学モデルを導出する。さきに求めた理想的な数学モデルでは吸引力の関係を表す式に非線形な要素を含むため、線形制御理論を適用できない。そこで、式(4.2)を平衡点付近でテーラ展開し、1次の項まで考慮することで線形化をおこなう。その結果、磁気浮上系の制御系設計のための数学モデルは以下の式で表される。

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = K_x x - K_i i \quad (4.4)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e \quad (4.5)$$

ここで、 K_x, K_i は式(4.2)をテーラ展開することにより表れる $f = k \left(\frac{I}{X + x_0} \right)^2 - K_x x + K_i i$ の x, i の項の係数となり、それぞれ、

$$K_x = \frac{2kI^2}{(X + x_0)^3} \quad (4.6)$$

$$K_i = \frac{2kI}{(X + x_0)^2} \quad (4.7)$$

となる。

磁気浮上系の制御系設計のための数学モデルをブロック線図で表すと、式(4.4), (4.5)より、図4.2となる。

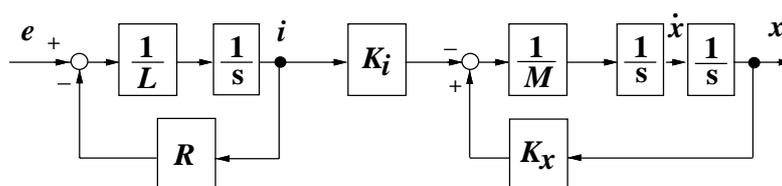


図 4.2: Nominal linear model for M.S.S.

4.3 電磁石パラメータの決定

4.3.1 吸引力パラメータの同定

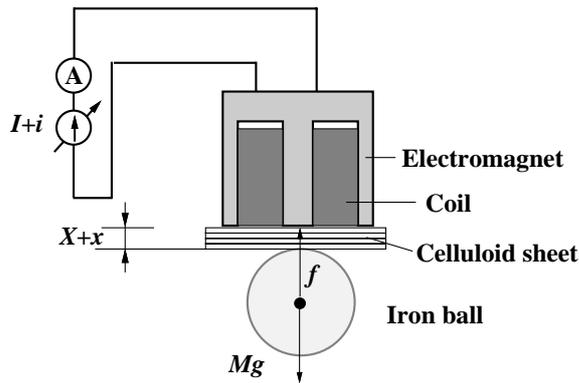


図 4.3: Circuit for measurement of magnetic force

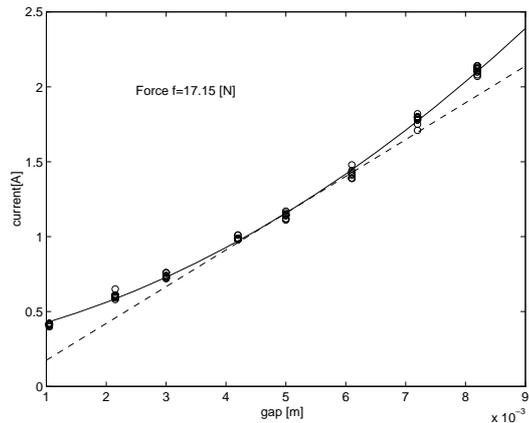


図 4.4: Characteristic of gap-current

吸引力パラメータの同定には、図 4.3 の回路を用いる。電磁石と鉄球の間にはセルロイド板を挟み、その間のギャップを一定にする。電磁石に電流を流し、吸引力を発生させ、鉄球を図 4.3 のように吸着させる。その後、徐々に電磁石に流す電流を減少させ、鉄球が落下する瞬間の電流値を電流計を用いて測定する。この鉄球が落下したときを電磁石が発生する吸引力と鉄球に働く下向きの力が釣りあった瞬間と考え、そのとき、 $f = Mg$ が成り立つとする。この方法を用いて、電磁石と鉄球の間のギャップ、鉄球に働く下向きの力を変え、測定することにより電磁石の吸引力についての特性を測定することができる。

この測定方法を用い、直径 7.7 cm、質量 $M = 1.75\text{kg}$ の鉄球を使用したときのギャップ-電流特性を図 4.4 に表す。この測定では鉄球に働く下向きの力は一定として測定するので、吸引力 f は一定となる。ここでは、電磁石と鉄球の間のギャップを 1 ~ 8mm まで、約 1mm ごとにギャップを変え測定を行なった。そして、各点での鉄球が落ちたときの電流値を測定した。各ギャップについては、それぞれ、10 回の測定を行なった。ここで、図 4.4 の印は各ギャップごとのすべての測定値（印が重なり黒く見えるところもある）、実線はこの測定値から求めたギャップ-電流曲線、破線はギャップを 5mm としたときの接線を表す。

吸引力 f は、式 (4.2) から

$$f = k \left(\frac{I + i}{X + x + x_0} \right)^2 \quad (4.8)$$

となる。この式を変形すると、

$$I + i = \sqrt{\frac{f}{k}}(X + x) + \sqrt{\frac{f}{k}}x_0 \quad (4.9)$$

が得られる。この式から、電流はギャップに比例するはずであるが、図 4.4 では電流はギャップのほぼ 2 乗に比例した形となっている。これは、電磁石の作り出す磁束のうち電磁石-鉄球-電磁石といった吸引力を発生する磁路を通るものに比べ、電磁石-電磁石といった吸引力に関係のない磁路を通る割合がギャップの増加に伴い増えていっているためと考えられる。

ここでは、このギャップ-電流直線を 図 4.4 で表されている曲線 (実線) の定常ギャップ $X = 5.0\text{mm}$ における接線 (図 4.4 の破線) とする。そして、その直線より、直線の傾き、および切片を求め、式 (4.9) からパラメータ k, x_0 を決定する。また、定常電流 I は、定常ギャップのときのギャップ-電流直線の電流値とする。この測定から求められたパラメータを表 4.1 に表す。

表 4.1: Parameters

Symbol	Value	Unit	Symbol	Value	Unit
X	5.0×10^{-3}	m	x_0	-0.29×10^{-4}	m
I	1.15	A	K_x	7.28×10^3	N/m
k	2.84×10^{-4}	Nm^2/A^2	K_i	29.64	N/A

4.3.2 等価回路のパラメータの同定

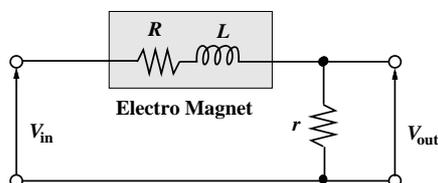


図 4.5: Circuit for measurement of equivalent parameter

電磁石の等価回路のパラメータは、図 4.5 の回路を用いて測定を行なった。ここで、 L, R : 電磁石の等価回路のパラメータ、 V_{in} : 入力電圧、 V_{out} : 出力電圧、 r : 測定のための付加小抵抗

となっている。この測定では、定常ギャップ $X = 5.0\text{mm}$ 離れた位置に鉄球をおいた状態で行なった。また、この回路の入力電圧 V_{in} は、先程求めた定常電流 $I = 1.15\text{A}$ を中心とした正弦波 w の信号を入力する。ここでは、 5.0V の正弦波を加えた。そして、この正弦波の周波数を変化させたときの入出力電圧のゲイン A とその位相差 ϕ を測定し、この測定値より、 L, R のパラメータを次式から求める [16].

$$L = \frac{r}{wA} \sin \phi, \quad R = \frac{r}{A} \cos \phi - r \quad (4.10)$$

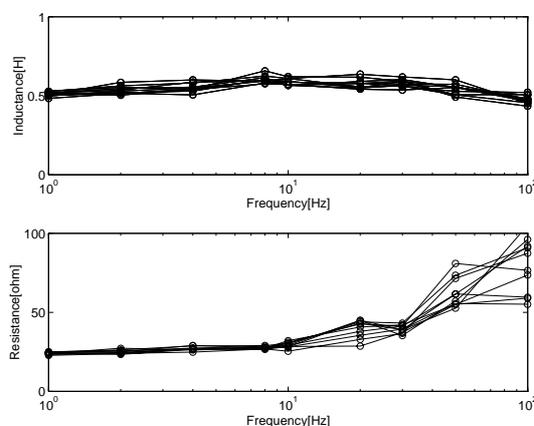


図 4.6: Characteristic of inductance and resistance

表 4.2: Parameters

Symboe	Value	Unit
L	0.559	H
R	26.60	Ω

ここでは、付加小抵抗は、 $r = 1.3\Omega$ のものを用いた。また、測定に関して、入力した正弦波の周波数は $1 \sim 100\text{Hz}$ の間で行ない、測定する各周波数ごとに 10 回の測定を行なった。この方法により測定した L, R の周波数特性は 図 4.6 になる。ここで、この図の 印は各周波数ごとに測定したすべての測定値を示す。また、この図の実線は各測定回数ごとの周波数特性を表している。この図からもわかるようにこの同定法を用いると等価回路のパ

ラメータ L, R の特性は周波数により異なることがわかる。しかし、ここでは、これらのパラメータ L, R は定数であるとし、すべての周波数で一定であるとして取り扱う。本稿では鉄球が浮上している際の周波数は、10Hz 以下となると仮定し、その周波数以下で測定したときの L, R の平均値を公称値として用いることにする。それぞれの公称値を表 4.2 に示す。

4.4 公称モデル

4.3節の同定から求められたパラメータより、磁気浮上系の公称モデルは次式となる。

$$G_{nom}(s) = \frac{-30.3}{(s + 47.6)(s + 64.5)(s - 64.5)} \quad (4.11)$$

この公称モデルをもとに、古典制御理論、現代制御理論などに代表されるように多くの設計法、解析法が展開される。本稿では、このモデルをもとに H_∞ 制御設計の手法のひとつである混合感度問題に基づき、感度関数、相補感度関数に対する周波数重みを決定し、コントローラ K_{mix} を設計した。

4.5 非構造的な不確かさによるモデリング

制御系の設計では、前節で求めた公称モデル (4.11) について制御系設計を行なっていく。これは、4節で導いた式 (4.4), (4.5) の数学モデルと 4.3節で求められたパラメータにより決定される。

しかし、4節で述べたように、実在する磁気浮上系から、この数学モデルを導出するまでには、磁気浮上系を構成図として表し、理想的な数学モデルを導出し、制御系設計のための数学モデルを導出するという段階をふまえて行なわれており、それぞれの段階においてさまざまな仮定および簡略化がなされている。そのため、この公称モデルは、そのもとで成り立つ理想的な数学モデルということになる。

また、この公称モデルは、4.3節のように実システムを用いた同定よりそのパラメータが決定されるが、その測定値も測定するごとに変わることがつねであり、測定誤差を避けることは難しい。

このことから、公称モデルのみで実システムを表すことは困難であり、このような実システムと公称モデルに存在するモデル誤差を不確かさとして表すことを考える。

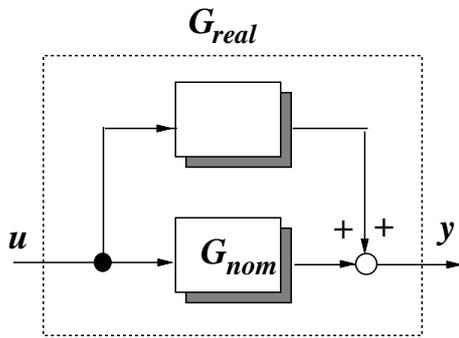


図 4.7: Additive uncertainty

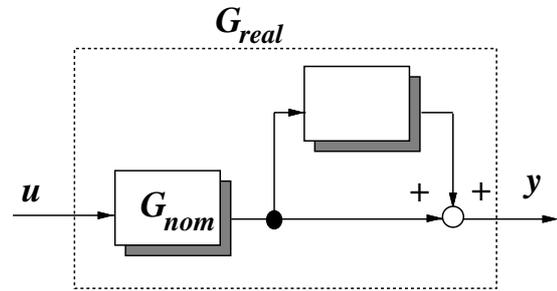


図 4.8: Multiplicative uncertainty

ここでは、公称モデルで表せない不確かさを非構造的な不確かさとして記述する。非構造的な不確かさは、その記述が実際の不確かさに対し保守的な記述となることから、解析結果も保守的となることが考えられる。しかしながら、モデル化されない高周波におけるダイナミクスを覆うことができること、また、非構造的に不確かさで記述することにより解析方法が容易に展開できるようになるなどの利点がある。そこで、これらの理由から、本稿では、非構造的な不確かさで記述し、A章において制御系を設計していく。

非構造的な不確かさは、制御対象の伝達関数が複数個集まってできた集合として考えられ、

公称モデルを G_{nom} 、不確かさを考慮した制御対象を G_{real} 、公称モデルで表せない不確かさを Δ とおくと次式のように記述される。ここでは、加法的変動と乗法的変動の記述を用いた不確かさの記述を示す。

- $G_{real} = G_{nom} + \Delta$ (加法的変動)
- $G_{real} = (I + \Delta)G_{nom}$ (乗法的変動)

加法的変動、乗法的変動による不確かさの記述を図に表すとそれぞれ図 4.7, 4.8となる。

ロバスト制御では、このように不確かさを記述し、その不確かさを含むモデルに対して良好な制御系を構成するという設計法である。混合感度問題に基づく H_∞ 制御も不確かさ Δ を陽にはモデルの中に表さないが、このようなモデルの不確かさが考慮された設計法となっている。

磁気浮上系において、不確かさを非構造的に記述し制御系を構成した例として文献 [15] があげられる。この文献では、非構造的に不確かさを記述したのちにロバスト制御性能を

達成する制御系の設計法として, H_∞ 制御と μ 解析を組み合わせた μ 設計法を用いた設計がおこなわれている.

本稿では, 文献 [15] による設計法を参考にコントローラを K_{mu} を設計した.

4.6 構造的な不確かさによるモデリング

本稿で設計したコントローラ K_{mix}, K_{mu} は, 制御対象の変動を非構造的な不確かさとして取り扱い, 設計を行なっている.

しかしながら, これらの設計法では, 実システムとモデル間の不確かさを非構造的な不確かさとして記述するために設計したコントローラはもとの不確かさにたいして保守的なものとなる可能性がある. 非構造的に不確かさを記述することは, 数学的な解析が容易に展開できるという利点をもっているが, その代償として記述が保守的であるために得られる解析結果も保守的となってしまうことが考えられる.

μ 設計法により設計したコントローラ K_{mu} は, 設計する際にモデルに表れるそれぞれのパラメータの変動を考慮し設計したコントローラであるが, それらの変動は, 図 A.5 のように非構造的な不確かさとしてひとつの集合にまとめられ記述されている. そのために, 具体的にどのような変動にたいしてロバスト安定性およびロバスト制御性能について理論的に保証されいるかは定かでない.

また, 実験結果からこれらの変動にたいする安定性を考察してみると, 考慮した変動だけでなく, さらに広い変動に対しても安定に浮上しているようである.

そこで, これらの制御対象における不確かさについては, 構造的な不確かさとして具体的に記述することが望ましいようである. そして, その記述をもとにロバスト性解析を行なう必要がある.

しかしながら, ここで重要となってくるのはロバスト性解析を行なうための不確かさを考慮したモデルである. 不確かさを考慮するモデリングについては, ロバスト性解析を行なう者の意志に任せられている. そのために, ただ, 過剰に不確かさをモデリングした場合には, 再度, 保守的な結果を導く可能性すらありうる. このような理由からこれらをどのように記述するかということが重要となる.

そこで, 本稿では, 磁気浮上系の数学モデルに存在する不確かさについて考察し, ロバスト性解析のために有効となる不確かさを考慮したモデルについて検討していく.

4.6.1 モデルに存在する不確かさについて

4.5節でも述べたように、制御系を設計するための数学モデルは、モデルを導出する段階ごとにさまざまな仮定および簡略化がなされ、実際に存在する実システムの特徴を正確には表していない。また、この数学モデル各パラメータは、4.3.1節のように実システムを用いた同定を行なうことから決定されるが、その値も測定するたびに異なるなど正確な値を求めることは難しい。そこで、このような実システムとモデルに存在するモデル誤差を不確かさとして表し、数学モデルに記述することを検討していく。

不確かさを検討していく上で、このときの不確かさの要因としては、

- 線形化による不確かさ
- パラメータの不確かさ
- モデル化されない動特性

などが考えられる。以下に、実際に磁気浮上系についてモデリングする際に実システムとモデルの間にどのような不確かさが生じるかについて検討していく。

4.6.2 線形化による不確かさ

磁気浮上系の数学モデルと実システムの間には平衡点付近で線形化したことにより生じた数学モデルに表されない不確かさが存在する。実際に線形化を行なった吸引力の項について考える。

図 4.9 に定常ギャップ $X = 5.0\text{mm}$ のときの電流-吸引力特性(上段)、定常電流 $I = 1.15\text{A}$ のときのギャップ-吸引力特性(下段)を表わす。ここで、図 4.9 の印は各点のすべての測定値を表し、実線は、測定値から求められた電流-吸引力特性(上段)、ギャップ-吸引力曲線(下段)となる。また、破線はそれぞれの特性を表す曲線の定常電流値、定常ギャップ値における接線を表している。つまり、このときの傾きが線形化したことにより表される K_i, K_x となる。

この測定には、 $M = 1.75\text{ kg}$ の鉄球を用いた。鉄球の質量を増加させるためには、磁化されない物体をその鉄球に付着させることにより質量を増加させた。

電流-吸引力特性(上段)では、定常ギャップ $X = 5.0\text{mm}$ とし、鉄球の質量を変化させたときの鉄球に働く下向きの力と吸引力がつりあう瞬間の電磁石に流れる電流値の測定を行なった。ギャップ-吸引力曲線(下段)では、電磁石に流れる電流値を 4.3.1節から求めた

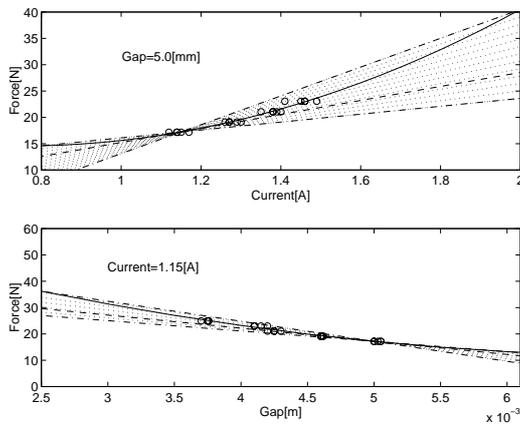


図 4.9: Experimental force curves

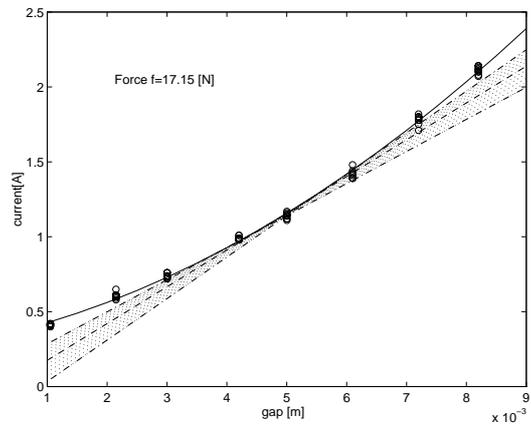


図 4.10: Characteristic of gap-current

定常電流 $I = 1.15\text{A}$ とし、鉄球の質量を変化させたときの鉄球に働く下向きの力と吸引力がつりあうときのギャップを測定した。測定は各点において、5回の測定を行なった。

図 4.9 からわかるように、それぞれの定常値から離れるほど、それぞれの接線と実験から求められた測定値との差が大きくなる。これが、線形化したことにより表われる実システムと数学モデルとの間の不確かさとなる。ここでは、図 4.9 のようにそれぞれの定常値を中心にそれぞれの接線の傾き K_i, K_x をパラメトリックに変動させ、線形化により表されなかった不確かさを表す。

このときの K_i, K_x の不確かさは、次式で記述される。

$$K_i = K_{i0} + k_i \delta_i \quad (4.12)$$

$$K_x = K_{x0} + k_x \delta_x \quad (4.13)$$

ここで、 K_{i0}, K_{x0} はそれぞれの公称値、 k_i, k_x はそれぞれの不確かさの大きさ、 $\delta_i, \delta_x \in [-1, 1]$ である。

また、4.3.1節で用いた吸引力のパラメータの同定で用いた方法からも K_i, K_x 変動の範囲を求めることができる。図 4.10 に図 4.4 と同じ図を示す。これは、4.3.1節で用いた吸引力パラメータの同定法から測定したギャップ-吸引力特性である。印は測定値、実線は測定値から求められたギャップ-吸引力曲線、破線はこの曲線の定常ギャップにおける接線を表す。3節では、定常ギャップ $X = 5.0\text{mm}$ での接線(破線)から、パラメータ K_i, K_x を求めた。図 4.10 からわかるように、線形化を行なっているためにこの定常ギャップから離れ

るにつれて、線形化により表されなかった不確かな要素が表れる。そこで、定常ギャップから変動した点でのパラメータ K_i, K_x の値を求め、それぞれの上限值、下限値を求める。それらの値から、不確かさの大きさ k_i, k_x を求めることができる。

本稿の実験装置では、浮上物体として鉄球を用いており、浮上物体の質量を変えるために磁性体でないものを付着すると磁束の発生を妨げるなどの理由から正確な測定が行われていない可能性がある。そこで、 K_i, K_x の不確かさの測定には、質量 $M = 1.75$ kg の鉄球のみを用いて測定する 4.3.1 節で用いた同定法から求めることにする。

4.6.3 パラメータの不確かさ

制御対象のモデルは多くのパラメータから構成される。しかし、そのパラメータの値はさまざまな条件により変動することが考えられ、その正確な値は分からない。そこで、パラメータの変動を不確かさとして定義する必要がある。図 4.1 の磁気浮上系のモデルでは、鉄球の質量 M の値がなんらかの要因で変化することが考えられる。そこで、この変動をパラメータ変動の不確かさとして扱う。この不確かさを次のように記述する。

$$M = M_0 + k_M \delta_M \quad (4.14)$$

ここで、 M_0 は公称値、 k_M は不確かさの大きさ、 $\delta_M \in [-1, 1]$ である。

4.6.4 モデル化されない動特性

電磁石の動特性 $\frac{1}{Ls+R}$ について検討する。3 節の同定法により、 L, R の値は入力正弦波の周波数が 10Hz 以下のときの測定値の平均値をそれらの公称値とした。しかしながら、この同定法では、式 (4.10) からわかるように測定するたびに L, R の値は決定され、測定するたびに電磁石の動特性は異なるものとなる。つまり、3 節で決定した公称値はそれらのうちの 1 部でしかない。

図 4.11 に 4.3.1 節で測定した入力正弦波の周波数が 10Hz 以下のときの電磁石の周波数特性を表す。ここで、図 4.11 の実線は公称値の周波数特性を表し、点線は 4.3.1 節での測定から得られた入力正弦波の周波数が 10 Hz 以下のときの電磁石の動特性 $\frac{1}{Ls+R}$ を表す。この図からもわかるように電磁石の動特性は、ある範囲に存在する帯のように分布し、公称値のみではその特性を表すことはできない。また、さらに、実システムにおいて電磁石の動特性を測定してみると、 $\frac{1}{Ls+R}$ などの簡単な数式で表せない複雑な動特性が測定される。

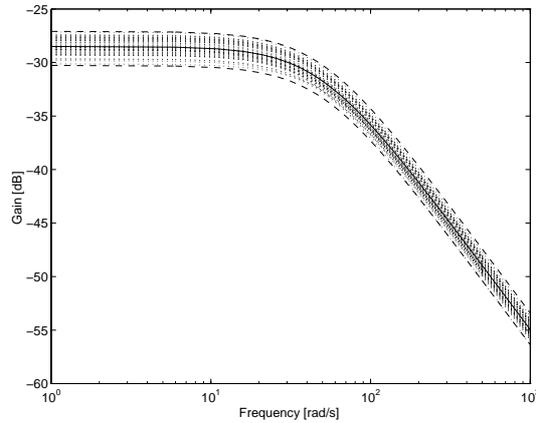


図 4.11: Frequency response of electromagnet

ここでは, 図 4.11の破線のように公称値では表せない動特性の上限値, 下限値を求め, それらの変動を公称値の動特性が有する不確かさとして表すことを考える.

このときの不確かさの記述は加法的変動¹ として考え, 次式として記述する.

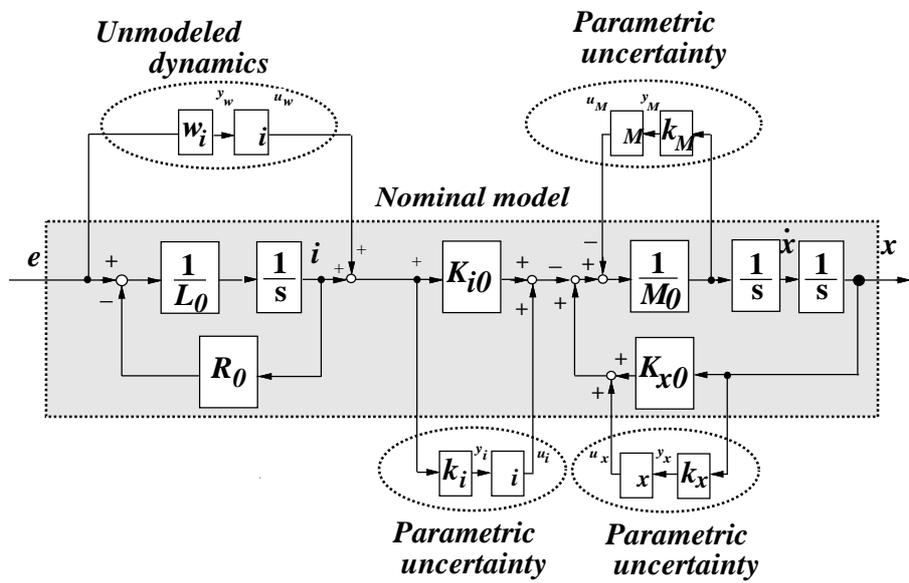
$$\frac{1}{Ls + R} = \frac{1}{L_0s + R_0} + w_i(s)\Delta_i(s) \quad (4.15)$$

ここで, L_0, R_0 は, それぞれの公称値, $w_i(s) = d_w + c_w(sI_m - A_w)^{-1}b_w$ は, 重み関数であり, $\Delta_i(s)$ は $|\Delta_i(jw)| \leq 1$ で変動するものとする. また, 周波数特性の上限値を $\frac{1}{L_0s + R_0} + w_i(s)$ とし $w_i(s)$ を求めた.

4.7 不確かさのモデル

以上で述べたこれらの不確かさを図 4.2 のノミナルモデルに取り入れたブロック線図は, 図 4.12 になる.

¹ここでは加法的変動と記述するが, 乗法的変動としても記述することができる.



⊗ 4.12: Uncertain model for M.S.S.

第 5 章

ロバスト性解析

5.1 不確かさを考慮しないモデルにたいする制御系の解析

μ 設計法を用いて設計したコントローラ K_{mu} , 混合感度問題から設計したコントローラ K_{mix} , 実験装置を用い, 実際に思考錯誤をおこないながら, PID コントローラのゲインを求め設計したコントローラ K_{pid} についての制御系解析を行なう。

このときの指標として, つぎの解析をおこなう。

- $(I + G_{nom}K)^{-1}$ (感度関数)
- $G_{nom}K(I + G_{nom}K)^{-1}$ (相補感度関数)
- $W_{perf}(I + G_{nom}K)^{-1}$ (ノミナル周波数応答)

図 5.1はそれぞれのコントローラを磁気浮上系に用いたときの感度関数をあらわす。この図より, コントローラ K_{mu}, K_{mix} についての感度関数特性は低周波でほぼ同じような特性を示していることがわかる。しかしながら, $10 \sim 100$ rad/s あたりでは, K_{mu} のほうが多量に良い特性を示しているようである。一方, K_{pid} については低周波での特性が他のコントローラに比べて悪くなっている。特に, 60 rad/s 付近では特に悪くなっているようである。これから, K_{pid} は, このような低周波の外乱に対して, 他のコントローラより制御性能が良好でないことがわかる。しかしながら, 90 rad/s より大きい周波数では, 他のコントローラより良い特性を示すようである。

図 5.2は, それぞれのコントローラを磁気浮上系に用いたときの相補感度関数を表す。この図より, コントローラ K_{mu}, K_{mix} については感度特性と同様にほぼ同じような特性を示

している。しかしながら、詳しく考察すると、 $10 \sim 100$ rad/s あたりでは、 K_{mu} のほうが多
少良い特性を示しており、その値より大きい周波数になると K_{mix} の方が多少よい特性を
示している。

一方、 K_{pid} は、他のコントローラに比べて低周波付近で特性は悪く、さらに、感度関数
特性のときと同様に 60 rad/s 付近では特に悪くなっているようである。しかしながら、 90
rad/s より大きい周波数では、他のコントローラより良い特性を表していることがわかり、
高周波のモデル化誤差に対しては、良い特性を示すコントローラであることがいえる。

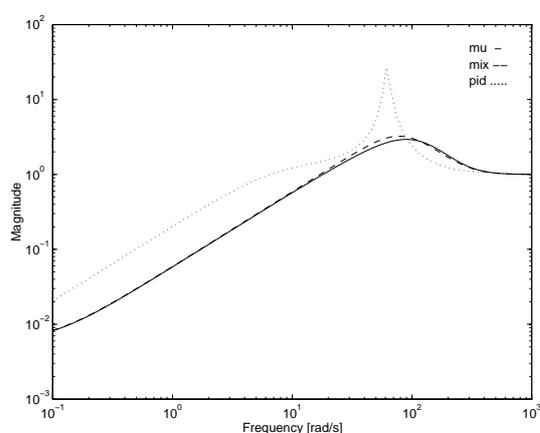


図 5.1: 感度関数

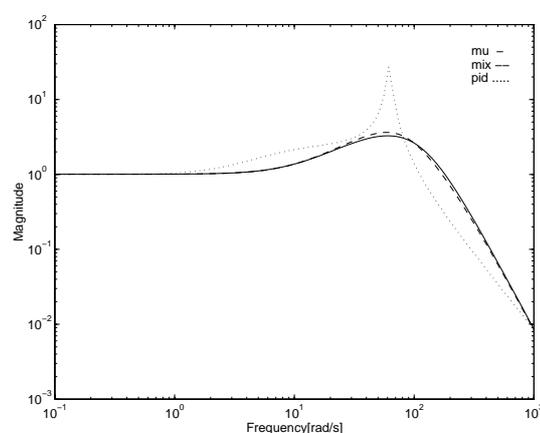


図 5.2: 相補感度関数

つぎに、パフォーマンスの重みを考慮した制御系解析を行なう。図 5.3は、それぞれのコ
ントローラに対する制御系のノミナル制御性能をあらわす。ここで制御性能の指標を表す
重み関数 W_{perf} は、 K_{mu} を設計した際に設定した

$$W_{perf} = \frac{165}{1 + s/0.1} \quad (5.1)$$

とする。図 5.3から、コントローラ K_{mu} , K_{mix} は、この制御性能の要求をみたしているこ
とがいえる。また、 K_{pid} については低周波において式 (5.1) の制御性能の要求をみたして
いないことになる。しかしながら、 $10 \sim 90$ rad/s の付近ではコントローラ K_{mu} は、 K_{mix} より、
良好な制御性能を表すことがわかる。

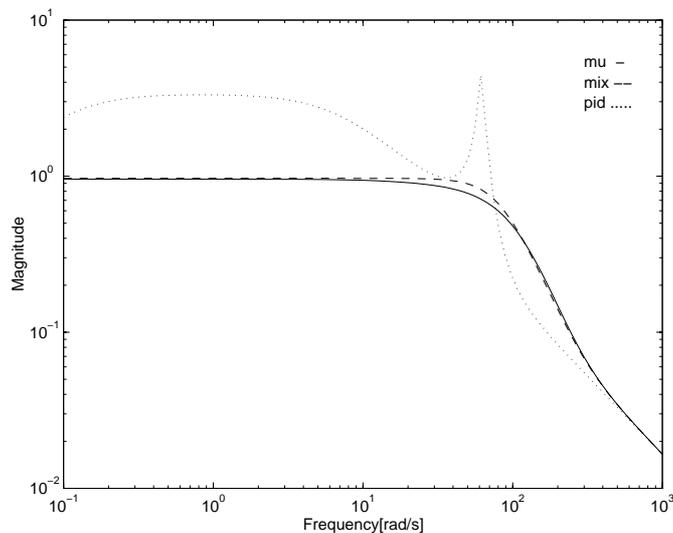


図 5.3: ノミナル制御性能

5.2 不確かさを考慮したモデルにたいする制御系のロバスト性解析

つぎに、構造的に不確かさを記述したモデルに対してロバスト性解析を行なっていく。最初に、不確かさを非構造的な不確かさとして記述し、設計したコントローラ K_{mu} について、構造化特異値を用い、ロバスト安定性の解析を行なっていく。そののちに他のコントローラをロバスト安定性、ロバスト制御性能についての解析をおこなっていく。

5.2.1 設計におけるパラメータの変動に対するロバスト安定性

最初に 図 4.12 のように記述した不確かさを考慮したモデルにたいして式 (A.19) のコントローラ K_{mu} を閉ループ系として構成したときのロバスト安定性の解析を mixed μ を用い解析をおこなう。この解析には μ -Analysis and Synthesis Toolbox を用いる。図 4.12 から、 μ 解析のための構成図を表すと図 5.4 となる。

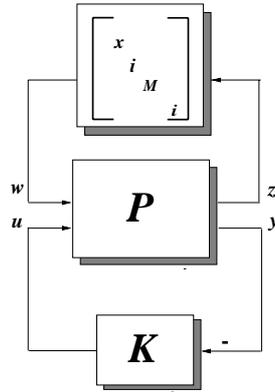


図 5.4: Interconnection structure

このときの一般化プラント P の状態空間表現 $[A, B, C, D]$ は以下のようになる.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_{x0}}{M_0} & 0 & \frac{-K_{i0}}{M_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-R_0}{L_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_w \end{bmatrix}$$

$$B = [B_1|B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \frac{1}{M_0} & \frac{-1}{M_0} & \frac{-1}{M_0} & \frac{-K_{i0}}{M_0} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{L_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_w \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_i & 0 \\ \frac{k_M K_{x0}}{M_0} & 0 & \frac{-k_M K_{i0}}{M_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_w \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \left[\begin{array}{c|c} D_{11} & D_{12} \\ \hline D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_M}{M_0} & \frac{-k_M}{M_0} & \frac{-k_M}{M_0} & \frac{-k_M K_{i0}}{M_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_w \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

また, ここで不確かさを表すブロック構造 Δ は以下のように考える.

$$\Delta = \{diag[\delta_x, \delta_i, \delta_M, \Delta_i]\}$$

ここで, $\delta_x, \delta_i, \delta_M$ は実数の不確かさ, Δ_i は複素数の不確かさとし

$$\delta_x, \delta_i, \delta_M \in \mathbf{R}, \Delta_i \in \mathbf{C}$$

と表される.

つぎにコントローラ K_{mu} を設計する際に用いた表 A.1より, モデルの不確かさの重みを決定する. 設計する際には, 定常ギャップの変動を 4.7 ~ 5.3 mm として考えたのでそのギャップに伴い K_i, K_x はつぎの範囲で変動する.

$$27.84 \leq K_i \leq 31.62 \quad (5.2)$$

$$7.09 \times 10^3 \leq K_x \leq 7.46 \times 10^3 \quad (5.3)$$

そこで, K_i, K_x は,

$$K_i = 29.64 + 2.00\delta_i \quad (5.4)$$

$$K_x = 7.28 \times 10^3 + 0.20 \times 10^3 \delta_i \quad (5.5)$$

と記述できる.

また, 設計する際には L, R のパラメータの変動を

$$5.18 \times 10^{-1} \leq L \leq 6.08 \times 10^{-1} \quad (5.6)$$

$$2.56 \times 10^1 \leq R \leq 2.76 \times 10^1 \quad (5.7)$$

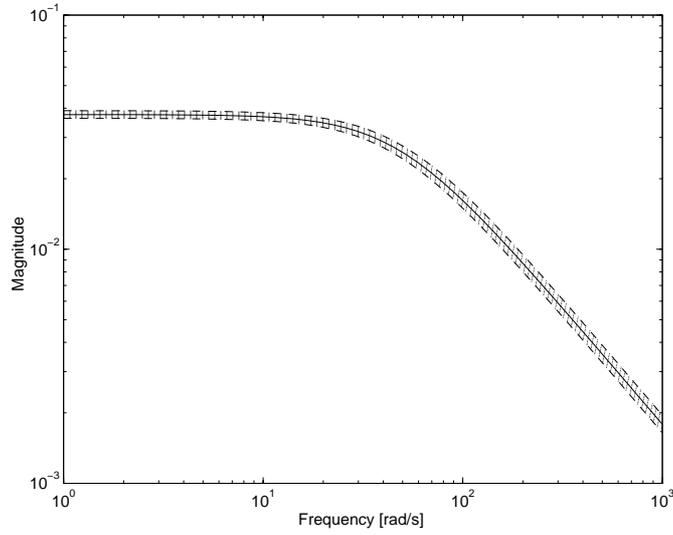


図 5.5: Frequency response of electromagnet

とした. この範囲でのパラメータが、変動するときの電磁石部の動特性 $\frac{1}{Ls+R}$ を 図 5.5 に示す.

この図より, 電磁石部の不確かさを考慮したモデルはつぎのように表される.

$$\frac{1}{Ls + R} = \frac{1}{0.559s + 26.6} + \frac{0.041s + 1}{(0.518s + 25.6)(0.559s + 26.6)} \Delta_i(s) \quad (5.8)$$

これらの不確かさの重みを 表 5.1 にまとめる.

表 5.1: Parameters

Symbol	Value	Unit	Symbol	Value	Unit
K_{i0}	29.64	N/A	k_i	2.00	N/A
K_{x0}	7.28×10^3	N/m	k_x	0.20×10^3	N/m
M_0	1.75	kg	k_M	0	kg
L_0	0.559	H	R_0	26.60	Ω
$w_i(s)$	$\frac{0.041s+1}{(0.518s+25.6)(0.559s+26.6)}$				

表 5.1 の不確かさの重みに対して, コントローラ K_{mu} を用いた閉ループ系の構造化特

異値 μ は, 図 5.6 となる. このとき, 制御性能を表す重みについては考慮していない.

この図から, この不確かさに対するロバスト安定性を解析することができる. このときの構造化特異値は 1 以下となりロバスト安定性が保証されていることがわかる. また, この図の破線は $\delta_x, \delta_i, \delta_M$ が, 複素数の不確かさであるとして構造化特異値を求めたものである. 複素数の不確かさの摂動のみを用いたときの構造化特異値の上限値のピーク値は 0.46 となり, 一方, 実数の不確かさを用いた構造化特異値の上限値のピークは 0.371 となった. これより, 複素数の不確かさのみの解析では解析の結果が保守的であることがいえる.

また, 実数の不確かさを用いた構造化特異値の上限値のピークは 0.371 であることから, $\|\Delta\| < 1/0.371$ よりも小さい不確かさの摂動について安定性を保つことができる. これより, 表 5.1 に示した不確かさよりも, さらに大きい不確かさにたいしてもロバスト安定性を保てることができることがいえる.

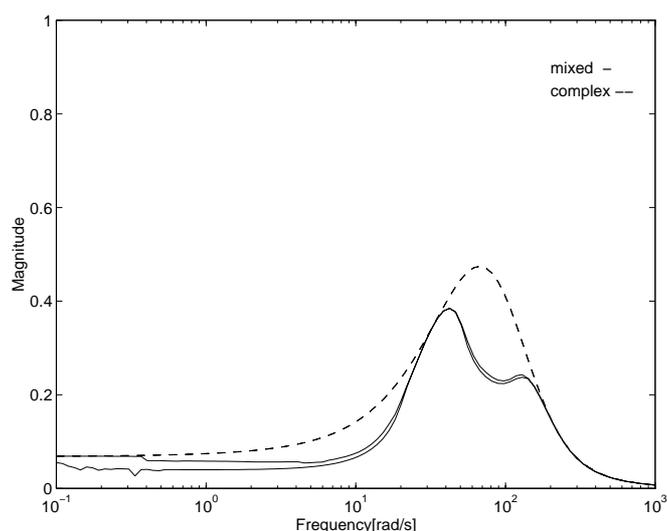


図 5.6: Mixed μ plot for K_{mu} controller

5.2.2 それぞれの不確かさのロバスト安定性への影響

図 4.12 では, 磁気浮上系の不確かさを線形化による不確かさ, パラメータ変動による不確かさ, 電磁石部のモデル化されない動特性として表した. そこで, これらの不確かさがそれぞれ, どのように磁気浮上系の安定性に対し, 影響を及ぼしているか構造化特異値をもちい考察を行なう.

ここでは、不確かさの構造は 図 5.4 について考える。また、磁気浮上系のパラメータおよび不確かさの重みとしては表 5.1 の不確かさの重みを perA とし、つぎのような不確かさの重みの変動を考えたときと比較する。

- パラメータ perB1:perA のパラメータ k_i, k_x のみ 2 倍にする。
- パラメータ perB2:perA のパラメータ k_i, k_x のみ 4 倍にする。
- パラメータ perC1:perA のパラメータ k_m のみ $k_m = 0.52$ にする。
- パラメータ perC1:perA のパラメータ k_m のみ $k_m = 1.04$ にする。
- パラメータ perD1: perA のパラメータ $w_i(s)$ のみ 2 倍にする。
- パラメータ perD2: perA のパラメータ $w_i(s)$ のみ 4 倍にする。

これらの不確かさの重みに対する構造化特異値を 図 5.7 ~ 5.9 に表す。これらの図から、不確かさの重みを大きくすると全周波数において構造化特異値の増加がみられるが、それぞれの不確かさでにより構造化特異値の増加する場所が異なってくるようである。

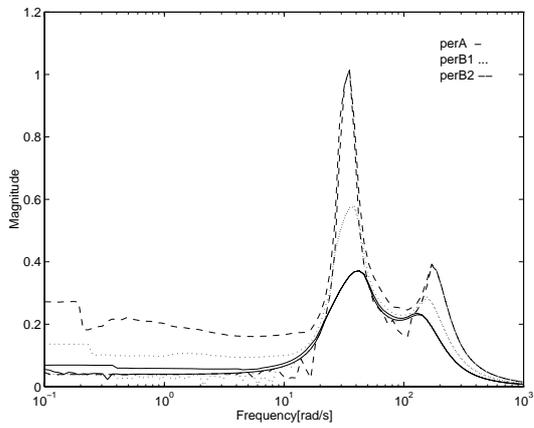
線形化による不確かさの重み k_i, k_x をを大きくすると特に 20 ~ 40 rad/s 付近での増加が大きく、また、100 ~ 300 rad/s 付近でも他の周波数帯に比べ増加が大きいことが分かる。パラメータ変動による不確かさ k_m については、特に 200 rad/s 付近での構造化特異値の増加がみられる。また、非構造的な不確かさであるモデル化されない動特性 $w_i(s)$ を増加させると構造化特異値が全周波数で $w_i(s)$ の増加と同様に増加することが分かる。

5.2.3 ロバスト安定性をみたく不確かさについての考察

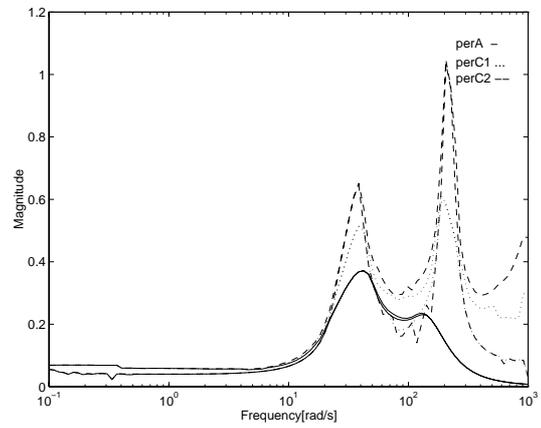
図 5.6 から、表 5.1 の不確かさの重みについてはロバスト安定性がいえることが分かった。また、この図から、コントローラ K_{mu} にたいする磁気浮上系は、構造化特異値の上限値のピーク値が 1 より小さいためにロバスト安定性にまだ、余裕がみられることがわかる。そこで、さらに不確かさの重みを大きくした場合のロバスト安定性について検討する。

最初に実数の不確かさである線形化による不確かさの重み k_i, k_x について考慮する。5.2.1 節では、定常ギャップの変動を 4.7 ~ 5.3 mm までの変動を考慮しロバスト安定性の解析をおこなった。その解析結果より、まだ、大きな変動に対しても安定性には余裕がみられた。そこで、さらに、定常ギャップが変動する範囲を広げ、4.1 ~ 5.9 mm の間で変動がおこるときの解析をおこなう。このとき、変動を表す不確かさの重み k_i, k_x は

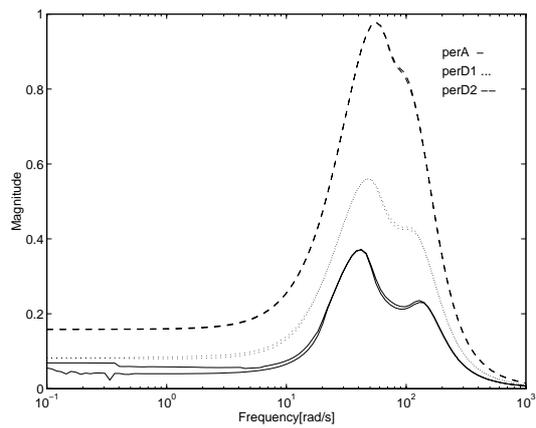
$$k_i = 6.6, \quad k_x = 0.57 \times 10^3 \quad (5.9)$$



⊗ 5.7: Mixed μ plot (perB)



⊗ 5.8: Mixed μ plot (perC)



⊗ 5.9: Mixed μ plot (perD)

となる。

つぎに電磁石部分に表れるモデル化されない動特性について考える。さきほどは、この電磁石部に表される動特性の不確かさを図 5.5 のように考慮した。図 5.10 に FFT アナライザにより数回、測定した電磁石部の動特性を表す。この図の実線は電磁石の公称値の特性をあらわし、破線は FFT アナライザから測定したものとする。このときの測定値は定常電流を加えての測定はおこなっていない。

しかしながら、この図から電磁石の特性は 100 rad/s 付近より特性にばらつきが大きくなるのがわかる。このことから公称モデルだけではこの動特性を記述できないことがわかる。

また、定常電流が加わったり、定常ギャップの変動などによりその定常電流が変動した場合にはこの動特性がさらに、変化することが予想される。

そこで、このときのモデル化されない動特性として図 5.11 のように不確かさを新たに見積もることとする。これより、電磁石部の動特性 $\frac{1}{Ls+R}$ を

$$\frac{1}{Ls+R} = \frac{1}{0.559s+26.6} + 1.12 \times 10^{-3} \frac{(s+71.8)(s+12.46)}{(0.518s+25.6)(0.559s+26.6)} \Delta_i(s) \quad (5.10)$$

として表す。

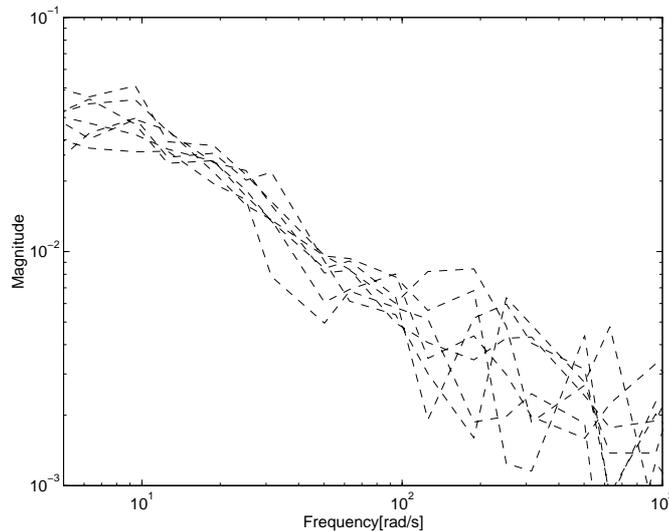


図 5.10: Frequency response of electromagnet

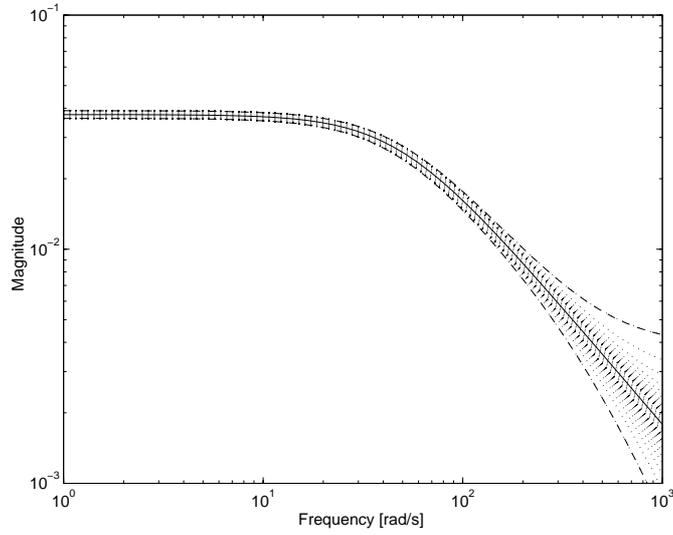


図 5.11: Frequency response of electromagnet

このような線形化による不確かさ k_x, k_i および、電磁石部におけるモデル化されない動特性 $w_i(s)$ を考慮した構造化特異値は図 5.12 となる。なお、このときの不確かさは

$$\delta_x, \delta_i, \delta_M \in \mathbf{R}, \Delta_i \in \mathbf{C}$$

としている。このときのパラメータを表 5.2 に表す。

表 5.2: Parameters

Symbol	Value	Unit	Symbol	Value	Unit
K_{i0}	29.64	N/A	k_i	6.6	N/A
K_{x0}	7.28×10^3	N/m	k_x	0.57×10^3	N/m
M_0	1.75	kg	k_M	0	kg
L_0	0.559	H	R_0	26.60	Ω
$w_i(s)$	$1.12 \times 10^{-3} \frac{(s+12.46)(s+71.0)}{(0.518s+25.6)(0.559s+26.6)}$				

この不確かさに対する構造化特異値は 図 5.12 より 1 以下となっており、設定した不確かさに対しロバスト安定性を保証していることがいえる。この結果、定常ギャップの変動

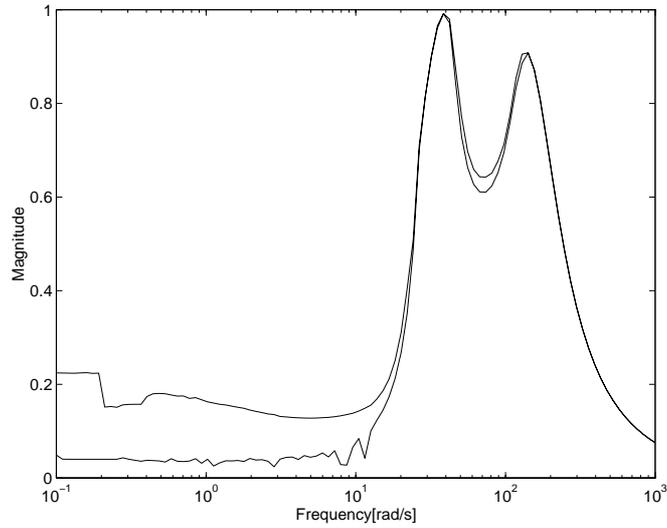


図 5.12: mixed μ plot

にたいしては 4.1 ~ 5.9 mm, 電磁石部のモデル化されない動特性については図 5.10 のような不確かさが加わった場合にもロバスト安定性を示すことがわかる. これらの解析より, 設計する際に考慮した変動よりも, 設計したコントローラはより広い変動にたいして安定性を保証していることがわかる.

5.2.4 ロバスト制御性能解析

つぎにロバスト制御性能について解析する. ロバスト制御性能は,

$$\|W_{perf}(I + G_{real}K)^{-1}\|_{\infty} \quad (5.11)$$

の特性を表し, 不確かさを含んだモデル G_{real} に対する制御性能の劣化について解析できる. ここでは不確かさとして, ロバスト安定性の解析と同様に定常ギャップの変動と電磁石部のモデル化されない動特性について考慮する. このとき, 定常ギャップの変動としては, 4.7 ~ 5.3 mm としそのときの K_x, K_i は式 (5.4) で表される. また, 電磁石部の不確かさは図 5.11 とし, そのときの動特性 $\frac{1}{Ls+R}$ は, 図 5.11 の不確かさとする. このときの不確かさのパラメータを表 5.3 にまとめる. これらの不確かさに対するロバスト制御性能を解析した結果は, 図 5.13 となる. これより, これらの不確かさに対しコントローラ k_{mu} を用いた閉ループ系はロバスト制御性能は 1 以下となっていないが, このときの上限値のピーク値

は 1.44 でありこれは $\|\Delta\| < 1/1.44$ の不確かさの摂動に対してロバスト制御性能が保証されると解釈できる。

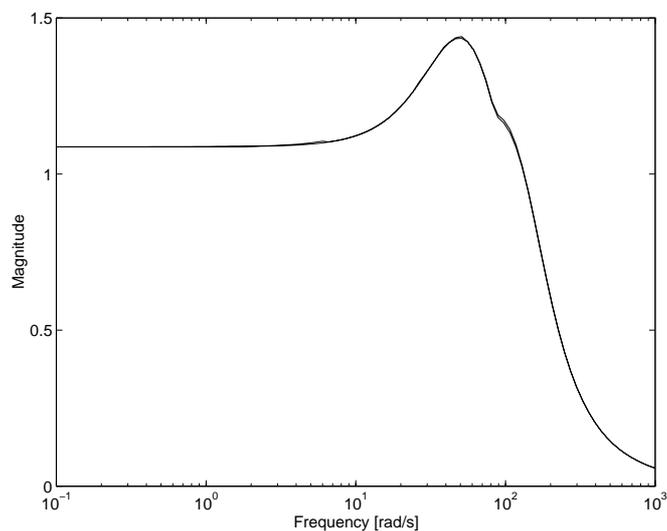


図 5.13: Robust performance

表 5.3: Parameters

Symbol	Value	Unit	Symbol	Value	Unit
K_{i0}	29.64	N/A	k_i	2.00	N/A
K_{x0}	7.28×10^3	N/m	k_x	0.20×10^3	N/m
M_0	1.75	kg	k_M	0	kg
L_0	0.559	H	R_0	26.60	Ω
$w_i(s)$	$1.12 \times 10^{-3} \frac{(s+12.46)(s+71.0)}{(0.518s+25.6)(0.559s+26.6)}$				

5.3 他のコントローラとの比較検証

5.2節でおこなったのと同様に構造化特異値をもちいてコントローラ K_{mu} , K_{mix} , K_{pid} についてのロバスト性解析をおこなう。

5.3.1 ロバスト安定性解析

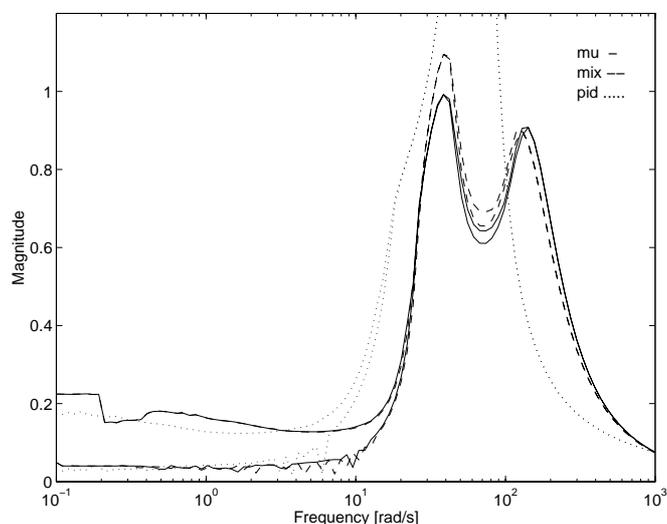


図 5.14: Robust stability

図 5.3は、構造化特異値をもちいてロバスト安定性の解析を行なった結果である。このときの不確かさのモデル G_{real} としては図 4.12としている。また、定常ギャップは 4.1 ~ 5.9 mm まで変動するとし、電磁石部における動特性の不確かさについては、図 5.11とした。このときの不確かさの重みの数値は、表 5.2となる。この図より、コントローラ K_{mu} のみ全周波数帯でロバスト安定を保証していることがいえる。このときの構造化特異値の上限値のピーク値は 0.99 である。

K_{mix} では、30 rad/s あたりで構造化特異値 μ が 1 以上となっており、この周波数付近でのロバスト安定性が保証されていないことがわかる。このときの構造化特異値の上限値のピーク値は 1.09 となっている。

また、 K_{pid} についても 20 ~ 100 rad/s 付近での構造化特異値が 1 以上となっており、ロバスト安定性をみだしていないことがわかる。このときの構造化特異値の上限値のピーク値は 4.96 であり、これより、 K_{pid} のロバスト安定性は他のコントローラに比べて悪いことがいえる。

それぞれのコントローラの構造化特異値は、50 ~ 60 rad/s の付近の構造化特異値が大きくなっている。この付近の値は線形化による不確かさの重みの大きさに関連があることが 5.2節の解析よりわかっている。そこで、線形化の不確かさが増加すると、この周波数帯で

それぞれのコントローラの安定性が保証されなくなることがこの結果から予想される。

また, 100 rad/s までは, K_{mu} は, 他のコントローラより, 構造化特異値は小さくロバスト安定性が保証されている。しかしながら, 100 ~ 500 rad/s あたりでは, K_{mix} , K_{pid} のほうが構造化特異値は小さくなっている。このことから, K_{mu} はこの周波数帯での不確かさの摂動にたいして他のコントローラより, 安定性が劣化することがいえる。

5.3.2 ロバスト制御性能

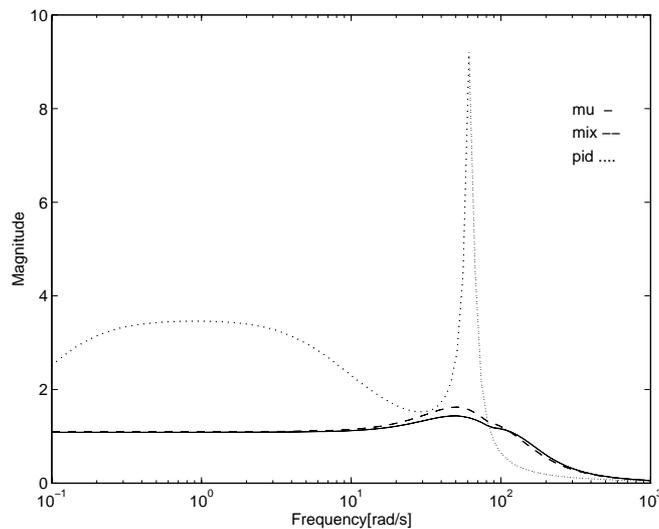


図 5.15: Robust performance

図 5.15は,

$$\|W_{perf}(I + G_{real}K)^{-1}\|_{\infty} \quad (5.12)$$

の特性を表し, 不確かさを含んだモデルに対するロバスト制御性能を解析する。また, 不確かさについては 5.2.4 節と同様に定常ギャップは 4.7 ~ 5.3 mm まで変動するとし, 電磁石部における動特性の不確かさについては, 図 5.11 とした。このときの不確かさの重みの数値は, 表 5.3 となる。

このとき K_{mu} の構造化特異値の値が小さく, 他のコントローラよりもロバスト制御性能の特性が良好であることがいえる。

なお, 5.2.4 節にも述べたがこのときの上限値のピーク値は 1.44 であり, これは, $\|\Delta\| < 1/1.44$ の不確かさの摂動に対してロバスト制御性能が保証されることになる。

また, K_{mix} の値は 1.62 であり, 同様に解釈すると, $\|\Delta\| < 1/1.62$ の不確かさに対して制御性能が保証されていることになる.

一方, K_{pid} は 60 rad/s での値が 9.20 となりロバスト制御性能を保証しない. ノミナル制御性能も他のコントローラにくらべて悪いものになっており, K_{pid} の制御性能は他のコントローラに比べ良好でないといえる.

これらの結果により, どのコントローラも設定した不確かさにたいしてロバスト制御性能が 1 以下となっていないものの制御性能に関していうと K_{mu} が他のコントローラにくらべ良好のようである.

第 6 章

実験結果からみた解析結果の検証

6.1 実験結果

設計したコントローラ K_{mu} , K_{mix} , K_{pid} について実験的な検証を行なう。これらのコントローラにたいし、次式の双一次変換

$$s = \frac{1}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (6.1)$$

により離散化をおこない、デジタル制御装置に実装した。ただし、サンプリングタイムは、 $65 \mu\text{s}$ とした。

実験装置の構成については、3節のとおりである。浮上物体となる鉄球は 1.75 kg である、そのときの定常吸引力は 17.15 N となる。定常ギャップ 5 mm のときのそれぞれのコントローラの静止時における安定浮上特性および外乱応答特性についての実験結果を Fig.6.1 ~ Fig. 6.5 に示す。

6.1.1 浮上特性

最初に浮上特性について検討する。Fig.6.1は、定常ギャップとなる 5 mm での浮上特性を示す。この図より、設計したコントローラ K_{mu} , K_{mix} , K_{pid} はすべて安定に浮上していることがわかる。しかしながら、 K_{pid} に関しては他のコントローラにくらべ、安定に浮上しているものの細かく浮上特性をみてみると実験結果より、微妙に振動しながら浮上していることがわかる。

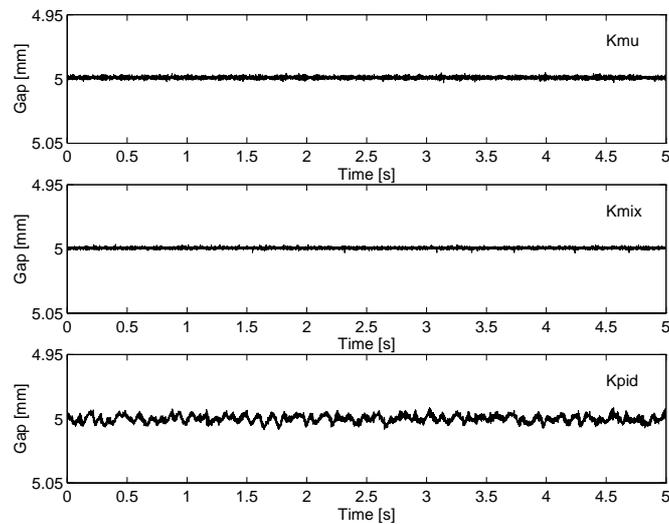


図 6.1: levitation at 5.0[mm]

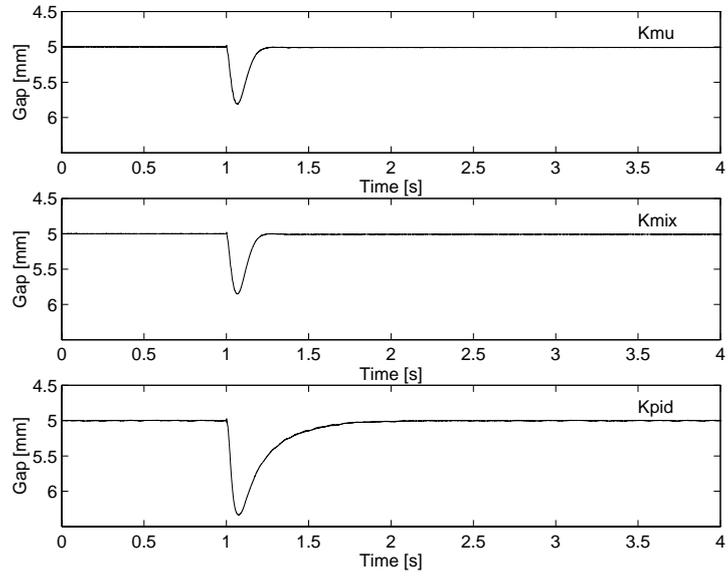
6.1.2 外乱応答特性

つぎに外乱特性について検討する. このときの外乱としては, 外乱はステップ上の電圧変化を電磁石の入力電圧部に加えることにより実験を行なった. 外乱の大きさは, 全て鉄球に働いた等価的な力に換算して表記している. 定常ギャップである 5mm の点で正の方向(下向き)に外乱を加えたときの応答を図.6.2, 6.3にさらに, 負の方向(上向き)に外乱を加えたとき応答を図.6.4, 6.5にしめす.

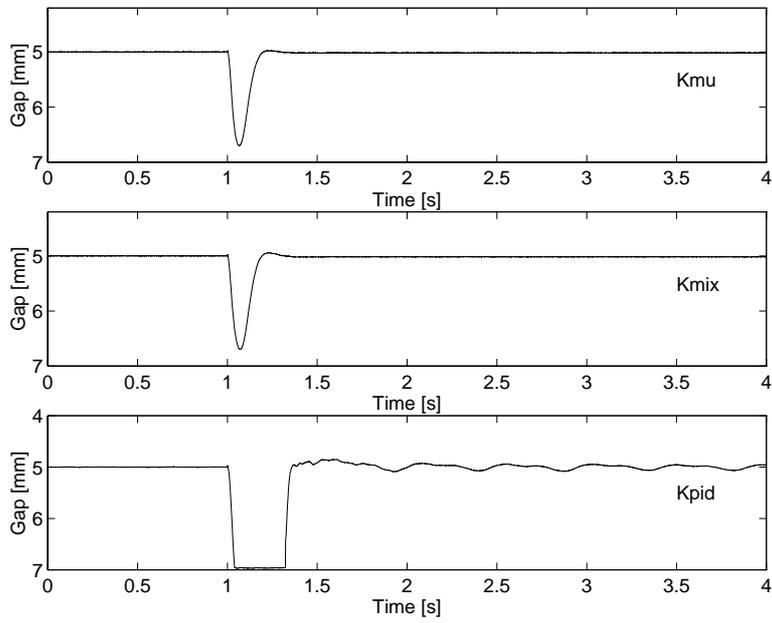
これらの応答から, ± 11 N, の外乱いたしては, すべてのコントローラ K_{mu} , K_{mix} , K_{pid} についてはこの大きさの外乱にたいし, 良好な応答を示しているようである. しかしながら, コントローラ K_{pid} については, 他のコントローラに比べて, 外乱特性は悪いようである.

この外乱を 19.8 N, -22 N と大きくするとコントローラ K_{mu} , K_{mix} については, これらの外乱に耐えることができたものの, K_{pid} の応答は耐えられないことがわかる. なお, 図 6.3 の K_{pid} の応答は定常状態にもどっているようにみえるが, 一度鉄球は, 落下している.

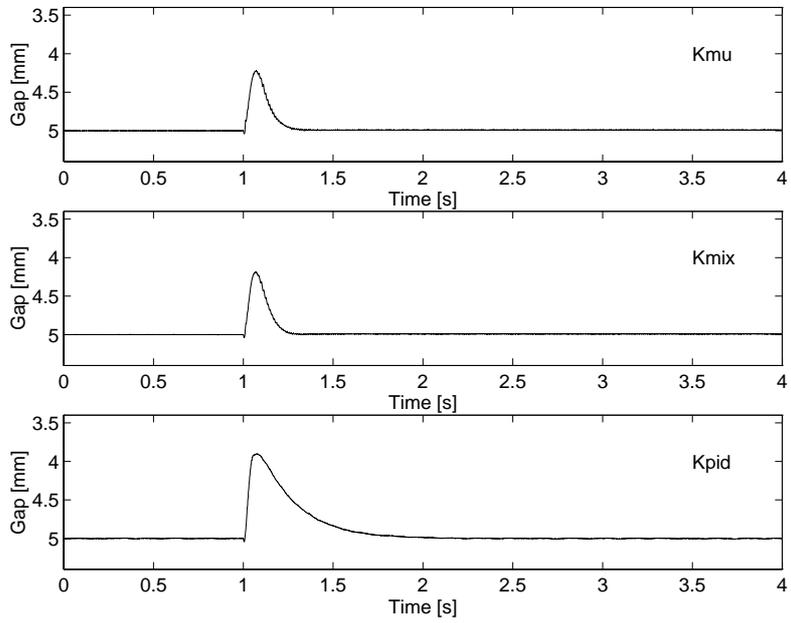
また, 応答の最大ピーク値などを比較するとコントローラ K_{mu} のほうが K_{mix} より外乱にたいして強いコントローラであることがわかる. この結果は, ノミナル制御性能が一番良好であるとされた解析結果に一致する.



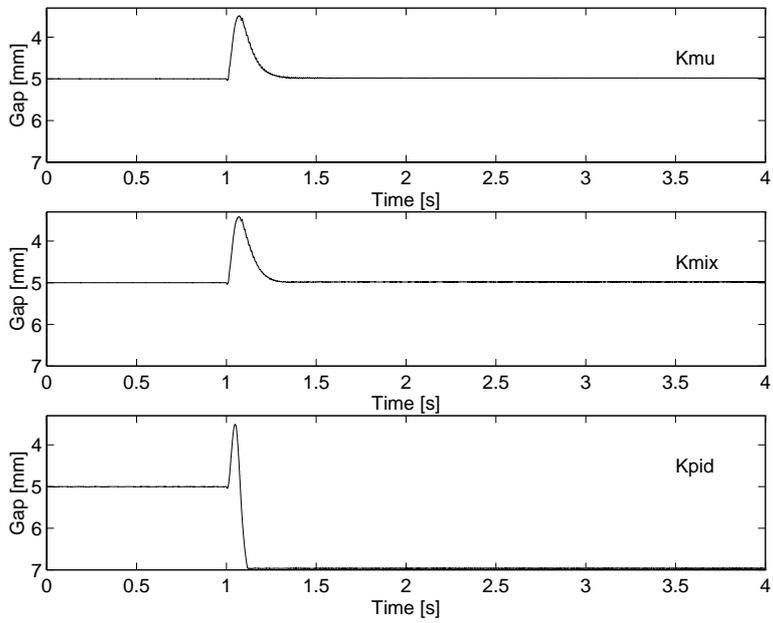
☒ 6.2: Disturbance at 5.0[mm] 11[N]



☒ 6.3: Disturbance at 5.0[mm] 19.8[N]



☒ 6.4: Disturbance at 5.0[mm] -11[N]



☒ 6.5: Disturbance at 5.0[mm] -22[N]

6.2 解析結果の検証

6.2.1 ロバスト安定性についての考察

最初にロバスト安定性について考察する。Fig. 6.6 ~ 6.9 に定常ギャップを変化させたときの浮上特性を示す。定常ギャップを変化させることにより、線形化による不確かさが大きくなる。また、電磁石の動特性も変化することなどが考えられモデルの変動を引き起こすことになる。コントローラ K_{mu} は、前節のロバスト安定性解析より、定常ギャップ 4.1 ~ 5.9 mm までのロバスト安定性が保証されていることが解析されていた。図 6.6, 6.7 に定常ギャップ 4.1mm, 定常ギャップ 5.9mm のときの浮上特性を示す。これらの実験結果より、この範囲内でのロバスト安定性が保証されていることがわかる。コントローラ K_{mix} については、定常ギャップ 4.1 ~ 5.9 mm までの範囲内で安定性を保証しないとされていたが、実験では K_{μ} と同様に安定に浮上していることがわかった。これは、ロバスト安定性解析における構造化特異値の上限値のピークが 1.09 と比較的小さく、 K_{mu} と同程度のロバスト安定性が保証されていたためであると思われる。

また、 K_{pid} についても安定に浮上しているようであるが、実験結果から、実際は小さく振動している様子が見られる。この振動は、6.1節の 5 mm の浮上特性による結果よりも若干、振動が大きくなっていることから、不確かさによる安定性の劣化がおきていることになる。 K_{pid} は、他のコントローラにくらべロバスト安定性を保証する摂動の範囲が狭いという結果と一致している。

つぎに、この範囲内を超えた浮上特性について実験をおこなった。定常ギャップ 3.9mm, 6.8mm としたときの実験結果を図 6.8, 6.9 に示す。

このとき、3.9 mm における浮上特性では、 K_{mu} の特性が悪くなり振動し続ける結果となった。また、 K_{pid} についても K_{mu} ほどではないが、ときおりの振動が起きていることが分かる。ロバスト安定性を保証する範囲を超えたとはいえ、 K_{mix} より、 K_{mu} のほうが先に振動しだすことは、保証した変動を超えているとはいえ、5.3.1節のロバスト安定性解析と異なる結果となっているように思われる。しかしながら、この振動時における制御対象への入力電圧を FFT アナライザで測定すると Fig. 6.10 より 480 rad/s 付近の振動が一番強く表れていることが分かる。この周波数帯のロバスト安定性は、Fig. 5.14 の解析より他のコントローラよりもその周波数帯での K_{mu} の安定性が悪くなっていることがわかる。この解析結果などから、定常ギャップを変動させることにより線形化による不確かさだけ

でなく、電磁石部などに表れるモデル化されない不確かさより 480 rad/s 付近の不確かさが大きくなったためではないかと考察される。

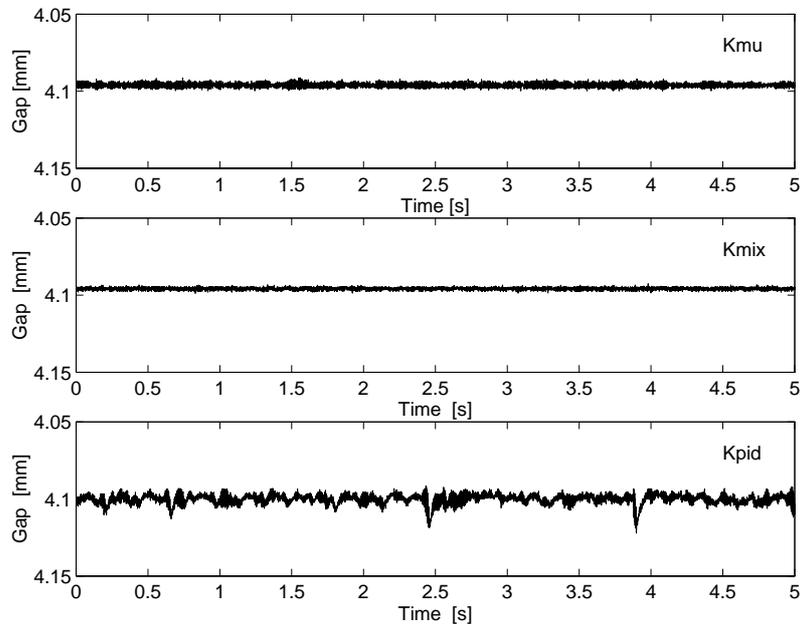


図 6.6: levitation at 4.1[mm]

6.2.2 ロバスト制御性能についての考察

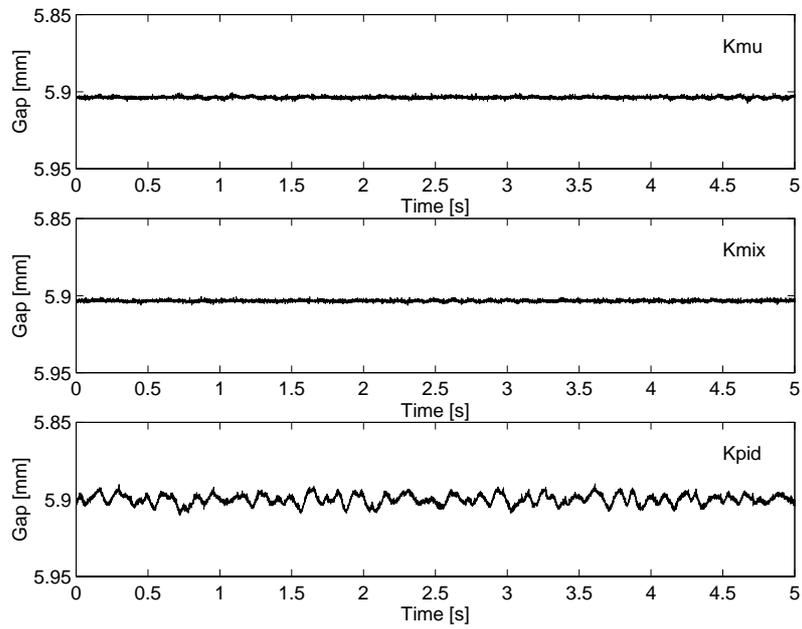
つぎに、ロバスト制御性能について検討する。

ロバスト制御性能について検討するために、制御対称である磁気浮上系の数学モデルに変動がある場合による制御性能の劣化について考察する。そこで、定常ギャップを変動させたときに外乱を加える実験を行なった。

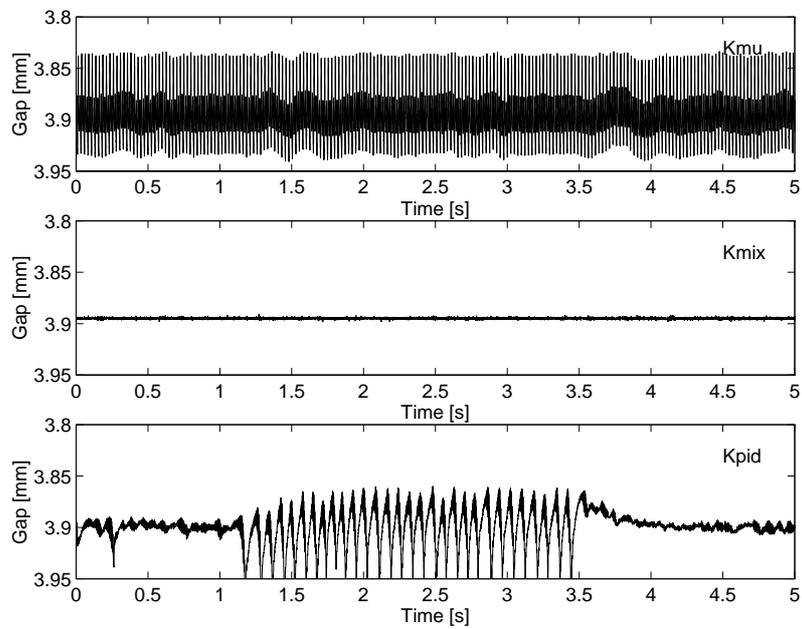
外乱については 6.1 節と同様に電圧変化を電磁石の入力電圧部に加えることにより実験を行なった。また、外乱の大きさも、全て鉄球に働いた等価的な力に換算して表記している。

定常ギャップを 4.6 mm としたときに外乱を加えたときの外乱応答特性を図 6.11 ~ 6.13 に示す。

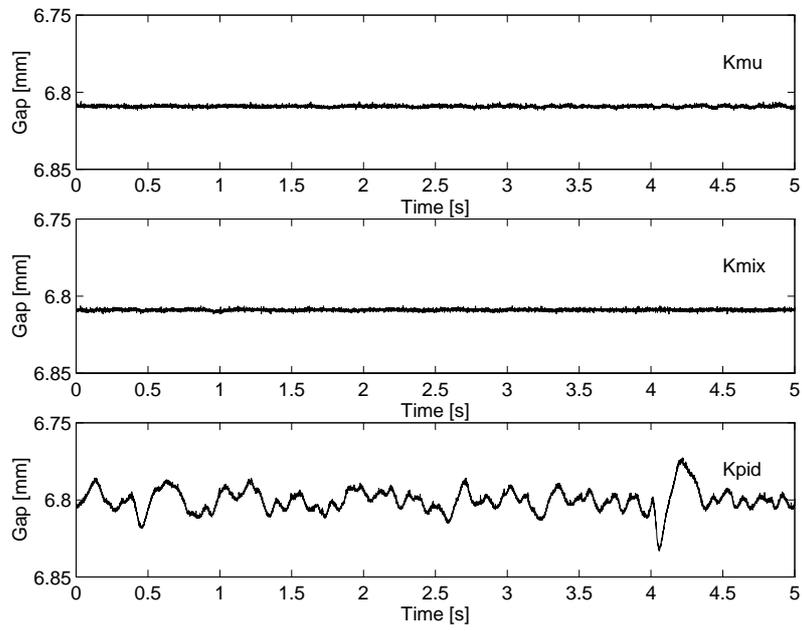
図 5.15 のロバスト制御性能解析の結果から、不確かさを有する制御対象に対する外乱特性はコントローラ K_{mu} の性能が一番よいとされていた。実験結果から、22[N] の外乱を加えると K_{pid} , K_{mix} のコントローラは大きく劣化するのに対し、 K_{mu} についての劣化は少



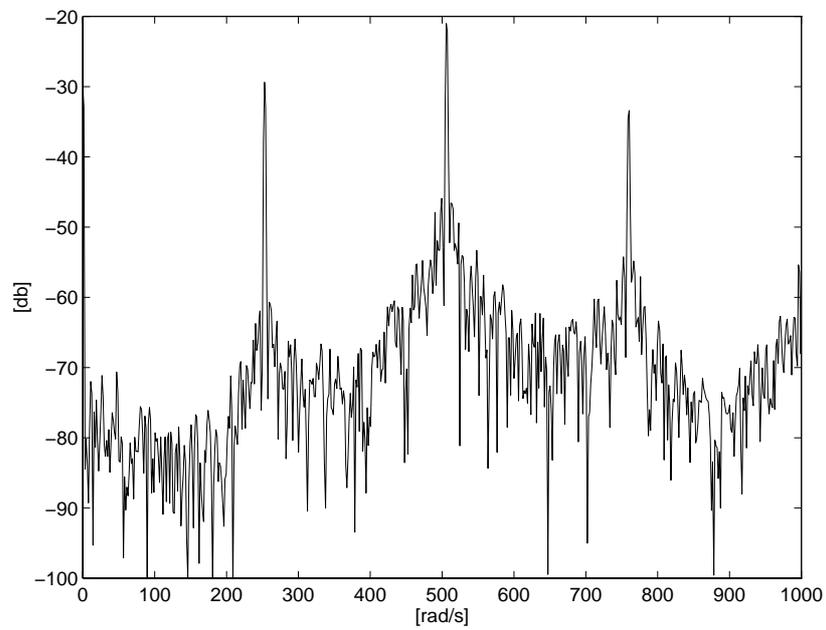
⊗ 6.7: levitation at 5.9[mm]



⊗ 6.8: levitation at 3.9[mm]



⊗ 6.9: levitation at 6.8[mm]



⊗ 6.10: Power spectrum of input voltage using K_{mu} at 3.8mm

ないことがわかる。これは、 K_{mu} のコントローラのロバスト制御性能解析において、他のコントローラに比べ、変動に対しても最も良好な制御性能を達成しているという結果と一致する。

これは、定常ギャップを 4.2 mm に変動した場合についても同様な結果が得られた。

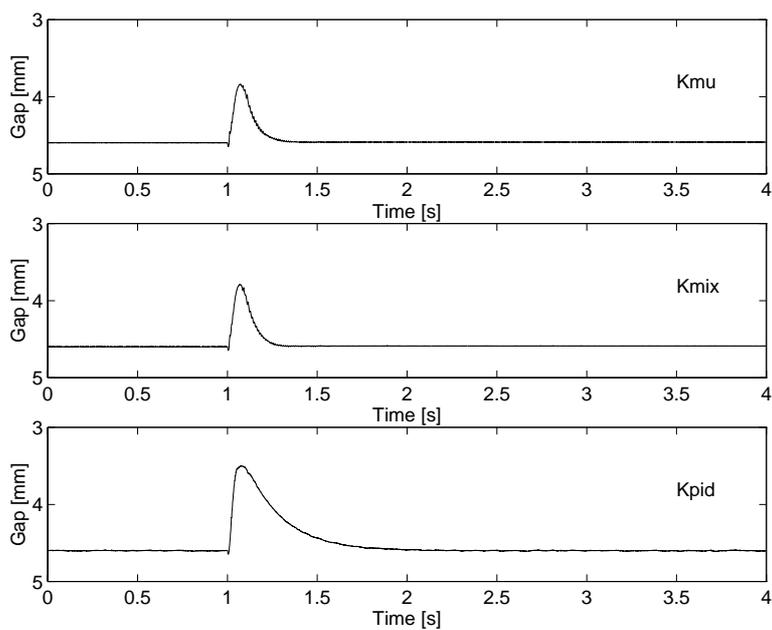
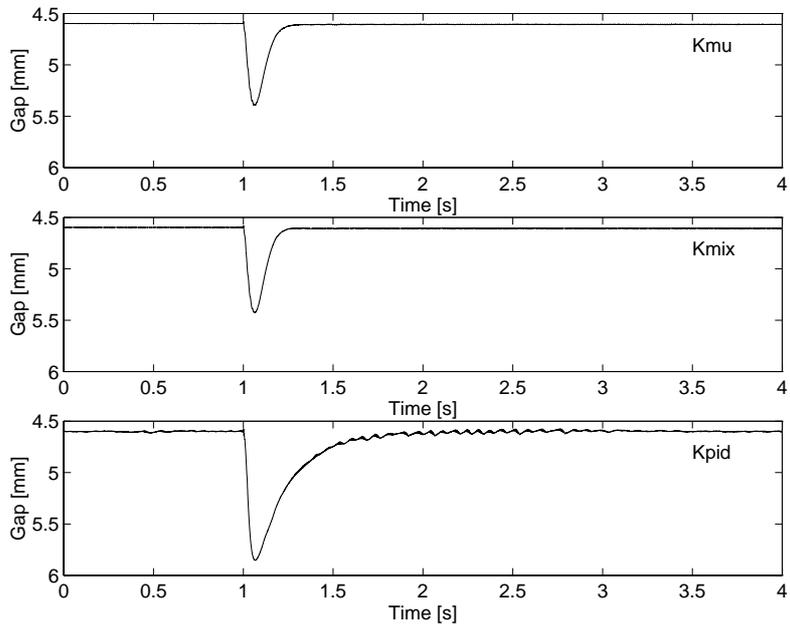
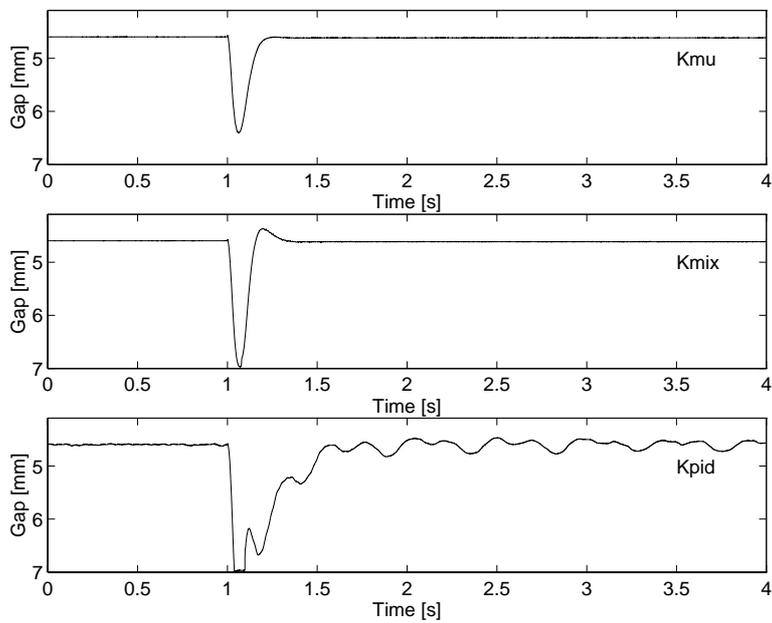


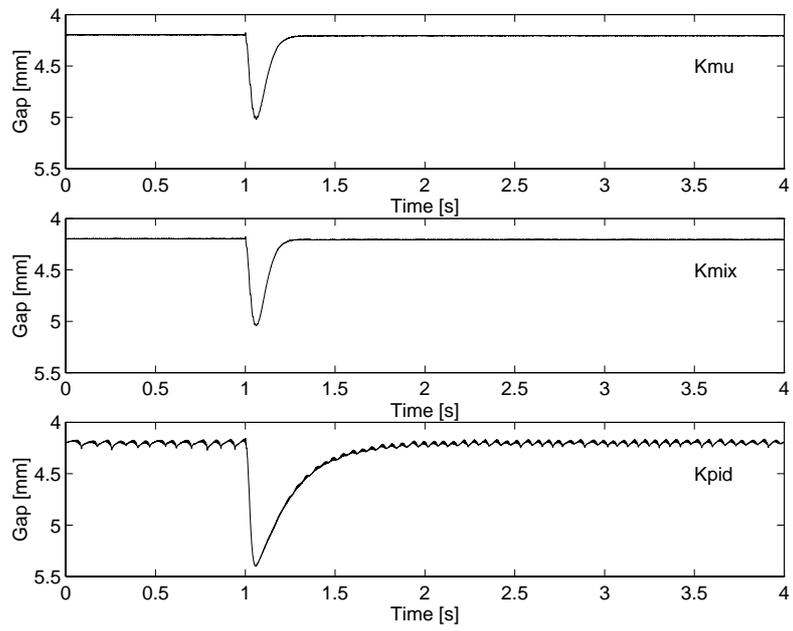
図 6.11: Disturbance at 4.6[mm] -11[N]



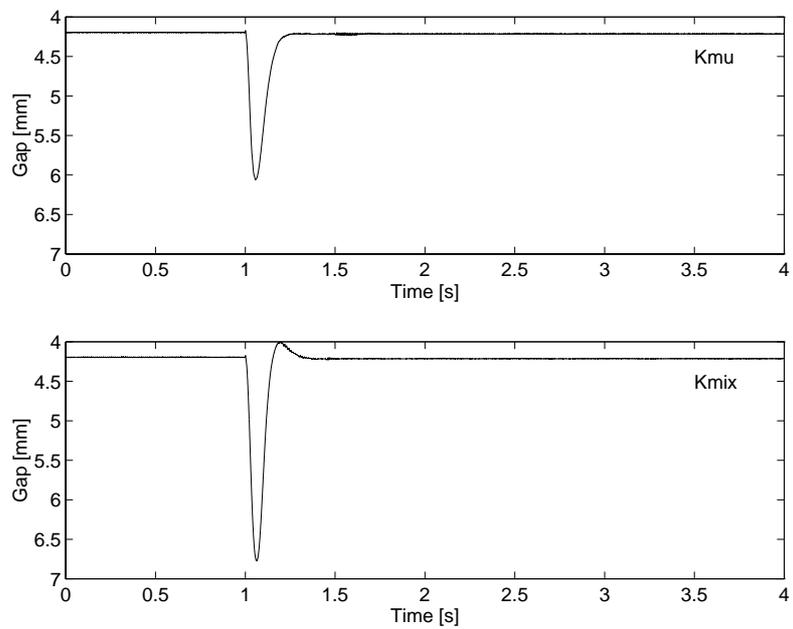
⊗ 6.12: Disturbance at 4.6[mm] 11[N]



⊗ 6.13: Disturbance at 4.6[mm] 22[N]



⊗ 6.14: Disturbance at 4.2[mm] 11[N]



⊗ 6.15: Disturbance at 4.2[mm] 22[N]

第 7 章

結論

本研究では以下のことをおこなった.

- ロバスト性解析のために有効となる不確かさを考慮した磁気浮上系のモデリングの一提案.
- 提案したモデルに対しての構造化特異値 (mixed μ) を用いた磁気浮上系のロバスト性解析および実験結果との比較.

以上のことより, 構造的に不確かさを記述しロバスト安定性解析をおこなった結果, 設計時に保証されていなかった不確かさの変動の範囲を一部を理論的に保証できた.

この結果から, 構造的な不確かさによるロバスト性解析をおこなうことにより保守性を軽減できることがいえる.

しかしながら, 実験結果と理論との相違について多少, 軽減できたもののまだ, 解析結果と実験結果との間には相違があり, もう少し広い変動についてもロバスト安定性は保証されているようである. これらの理由として不確かさの見積もり方が保守的であることが考えられる.

そこで, これらの問題点に対して実システムの変動をさらに具体的に表すために不確かさを表すクラスについて検討する必要がある. たとえば, 本稿では不確かさを線形時不変の不確かさとして解析をおこなったが, これを時変系の不確かさや, 不確かさの分布を確立的に記述してみることが考えられる. また, これらの不確かさを非線形な不確かさとして記述することも考えられる. これらにより, 実システムに対してより具体的な解析が可能となるかもしれない.

一方, ロバスト制御性能解析についても, 構造的な変動にたいしての H_∞ ノルムでのコントローラの制御性能を解析することができた. しかしながらこの制御性能の解析についてもさらに保守的でない解析をおこなうために, 最悪状態について解析する H_∞ ノルムをもちい制御性能の評価を行なうのでなく, 平均として解析する H_2 ノルムにより解析をおこなうことが望まれる.

これらの解析法については, 文献 [7], [8],[9] などで研究が展開されており, 今後これらの研究が進んでいくことにより, より具体的なロバスト性解析が展開されることが期待される.

第 A 章

制御系設計

4章でモデリングした磁気浮上系の数学モデルにたいし、制御系を構成する。本章では、PID 制御、混合感度問題による H_∞ 制御文献 [15] による μ 設計法によりコントローラを設計する。

A.1 PID 制御による設計

定常ギャップからの変位、速度、積分要素に対して、それぞれ、ゲイン K_P, K_I, K_D をかける PID コントローラを設計する。

このときのコントローラのパラメータは実験結果から、思考錯誤により決定した。また、実験では、速度の成分は定常ギャップからの変位の情報を差分したものとし、積分要素については定常ギャップからの変位の情報を積分したものとして計算を行なった。

この結果、PID コントローラ

$$K_{pid} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (\text{A.1})$$

のパラメータはつぎの値に決定した。

$$K_P = -12000, \quad K_I = -32000, \quad K_D = -280 \quad (\text{A.2})$$

なお、このコントローラは、定常偏差が残らないようにという制御仕様のもとで設計を行なった。

式(4.11)のノミナルモデルに対しコントローラ K_{pid} を用いて、閉ループ系を構成したときの閉ループ系の極は、

$$-2.4983 + 62.0764i, -2.4983 - 62.0764i, -35.5154, -7.0730 \quad (\text{A.3})$$

となり、この閉ループ系は安定となっていることがいえる。

A.2 混合感度問題による設計

A.2.1 制御問題

フィードバック系の感度関数 S と相補感度関数 T をそれぞれ、

$$S = (I + G_{nom}K)^{-1} \quad (\text{A.4})$$

$$T = G_{nom}K(I + G_{nom}K)^{-1} \quad (\text{A.5})$$

と定義する。制御系設計においては感度関数は一般に低い周波数帯で小さくなることが望ましく、一方、相補感度関数は高い周波数で小さくなることが望ましい。そこで、適当な周波数重み W_s, W_t に対して

$$\left\| \begin{array}{c} W_s S \\ W_t T \end{array} \right\|_{\infty} < 1 \quad (\text{A.6})$$

をみたす安定化コントローラを求める問題を考える。このときの一般化プラントを図A.1に示す。

A.2.2 制御系設計

まず、感度関数 S に対する周波数重み W_s としては、低周波数帯でゲインが大きいものを選ぶこととする。

$$W_s = \frac{170}{(1 + \frac{s}{0.1})} \quad (\text{A.7})$$

つぎに、 G_{nom} の分母の多項式と分子の多項式の次数の差が3であることを考慮したうえで、高い周波数でゲインが大きくなるように、相補感度関数 T に対する周波数重み W_t をつぎのように選ぶ。

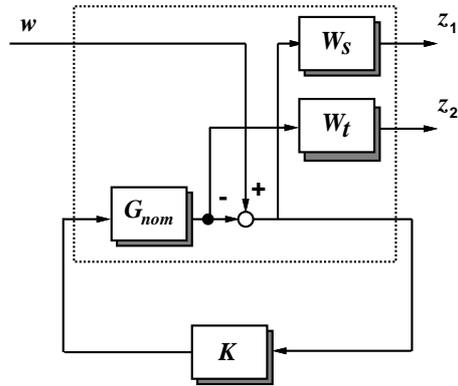


図 A.1: Mixed-sensitivity problem

$$W_t = 1.4 \times 10^{-4} \left(1 + \frac{s}{0.08}\right) \left(1 + \frac{s}{75}\right) \left(1 + \frac{s}{200}\right) \quad (\text{A.8})$$

このとき, 式 (A.6) の条件を満たすコントローラ K_{mix} は, 以下のように計算される.

$$K_{mix} = -3.56 \times 10^9 \frac{(s + 10.45)(s + 47.6)(s + 64.5)}{(s + 0.1)(s + 224.9 \pm j174.3)(s + 12610)} \quad (\text{A.9})$$

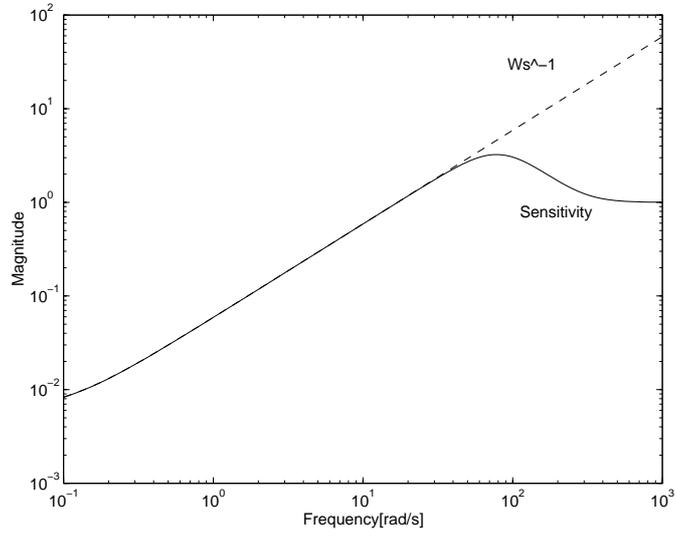
このときのフィードバック系の感度関数 S と相補感度関数 T を, それぞれ対応する周波数重みとあわせて 図 A.2, A.3 に表す. また, 式 (A.6) の特性をみるために, $\|W_s S\|_\infty$ と $\|W_t T\|_\infty$ を 図 A.4 に示す.

A.3 μ 設計法による設計

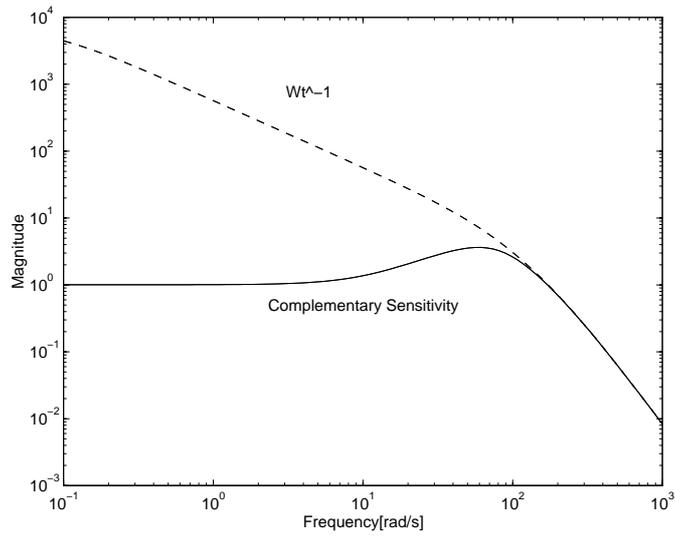
A.3.1 制御問題

磁気浮上系 式 (4.4), (4.5) について文献 [15] を参考にして制御系設計をおこなう. この文献では, Fig.A.5 のように不確かさを考慮したモデルが考えられている. ここでは, ノミナルモデルの不確かさは加法的な変動として考えられ, 数学モデルとして記述すると次式となる.

$$G_{real} = G_{nom} + \Delta_{add} W_{add} : \|\Delta_{add}\|_\infty < 1 \quad (\text{A.10})$$



⊠ A.2: W_s



⊠ A.3: W_t

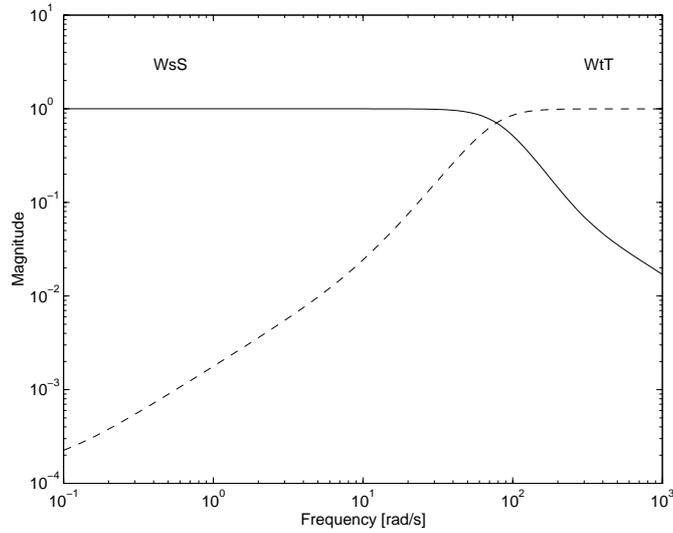


図 A.4: $W_s S, W_t T$

Fig.A.5に対してのロバスト安定条件は次式で表される.

$$\|W_{add-r}K(I + G_{nom}K)^{-1}W_{add-l}\|_{\infty} < 1 \quad (\text{A.11})$$

ここで, $W_{add} = W_{add-l}W_{add-r}$ とする.

また, ロバスト制御性能については,

$$\|W_{perf-r}(I + GK)^{-1}W_{perf-l}\|_{\infty} < 1, \forall G \in G_{real} \quad (\text{A.12})$$

で表される. ここで, $W_{perf} = W_{perf-l}W_{perf-r}$ となる.

A.3.2 非構造的な不確かさのモデリング

式 (4.11) をノミナルモデルとしたときのモデルの変動について考える. このときのパラメータ変動は, Table A.1に示したものをを用いる. ここでは, 定常ギャップ 5mm とし 4.7 ~ 5.3mm までの場合についてこのときのそれぞれのパラメータを実験により求める. この値の変動のもとで式 (4.4), (4.5) のノミナルモデルに対し, 1つのパラメータだけ変動させ, その他のパラメータは公称値としたモデルの摂動を考える. ここでは, 文献 [15] を参考に次のような摂動を考えた.

- モデル a1: モデルパラメータ k のみが $k = k_{max}$

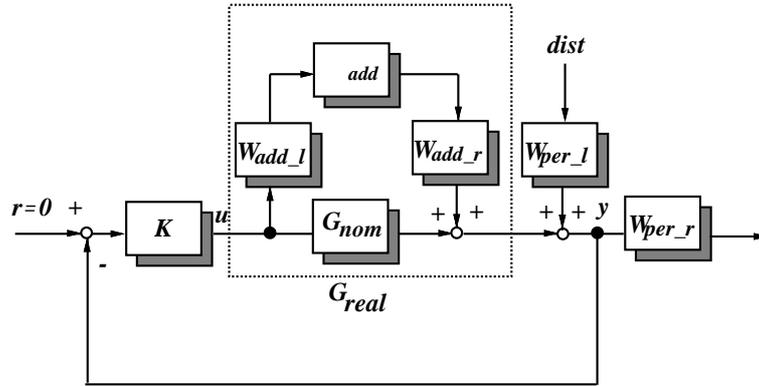


図 A.5: Feedback structure

- モデル a2: モデルパラメータ k のみが $k = k_{min}$
- モデル b1: モデルパラメータ x_0 のみが $x_0 = x_{0max}$
- モデル b2: モデルパラメータ x_0 のみが $x_0 = x_{0min}$
- モデル c1: モデルパラメータ L のみが $L = L_{max}$
- モデル c2: モデルパラメータ L のみが $L = L_{min}$
- モデル d1: モデルパラメータ R のみが $R = R_{max}$
- モデル d2: モデルパラメータ R のみが $R = R_{min}$

以上, 8 通りのパラメータの変動を考える. これらのモデルの変動を表す伝達関数を $G_{ij-perturb}(i = a, b, c, d, 1 \leq j \leq 2)$ とする.

このときのモデルの伝達関数 $G_{ij-perturb}$ とノミナルモデルの伝達関数 G_{nom} の差より,

$$\Delta_{ij} = G_{ij-perturb} - G_{nom} \quad (i = a, b, c, d, 1 \leq j \leq 2) \quad (\text{A.13})$$

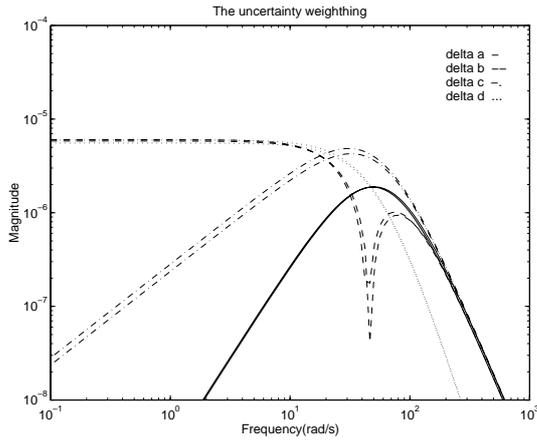
と加法的摂動を定義する. それぞれの $|\Delta_{i,j}(j\omega)|$ について図 A.6 にあらかず.

この Fig. A.6 のモデルの摂動より, 不確かさの周波数重み W_{add} は次式とする.

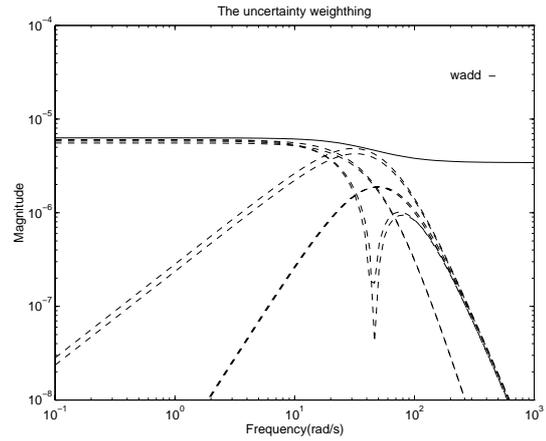
$$W_{add} = \frac{3.43 \times 10^{-6}(1 + s/50)(1 + s/51)(1 + s/52)}{(1 + s/40)(1 + s/42)(1 + s/43)} \quad (\text{A.14})$$

表 A.1: Parameter

parameter	Mximum Value	Nominal Value	minimum Value
M [kg]	—	1.75	—
X [m]	5.30×10^{-3}	5.00×10^{-3}	4.70×10^{-3}
I [A]	1.23	1.15	1.08
k [Nm ² /A ²]	3.07×10^{-4}	2.84×10^{-4}	2.64×10^{-4}
x_0 [m]	-1.04×10^{-4}	-2.86×10^{-4}	-4.65×10^{-4}
L [H]	6.08×10^{-1}	5.58×10^{-1}	5.18×10^{-1}
R [Ω]	$2.76 \times 10^{+1}$	$2.66 \times 10^{+1}$	$2.56 \times 10^{+1}$



☒ A.6: Model perturbation



☒ A.7: Uncertain weighing

A.3.3 制御系設計

式 (A.14) の不確かさをあらわす周波数重み関数 W_{add} を用い制御系を設計する. このときのロバスト制御性能を表す周波数重みは次式を用いる.

$$W_{perf} = \frac{165}{1 + s/0.1} \quad (\text{A.15})$$

これらの重み関数を用い, Fig.A.8のような一般化プラントを考える. ここでは, $W_{add} = W_{add-l}W_{add-r}$ とし, $W_{add-l} = 1.0 \times 10^{-5}$ とする. また, $W_{perf} = W_{perf-l}W_{perf-r}$ とし, $W_{perf-l} = 1.0 \times 10^{-5}$ とする.

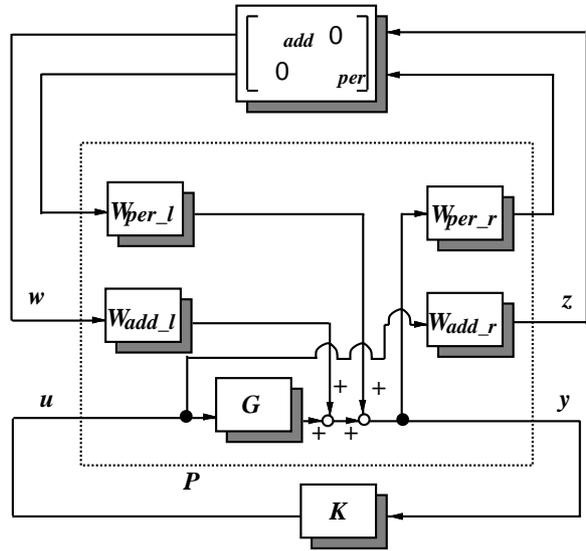


図 A.8: Interconnection structure

このような一般化プラントに対し u -Analysis and Synthesis Toolbox を用いて D-K イテレーションに基づきコントローラを設計する. 図 A.8において, $\mathcal{F}_l(P, K)$ は外乱 w から, 被制御量 z までの閉ループ伝達関数であるから, つぎの H_∞ 問題

$$\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma_1, \quad \gamma_1 = 1.3 \quad (\text{A.16})$$

を解くことによりコントローラ K_h が得られる.

$$\begin{aligned} K_h &= \frac{-2.62 \times 10^8 (s + 11.12)(s + 40.0)(s + 42.0)(s + 43.0)}{(s + 0.10)(s + 39.97)(s + 42.03)(s + 42.99)} \\ &\times \frac{(s + 47.59)(s + 64.50)}{(s + 184.3 - j199.7)(s + 184.3 - j199.7)(s + 1005.2)} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

このときの閉ループ系の伝達関数 $\mathcal{F}_l(P, K_h)$ の最大特異値 $\bar{\sigma}$ と構造化特異値 μ を図 A.9 に示す. この図から μ が 1 以下になっていないことからロバスト制御性能が達成されていないことが分かる. そこで, つぎにこの μ の計算から D スケーリング行列をつくり出す. ここでは, 1 次の伝達関数を使ってカーブフィッティングを行なった. この D スケーリング行列を組み込むことにより新たな一般化プラント P_2 を構成する. P_2 を用いて以下の H_∞ 問題を計算する.

$$\|\mathcal{F}_l(P_2, K)\|_\infty < \gamma_2, \quad \gamma_2 = 1.3 \quad (\text{A.18})$$

上式を計算することによりコントローラ K_{mu} を得る.

$$\begin{aligned} K_{mu} &= \frac{-2.25 \times 10^{10}(s + 10.02)(s + 21.50)}{(s + 0.10)(s + 21.00)(s + 40.17)} \\ &\times \frac{(s + 40.0)(s + 42.0)(s + 43.0)}{(s + 41.8454)(s + 43.04)(s + 1557)} \\ &\times \frac{(s + 47.59)(s + 64.49)(s + 1533.8)}{(s + 210.9 - j187.0)(s + 210.9 + j187.0)(s + 77431)} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

コントローラ K_{mu} に対しての最大特異値 $\bar{\sigma}$, 構造化特異値 μ は Fig.A.10 になる. これより, K_{mu} のコントローラはロバスト制御性能をみたしていることがわかる.

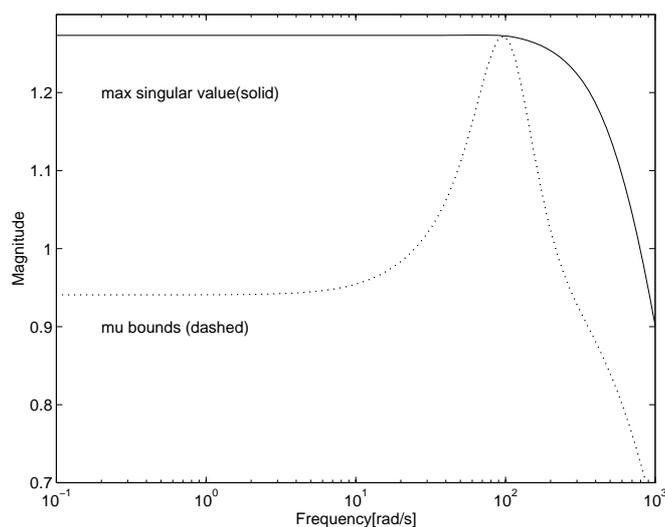
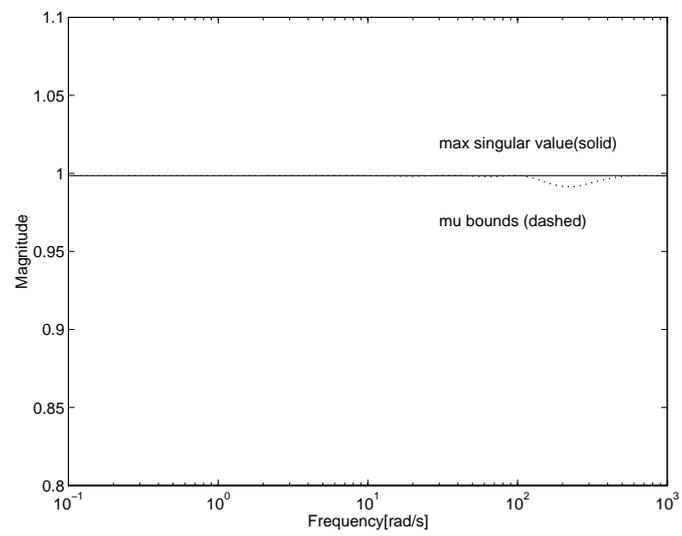


図 A.9: $\bar{\sigma}$ and μ of first $D - K$ iteration



☒ A.10: $\bar{\sigma}$ and μ of second $D - K$ iteration

謝辞

本研究を進めるにあたり、主指導教官として暖かい御指導と御支援を賜りました示村悦二郎教授をはじめ、主テーマ指導教官として懇切丁寧に御指導して頂いた藤田政之助教授、本講座の助手である増淵泉助手、金沢大学から度々来て御指導頂いた滑川徹助手に心より感謝致します。

そして、本講座におきまして研究のみならず日常生活においても御指導、御助言を頂きました博士後期過程の川端昭弘氏、望山洋氏、鈴木亮一氏、Hussein Mohammad Jaddu 氏、平田研二氏、田中奈津夫氏、丸山章氏に心からお礼申し上げます。また、同講座生として同じ日々を過ごし、共に励まし学んできた博士前期過程2年の浅田幸則氏、大滝直人氏、置田宏幸氏、奥村雅彦氏、塩田良治氏、菅原建人氏、田中敏氏、内藤浩行氏、花房聡人氏、, Budi Rachmanto 氏 そして同1年の皆さんの今後の発展を祈って謝辞と致します。

参考文献

- [1] R. D'Andrea, F. Paganini, and J. C. Doyle, "Uncertain Behavior," *Proc. 32nd IEEE CDC*, pp. 3891-3896, San Antonio, Texas, 1993.
- [2] A.Packard and J.C.Doyle, "The Complex Structured Singular Value," *Automatica*, vol. 29, no. 1, pp. 71-109, 1993.
- [3] P.M. Young and J.C.Doyle, "Computation of μ with real and complex uncertainties," *Proc. 29th IEEE CDC*, pp. 1230-1235, 1990.
- [4] K.Zhou, J. C. Doyle, and K.Glover *Robust and optimal control*, Prntice-Hall,Inc, 1996.
- [5] J. C. Doyle, B.A.Francis, and A.R.Tannenbaum, *Feedback control theory*, Macmillan Public Company, 1992.
- [6] R. D'Andrea, and F. Paganini, "Interconnection of Uncertain Behavioral Systems for Robust Control," *Proc. 32nd IEEE CDC*, pp.3642-3647, San Antonio, Texas, 1993.
- [7] F. Paganini, R. D'Andrea, and J. C. Doyle, "Behavioral Approach to Robustness Analysis," *Proc. 1994 ACC*, pp. 2782-2786, Baltimore, Maryland, 1994.
- [8] F. Paganini, and J. C. Doyle, "Analysis of Implicitly Defined Systems," *Proc. 33rd IEEE CDC*, pp. 3673-3678, Lake Buena Vista, Florida, 1994.
- [9] F. Paganini, "Set and Constraints in the Analysis of Uncertain System," CDS technical report, CIT/CDS/96/010, California Institute of Technology, 1996.
- [10] *MATLAB User's Guide*, Math Works, 1992.

- [11] G.J.Balas, J.C.Doyle, K.Glover, A.Packard, and R.Smith, μ - *Analysys and Synthsys Tool box User's Guide*, MUSYN Inc. and Math Works, 1993.
- [12] *Control System Toolbox User's Guide*, Math Works, 1992.
- [13] 電気学会 磁気浮上応用技術調査専門委員会 編, 磁気浮上と磁気軸受, コロナ社, 1993.
- [14] “ H_{∞} 制御 μ - シンセシスによる制御系設計例,” SICE 夏期セミナー '93, pp. 107-133, 1993.
- [15] M. Fujita, T. Namerikawa, F. Matsumura, and K. Uchida, “ μ -Synthesis of an Electromagnetic Suspension System,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 3, pp.530-536, 1995.
- [16] 松村, 中森, “ランダムノイズによる鉄心入り電磁石の定数測定について,” 昭和 60 年度電気関係学会 北陸支部連合大会 講演論文集, pp. 22-23, 1985.
- [17] “ミニ特集. ロバスト制御 - H_{∞} 制御を中心にして-,” 計測と制御, Vol. 29, No.2, 1990.
- [18] “特集. 実用期を迎えたロバスト制御,” 計測と制御, Vol. 30, No.8, 1991.
- [19] 藤田, “ロバスト制御性能と μ -シンセシス,” システム/制御/情報, Vol.37, No.2, pp. 93-101, 1993.
- [20] システム制御情報学会編, 制御系設計, 朝倉書店, 1994.
- [21] 美多, H_{∞} 制御, 昭晃堂, 1994.

本論文に関する発表

1. 藤田, 滑川, 松尾, "Implicit LFT 表現を用いた磁気浮上系のモデリングと不確かさの記述," 電気学会リニアドライブ研究会資料, LD-96-114, pp. 59-68, 1996.
2. 藤田, 滑川, 松尾, "不確かさを考慮した磁気浮上制御系のモデリングとロバスト性解析," 電気学会システム・制御研究会資料, SC-97-25, pp. 25-30, 1997.