

Title	正規型自然観測法理論における不確定性原理の検討に関する研究
Author(s)	Wahyu, Widada
Citation	
Issue Date	1997-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/1070">http://hdl.handle.net/10119/1070</a>
Rights	
Description	Supervisor:飯島 泰蔵, 情報科学研究科, 修士

# 修士論文

## 正規型自然観測法理論における不確定性原理 の検討に関する研究

指導教官 飯島泰蔵 教授

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報処理学専攻

Wahyu Widada

1997年2月14日

## 要旨

本論文では、波形の観測手法として正規型自然観測法理論を用い、不確定性原理の観点からこの理論の検討を行なった上で、基本観測値系列を利用した瞬時波形の構造解析法を提案する。

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	研究の背景	1
1.2	研究の目的	1
1.3	構成	2
<b>2</b>	<b>自然観測法理論</b>	<b>3</b>
2.1	自然観測法の基礎理論	3
2.1.1	近接型自然観測法理論	3
2.1.2	平衡型自然観測法理論	4
2.1.3	再構成公式	5
2.1.4	伝達関数表現	5
2.2	正規型自然観測法理論	6
2.2.1	正規型基本観測変換	7
2.2.2	再構成公式	7
2.2.3	正規型自然観測フィルタの特性	8
<b>3</b>	<b>正規型自然観測法理論における不確定性原理の検討</b>	<b>10</b>
3.1	フーリエ変換における不確定性原理	10
3.1.1	不確定性原理	10
3.1.2	等価時定数を用いたフーリエ変換における不確定性原理	11
3.2	正規型自然観測法における大域的な不確定性原理	12
3.2.1	観測次数の平均と分散	12
3.2.2	平均次数指標	13

3.2.3	等価時定数と平均次数指標との間の関係	14
3.2.4	平均次数指標と観測次数の分散との間の関係	14
3.2.5	大域的な特徴のシミュレーションと結果	16
3.3	正規型自然観測法における瞬時的な不確定性原理	18
3.3.1	瞬時的な計算方法	18
3.3.2	観測次数の瞬時平均と瞬時分散	18
3.3.3	観測波形の瞬時変化の傾向 $\{\alpha\}$ に関する瞬時特徴の検討	19
3.3.4	瞬時的な特徴のシミュレーションと結果	21
3.4	考察	24
3.4.1	大域的な不確定性についての考察	24
3.4.2	瞬時的な不確定性についての考察	24
3.5	本章のまとめ	26
4	正規型自然観測法による瞬時波形の構造解析	27
4.1	基本観測値系列からのモーメント波形	27
4.2	瞬時波形の構造解析推定法	28
4.3	瞬時構造解析のシミュレーション	32
4.3.1	周波数が一定の場合	32
4.3.2	考察	38
4.3.3	周波数が増加する場合	41
4.3.4	考察	47
4.4	本章のまとめ	50
5	おわりに	52
5.1	結論	52
5.2	今後の課題	52

# 図索引

2.1	$\Gamma(p)$ の周波数特性	6
2.2	$\Lambda(p)$ の周波数特性	6
2.3	$M$ 位正規型自然観測フィルタ	8
2.4	$M$ 位正規型自然観測フィルタの振幅特性と位相特性	9
3.1	$(\frac{\delta t}{s})^2$ と平均 $\bar{m}$ と間の関係	16
3.2	$(\frac{\delta t}{s})^2$ と平均 $\bar{m}$ と間の関係	17
3.3	$(\frac{\delta t}{s})^2$ と $(\frac{\Delta m}{M})^2$ と間の関係	17
3.4	観測次数の瞬時的な平均値 $\bar{m}_{(t)}$	21
3.5	観測次数の瞬時的な分散 $(\Delta m)_{(t)}^2$	22
3.6	瞬時的平均値 $\bar{m}_{(t)}$ ; $\alpha s = -2 \sim 1$ の場合	23
3.7	瞬時的分散 $(\Delta m)_{(t)}^2$ ; $\alpha s = -2 \sim 1$ の場合	24
3.8	大域的と瞬時的な平均値	25
3.9	大域的と瞬時的な分散	25
4.1	自然観測法による瞬時構造解析	30
4.2	入力波形 $f_0(t)$	33
4.3	波形 $h_l(t), l = 0, (M = 3)$	33
4.4	波形 $h_l(t), l = 1, (M = 3)$	34
4.5	波形 $h_l(t), l = 2, (M = 3)$	34
4.6	波形 $h_l(t), l = 3, (M = 3)$	34
4.7	波形 $h_l(t), l = 4, (M = 8)$	34
4.8	波形 $h_l(t), l = 5, (M = 8)$	34
4.9	波形 $h_l(t), l = 6, (M = 8)$	34

4.10	波形 $h_l(t), l = 7, (M = 8)$ . . . . .	35
4.11	波形 $h_l(t), l = 8, (M = 8)$ . . . . .	35
4.12	$p_1(t_0), p_2(t_0)$ . . . . .	35
4.13	角周波数 $\omega(t_0)$ . . . . .	35
4.14	変化する様相 $\sigma(t_0)$ . . . . .	35
4.15	成分の強度 $C(t_0)$ . . . . .	35
4.16	位相角 $\theta(t_0)$ . . . . .	36
4.17	瞬時構造解析 $\{t_0 = 1\}, M = 3$ . . . . .	37
4.18	瞬時構造解析 $\{t_0 = 2\}, M = 3$ . . . . .	37
4.19	瞬時構造解析 $\{t_0 = 3\}, M = 3$ . . . . .	37
4.20	瞬時構造解析 $\{t_0 = 4\}, M = 3$ . . . . .	37
4.21	フーリエ解析法 $t_0 = 2.5$ 秒 . . . . .	38
4.22	瞬時平均 $\bar{m}_{(t)}, (M = 3)$ . . . . .	39
4.23	瞬時分散 $(\Delta m)_{(t)}^2, (M = 3)$ . . . . .	39
4.24	瞬時平均 $\bar{m}_{(t)}, (M = 8)$ . . . . .	39
4.25	瞬時分散 $(\Delta m)_{(t)}^2, (M = 8)$ . . . . .	39
4.26	基本観測値系列のパワー成分、 $(M = 3)$ . . . . .	40
4.27	基本観測値系列のパワー成分、 $(M = 8)$ . . . . .	41
4.28	入力波形 $f_0(t)$ . . . . .	42
4.29	波形 $h_l(t), l = 0, (M = 3)$ . . . . .	42
4.30	波形 $h_l(t), l = 1, (M = 3)$ . . . . .	43
4.31	波形 $h_l(t), l = 2, (M = 3)$ . . . . .	43
4.32	波形 $h_l(t), l = 3, (M = 3)$ . . . . .	43
4.33	波形 $h_l(t), l = 4, (M = 8)$ . . . . .	43
4.34	波形 $h_l(t), l = 5, (M = 8)$ . . . . .	43
4.35	波形 $h_l(t), l = 6, (M = 8)$ . . . . .	43
4.36	波形 $h_l(t), l = 7, (M = 8)$ . . . . .	44
4.37	波形 $h_l(t), l = 8, (M = 8)$ . . . . .	44
4.38	$p_1(t_0), p_2(t_0)$ . . . . .	44
4.39	角周波数 $\omega(t_0)$ . . . . .	44

4.40	変化する様相 $\sigma(t_0)$ . . . . .	44
4.41	成分の強度 $C(t_0)$ . . . . .	44
4.42	位相角 $\theta(t_0)$ . . . . .	45
4.43	瞬時構造解析 $\{t_0 = 1\}$ 、 $M = 3$ . . . . .	45
4.44	瞬時構造解析 $\{t_0 = 2\}$ 、 $M = 3$ . . . . .	45
4.45	瞬時構造解析 $\{t_0 = 3\}$ 、 $M = 3$ . . . . .	46
4.46	瞬時構造解析 $\{t_0 = 4\}$ 、 $M = 3$ . . . . .	46
4.47	フーリエ解析法 $t_0 = 2.5$ . . . . .	47
4.48	フーリエ解析法 $t_0 = 1$ . . . . .	48
4.49	フーリエ解析法 $t_0 = 2$ . . . . .	48
4.50	フーリエ解析法 $t_0 = 3$ . . . . .	48
4.51	フーリエ解析法 $t_0 = 4$ . . . . .	48
4.52	瞬時平均 $\bar{m}_{(t)}$ 、 $(M = 3)$ . . . . .	49
4.53	瞬時分散 $(\Delta m)_{(t)}^2$ 、 $(M = 3)$ . . . . .	49
4.54	瞬時平均 $\bar{m}_{(t)}$ 、 $(M = 8)$ . . . . .	50
4.55	瞬時分散 $(\Delta m)_{(t)}^2$ 、 $(M = 8)$ . . . . .	50
4.56	基本観測値系列のパワー成分、 $(M = 3)$ . . . . .	51
4.57	基本観測値系列のパワー成分、 $(M = 8)$ . . . . .	51
5.1	瞬時的な平均値 $\bar{m}_{(t)}$ . . . . .	60
5.2	瞬時的な分散 $(\Delta m)_{(t)}^2$ . . . . .	60



# 表索引

4.1	時刻 $t = t_0$ の各瞬時パラメータ	36
4.2	大域的な平均 $\bar{m}$ と分散 $(\Delta m)^2$	39
4.3	時刻 $t = t_0$ の各瞬時パラメータ	46
4.4	大域的な平均 $\bar{m}$ と分散 $(\Delta m)^2$	49

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究の背景

一般に、時間波形の解析法として、本来時間軸上の関数で記述される波形を周波数軸上で取り扱うために、これまで主にフーリエ解析法などが用いられてきた。しかし、これらの手法は波形の定常性を仮定し過去から未来まで全てを熟知しなければならない。そのため、便宜的に running spectrum といった概念を採用するといった不合理な問題を内在している。この不合理性を排除する手法として飯島教授により自然観測法が提唱された [1]–[11]。自然観測法理論では、自然観測の条件に従って波形を観測することによって、合理的な波形観測理論の構築を目指したものである。この理論では、原始関数と呼ばれる関数を用いた、数学的に完全な波形観測システムとして構築された。自然観測法には近接型、平衡型、正規型の 3 種類が存在する。自然観測法理論は、波形の定常性を仮定する必要がなく、瞬時波形の解析が可能である。また自然観測法は、基本観測値系列と呼ばれる関数列の総和として、原波形を完全再現する特徴がある。本研究は正規型自然観測法理論における変換特性について、基礎的な検討を行なったものである。

### 1.2 研究の目的

本研究の目的は、不確定性原理という視点から正規型自然観測法による波形観測変換の特徴を検討することに在る。具体的には、波形を自然観測変換によって基本観測値系列として表わしたとき、この系列の中に波形がどのように分布しているのかを明らかにするこ

とである。また、この結果を踏まえて基本観測値系列を用いた、短時間における波形の構造解析法の提案を行なった。

### 1.3 構成

本論文の構成は次に示す通り。まず2章で波形の観測手法である自然観測フィルタについて解説を行なう。自然観測法の基礎理論から近接型、平衡型について解説し、本研究に用いた正規型への展開とその特性を述べる。3章では正規型自然観測法による波形観測における不確定性原理について解説する。実際の数値計算を行ない、傾向や特性を明らかにする。4章では正規型自然観測法による波形構造解析法を示し、その特徴を数値計算によって明らかにする。

## 第 2 章

# 自然観測法理論

本章では飯島教授により提唱された自然観測法理論、特にその理論を基礎とした自然観測フィルタに関して解説する。

波形の瞬時構造を数学的に解析する目的で、飯島教授により自然観測法理論が提案された。また、自然観測フィルタは自然観測法理論を基礎として理論展開されたものである。自然観測法は、近接型、平衡型、正規型の三種類があるが、本研究では正規型自然観測法理論を使用している。

### 2.1 自然観測法の基礎理論

自然観測法では、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt < \infty \quad (2.1)$$

なる条件を満たす波形  $f(t)$  を観測の対象とする。

#### 2.1.1 近接型自然観測法理論

式 (2.1) を満たす波形  $f(t)$  を時刻  $t$  で観測して得た観測波形を  $A_0(t)$  とすれば、このときの観測誤差  $\varepsilon_0(t)$  は、

$$f(t) - A_0(t) = \varepsilon_0(t) \quad (2.2)$$

で表されることになる。そこで2つの条件、

$$f(t) \equiv 0 \text{ ならば } A_0(t) \equiv 0, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_0(t) = s \frac{d}{dt} A_0(t), \quad s > 0 \quad (2.4)$$

を仮定する。式(2.3)は波形  $f(t)$  が恒等的に零ならば、その観測値も恒等的に零であることを意味している。式(2.4)は観測値の変化が観測誤差に比例する関係を示しているが、比例定数  $s$  が正であるということは、観測値が常に観測誤差の絶対値を減少させる方向に変化することを意味している。つまり、観測波形  $A_0(t)$  が波形  $f(t)$  に追従して近接しようとする傾向を表している。ここで式(2.2)と式(2.4)から  $\varepsilon_0(t)$  を消去すれば、

$$\left( s \frac{d}{dt} + 1 \right) A_0(t) = f(t), \quad (2.5)$$

なる常微分方程式が得られるから、これを式(2.3)なる条件の下に解くことにすれば、 $a_0(t)$  の値が一意的に定まって、

$$A_0(t) = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-\tau/s} f(t - \tau) d\tau \quad (2.6)$$

となる。この式を近接型自然観測の原始形式と言う。ここで観測を逐次繰り返すと、

$$A_m(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty e^{-\tau/s} A_{m-1}(t - \tau) d\tau \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

なる観測値の系列が得られる。

### 2.1.2 平衡型自然観測法理論

今度は、波形  $f(t)$  の傾き  $\frac{d}{dt} f(t)$  を時刻  $t$  で観測して得た観測波形を  $\frac{d}{dt} B_0(t)$  とすれば、このときの観測誤差  $\varepsilon_0(t)$  は、

$$\frac{d}{dt} f(t) - \frac{d}{dt} B_0(t) = \varepsilon_0(t) \quad (2.8)$$

と表されることになる。そこで2つの条件、

$$f(t) \equiv \text{定数 ならば } B_0(t) \equiv 0, \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_0(t) = \frac{1}{s} B_0(t), \quad s > 0 \quad (2.10)$$

を仮定する。式 (2.9) は波形  $f(t)$  が恒等的に一定ならば、その観測波形  $b_0(t)$  は恒等的に零であることを意味している。式 (2.10) は観測誤差  $\varepsilon_0(t)$  の値が観測波形  $B_0(t)$  に比例する関係を表している。つまり、観測波形  $B_0(t)$  が波形  $f(t)$  の変化によって励起されるが、常にその平衡点である零を保とうとする傾向を表している。ここで、式 (2.8) と式 (2.10) から  $\varepsilon_0(t)$  を消去すれば、

$$\left(s \frac{d}{dt} + 1\right) B_0(t) = s \frac{d}{dt} f(t) \quad (2.11)$$

なる常微分方程式が得られるから、これを式 (2.9) なる条件の下に解くことにすれば、 $B_0(t)$  の値が一意的に定まって、

$$B_0(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty e^{-\tau/s} f(t - \tau) d\tau \quad (2.12)$$

となる。この式を平衡型の自然観測の原始形式と言う。ここで観測を逐次繰り返すと、

$$B_m(t) = \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-\tau/s} B_{m-1}(t - \tau) d\tau \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

なる観測値の系列が得られる。

式 (2.6) 式 (2.7) で表される観測値の系列を近接型基本観測値系列、式 (2.12) 式 (2.13) で表される観測値を平衡型基本観測値系列と呼ぶ。

### 2.1.3 再構成公式

近接型と平衡型の基本観測値系列を逆変換すると、

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t, s) \quad (2.14)$$

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(t, s) \quad (2.15)$$

式 (2.14) と式 (2.15) のように原波形を再構することが出来る。

### 2.1.4 伝達関数表現

2つの観測形式から得られる式 (2.6) と式 (2.12) を Laplace 変換すると、

$$A_0(p, s) = \frac{1}{1 + sp} F(p) \quad (2.16)$$

$$B_0(p, s) = \frac{sp}{1 + sp} F(p) \quad (2.17)$$

となる。ただし、 $p$  は Laplace 変換の変数で、 $s$  は自然観測パラメータ、 $F(p)$  は  $f(t)$  のラプラス変換表示である。ここで式 (2.16) の伝達関数を  $\Gamma(p)$ 、式 (2.17) の伝達関数を  $\Lambda(p)$  とおくと、

$$\Gamma(p) = \frac{1}{1 + sp} \quad (2.18)$$

$$\Lambda(p) = \frac{sp}{1 + sp} \quad (2.19)$$

となる。それぞれ、cutoff 周波数が  $\frac{1}{2\pi s}$  [Hz] の低域通過フィルタおよび高域通過フィルタを表している。図 2.1, 図 2.2 に  $\Gamma(p)$  および  $\Lambda(p)$  の周波数特性を示す。ただし cutoff 周波数は 1 [kHz] である。

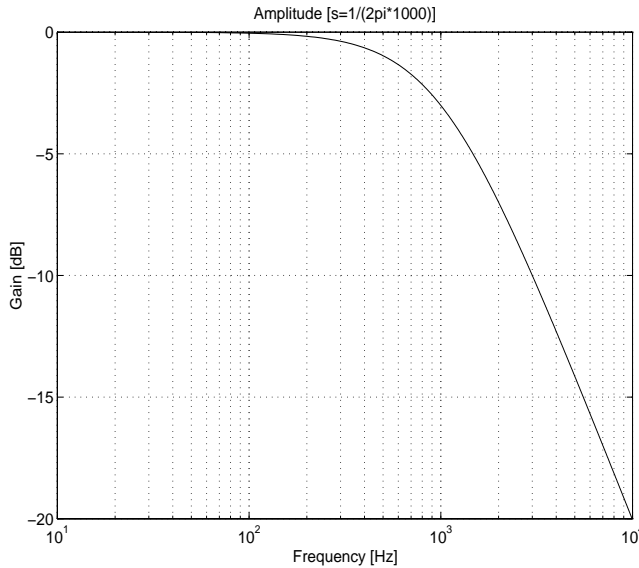


図 2.1:  $\Gamma(p)$  の周波数特性

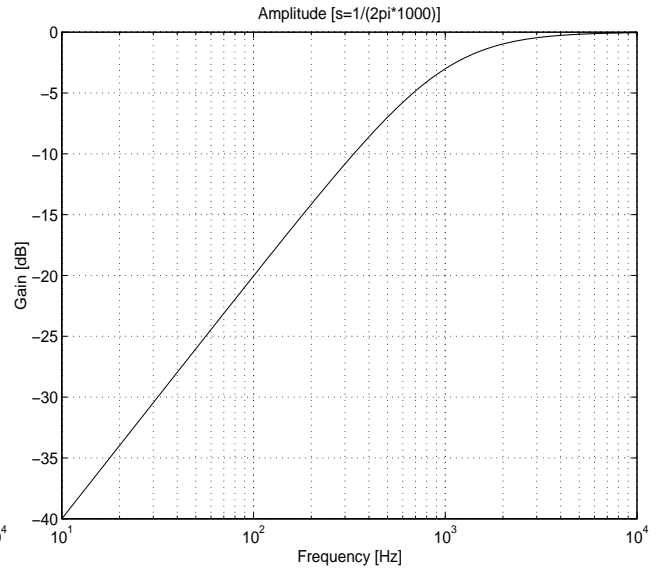


図 2.2:  $\Lambda(p)$  の周波数特性

## 2.2 正規型自然観測法理論

これまでに波形の観測形式には近接型と平衡型とよばれる 2 つの理論体系に大別されていることを述べた。この両型の観測系は相互に無関係ではなく、密接な表裏の関係を保っている [9]。ここでは近接型および平衡型の特性を生かし、有限個の観測値で原波形の特徴を表現することのできる正規型自然観測フィルタについて説明する [11][12]。

### 2.2.1 正規型基本観測変換

自然観測フィルタを構成する2つの観測変換 $\Gamma$ と $\Lambda$ は、それぞれ次のように定義することができた。

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-\tau/s} f(t - \tau) d\tau \quad (2.20)$$

$$(\Lambda f)(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty e^{-\tau/s} f(t - \tau) d\tau \quad (2.21)$$

そうすれば両作用素の間には、

$$\Gamma + \Lambda = I \quad (I \text{ は恒等作用素}) \quad (2.22)$$

なる関係が成り立つことが既に示されている [9]。観測位数を  $M$  とした正規型基本観測変換 (正規型基本観測作用素) を、

$$X_m^{(M)} = \Lambda^m \Gamma^{M-m} \quad (m = 0, 1, \dots, M) \quad (2.23)$$

のように新たに定義すれば、

$$\sum_{m=0}^M \binom{M}{m} X_m^{(M)} = I \quad (2.24)$$

が成り立つことになる。

### 2.2.2 再構成公式

また任意の波形  $f(t)$  に対して  $X_m^{(M)}$  なる作用素で表されるフィルタを用いて観測した系列を、

$$n_m^{(M)}(t) = (X_m^{(M)} f)(t) \quad (m = 0, 1, \dots, M) \quad (2.25)$$

と表し、これを自然観測フィルタと呼ぶ。このとき式 (2.24) によって、

$$f(t) = \sum_{m=0}^M \binom{M}{m} n_m^{(M)}(t) \quad (2.26)$$

なる波形の再構成式が得られる。

ここで式 (2.25) は正規型理論を用いた波形の変換式であり、得られた観測値の系列を正規型基本観測値系列と呼ぶ。このときの正規型自然観測フィルタのブロック図を図 2.3 に示す。



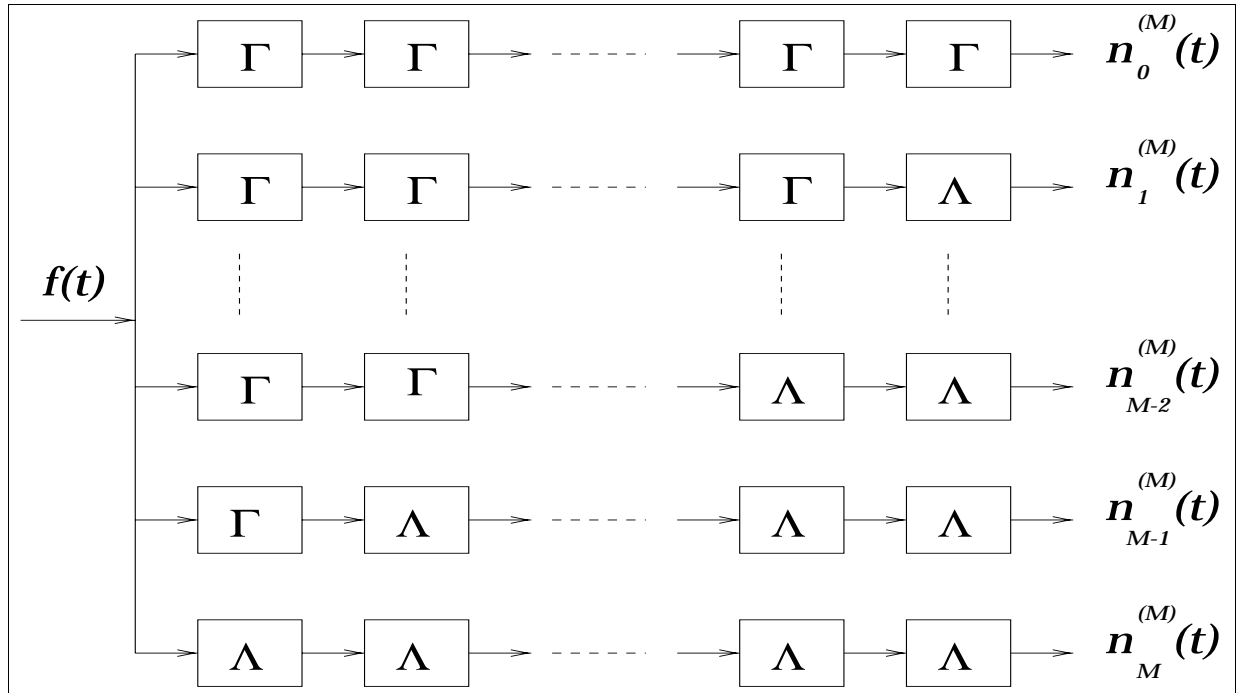


図 2.3:  $M$ 位正規型自然観測フィルタ

### 2.2.3 正規型自然観測フィルタの特性

正規型自然観測フィルタの伝達関数  $X_m^{(M)}(p)$  は、式 (2.23) によって

$$X_m^{(M)}(p) = \frac{(sp)^m}{(1+sp)^M} \quad (m = 0, 1, \dots, M) \quad (2.27)$$

となる。その振幅特性と位相特性はそれぞれ

$$|X_m^{(M)}(i\omega)| = \frac{|\omega s|^m}{(1 + \omega^2 s^2)^{M/2}} \quad (2.28)$$

$$\angle X_m^{(M)} = m\pi/2 - M\theta \quad (\text{但し } \theta = \arctan(s\omega)) \quad (2.29)$$

で与えられる。そこで位数  $M = 8$ 、cutoff 周波数  $\frac{1}{2\pi s} = 1$  [kHz] とした場合の正規型自然観測フィルタの周波数特性を図 2.4 に示す。この図からフィルタ  $X_0^{(M)}$  は低域通過、

フィルタ  $X_M^{(M)}$  は高域通過、それ以外のフィルタは帯域通過フィルタである。またこのフィルタ群は、cutoff 周波数  $f_c = \frac{1}{2\pi s}$  で対数軸上で対称となっていることも分かる。

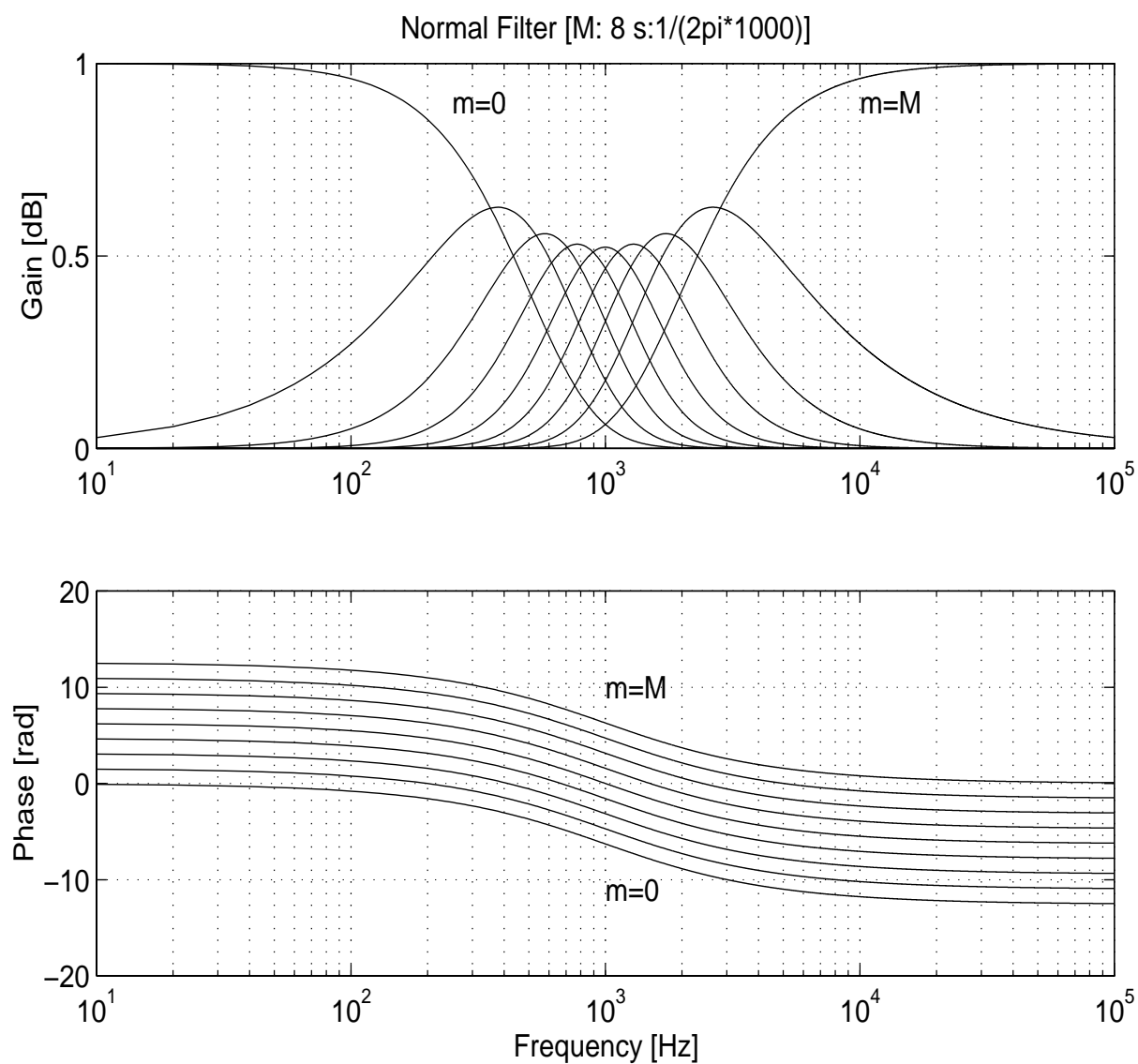


図 2.4:  $M$  位正規型自然観測フィルタの振幅特性と位相特性

## 第 3 章

# 正規型自然観測法理論における不確定性原理の検討

前章では、正規型自然観測フィルタの構成とその特性について述べた。本章では、波形を自然観測フィルタによって正規型基本観測値系列として表したとき、この系列の中に観測波形がどのように分布しているのかを明らかにする。これは正規型自然観測法理論における不確定性原理と言えるものであり、大域的と瞬時的な特性の検討を行なった。

### 3.1 フーリエ変換における不確定性原理

不確定性原理は二つの物理量それぞれを確率変数としてを捉え、それらの分散の積を計算したときに、その値が一定値未満に成り得ないことを示すものである。この理論は最初、量子力学の分野において、ドイツの W.Heisenberg(1927) によって提唱された。その後、他の分野においてもこの原理が展開されて来た。その一つは波形解析としてのフーリエ変換である。

#### 3.1.1 不確定性原理

この理論は、フーリエ変換の場面では時間軸  $t$  上における波形の分散  $(\Delta t)^2$  と角周波数軸  $\omega$  上における波形の分散  $(\Delta \omega)^2$  の積の値に対して

$$(\Delta t)^2(\Delta \omega)^2 \geq \frac{1}{4} \quad (3.1)$$

なる関係式が成り立っている、と言うものである。これはフーリエ変換における不確定性原理と呼ばれている。この式によって分散  $(\Delta t)^2$  と分散  $(\Delta \omega)^2$  の積の最小値が  $1/4$  である。次の節では、等価時定数を新たに導入することによって不確定性原理の式を表現する。

### 3.1.2 等価時定数を用いたフーリエ変換における不確定性原理

まず、波形  $f(t)$  に対して

$$(\delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \{f'(t)\}^2 dt} \quad (3.2)$$

なる量を「等価時定数」と呼ぶ。等価時定数は瞬時的な時定数を波形の傾きの大きい所に重みをつけて平均したものである。パーセバルの等式を用いれば式 (3.2) は

$$(\delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(i\omega)|^2 d\omega} \quad (3.3)$$

と表すことができる。一方フーリエ変換の角周波数軸  $\omega$  上における波形の分散  $(\Delta \omega)^2$  を求めれば

$$(\Delta \omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(i\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega} \quad (3.4)$$

である。そして、波形の分散  $(\Delta \omega)^2$  と等価時定数の間の関係は式 (3.3) と式 (3.4) から

$$(\Delta \omega)^2 = \frac{1}{(\delta t)^2} \quad (3.5)$$

となる。この結果を用いて式 (3.1) によって表されたフーリエ変換における不確定性原理を等価時定数に着目して表現すれば、

$$\begin{cases} (\Delta t)^2 \geq \frac{1}{4}(\delta t)^2 \\ (\Delta \omega)^2(\delta t)^2 = 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

と表される。この表現式によれば、 $(\Delta t)^2$  の最小値が等価時定数の  $\frac{1}{4}(\delta t)^2$  で与えられ、 $(\Delta \omega)^2$  は  $(\delta t)^2$  の逆数となっていることを示している。この表現式は従来の不確定性原理

の表現式をより細かく表現できる。つまり、 $(\Delta t)^2$ 、と  $(\Delta \omega)^2$  との積には最小値が存在されるトレードオフの関係にあることは従来から知られたが、そのトレードオフの本質な部分は  $(\delta t)^2$  と  $(\omega)^2$  との関係に成り立つ、逆比例関係であることが明確に表現されているのである。

## 3.2 正規型自然観測法における大域的な不確定性原理

本節では、観測した入力波形の基本観測値系列における広がり特性について不確定原理と言う観点から明らかにする。

### 3.2.1 観測次数の平均と分散

まず、入力波形  $f(t)$  に関する基本観測値系列を  $\{n_m^{(M)}(t)\}$  とすれば、

$$f(t) = \sum_{m=0}^M \binom{M}{m} n_m^{(M)}(t) \quad (3.7)$$

が成り立つ。そして、入力波形  $f(t)$  のノルム  $\|f\|$  を

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt \quad (3.8)$$

で定義すれば、

$$\|f\|^2 = \sum_{m=0}^M \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2 \quad (3.9)$$

が成り立つ。式 (3.9) を右辺の  $f(t)$  のフーリエ変換  $F(\omega)$  で表すと、

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^M \binom{M}{m} \frac{\omega^2 s^2}{(1 + \omega^2 s^2)} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

である。そこで、基本観測値系列  $\{n_m^{(M)}(t)\}$  に対して、そのノルムの二乗の分布に対する観測次数  $m$  の平均値  $\bar{m}$  を

$$\bar{m} = \frac{\sum_{m=0}^M m \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2}{\sum_{m=0}^M \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2} \quad (3.11)$$

で定義する。この値は

$$\bar{m} = M \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s^2}{1 + \omega^2 s^2} |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.12)$$

と表せる。次に観測次数の分散  $(\Delta m)^2$  を

$$(\Delta m)^2 = \frac{\sum_{m=0}^M (m - \bar{m})^2 \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2}{\sum_{m=0}^M \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2} \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

で定義する。ここで分散は

$$(\Delta m)^2 = \bar{m}^2 - (\bar{m})^2 \quad (3.15)$$

のようにも表せることに着目し、その値を計算することにする。 $\bar{m}^2$  の値を計算すると

$$\bar{m}^2 = M \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s^2}{1 + \omega^2 s^2} |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} + M^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s^2}{1 + \omega^2 s^2} |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.16)$$

である。よって分散  $(\Delta m)^2$  の値が式 (3.12) と式 (3.16) を用いることによって

$$\begin{aligned} (\Delta m)^2 = & M^2 \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^4 s^4}{(1 + \omega^2 s^2)^2} |F(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s^2}{(1 + \omega^2 s^2)} |F(\omega)|^2 d\omega \right\}}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \right\}^2} \\ & + M \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s^2}{(1 + \omega^2 s^2)} |F(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \right\}}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \right\}^2} \quad (3.17) \end{aligned}$$

と求められる。

### 3.2.2 平均次数指標

観測位数  $M$  の仲介量に関して規格化された  $\bar{m}$  として

$$L = \frac{\bar{m}}{M - \bar{m}} \quad (3.18)$$

なる量を定義し、「平均次数指標」と呼ぶことにする。 $L$  の値は  $\bar{m} \leq M/2$  のとき  $0 \leq L \leq 1$ 、 $\bar{m} \geq M/2$  のとき  $L \geq 1$  となる。この値は式 (3.11) を用いると

$$L = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s^2}{1 + \omega^2 s^2} |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 s^2} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.19)$$

となる。以降では、平均次数指標を仲介量として、等価時定数と観測次数の分散との間の関係を明らかにするとしている。

### 3.2.3 等価時定数と平均次数指標との間の関係

$L^2$  と  $(\delta t)^2$  との関係は次のいずれかである。

- もし  $\frac{s^2}{(\delta t)^2} \leq 1$  ならば

$$0 \leq L^2 \leq \frac{s^2}{(\delta t)^2} \leq 1 \quad (3.20)$$

である。

- もし  $\frac{s^2}{(\delta t)^2} \leq L^2$  ならば

$$1 \leq \frac{s^2}{(\delta t)^2} \leq L^2 \quad (3.21)$$

である。

### 3.2.4 平均次数指標と観測次数の分散との間の関係

平均次数指標と観測次数の分散との間の関係を明らかにするために

$$\frac{(\Delta m)^2}{\bar{m}(M - \bar{m})} \quad (3.22)$$

なる量を考える。いま  $A$  と  $B$  を

$$A = \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^4 s^4}{(1 + \omega^2 s^2)^2} |F(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s^2}{(1 + \omega^2 s^2)} |F(\omega)|^2 d\omega \right\}}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s^2}{(1 + \omega^2 s^2)} |F(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + \omega^2 s^2)} |F(\omega)|^2 d\omega \right\}} \quad (3.23)$$

$$B = \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s^2}{(1 + \omega^2 s^2)} |F(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \right\}}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 s^2}{(1 + \omega^2 s^2)} |F(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + \omega^2 s^2)} |F(\omega)|^2 d\omega \right\}} \quad (3.24)$$

とすれば、式 (3.22) は式 (3.12)、(3.17) から

$$\frac{(\Delta m)^2}{\bar{m}(M - \bar{m})} = A + \frac{B}{M} \quad (3.25)$$

と表せる。また、式 (3.23),(3.24) との間に

$$\begin{cases} A = 1 - B \\ A \geq 0, \quad B > 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

なる関係が成り立つ。そして式 (3.18) と式 (3.22) から

$$\frac{(\Delta m)^2}{\bar{m}(M - \bar{m})} = \left( \frac{\Delta m}{M} \right)^2 \frac{(L + 1)^2}{L} \quad (3.27)$$

なる関係が判明する。また、式 (3.25) と式 (3.27) から  $(\Delta m)^2$  と  $L$  の間には

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta m}{M} \right)^2 &= \frac{L}{(L + 1)^2} \left( A + \frac{1}{M} B \right) \\ &= \left( 1 - \frac{M - 1}{M} B \right) \frac{L}{(L + 1)^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

なる関係が成り立つ。

以上、式 (3.20),(3.21) と式 (3.28) から正規型自然観測値系列の特徴を等価時定数と観測次数の分散との間の関係がまとめると、以下ようになる。

- $(\frac{\delta t}{s})^2 \rightarrow \infty$  のとき、 $L \rightarrow 0$  となるので、観測次数の平均値  $\bar{m} = 0$  になる。このとき観測次数の分散は  $(\Delta m)^2 = 0$  となる。
- $L \rightarrow \infty$  のとき、 $(\frac{\delta t}{s})^2 \leq 1$  となる。このとき観測次数の平均・分散は  $\bar{m} = M$ 、 $(\Delta m)^2 = 0$  となる。
- $0 < (\frac{\delta t}{s})^2 < \infty$  のとき、 $(\frac{\delta t}{s})^2$  の減少に従って、観測次数の平均値  $\bar{m}$  が増加するが、観測次数の分散  $(\Delta m)^2$  は単調に増加してから途中で減少に変わる。

以上で得られた等価時定数と観測次数の分散の関係を図 3.1 のように示す。これは知られていた不確定性原理とは異なる性質であり、正規型基本観測値系列における広がり特徴を表している。



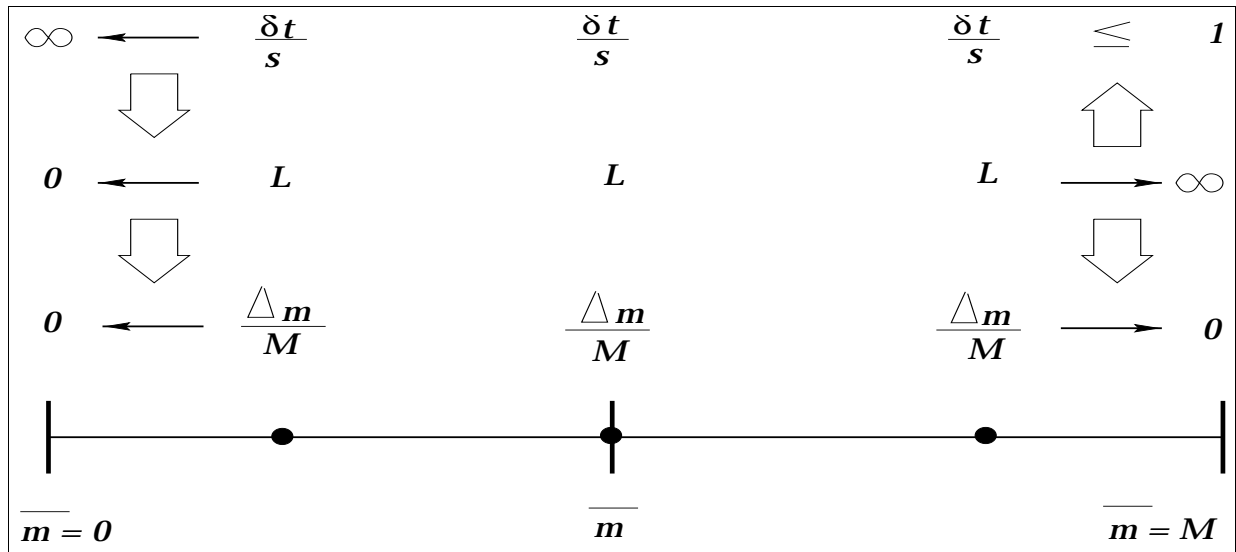


図 3.1:  $(\frac{\delta t}{s})^2$  と平均  $\bar{m}$  と間の関係

### 3.2.5 大域的な特徴のシミュレーションと結果

前述の基本観測値系列の広がりに関する大域的な特徴の解析について、数値シミュレーションによる検証を行なう。シミュレーションの条件は次の通りである。

- 入力波形  $f(t) = e^{-at}$
- 自然観測位数  $M = 8$
- 標本化周波数  $f_s = 20,000$  [Hz]
- 自然観測フィルタの中心周波数  $f_c = 2 \sim 100$  [Hz]
- デジタルへの変換：双一次変換
- $a = 2\pi 50$

入力波形  $f(t) = e^{-at}$  に対して、自然観測定数  $s = \frac{1}{2\pi f_c}$  を  $f_c$  が  $2 \sim 100$  [Hz] なる範囲で変化させたときの観測次数の平均値  $\bar{m}$  と  $(\frac{\Delta m}{M})^2$  を図 3.2、3.3 に示す。但し、実線は理論値であり、+マークはシミュレーション結果である。その結果、理論値と一致した値が得られることを確認できた。 $(\frac{\delta t}{s})^2$  の増加に従って、 $\bar{m}$  は減少し、 $(\frac{\Delta m}{M})^2$  は増加してから途中で減少に変わることが分かる。観測次数の平均値が  $M / 2$  の付近では分散の値は最大値となっている。他の入力波形についても同様な結果が得られた。入力波形に対し

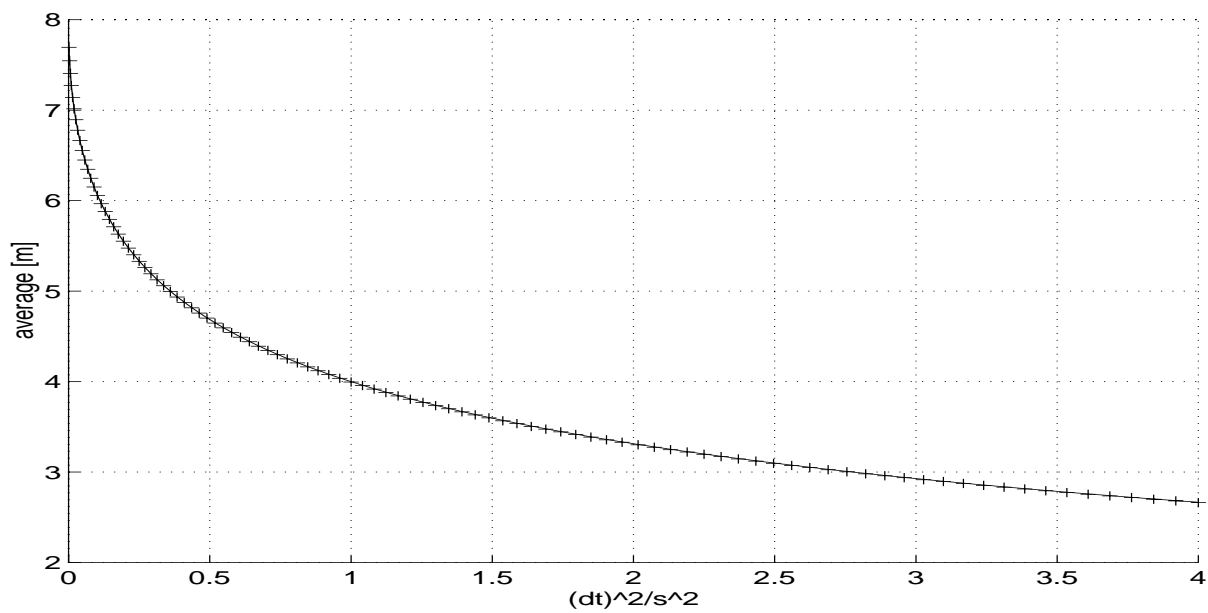


図 3.2:  $(\frac{\delta t}{s})^2$  と平均  $\bar{m}$  と間の関係

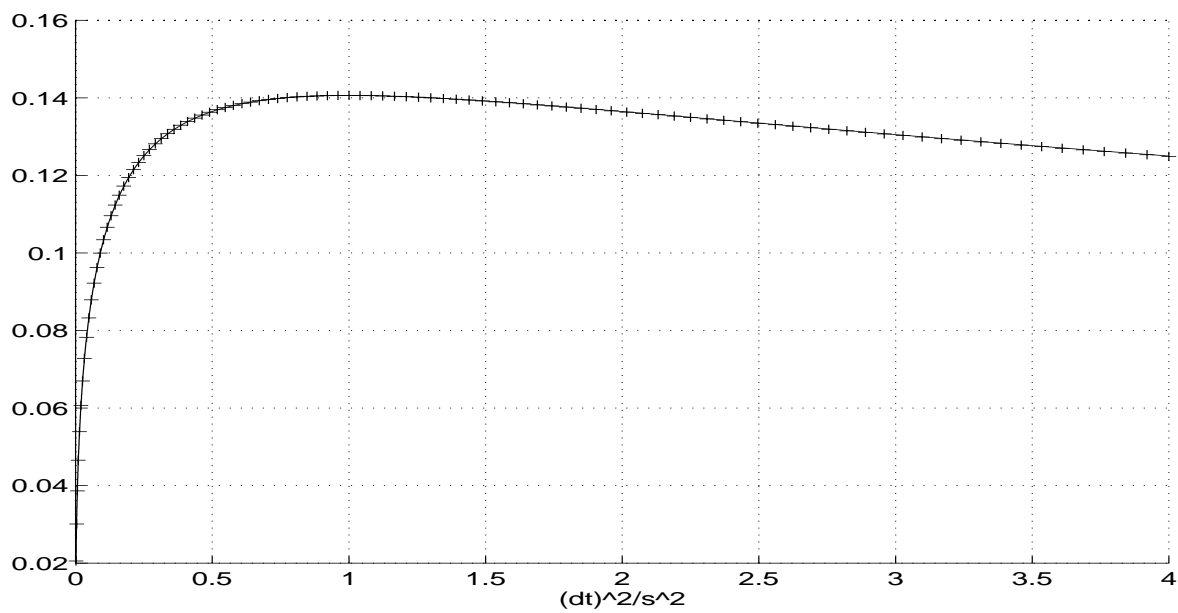


図 3.3:  $(\frac{\delta t}{s})^2$  と  $(\frac{\Delta m}{M})^2$  と間の関係

てフィルタの中心周波数を変化させることによって正規型自然観測値系列広がりに関する特徴を明らかにした。

しかし、これまで述べた不確定性原理は、全時間に渡って波形を観測することを前提とした大域的理論であった。得られた特性量が波形の瞬時特性を分析するために不十分となっている。そこで次の節では瞬時的な不確定性原理に拡張することによって正規型自然観測値系列の瞬時特徴の検討を行なう。

### 3.3 正規型自然観測法における瞬時的な不確定性原理

大域的方法では時間変化の様相を捉えることができなかつた、そこで各時刻における基本観測値系列のノルムが  $m$  についてどの様な分布するかについて解析する。

#### 3.3.1 瞬時的な計算方法

まず、ある正の数  $s_0$  を用いて、

$$\|n_m^{(M)}\|_{(t)}^2 = \frac{1}{s_0} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{s_0}} |n_m^{(M)}(t - \tau)|^2 d\tau \quad (3.29)$$

なる量を瞬時ノルムと定義する。ここで  $s_0$  を決めることによって、瞬時ノルムに影響する時間幅を設定できる。

#### 3.3.2 観測次数の瞬時平均と瞬時分散

この式 (3.29) を用いて、瞬時的な観測次数の平均  $\bar{m}_{(t)}$  を

$$\bar{m}_{(t)} = \frac{\sum_{m=0}^M m \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|_{(t)}^2}{\sum_{m=0}^M \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|_{(t)}^2} \quad (3.30)$$

と定義し、また

$$(\Delta m)_{(t)}^2 = \frac{\sum_{m=0}^M (m - \bar{m}_{(t)})^2 \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|_{(t)}^2}{\sum_{m=0}^M \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|_{(t)}^2} \quad (3.31)$$

によって瞬時的な観測次数の分散  $(\Delta m)_{(t)}^2$  を定める。また、その平均次数指標は次のような式で求められる。

$$L_{(t)} = \frac{\overline{m}_{(t)}}{M - \overline{m}_{(t)}} \quad (3.32)$$

この方法で各時刻  $t$  における瞬時平均と分散を捉えることができる。この方法で基本観測値系列の瞬時特徴を、理論的な計算例とそのシミュレーションによって検討を行なう。

### 3.3.3 観測波形の瞬時変化の傾向 $\{\alpha\}$ に関する瞬時特徴の検討

正規型自然観測値系列における大域的な特性については、不確定性原理の立場から一般的の入力波形に対して既に明らかにしたところである。一方、瞬時特性を一般的な入力波形に対して、解析的に検討することは極めて困難である。そこで、ここでは、時定数が一定である様な波形を選んで考えてみる。

入力波形として

$$f_0 = e^{-\alpha t}, \quad -\infty < t < \infty \quad (3.33)$$

を考えることにする。式 (3.2) による波形の等価時定数は

$$(\delta t)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \quad (3.34)$$

である。この入力波形  $f_0$  に対する  $M$  位基本観測値系列は

$$n_m^{(M)}(t) = (-1)^m \frac{(\alpha s)^m}{(1 - \alpha s)^M} e^{-\alpha t} \quad (3.35)$$

で与えられる。式 (3.35) を式 (3.29) に代入すると瞬時的なノルムは

$$\|n_m^{(M)}\|_{(t)}^2 = \frac{1}{(1 - 2\alpha s_0)} \frac{(\alpha s)^{2m}}{(1 - \alpha s)^{2M}} e^{-2\alpha t} \quad (3.36)$$

となるので、式 (3.30) から

$$\overline{m}_{(t)} = \frac{M(\alpha s)^2}{\{1 + (\alpha s)^2\}} \quad (3.37)$$

となる。また式 (3.31) から瞬時的な観測次数の分散は

$$(\Delta m)_{(t)}^2 = \frac{M(\alpha s)^2}{\{1 + (\alpha s)^2\}^2} \quad (3.38)$$

となる。得られた  $\overline{m}_{(t)}$  と  $(\Delta m)_{(t)}^2$  を式 (3.32) に代入することによって平均次数指標は

$$L_{(t)} = (\alpha s)^2 = \left(\frac{s}{\delta t}\right)^2 \quad (3.39)$$

となる。また次のような知られた関係式が観測次数の平均と分散とパラメータ  $\alpha$  との間  
の関係について分かる。

$$\frac{L_{(t)}}{(L_{(t)} + 1)^2} = \frac{(\alpha s)^2}{\{(\alpha s)^2 + 1\}^2} \quad (3.40)$$

$$\left(\frac{\Delta m_{(t)}}{M}\right)^2 = \frac{L}{(L + 1)^2} \frac{1}{M} \quad (3.41)$$

パラメータ  $\alpha$  と観測次数の瞬時平均と分散関係

- $\frac{1}{s} > \alpha > -\frac{1}{s}$  なる範囲の  $\alpha$  に対しては

$$1 > (\alpha s)^2 \geq 0 \quad (3.42)$$

である。従って平均次数は

$$\frac{M}{2} > \bar{m}_{(t)} \geq 0 \quad (3.43)$$

であり、分散は

$$\frac{M}{4} > (\Delta m)_{(t)}^2 \geq 0 \quad (3.44)$$

となる。

- $-\frac{1}{s} \leq \alpha < -\infty$  なる範囲の  $\alpha$  に対しては

$$1 \leq (\alpha s)^2 \quad (3.45)$$

である。従って平均次数は

$$\frac{M}{2} \leq \bar{m}_{(t)} < M \quad (3.46)$$

であり、分散は

$$\frac{M}{4} \geq (\Delta m)_{(t)}^2 > 0 \quad (3.47)$$

となる。

$(\alpha s)^2 \rightarrow 0$  のとき、平均と分散は 0 に近づくになる。 $(\alpha s)^2 \rightarrow \infty$  のとき、平均は  $M$  に近  
付き、そのとき分散は 0 に近づくになる。 $(\alpha s)^2 = 0$  のとき平均と分散はそれぞれ  $M / 2$   
と  $M / 4$  となる。 $0 \leq (\alpha s)^2 \leq 1$  のとき、平均と分散はそれぞれ  $0 \sim M / 2$  と  $M / 4$   
までに増加していく。

### 3.3.4 瞬時的な特徴のシミュレーションと結果

#### シミュレーション 1

基本観測値系列の瞬時的な特徴の理論について数値シミュレーションの検証を行なう。シミュレーションの条件は次の通りである。

- 標本化周波数  $f_s$  : 20 [kHz]
- 自然観測位数  $M$  : 8
- 遮断周波数  $f_c$  : 50 [Hz] ,  $s = \frac{1}{2\pi f_c}$
- 入力波形 :  $f(t) = e^{-\alpha t}$  ,  $0 \leq t \leq 1$  ,  $\alpha = -2\pi 50$
- 定数  $s_0$  : 0,002

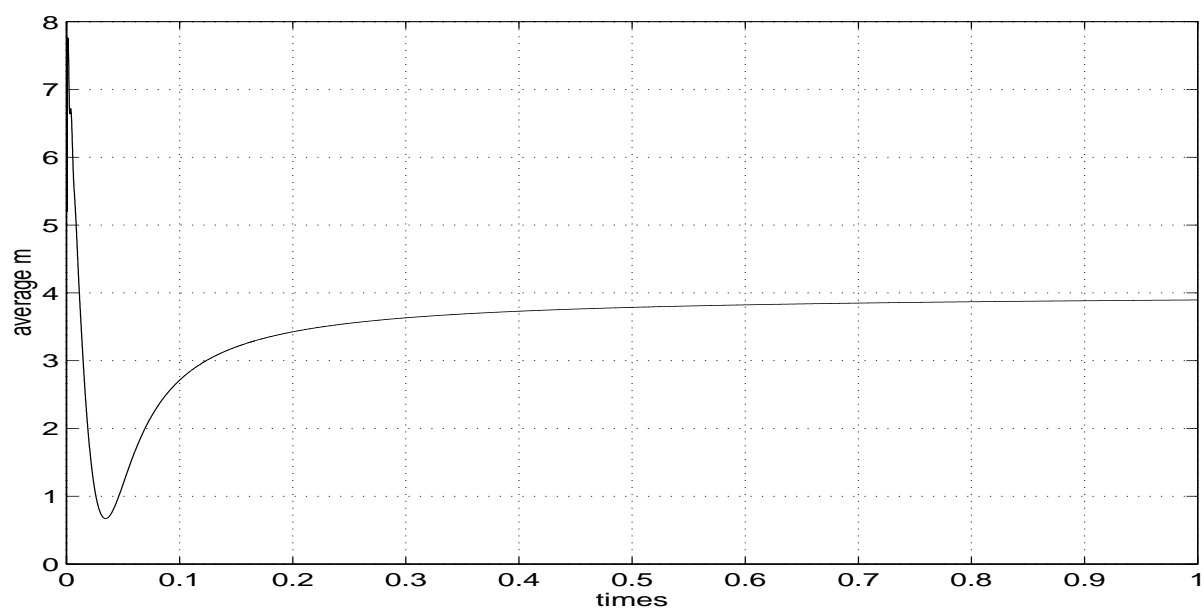


図 3.4: 観測次数の瞬時的な平均値  $\bar{m}(t)$

入力波形  $f(t) = e^{-\alpha t}$  を観測した結果、観測次数の瞬時的な平均値と分散はそれぞれ図 3.4と図 3.5のようになる。図 3.4の横軸は時刻、縦軸は瞬時的な平均値を表す。瞬時的な平均値は時刻  $t = 0$  大きな値から始まって、時間の経過と共にある一定値に近づくよう

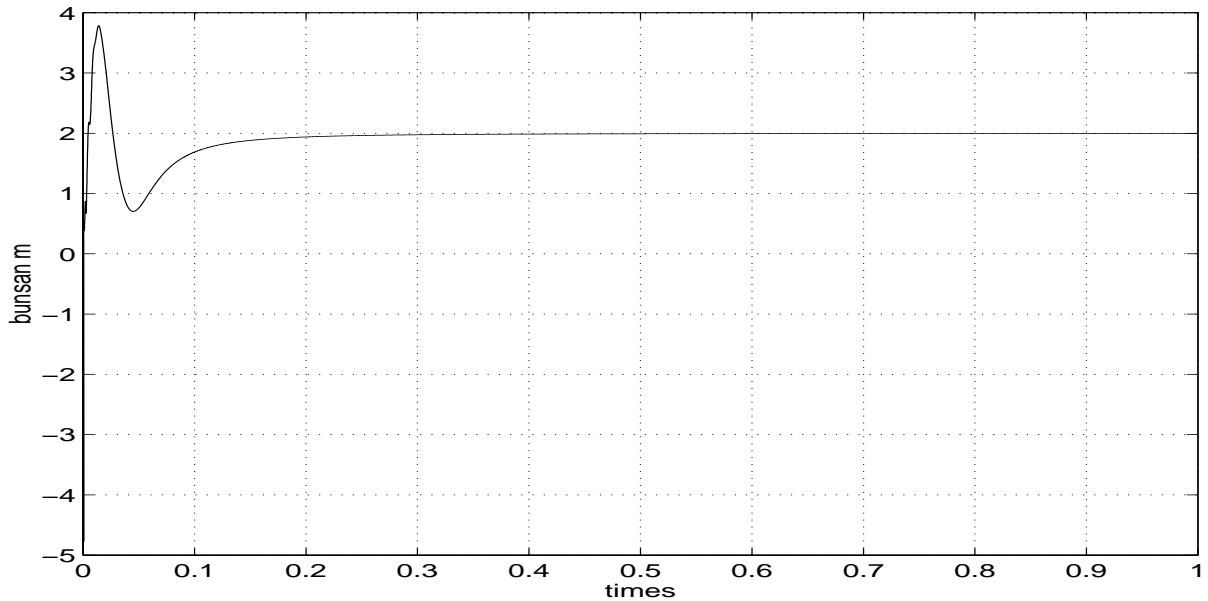


図 3.5: 観測次数の瞬時的な分散  $(\Delta m)_{(t)}^2$

になる。最初の時刻は大きな次数の基本観測値成分を含んでいることが分かる。最初の基本観測値系列は、フィルタ  $m = M$  に大きい値が現れて、瞬時平均値と分散の計算式 (3.30)、(3.31) に影響を与えている。瞬時平均の分子が大きくなって、分散の場合逆に小さくなる。そして式 (3.37) による値と一致した。図 3.5には瞬時的な分散を表している、最初に変化し、時間が経過し入力波形が安定するに従って瞬時分散が一定値に近づいていることが分かる。その値は式 (3.38) による値と一致している。

## シミュレーション 2

次のシミュレーションでは、入力波形のパラメータ  $\alpha$  を変化させたとき、観測次数の平均と分散にどのような特徴が現れるのかを明らかにする。実験の条件は以下の通りである。

- 自然観測位数  $M : 8$
- 標本化周波数  $f_s : 20$  [kHz]
- 遮断周波数  $f_c : 50$  [Hz] ,  $s : \frac{1}{2\pi f_c}$
- 入力波形 :  $f(t) = e^{-\alpha t}$  ,  $0 \leq t \leq 1$  ,  $\alpha = -200\pi \sim 100\pi$

- 定数  $s_0$  : 0,002

入力波形の  $\alpha = -200\pi \sim 100\pi$  に変化させたときの瞬時的平均と分散をそれぞれ図 3.6、3.7に示す。横軸は  $\alpha s = -2 \sim 0$  , 縦軸は平均と分散を表している。実線は理論値で、+マークは実験値である。 $\alpha s$  の値が  $-1$  のときに平均値が  $M/2$  となり、そのとき分散は最大値となる。ここで、入力波形の瞬時に変化する傾向  $\alpha$  に対して、基本観測値系列の分布特性が瞬時的に示した。

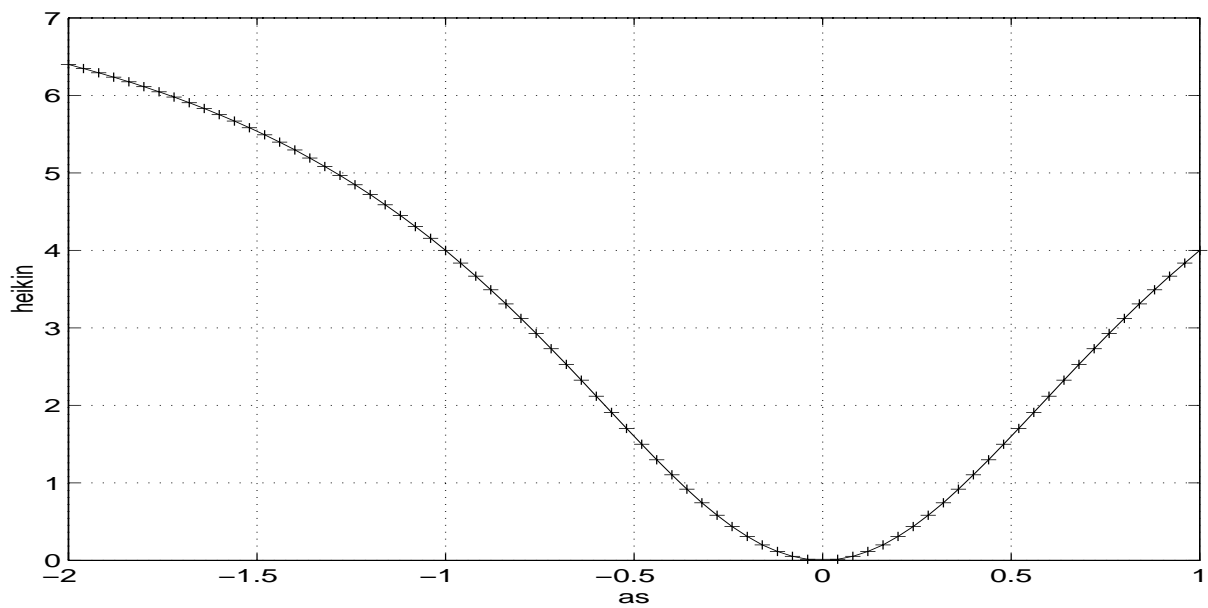


図 3.6: 瞬時的平均値  $\bar{m}(t)$  ;  $\alpha s = -2 \sim 1$  の場合



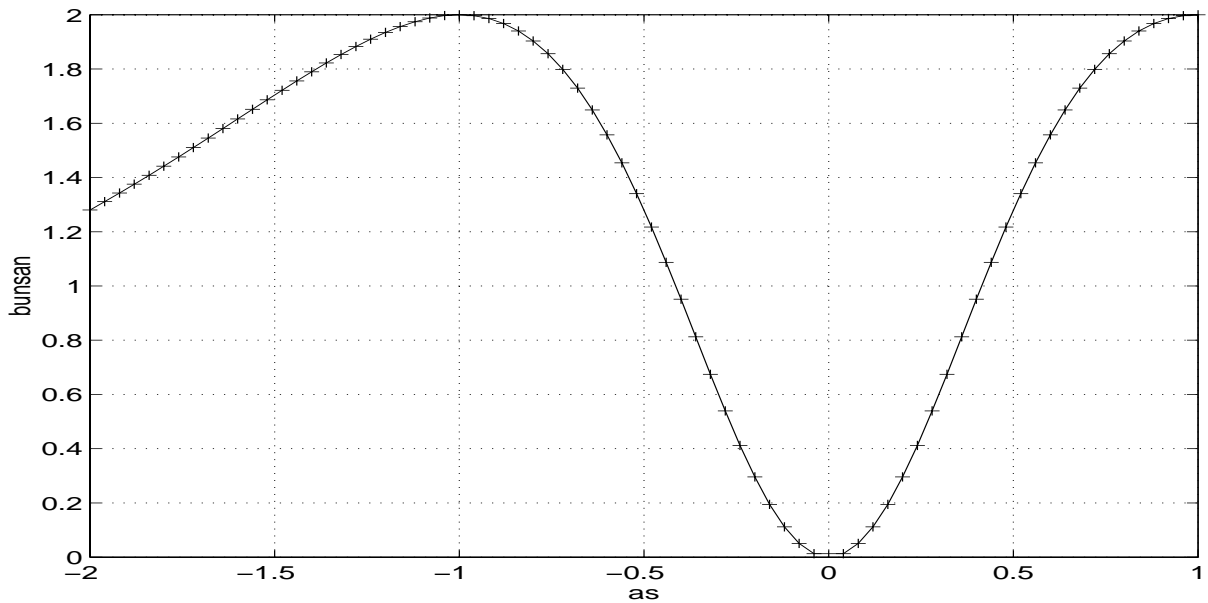


図 3.7: 瞬時的分散  $(\Delta m)_t^2$ ;  $\alpha s = -2 \sim 1$  の場合

## 3.4 考察

### 3.4.1 大域的な不確定性についての考察

波形を正規型自然観測変換によって正規型基本観測値系列として表す。その系列の中に波形がどのように分布しているのかを不確定性原理と言う観点から分析する。まず、大域的に基本観測値系列の分布特性の検討を行なった。大域的な理論では、観測波形から得られた各基本観測値系列を時間平均にそのノルム  $\|n_m^{(M)}\|$  で評価した後、平均次数  $\bar{m}$  と分散  $(\Delta m)^2$  について理論的の解析を行なった。実際には、瞬時的に変化する周波数成分に対して正規型基本観測値系列の分布特性が変化している。そこで、大域的な理論では時々刻々の変化の本格的な特性を捉えることができない。

### 3.4.2 瞬時的な不確定性についての考察

大域的な理論では、一般的な入力波形における正規型基本観測値系列の分布特性を解析的に明らかにした。瞬時的な理論を構築するのは簡単ではなかった。そこで、時定数が一定する波形の検討を行なった。入力波形の瞬時的における変化の傾向  $\alpha$  が正規型基本観

測値系列の分布特性に与える影響について考察する。

### 瞬時的に変化する傾向に関する考察

時定数が一定となる入力波形  $f(t) = e^{-\alpha t}$  に対して、大域的な平均値  $\bar{m}$  と分散  $(\Delta m)^2$  を計算すると

$$\bar{m} = M \frac{\alpha s}{1 + \alpha s} \quad (3.48)$$

$$(\Delta m)^2 = \frac{\alpha s (M^2 + M)}{2(\alpha s + 1)^2} \quad (3.49)$$

である。また、瞬時的な平均値  $\bar{m}_{(t)}$  と分散  $(\Delta m)_{(t)}^2$  の値は

$$\bar{m}_{(t)} = \frac{M(\alpha s)^2}{\{1 + (\alpha s)^2\}} \quad (3.50)$$

$$(\Delta m)_{(t)}^2 = \frac{M(\alpha s)^2}{\{1 + (\alpha s)^2\}^2} \quad (3.51)$$

である。特に、 $(\alpha s)^2 = 1$  と  $(\alpha s)^2 = 0$  のとき、大域的と瞬時的な平均値も同じであるこ

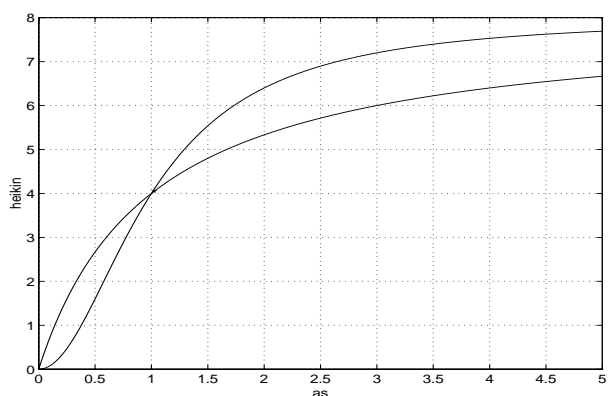


図 3.8: 大域的と瞬時的な平均値

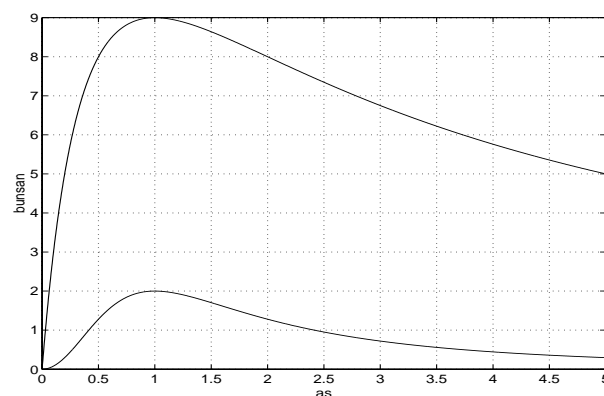


図 3.9: 大域的と瞬時的な分散

とが分かった。 $(\alpha s)^2 = 1$  のとき大域的と瞬時的な分散はそれぞれ最大値となっている。また、入力波形の  $\alpha = 0$  のときに大域的と瞬時的の平均値と分散はそれぞれ 0 となっている。分散は  $\alpha$  の増加に従って、増加して平均値が  $M / 2$  のときから減少に変わっている。その特性は図 3.8、3.9 に示す。

一般の入力波形に対して、瞬時的な正規型基本観測値系列の分布特性を解析的にまだ明らかにしていなかった。しかし、ここで行なった入力波形の瞬時的における変化の傾向  $\alpha$

との検討が、時々刻々変換する波形の特性を評価することがある程度できることが言える。瞬時的な分析法として不確定性原理から得られた観測次数の平均と分散  $\{\bar{m}, (\Delta m)^2, \bar{m}_{(t)}, (\Delta m)_{(t)}^2\}$  によって、今のところ、それだけの得られたパラメータではまだ不十分な結果である。

### 3.5 本章のまとめ

本章では正規型基本観測値系列に対して、観測次数の平均値および分散を大域的と瞬時的な不確定性の立場からその特性の検討を行なった。

波形の特徴を分析するために、不確定性から得られた観測次数の平均値と分散がまだ不十分であった。そこで、次章では波形の瞬時的な表現形式を導入することによってより詳細で有用と考えられる分析法の考察を行なう。

## 第 4 章

# 正規型自然観測法による瞬時波形の構造解析

本章では正規型自然観測法に基づいて、瞬時波形の構造解析法を提案する。更に、前章の不確定性という観点から検討した基本観測値系列の特徴の結果に基づいて瞬時構造解析方法の関係を述べる。

### 4.1 基本観測値系列からのモーメント波形

基本観測値系列によって観測波形に着目した時刻  $t_0$  とその近傍の構造を瞬時的に解析する。まず、入力波形  $f_0$  が

$$f_0(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} \quad (4.1)$$

とモデル化する。一般的にパラメータ  $A$  と  $\alpha$  は複素数である。このときモデル化された入力波形  $f_0(t)$  の正規型基本観測値系列は

$$\begin{aligned} n_m^{(M)}(t_0) &= (-1)^m \left\{ A_1(t_0) \frac{(\alpha_1(t_0)s)^m}{(1 - \alpha_1(t_0)s)^M} e^{-\alpha_1(t_0)} \right. \\ &\quad \left. + A_2(t_0) \frac{(\alpha_2(t_0)s)^m}{(1 - \alpha_2(t_0)s)^M} e^{-\alpha_2(t_0)} \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

で与えられる。この基本観測値系列を用いて次の式 (4.3) のようにモーメント波形  $h_l(t_0)$  を定義する。

$$h_l(t_0) = \sum_{m=0}^{M-l} \binom{M-l}{m} n_m^{(M)}(t_0) \quad (l = 0, 1, \dots, M) \quad (4.3)$$

式(4.3)の正規型基本観測値系列を用いれば  $h_l(t_0)$  は次式で表せることになる。

$$h_l(t_0) = \frac{A_1(t_0)e^{-\alpha_1(t_0)t_0}}{(1 - \alpha_1(t_0)s)^l} + \frac{A_2(t_0)e^{-\alpha_2(t_0)t_0}}{(1 - \alpha_2(t_0)s)^l} \quad (4.4)$$

次節では、このモーメント波形を用いることによって入力波形のある時刻  $t_0$  とその近傍での構造の解析法を述べる。

## 4.2 瞬時波形の構造解析推定法

本節では入力波形の時刻  $t = t_0$  での構造を推定する方法を述べる。まず、正規型基本観測値系列から得られたモーメント波形  $h_l(t_0)$  に対して

$$\beta_1(t_0) = \frac{1}{1 - \alpha_1(t_0)s}, \quad \beta_2(t_0) = \frac{1}{1 - \alpha_2(t_0)s} \quad (4.5)$$

$$B_1(t_0) = A_1(t_0)e^{-\alpha_1(t_0)t_0}, \quad B_2(t_0) = A_2(t_0)e^{-\alpha_2(t_0)t_0} \quad (4.6)$$

と置くと、式(4.4)で表されるモーメント波形  $\{h_l(t_0)\}$

$$h_l(t_0) = B_1(t_0)\beta_1(t_0)^l + B_2(t_0)\beta_2(t_0)^l \quad (l = 0, 1, 2, 3) \quad (4.7)$$

で表すことが出来る。そして次の2次多項式

$$P(z) = (z - \beta_1(t_0))(z - \beta_2(t_0)) = p_0z^2 + p_1z + p_2 \quad (4.8)$$

を定義すれば、方程式  $P(z) = 0$  の解は  $\beta_1(t_0)$ 、 $\beta_2(t_0)$

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 = -(\beta_1(t_0) + \beta_2(t_0)) \\ p_2 = \beta_1(t_0)\beta_2(t_0) \end{cases} \quad (4.9)$$

である。今、この  $p_0$ 、 $p_1$ 、 $p_2$  及び  $P(z)$  を用いると

$$p_0h_2(t_0) + p_1h_1(t_0) + p_2h_0(t_0) = B_1(t_0)P(\beta_1(t_0)) + B_2(t_0)P(\beta_2(t_0)) = 0 \quad (4.10)$$

及び

$$\begin{aligned} p_0h_3(t_0) + p_1h_2(t_0) + p_2h_1(t_0) &= B_1(t_0)\beta_1(t_0)P(\beta_1(t_0)) \\ &+ B_2(t_0)\beta_2(t_0)P(\beta_2(t_0)) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

が成り立つ。よって、式 (4.10)、(4.11) をまとめれば

$$\begin{pmatrix} h_0(t_0) & h_1(t_0) \\ h_1(t_0) & h_2(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} = -p_0 \begin{pmatrix} h_2(t_0) \\ h_3(t_0) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

なる連立1次方程式が得られる。ここでモーメント波形  $h_i(t_0)$  と  $p_0$  の値が既に分かったので、 $p_1, p_2$  を解くと次のような式が得られる。

$$\begin{cases} p_1(t_0) = \frac{h_1(t_0)h_2(t_0) - h_0(t_0)h_3(t_0)}{h_0(t_0)h_2(t_0) - h_1^2(t_0)} \\ p_2(t_0) = \frac{h_1(t_0)h_3(t_0) - h_2^2(t_0)}{h_0(t_0)h_2(t_0) - h_1^2(t_0)} \end{cases} \quad (4.13)$$

そして、式 (4.6) から  $\beta_1(t_0), \beta_2(t_0)$  は

$$\begin{cases} \beta_1(t_0) = \frac{1}{2} \{-p_1(t_0) + \sqrt{p_1^2(t_0) - 4p_2(t_0)}\} \\ \beta_2(t_0) = \frac{1}{2} \{-p_1(t_0) - \sqrt{p_1^2(t_0) - 4p_2(t_0)}\} \end{cases} \quad (4.14)$$

で求める。 $\beta_1(t_0), \beta_2(t_0)$  が求まるから、式 (4.7) から次の式が得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1(t_0) & \beta_2(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1(t_0) \\ B_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0(t_0) \\ h_1(t_0) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

また、式 (4.15) を解くことによって、 $B_1(t_0), B_2(t_0)$  が

$$\begin{cases} B_1(t_0) = \frac{1}{\beta_2(t_0) - \beta_1(t_0)} \{\beta_2(t_0)h_0(t_0) - h_1(t_0)\} \\ B_2(t_0) = \frac{1}{\beta_2(t_0) - \beta_1(t_0)} \{h_1(t_0) - \beta_1(t_0)h_0(t_0)\} \end{cases} \quad (4.16)$$

が得られる。そうすれば、式 (4.5) から  $\alpha(t_0)$  の値は

$$\begin{cases} \alpha_1(t_0) = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{\beta_1(t_0)}\right) \\ \alpha_2(t_0) = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{\beta_2(t_0)}\right) \end{cases} \quad (4.17)$$

となる。図 4.1 のように時刻  $t = t_0$  の波形  $f(t_0, t_0)$  を次の式で表せる。

$$f(t_0, t_0) = B_1(t_0) + B_2(t_0) \quad (4.18)$$

それから、その時刻  $\{t = t_0\}$  の近傍の構造は次の式 (4.19) で表せることが出来る。

$$f(t, t_0) = B_1(t_0)e^{-\alpha_1(t_0)(t-t_0)} + B_2(t_0)e^{-\alpha_2(t_0)(t-t_0)} \quad (4.19)$$

時刻  $t = t_0$  のときに、式 (4.19) が式 (4.18) と同じものとなる。

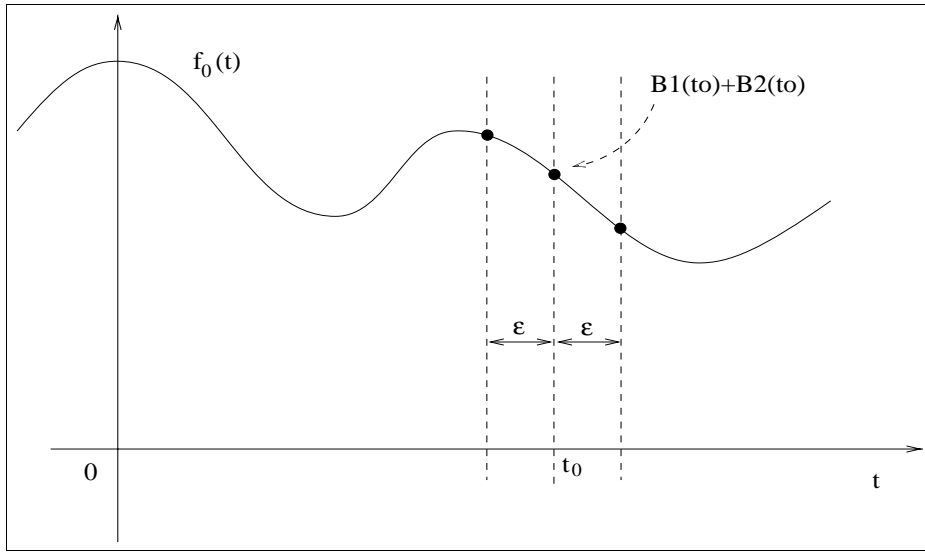


図 4.1: 自然観測法による瞬時構造解析

$\beta_1(t_0), \beta_2(t_0)$  が複素数の場合

また  $\beta_1(t_0), \beta_2(t_0)$  が (4.14) によって複素数になる場合にもある、そのとき  $B_1(t_0), B_2(t_0)$  と  $\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0)$  の値が複素数となる。ここで、これらの値を

$$\begin{cases} B_1(t_0) = \delta(t_0) + i\gamma(t_0) \\ B_2(t_0) = \delta(t_0) - i\gamma(t_0) \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \alpha_1(t_0) = \sigma(t_0) + i\omega(t_0) \\ \alpha_2(t_0) = \sigma(t_0) - i\omega(t_0) \end{cases} \quad (4.21)$$

と置くと、 $B(t_0)$  と  $\alpha(t_0)$  のそれぞれの実数部と虚部は、

$$\begin{cases} \delta(t_0) = \frac{B_1(t_0) + B_2(t_0)}{2} \\ \gamma(t_0) = \frac{-i(B_1(t_0) - B_2(t_0))}{2} \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} \sigma(t_0) = \frac{\alpha_1(t_0) + \alpha_2(t_0)}{2} \\ \omega(t_0) = \frac{-i(\alpha_1(t_0) - \alpha_2(t_0))}{2} \end{cases} \quad (4.23)$$

で得られる。また  $B_1(t_0), B_2(t_0)$  を極形式に書き換えると

$$\begin{cases} B_1(t_0) = \frac{1}{2}C(t_0)(\cos \theta(t_0) + i \sin \theta(t_0)) \\ B_2(t_0) = \frac{1}{2}C(t_0)(\cos \theta(t_0) - i \sin \theta(t_0)) \end{cases} \quad (4.24)$$

になる。この式を整理すると、

$$\begin{cases} iC(t_0) \sin \theta(t_0) = (B_1(t_0) - B_2(t_0)) \\ C(t_0) \cos \theta(t_0) = (B_1(t_0) + B_2(t_0)) \end{cases} \quad (4.25)$$

なる関係が成り立つから、 $\theta(t_0)$  の値は

$$\begin{aligned} i \tan \theta(t_0) &= \frac{(B_1(t_0) - B_2(t_0))}{(B_1(t_0) + B_2(t_0))} \\ \theta(t_0) &= \tan^{-1} \left\{ -i \frac{(B_1(t_0) - B_2(t_0))}{(B_1(t_0) + B_2(t_0))} \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

で得られる。そして、 $C(t_0)$  も式 (4.25) によって次の式で求められる。

$$\begin{aligned} C(t_0) &= \sqrt{\{B_1(t_0) + B_2(t_0)\}^2 - \{(B_1(t_0) - B_2(t_0))\}^2} \\ &= \sqrt{4B_1(t_0)B_2(t_0)} \\ &= 2\sqrt{B_1(t_0)B_2(t_0)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

これらのパラメータ  $\{\omega, \sigma, C, \theta\}$  を用いることによって波形の時刻  $t_0$  とその近傍の構造は次のような式で推定することができる。

$$\begin{aligned} f(t, t_0) &= B_1(t_0)e^{-\alpha_1(t-t_0)} + B_2(t_0)e^{-\alpha_2(t-t_0)} \\ &= C(t_0)e^{-\sigma(t_0)(t-t_0)} \cos\{\omega(t_0)(t-t_0) - \theta(t_0)\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

ここで、 $C(t_0)$  は瞬時波形の成分の大きさ、 $\sigma(t_0)$  は瞬時波形の変化する様相、 $\omega(t_0)$  は角周波数、 $\theta(t_0)$  は位相角を表すものである。この表現式は実関数となっているから式 (4.19) より理解しやすくなっている。また、図 4.1 のように  $\{t = t_0\}$  の時刻とその近傍の構造を式 (4.28) で表現することが出来る。



## 4.3 瞬時構造解析のシミュレーション

### 4.3.1 周波数が一定の場合

ここで、入力波形を

$$\begin{cases} f_0(t) = Ce^{-\sigma t} \cos(\omega t - \theta) & 0 \leq t \leq 5 \\ f_0(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

とする。各パラメータの設定は次通りである。

- デジタルへの変換 : 双一次変換
- 自然観測位数  $M = 3, M = 8$
- フィルタの中心周波数  $f_c = 3.26$  [Hz]
- $C = 10, \sigma = 0.5, \omega = 20, \theta = 0$

まず、入力波形を図 4.2 に示す。ここで横軸は時刻、縦軸は波形の振幅を表している。このときのモーメント波形  $\{h_l(t)\}$  は図 4.3 ~ 図 4.11 に示す。  $p_1(t_0), p_2(t_0)$  は図 4.12 に示す。モーメント波形  $\{h_l(t)\}$  は原波形と同じく減少していく。  $p_1(t_0), p_2(t_0)$  は一定値となっている。

角周波数  $\omega(t_0)$

角周波数  $\omega(t_0)$  を図 4.13 に示す。角周波数  $\omega(t_0)$  は最初大きい値から時刻約 0.5 秒から一定値となる結果が得られた。これが  $t = 0$  で  $f(t)$  が立ち上がったときに高い周波数が含まれており、一方安定したときからは周波数成分が  $\omega(t_0) = 20$  [rad/s] を継続していることを示している。

変化する様相  $\sigma(t_0)$

波形成分の変化する様相  $\sigma(t_0)$  を図 4.14 に示す。この図から  $\sigma(t_0)$  は時刻約 0.5 秒から一定値となる結果を見られた。十分時間がたてからは波形の変化の様相が各時間に同じであることを意味している。

### 成分の強度 $C(t_0)$

波形成分の大きさ  $C(t_0)$  は図 4.15 に示す。その結果時間の増加に従って減少して行くことを示している。

### 位相角 $\theta(t_0)$

位相角  $\theta(t_0)$  は図 4.16 に示す。時間の増加に従って値が直線に減少している。これは波形の角周波数が一定値であることも意味している。

観測位数が多いほど基本観測値系列から得られた情報も多くなる。ここで瞬時構造を行なうために必要な観測位数は  $M = 3$  である。観測位数  $M = 3$  と  $M = 8$  のときに得られた各パラメータがほぼ同じ結果であることを実験的に確かめた。従って、瞬時構造解析を行なったときに無駄な計算をしない様に観測位数  $M$  を 3 で設定する。

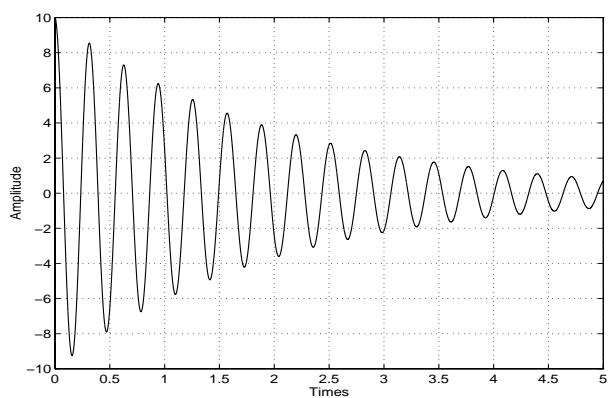


図 4.2: 入力波形  $f_0(t)$

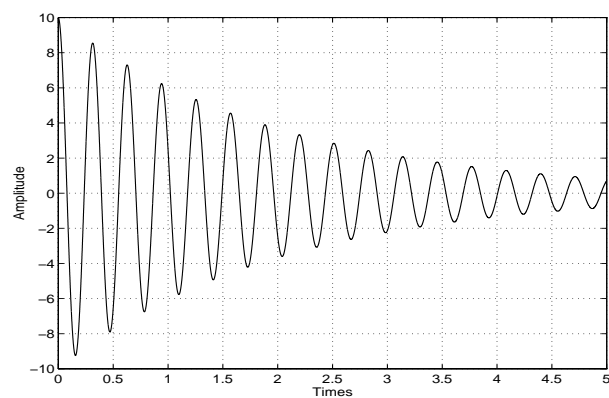


図 4.3: 波形  $h_l(t), l = 0, (M = 3)$

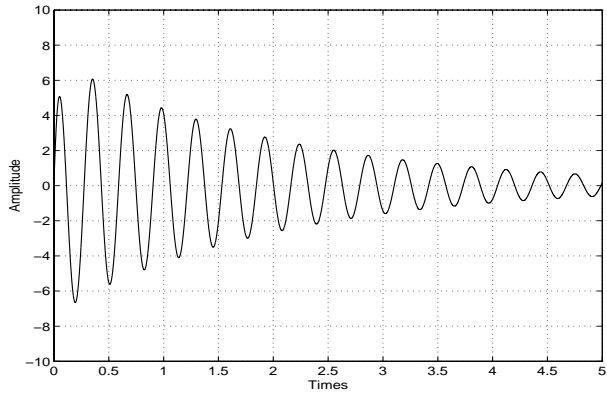


图 4.4: 波形  $h_l(t), l = 1, (M = 3)$

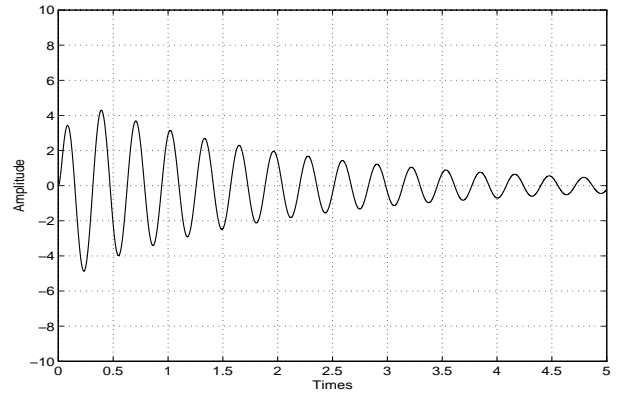


图 4.5: 波形  $h_l(t), l = 2, (M = 3)$

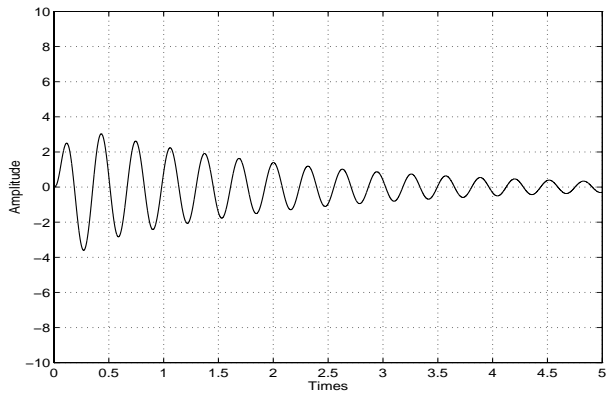


图 4.6: 波形  $h_l(t), l = 3, (M = 3)$

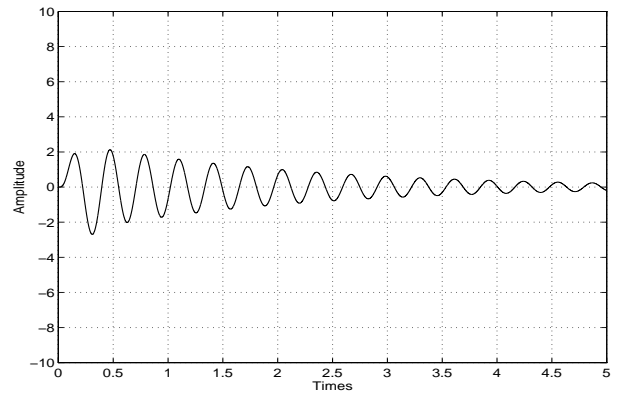


图 4.7: 波形  $h_l(t), l = 4, (M = 8)$

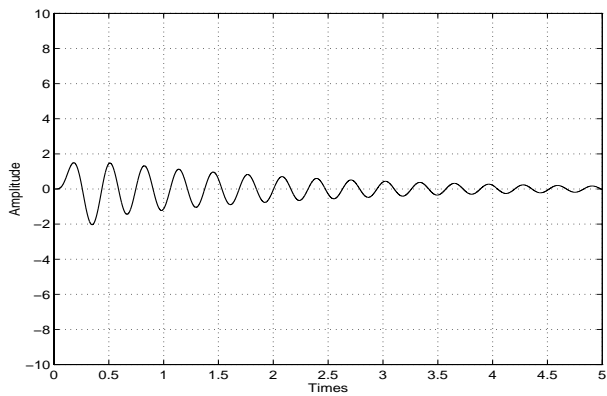


图 4.8: 波形  $h_l(t), l = 5, (M = 8)$

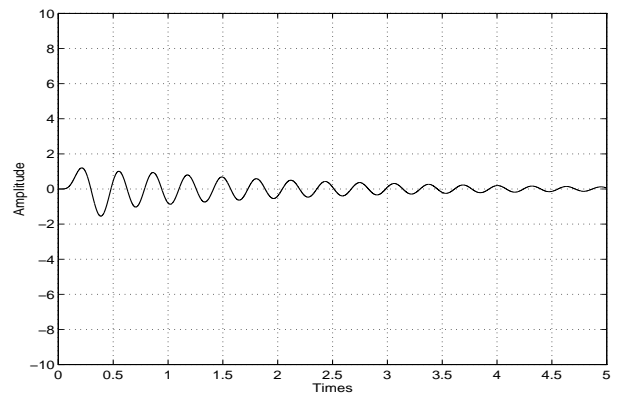


图 4.9: 波形  $h_l(t), l = 6, (M = 8)$

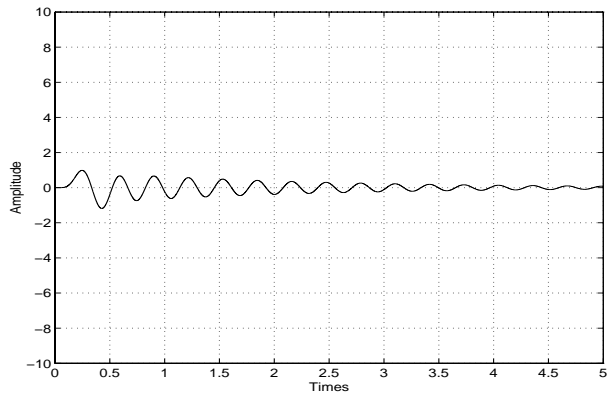


図 4.10: 波形  $h_l(t), l = 7, (M = 8)$

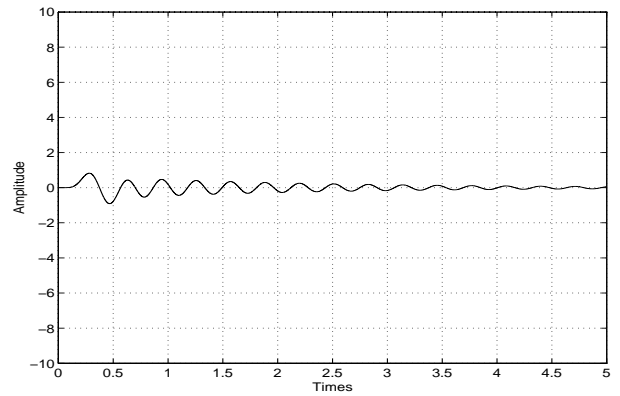


図 4.11: 波形  $h_l(t), l = 8, (M = 8)$

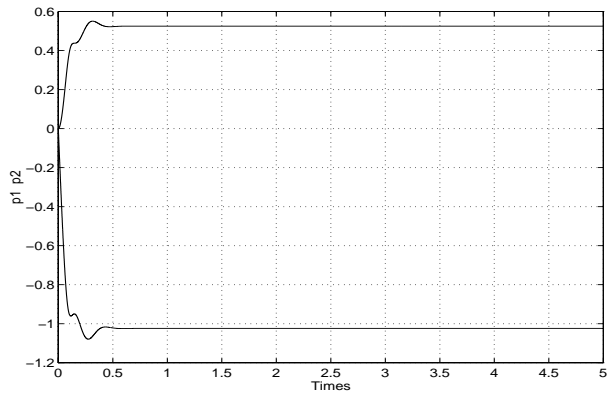


図 4.12:  $p_1(t_0), p_2(t_0)$

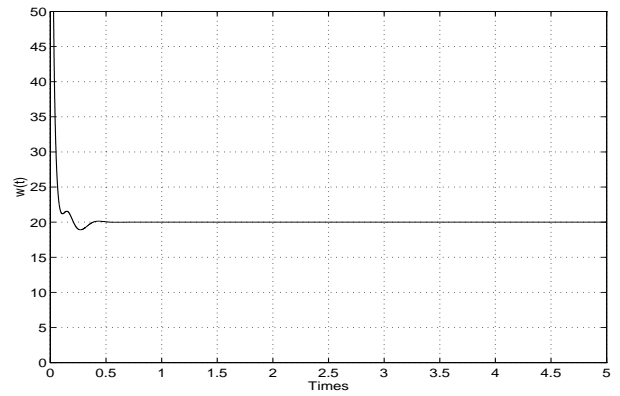


図 4.13: 角周波数  $\omega(t_0)$

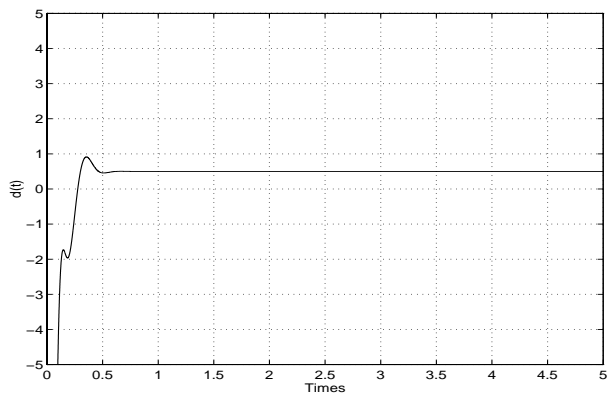


図 4.14: 変化する様相  $\sigma(t_0)$

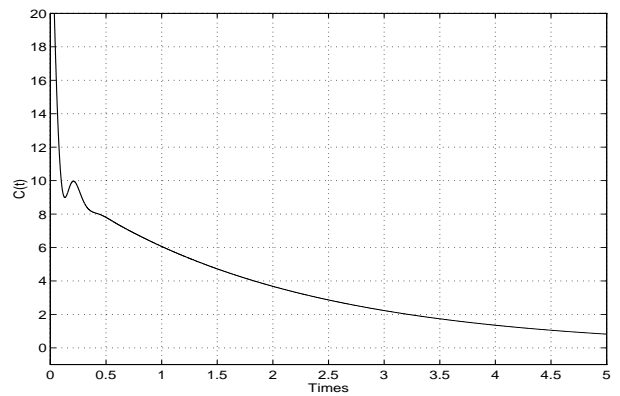


図 4.15: 成分の強度  $C(t_0)$

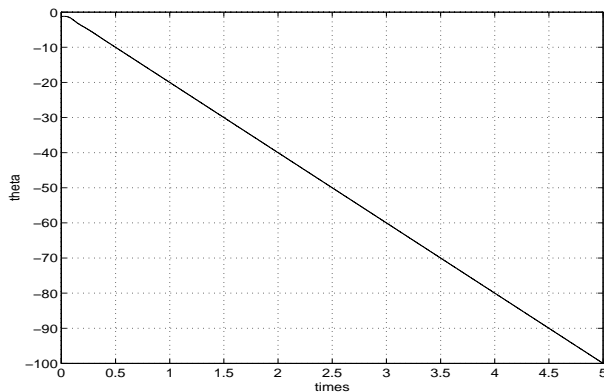


図 4.16: 位相角  $\theta(t_0)$

### 瞬時構造解析の例

得られたパラメータを用いて時刻  $t_0$  とその近傍での原波形  $f(t)$  と瞬時解析波形  $f(t, t_0)$  の例を示す。ここでは時刻  $t_0 = 1, 2, 3, 4$  の場合に対して、その結果を図 4.17 ~ 図 4.20 に示す。入力波形の各時刻  $t = t_0$  とその近傍の構造は角周波数、成分強度、変化する様相と位相角で表せる。各パラメータはそれぞれ表 4.1 のようになる。原波形  $f(t)$  と瞬時解析波形  $f(t, t_0)$  の値が一致していることが分かった。これは、観測波形と仮定する波形が同じであるので、一般の波形  $f(t)$  の場合は、長い時間で仮定した波形のような形式になるはずは無いが、短時間であればこの様な形式で仮定することができる。従って、時間軸に沿って逐次に解析することによって瞬時的な情報の波形  $f(t)$  の様相を捉えることが出来る。

表 4.1: 時刻  $t = t_0$  の各瞬時パラメータ

$t_0$	$\omega(t_0)$	$\sigma(t_0)$	$C(t_0)$	$\theta(t_0)$
1	20.000069	0.500019	6.066314	-19.993333
2	20.000074	0.500006	3.679408	-39.993333
3	20.000074	0.500006	2.231674	-59.993333
4	20.000074	0.500006	1.353578	-79.993333

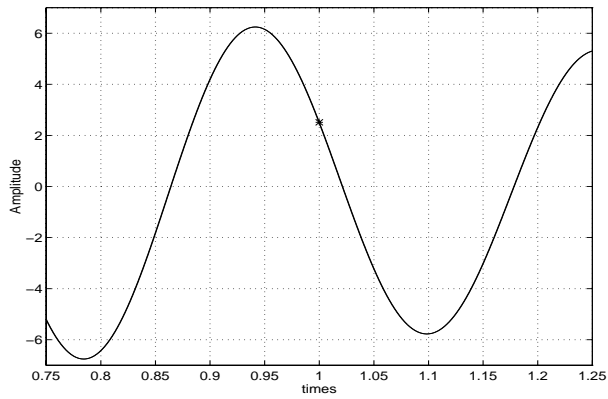


图 4.17: 瞬时构造解析  $\{t_0 = 1\}$ 、 $M = 3$

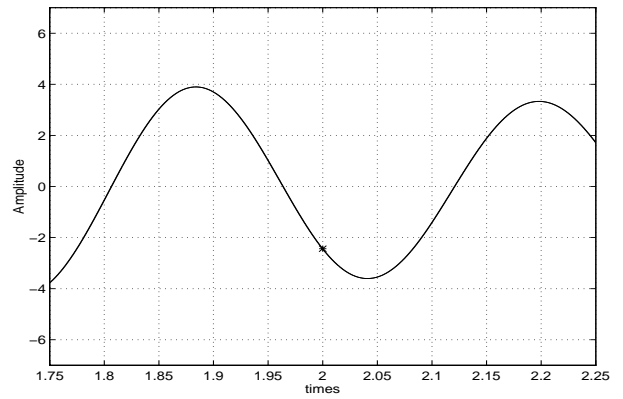


图 4.18: 瞬时构造解析  $\{t_0 = 2\}$ 、 $M = 3$

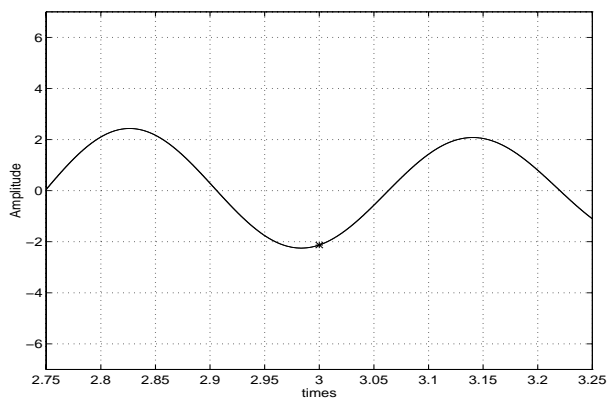


图 4.19: 瞬时构造解析  $\{t_0 = 3\}$ 、 $M = 3$

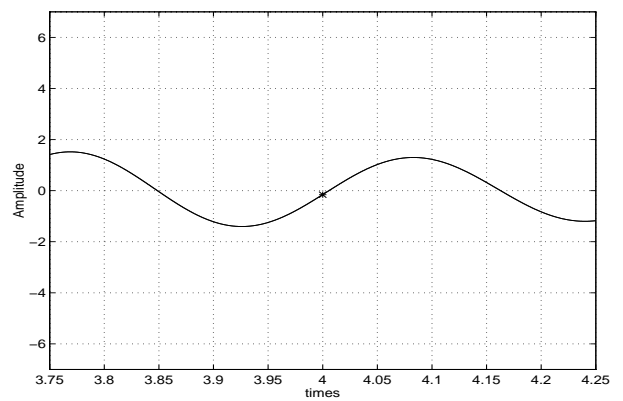


图 4.20: 瞬时构造解析  $\{t_0 = 4\}$ 、 $M = 3$

### 4.3.2 考察

#### フーリエ解析の比較について

従来のフーリエ解析法を用いて、自然観測法による波形の解析の結果を比較する。入力波形(図 4.2)をまず窓関数に掛けてフーリエ変換を行なう。ここでハニング窓(窓の幅は5秒、中心2.5秒)を用いている。その結果図 4.21のように示す。横軸を角周波数、縦軸をパワー成分を表す。図から分かるように角周波数成分が20 [rad/s]に集中している。自然観測法の場合、角周波数 $\omega(t_0)$ が20 [rad/s]である。

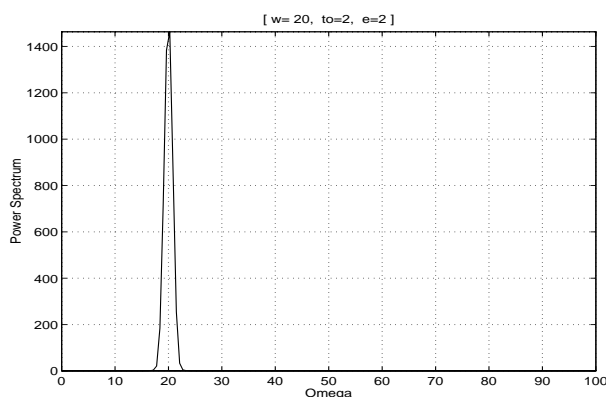


図 4.21: フーリエ解析法  $t_0 = 2.5$  秒

#### 観測次数の平均と分散について

まず、不確定性原理から、基本観測値系列の大域的な観測次数の平均と分散を計算する。その結果を表 4.2に示す。観測次数の平均の値は表 4.2のよに  $M = 3$  と  $M = 8$  のときそれぞれ 1.502313、4.006267 であり、大域的には約  $M / 2$  の基本観測値系列に集中している。そして観測次数の分散はそれぞれ 0.786771、2.343560 である。

また、瞬時的な観測次数の平均と分散も調べた。その結果を図 4.22、4.22、4.23、4.22に示す。瞬時平均は最初大きな値を表し、時間の経過に従ってある一定な値となっている。一方分散の場合最初小さい値から、時間の経過と共にある一定値となる。この安定した値と大域的な平均・分散の値との間には大差がないことが分かる。

表 4.2: 大域的な平均  $\bar{m}$  と分散  $(\Delta m)^2$

$M$	$\bar{m}$	$(\Delta m)^2$
3	1.502313	0.786771
8	4.006267	2.343560

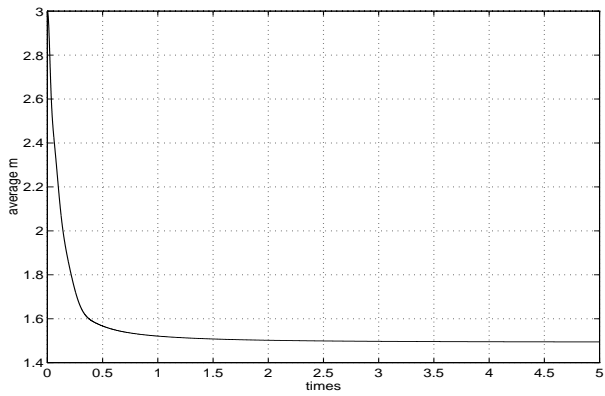


図 4.22: 瞬時平均  $\bar{m}_{(t)}$ 、 $(M = 3)$

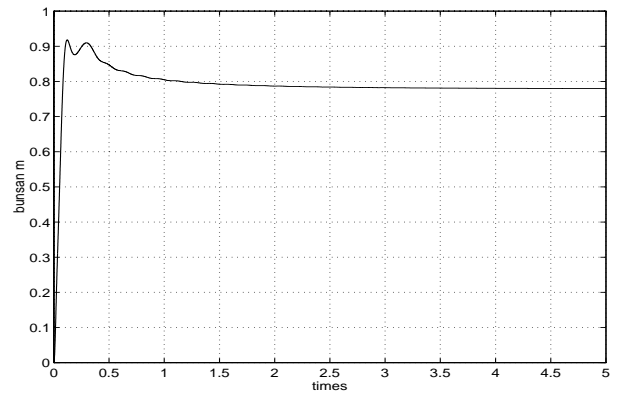


図 4.23: 瞬時分散  $(\Delta m)_{(t)}^2$ 、 $(M = 3)$

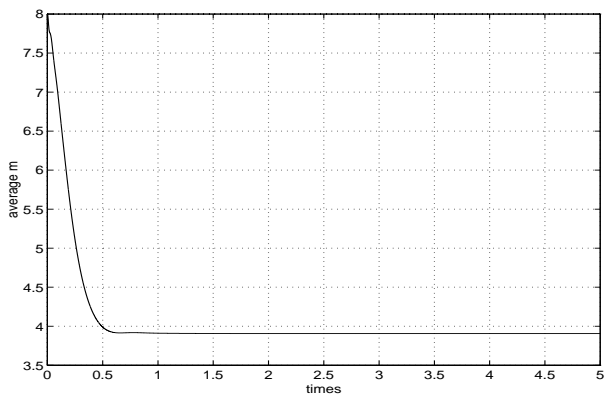


図 4.24: 瞬時平均  $\bar{m}_{(t)}$ 、 $(M = 8)$

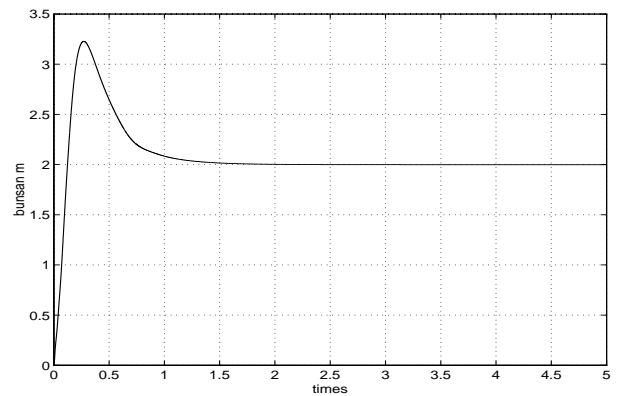


図 4.25: 瞬時分散  $(\Delta m)_{(t)}^2$ 、 $(M = 8)$



## 基本観測値系列のパワー成分

基本観測値系列のパワー成分の様子を調べ、その結果を図 4.26、4.27に示す。各フィルタの出力のパワー成分の減少仕方が同じように見えた。そこで、瞬時観測次数の平均値と分散の値が安定してから一定値となっていることに関係している。また、フーリエ解析法の結果も波形の周波数成分がある値に集中している。従って、正規型基本観測値系列を観測することによって、波形の特性 (振幅と周波数成分) を予測することができる。

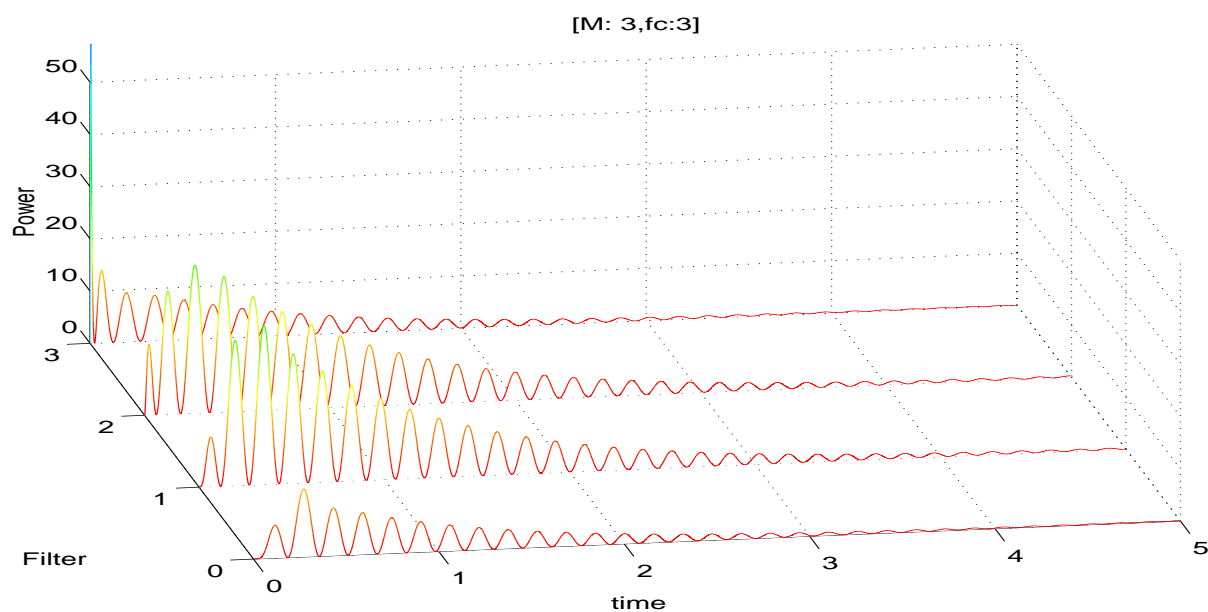


図 4.26: 基本観測値系列のパワー成分、( $M = 3$ )

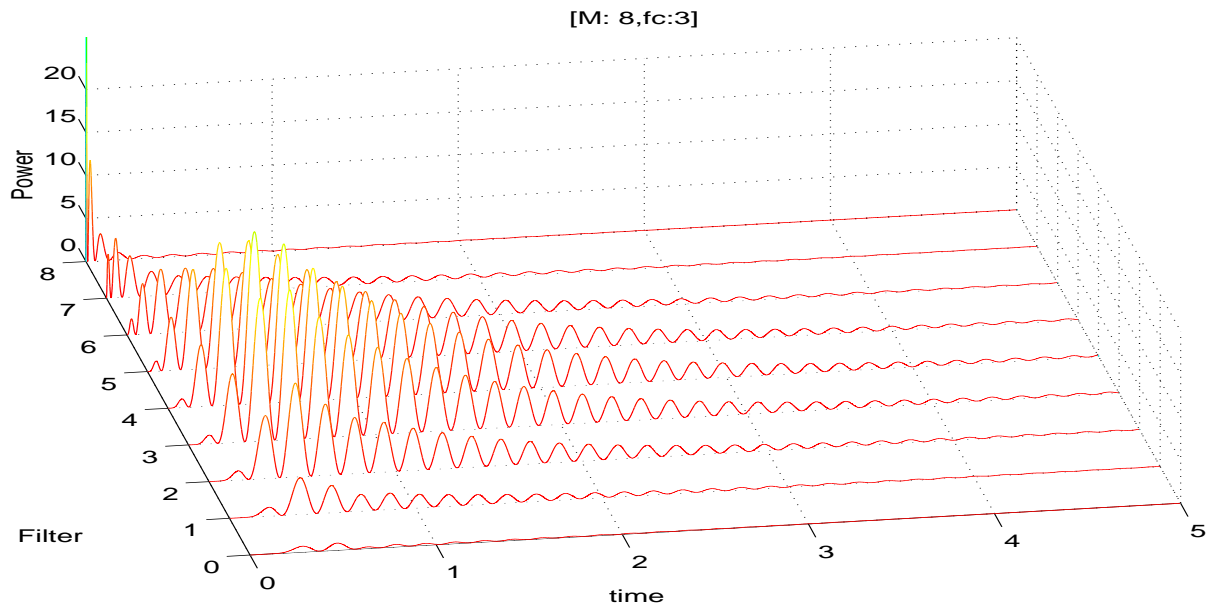


図 4.27: 基本観測値系列のパワー成分、( $M = 8$ )

### 4.3.3 周波数が増加する場合

次に、入力波形を以下のように時間によって角周波数が増加して行く場合を検証する。ここで入力波形  $f_0(t)$  として、

$$\begin{cases} f_0(t) = Ce^{-\sigma t} \cos(\omega t^2 - \theta) & 0 \leq t \leq 5 \\ f_0(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

を考えることにする。各パラメータの設定は次通りである。

- デジタルへの変換 : 双一次変換
- 自然観測位数  $M = 3, M = 8$
- フィルタの中心周波数  $f_c = 3.26$  [Hz]
- $C = 10, \sigma = 0.5, \omega = 20, \theta = 0$

入力波形を図 4.28、モーメント波形  $\{h_i(t)\}$  を図 4.29 ~ 図 4.37に示す。 $p_1(t_0), p_2(t_0)$  は図 4.38に示す。基本観測値系列の瞬時的に分布が変化しているため、波形  $\{h_i(t)\}$  と  $p_1(t_0), p_2(t_0)$  も変化していることが分かる。

### 角周波数 $\omega(t_0)$

角周波数  $\omega(t_0)$  は図 4.39 のように時間の経過に対して増加していく。これによれば入力波形の角周波数は、 $t = 5$  では  $200$  [rad/s] までに増加していることを示している。

### 変化する様相 $\sigma(t_0)$

$\sigma(t_0)$  は図 4.40 のように時間の経過に対して小さく振動しながら一定の範囲に安定するように見える。

### 成分の強度 $C(t_0)$

$C(t_0)$  図 4.41 のように示される。成分の大きさ  $C(t_0)$  は時間の経過に対して振動しながら減少する。

### 位相角 $\theta(t_0)$

位相角  $\theta(t_0)$  図 (4.42) のように時間の経過に対して急激に減少する。これも波形の周波数が増加していることを表すものである。

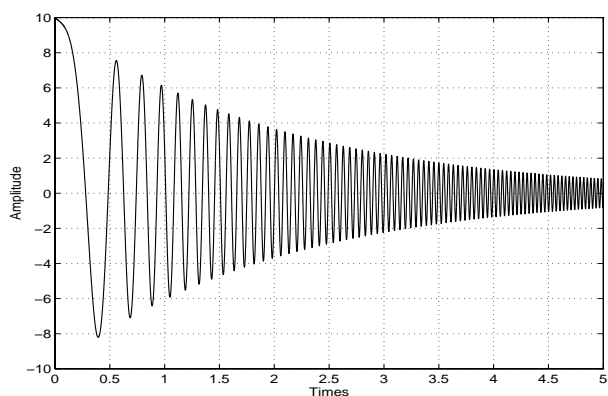


図 4.28: 入力波形  $f_0(t)$

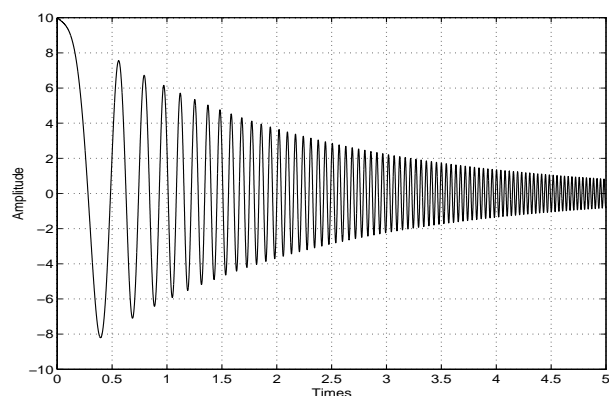


図 4.29: 波形  $h_l(t), l = 0, (M = 3)$

### 瞬時構造解析の例

得られたパラメータは観測位数  $M = 3$  と  $M = 8$  の場合はほぼ同じ結果である。それらを用いて時刻  $t_0$  とその近傍での原波形とその瞬時解析波形の例を示す。ここでは

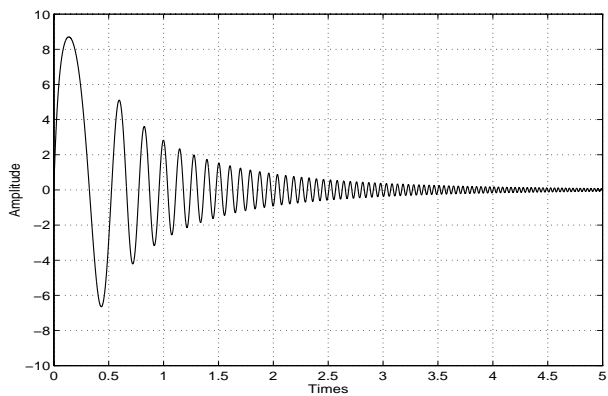


图 4.30: 波形  $h_l(t)$ ,  $l = 1$ 、 $(M = 3)$

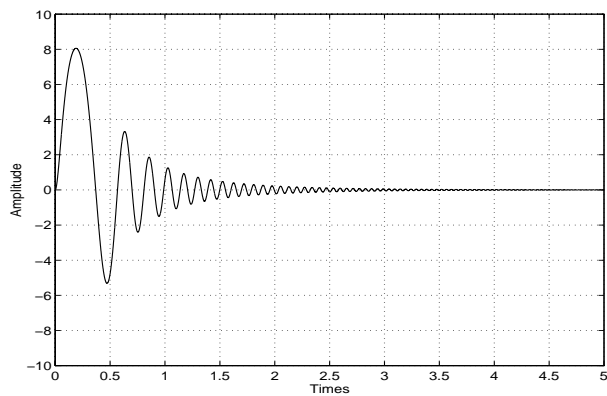


图 4.31: 波形  $h_l(t)$ ,  $l = 2$ 、 $(M = 3)$

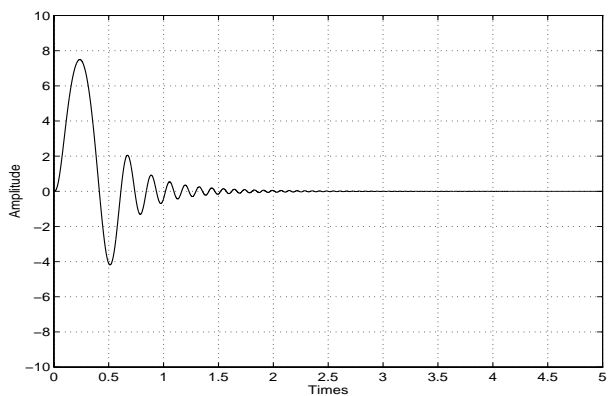


图 4.32: 波形  $h_l(t)$ ,  $l = 3$ 、 $(M = 3)$

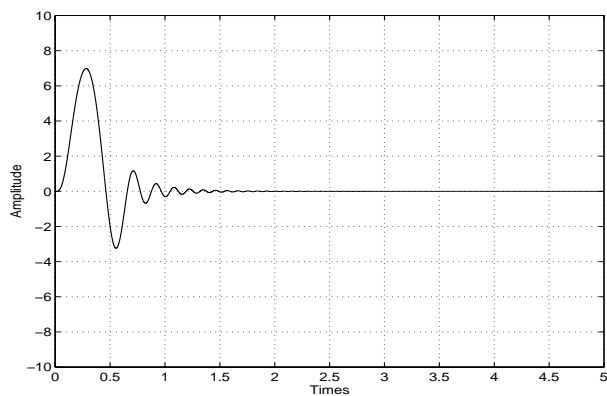


图 4.33: 波形  $h_l(t)$ ,  $l = 4$ 、 $(M = 8)$

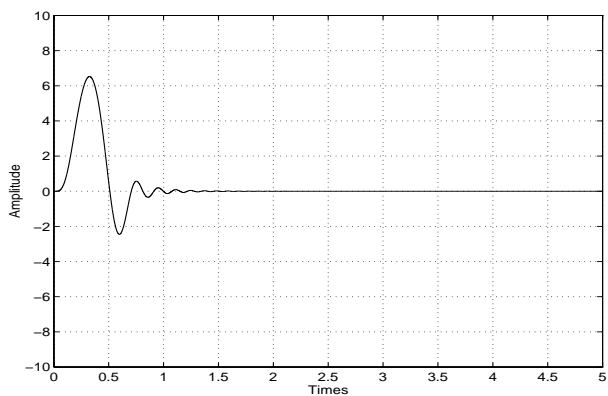


图 4.34: 波形  $h_l(t)$ ,  $l = 5$ 、 $(M = 8)$

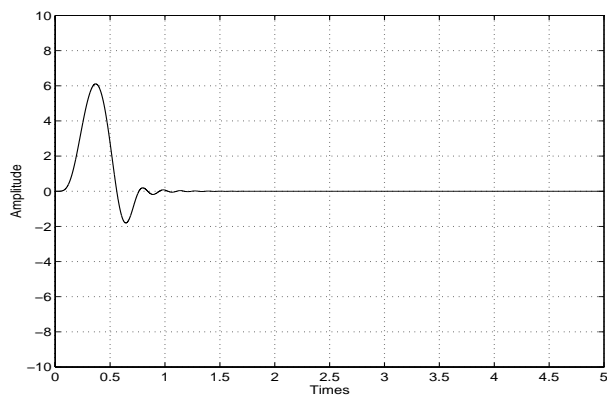


图 4.35: 波形  $h_l(t)$ ,  $l = 6$ 、 $(M = 8)$

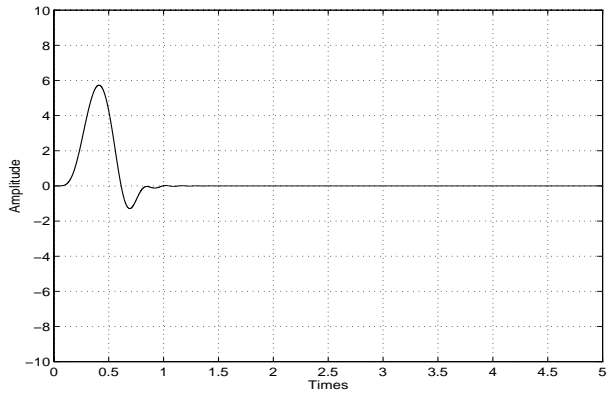


図 4.36: 波形  $h_l(t)$ ,  $l = 7$ , ( $M = 8$ )

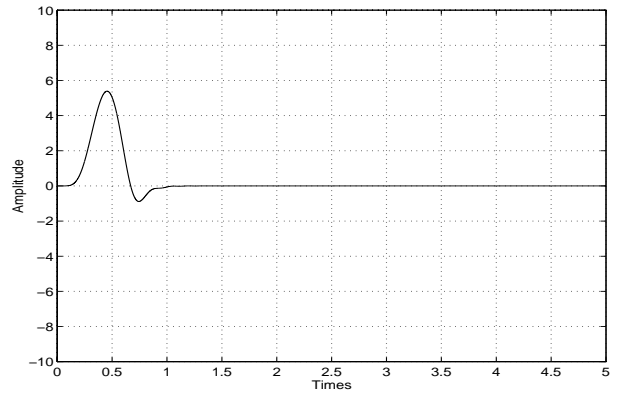


図 4.37: 波形  $h_l(t)$ ,  $l = 8$ , ( $M = 8$ )

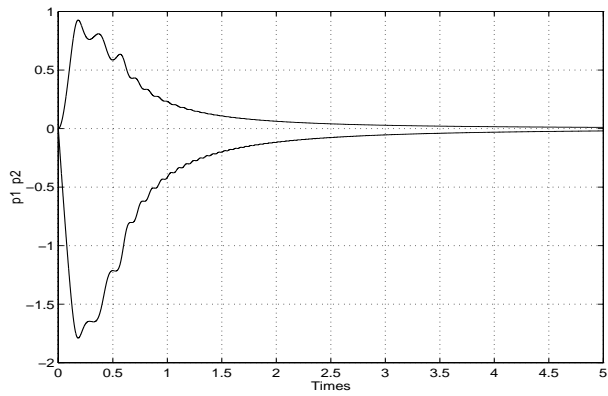


図 4.38:  $p_1(t_0), p_2(t_0)$

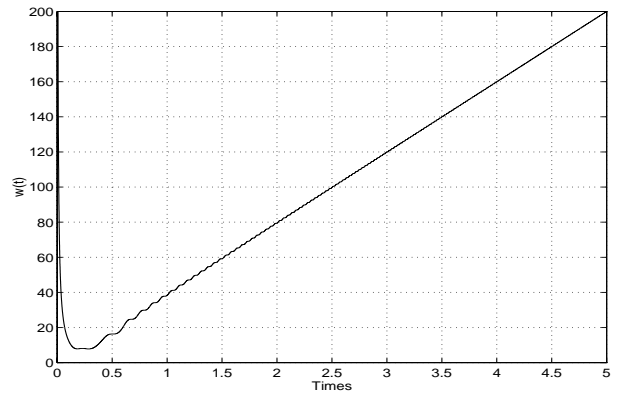


図 4.39: 角周波数  $\omega(t_0)$

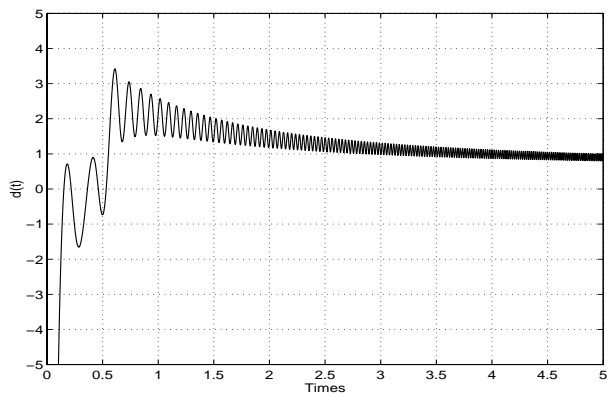


図 4.40: 変化する様相  $\sigma(t_0)$

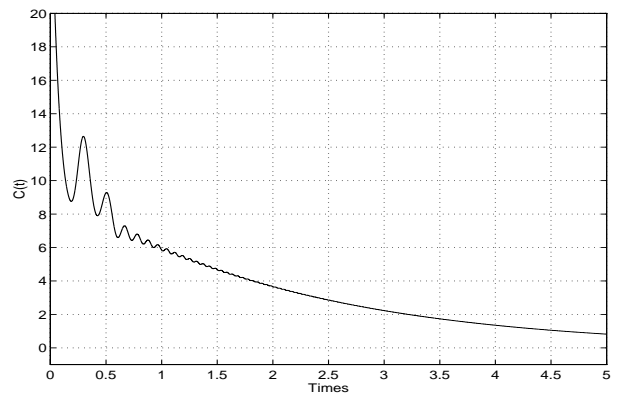


図 4.41: 成分の強度  $C(t_0)$

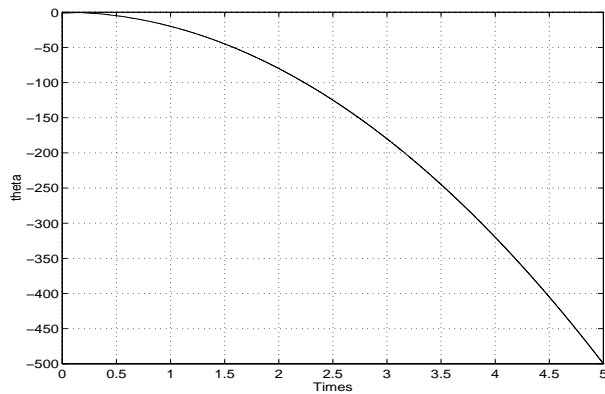


図 4.42: 位相角  $\theta(t_0)$

$t_0 = 1, 2, 3, 4$  とした場合に対して、その結果を図 4.43 ~ 図 4.46 に示す。またその時刻に各パラメータをそれぞれ表 4.3 に示す。時刻  $t_0$  に観測する波形  $f(t)$  と瞬時解析波形  $f(t_0, t_0)$  の値は一致しているが、その近傍から離れると少しそくしづつ差が大きくなることが示した。時間  $t$  に沿って逐次の計算を行なうと、波形  $f(t)$  の構造を解析することができる。

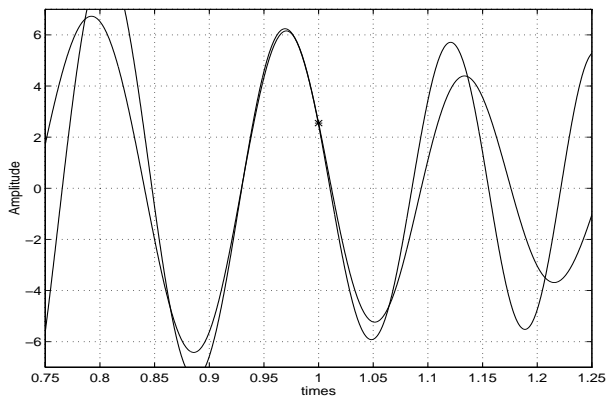


図 4.43: 瞬時構造解析  $\{t_0 = 1\}$ 、 $M = 3$

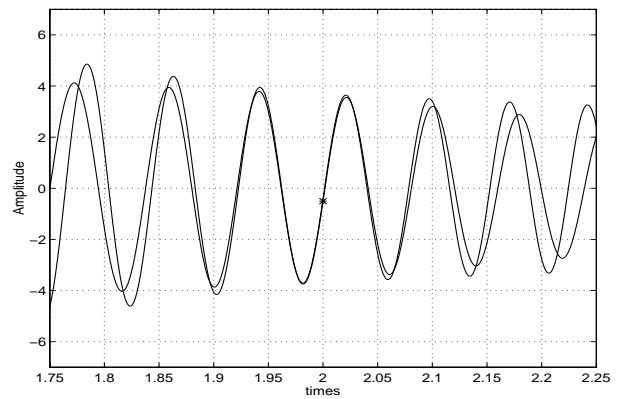


図 4.44: 瞬時構造解析  $\{t_0 = 2\}$ 、 $M = 3$

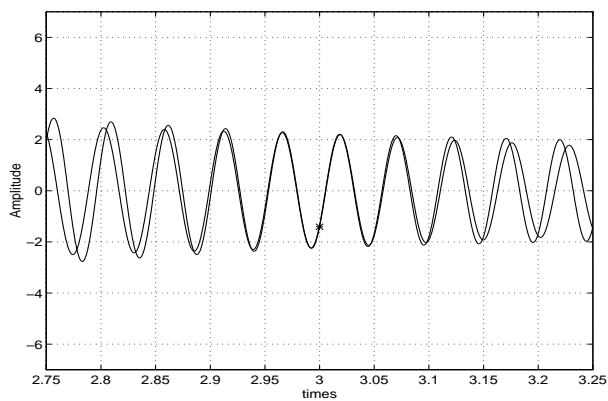


図 4.45: 瞬時構造解析  $\{t_0 = 3\}$ 、 $M = 3$

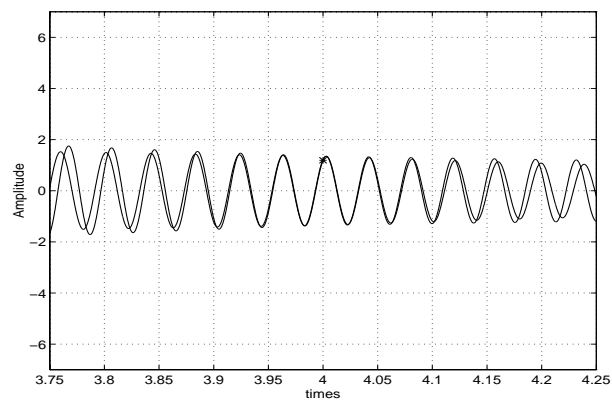


図 4.46: 瞬時構造解析  $\{t_0 = 4\}$ 、 $M = 3$

表 4.3: 時刻  $t = t_0$  の各瞬時パラメータ

$t_0$	$\omega(t_0)$	$\sigma(t_0)$	$C(t_0)$	$\theta(t_0)$
1	38.2724	2.1373	5.8531	-19.9697
2	79.4285	1.3187	3.6548	-79.9724
3	119.91351	0.9902	2.2320	-179.9601
4	159.9023	1.1113	1.3520	-319.9487

#### 4.3.4 考察

##### フーリエ解析の比較について

入力波形(図 4.28) に窓関数を掛けてフーリエ変換を行なう。ここでハニング窓(窓の幅を 5 秒、中心  $t_0 = 2.5$  に設定) を用いる。その結果を図 4.47 に示す。入力波形の角周波数が約 10 [rad/s] ~ 200 [rad/s] 程度で分布していることが分かる。

今度、窓の幅小さくすることによって、着目している時刻  $t_0$  の近傍に周波数がどのように分布しているを分析する。まず、着目時刻を  $t_0 = 1, 2, 3, 4$  とし、窓長は 0.5 秒として分析した。その結果図 4.48 ~ 図 4.51 に示す。図 4.48 ~ 図 4.51 から各着目時刻に角周波数  $\omega(t_0)$  が 40, 80, 120, 160 [rad/s] に集中していることが分かる。この値が、瞬時構造解析法において得られた角周波数  $\omega(t_0)$  の値とほぼ同じ結果であるが、窓を狭くすると、角周波数が変化しているため、この値は広く分布してしまっていることが分かる。

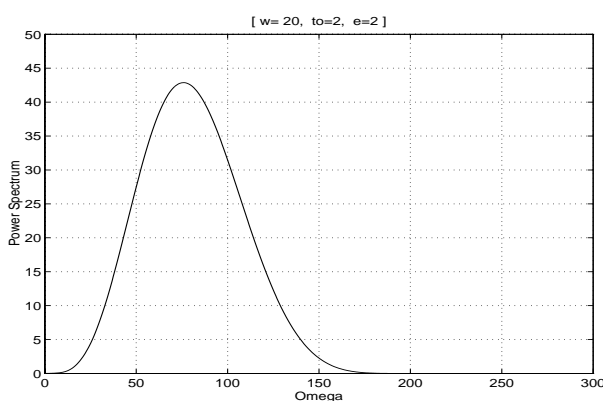


図 4.47: フーリエ解析法  $t_0 = 2.5$



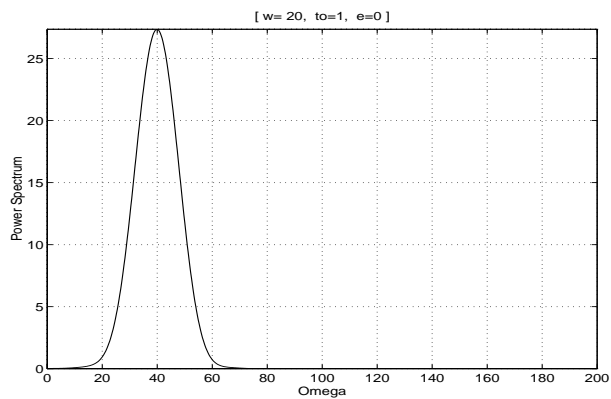


図 4.48: フーリエ解析法  $t_0 = 1$

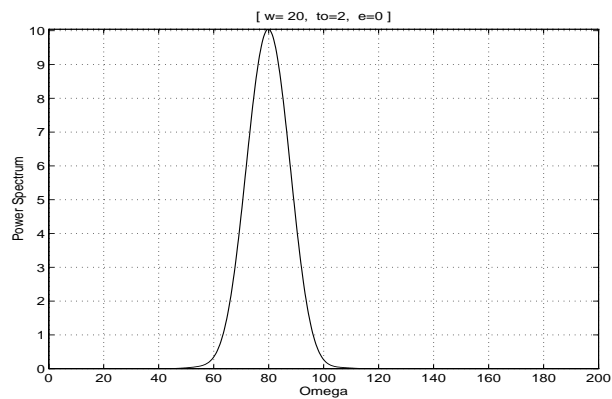


図 4.49: フーリエ解析法  $t_0 = 2$

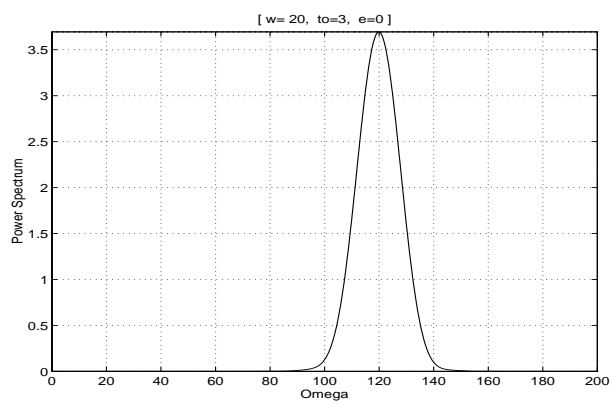


図 4.50: フーリエ解析法  $t_0 = 3$

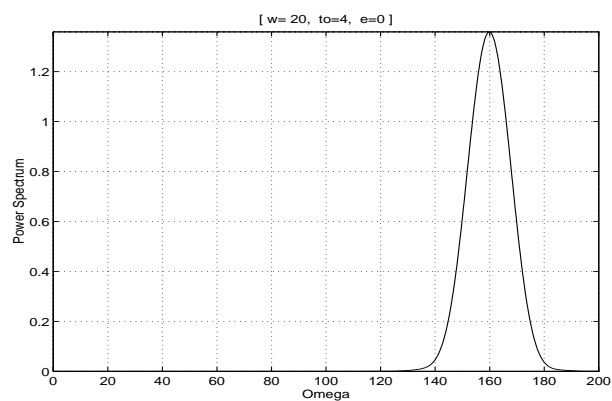


図 4.51: フーリエ解析法  $t_0 = 4$

## 観測次数の平均と分散

ここで、入力波形からの自然観測値系列の広がり特性を観測次数の平均と分散から検討する。大域的な観測次数の平均と分散はそれぞれ表 4.4 のようになる。

表 4.4: 大域的な平均  $\bar{m}$  と分散  $(\Delta m)^2$

$M$	$\bar{m}$	$(\Delta m)^2$
3	1.667841	1.365509
8	4.447490	7.807241

また瞬時的な観測次数の平均と分散を図 4.52、4.54、図 4.53、4.55 に示す。瞬時的な平均値は最初の立ち上がりに大きな値を表す、そして時間の経過に従って減少し、ある時刻から増加していることを表す。観測波形  $f(t)$  の角周波数が増加することによって瞬時平均の値も増加していくことを示した。瞬時的な観測次数の分散の場合、小さい値から増加し、平均値が  $M / 2$  付近にまた減少する。

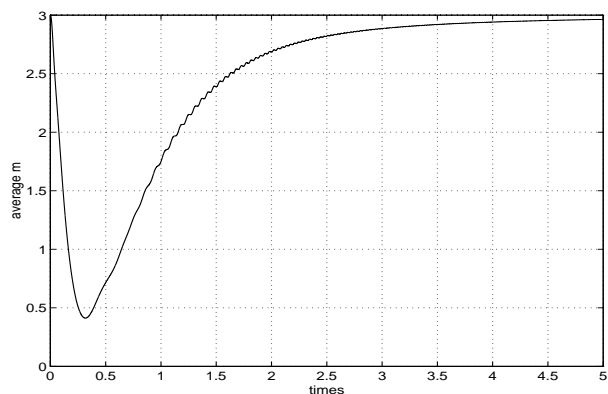


図 4.52: 瞬時平均  $\bar{m}_{(t)}$ 、 $(M = 3)$

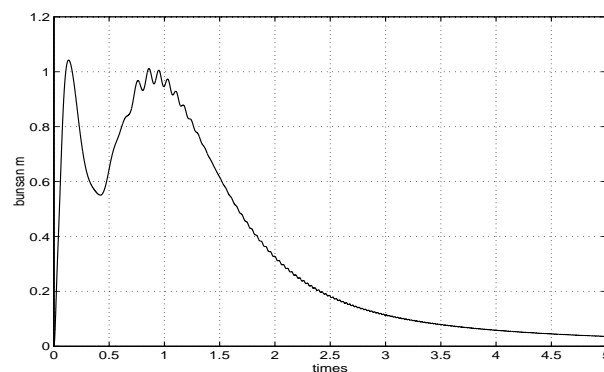


図 4.53: 瞬時分散  $(\Delta m)_{(t)}^2$ 、 $(M = 3)$

## 基本観測値系列のパワー成分

基本観測値系列のパワー成分を図 4.56、図 4.57 に示す。各フィルタの出力のパワー成分の減少仕方は周波数が高い程番号の大きいフィルタの出力が大きくなる。前に述べた瞬時観測次数平均値が時間の経過と共に増加して行く、更にフーリエ解析による周波数成分

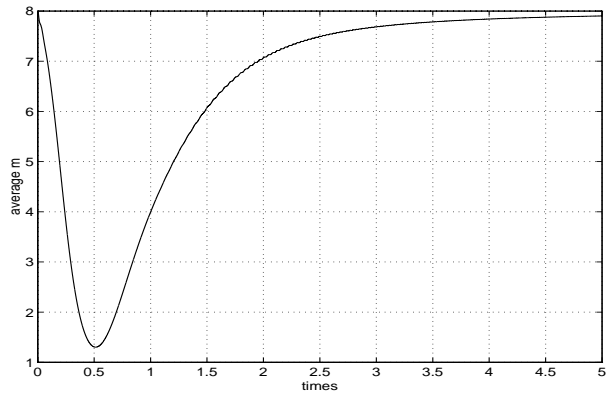


図 4.54: 瞬時平均  $\bar{m}(t)$ 、( $M = 8$ )

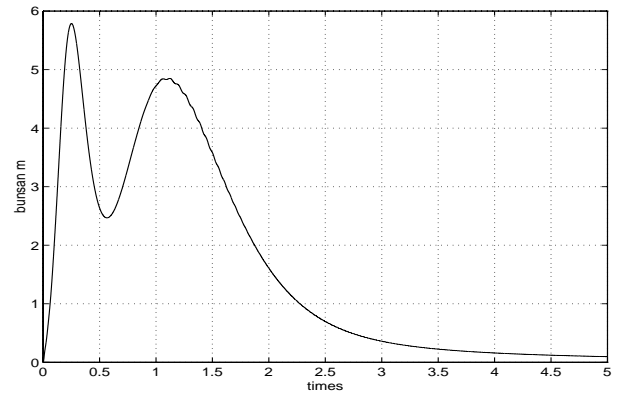


図 4.55: 瞬時分散  $(\Delta m)_{(t)}^2$ 、( $M = 8$ )

も広く分布している。平均値が大きな値になるとき、入力波形は激しく振動している。また、小さいのときはゆっくり振動していることが示された。

## 4.4 本章のまとめ

波形の瞬時特性を細かく分析するために、前章で述べた正規型基本観測値系列の分布特性を観測次数の平均値  $\bar{m}$  と分散  $(\Delta m)^2$  では不十分であった。そこで、本章で提案した基本観測値系列による波形の瞬時構造解析法がより詳細に表現できた。この解析法は波形の瞬時構造特性を強度成分  $C(t_0)$ 、変化の様相  $\sigma(t_0)$ 、角周波数  $\omega(t_0)$ 、と位相角  $\theta(t_0)$  によって表した。

また、従来のフーリエ解析法との比較検討を行なった。そこで、自然観測法では、観測波形のある時刻  $t = t_0$  とその近傍を着目する短時間波形のみ取り扱うことになるので、従来の Fourier 解析法の諸問題点に対して明確な解答と与えることが出来た。

正規型基本観測値系列による瞬時構造解析法は観測波形から直接的に記述するにおいて、波形の瞬時認識に対して有用な解析法と考えている。

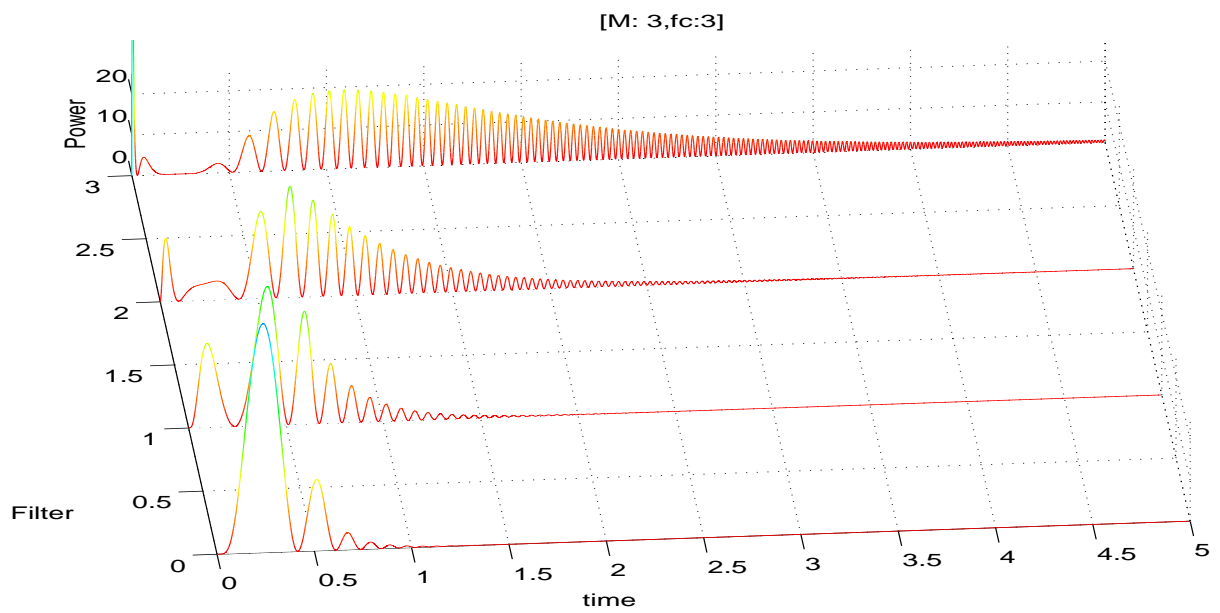


図 4.56: 基本観測値系列のパワー成分、( $M = 3$ )

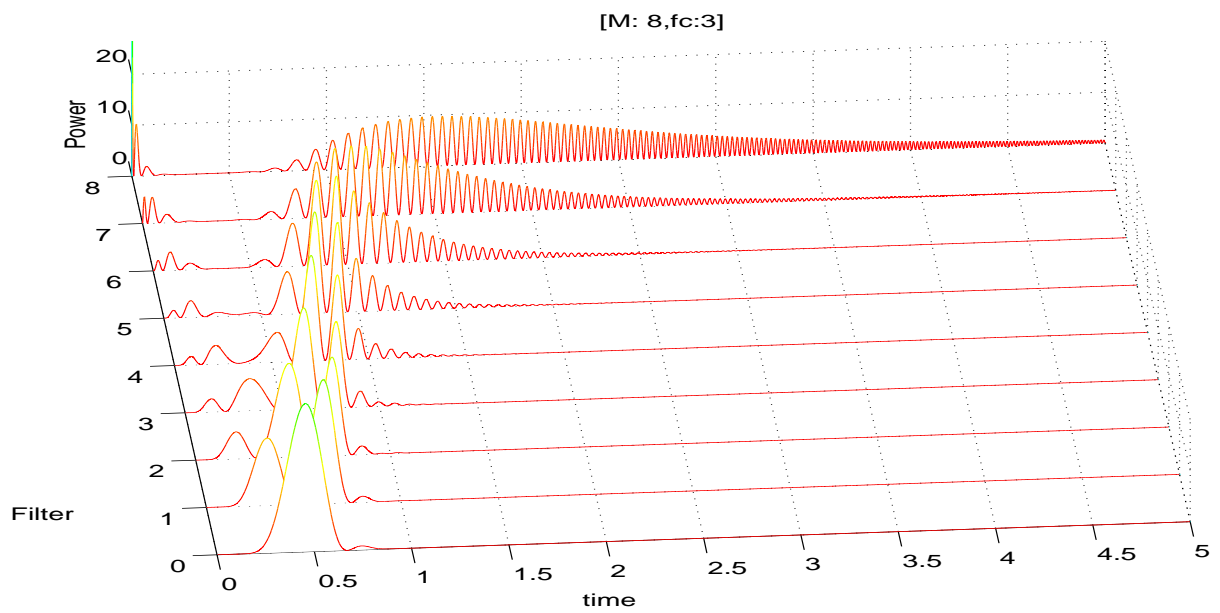


図 4.57: 基本観測値系列のパワー成分、( $M = 8$ )

## 第 5 章

# おわりに

### 5.1 結論

本論文では、大域的と瞬時的と言う2つの立場から基本観測値系列の特徴の検討を行った。その結果は観測次数の平均値  $\bar{m}$  および  $(\Delta m)^2$  と等価時定数の間の関係として表しており、正規型基本観測法理論における不確定性原理を示していると言える。しかし、自然観測法が持っている瞬時構造解析法として、このパラメータでは波形の特徴を細かく分析するために十分ではなかった。そこで、基本観測値系列からの波形の瞬時構造の解析法を提案した。自然観測法による波形の構造解析は、波形の強度成分、変化の様相、周波数、と位相角によって表した。自然観測法では、観測波形のある時刻  $t = t_0$  とその近傍を着目する短時間波形のみ取り扱うことになるので、従来の Fourier 解析法の諸問題点に対して明確な解答と与えることが出来た。また、この解析法で、得られるパラメータは時間  $t$  の関数として示されることになるので、実時間で波形の瞬時解析に対して、有用になると考えている。この表現式は観測波形から直接的に記述する上で、波形の認識において、実時間の経過に沿って瞬時に波形を処理しなければならないという問題点に対する一つの解決策を示していると思われる。

### 5.2 今後の課題

瞬時的な不確定性原理からの、正規型基本観測値系列に対する解析的検討が、一般の入力波形に対しては難しかった、これについての基礎研究を進めることがまだ必要である。

瞬時構造解析法では、時間の経過に沿って逐次的に処理を行なうと膨大な計算量がかかってしまうと思われ、その計算量を軽減する方法についても今後の課題となっている。また、得られた知見は今後、実際の応用研究に適用出来るものと期待される。例えば、母音波形の構造解析と特徴量の抽出に関する研究等が挙げられる。

# 謝辞

本研究を行なうに当り、始終ご指導と助言・援助をいただきました飯島泰蔵教授に深く感謝いたします。本研究の理論的側面は、飯島教授の御教授により成されたものです。また、熱心なご指導と助言をいただきました赤木正人助教授、飯島研究室の岩城護助手に深く感謝いたします。最後に同研究室の皆様、ならびに赤木研究室の皆様に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] 飯島泰蔵: “波形の自然観測に関する基礎理論”, 信学論 (A), **J67-A**, 10, pp.951–958 (1984-10).
- [2] 飯島泰蔵: “自然観測法に基づく波形解析の基礎理論”, 信学論 (A), **J68-A**, 3, pp.302–308 (1985-03).
- [3] 飯島泰蔵: “自然観測法にによる瞬時波形の構造解析”, 信学論 (A), **J69-A**, 12, pp.1540–1546 (1986-12).
- [4] 飯島泰蔵: “瞬時波形の構造認識理論”, 信学論 (A), **J71-A**, 3, pp.854–859 (1988-03).
- [5] 飯島泰蔵: “自然観測フィルタによる波形の再構成に関する理論的考察”, 信学論 (A), **J74-A**, 3, pp.430–434 (1991-03).
- [6] 飯島泰蔵: “概周期波形を受理する自然観測フィルタ”, 信学論 (A), **J74-A**, 3, pp.435–441 (1991-03).
- [7] 飯島泰蔵: “自然観測フィルタによる多項式波形の受理と生成”, 信学論 (A), **J74-A**, 3, pp.442–447 (1991-03).
- [8] 飯島泰蔵: “自然観測法による瞬時周波数分析法”, 信学論 (A), **J74-A**, 6, pp.907–912 (1991-06).
- [9] 飯島泰蔵: “自然観測変換の基礎理論”, 信学論 (A), **J76-A**, 11, pp.1620–1626 (1993-11).
- [10] 飯島泰蔵: “自然観測法理論 (標準形式) の原点に関する考察”, 信学論 (A), **J76-A**, 11, pp.1627–1630 (1993-11).



- [11] 飯島泰蔵: “自然観測フィルタによる一般波形の受理と生成”, 信学論 (A), J78-A, 6, pp.722-727 (1995-6).
- [12] 飯島泰蔵, 岩城護: “有限和によって波形を再構成できる自然観測法の基礎理論”, 信学論 (A), J79-A, 1, pp.77-87,(1996-1).
- [13] 滝田順子: “自然観測法を用いた疑似聴覚フィルタモデル”, 信学技報,sp93-150, pp.47-54, (1994-03).
- [14] 伊達玄 訳: “デジタル信号処理 (上)”, コロナ社, (1978).
- [15] 飯島泰蔵, 岩城護: “有限和によって波形を再構成できる自然観測法の基礎理論”, 信学論 (A), J79-A, 1, pp.77-87, (1996-1).
- [16] 飯島泰蔵, 岩城護: “正規型自然観測変換における不確定性原理について”, 電子情報通信学会論文誌 (A).
- [17] 飯島泰蔵: “正規型自然観測変換の瞬時特性に関する基本的な検討 ( 1 )”, 研究室内原稿,(1996-10-10)”.
- [18] 飯島泰蔵: “正規型自然観測変換の瞬時特性に関する基本的な検討 ( 2 )”, 研究室内原稿,(1996-10-11)”.
- [19] 飯島泰蔵: “正規型自然観測値系列による入力波形の瞬時認定法 ( 2 )”, 研究室内原稿,(1996-10-18)”.

# 付録

## 観測波形の瞬時振動の変化 $\{\omega\}$ に関する瞬時特性の検討

本節では、入力波形の瞬時的における振動周期が基本観測値系列の分布に与える影響について検討する。

ここで、入力波形  $f_0$  として

$$f_0(t) = \sin(\omega t), \quad -\infty < t < \infty \quad (5.1)$$

を考えることにする。そうすれば時定数は

$$\tau^2(t) = \frac{f_0(t)^2}{\{f_0'(t)\}^2} = \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} \right)^2 \quad (5.2)$$

である。荷重関数を

$$v(t) = \frac{\{f_0'(t)\}^2}{\int_0^{1/f} \{f_0'(t)\}^2 dt} \quad (5.3)$$

で与えて、等価時定数は

$$(\delta t)^2 = \frac{\int_0^{1/f} \{f_0(t)\}^2 dt}{\int_0^{1/f} \{f_0'(t)\} dt} = \frac{1}{\omega^2} \quad (5.4)$$

となる。入力波形は次の式で

$$f_0(t) = -\Im(e^{-i\omega t}) \quad (5.5)$$

と書ける。また、得られた基本観測値系列は

$$n_m^{(M)}(t) = -\Im \left[ (-1)^m \frac{(i\omega s)^m}{(1 - i\omega s)^M} e^{-i\omega t} \right] \quad (5.6)$$

で与えられる。

## 瞬時的なノルム

そして、式 (5.1) ような周期性を持っている波形に対して瞬時ノルムは

$$\|n_m^{(M)}\|_{(t)}^2 = \frac{1}{(1/f)} \int_0^{1/f} \{n_m^{(M)}(t - \tau)\}^2 d\tau \quad (5.7)$$

で定義する。式 (5.7) から瞬時ノルムを計算すると

$$\|n_m^{(M)}\|_{(t)}^2 = \frac{1}{2} \frac{(\omega s)^{2m}}{\{1 + (\omega s)^2\}^M} \quad (5.8)$$

なる結果を得られる。

## 瞬時平均次数と瞬時分散

式 (5.7) で計算した瞬時ノルムを用いて瞬時的な観測次数の平均は

$$\bar{m}_{(t)} = \frac{M(\omega s)^2}{\{1 + (\omega s)^2\}} \quad (5.9)$$

を得られる。また瞬時的な観測次数の分散は

$$(\Delta m)_{(t)}^2 = \frac{M(\omega s)^2}{\{1 + (\omega s)^2\}^2} \quad (5.10)$$

を得られる。さらに、平均次数指標は

$$L = (\omega s)^2 = \left(\frac{s}{\delta t}\right)^2 \quad (5.11)$$

となる。そして、入力波形のパラメータ $\omega$ と観測次数の平均値と分散との間の関係を次関係式が知られた。

$$\frac{L}{(L+1)^2} = \frac{(\omega s)^2}{\{(\omega s)^2 + 1\}^2} \quad (5.12)$$

$$\left(\frac{\Delta m_{(t)}}{M}\right)^2 = \frac{L}{(L+1)^2} \frac{1}{M} \quad (5.13)$$

## パラメタ $\omega$ と観測次数の瞬時平均と分散関係

- $\frac{1}{s} > \omega \geq 0$  なる範囲の $\omega$ に対しては

$$1 > (\omega s)^2 \geq 0 \quad (5.14)$$

である。従って平均次数は

$$\frac{M}{2} > \bar{m}_{(t)} \geq 0 \quad (5.15)$$

であり、分散は

$$\frac{M}{4} > (\Delta m)_{(t)}^2 \geq 0 \quad (5.16)$$

となる。

- $\frac{1}{s} \leq \omega < \infty$  なる範囲の $\omega$ に対しては

$$1 \leq (\omega s)^2 \quad (5.17)$$

である。従って平均次数は

$$\frac{M}{2} \leq \bar{m}_{(t)} < M \quad (5.18)$$

であり、分散は

$$\frac{M}{4} \geq (\Delta m)_{(t)}^2 > 0 \quad (5.19)$$

となる。

以上、式(5.14)～式(5.19)が波形の瞬時振動周期の変化における正規型自然観測値系列の分布特性について明らかにした。次の節では、数値計算によってその特性を検証する。

## 瞬時特性のシミュレーション

- 標本化周波数  $f_s$  : 20 [kHz]
- 自然観測次数  $M$  : 8
- 遮断周波数  $f_c$  : 10 [Hz] ,  $s = \frac{1}{2\pi f_c}$
- 入力波形 :  $f(t) = \sin(\omega t)$  ,  $\omega = 4\pi \sim 80\pi$  [rad/s]

入力波形  $f(t) = \sin(\omega t)$  の  $\omega = 4\pi \sim 80\pi$  [rad/s] に変化させたときの瞬時的平均値と分散をそれぞれ図 5.1、5.2 に示す。横軸は  $\omega s = 0 \sim 4$  , 縦軸は平均と分散を表している。実線は理論値で、+ マークは実験値である。 $\omega s$  の値が 1 のときに平均値が  $M / 2$  となり、そのとき分散は最大値となることが示す。

観測波形の角周波数が増加することによって観測次数平均値が単調に増加している。瞬時分散の場合、単調に増加して、瞬時平均値が  $M / 2$  の付近から減少に変わることが分かった。

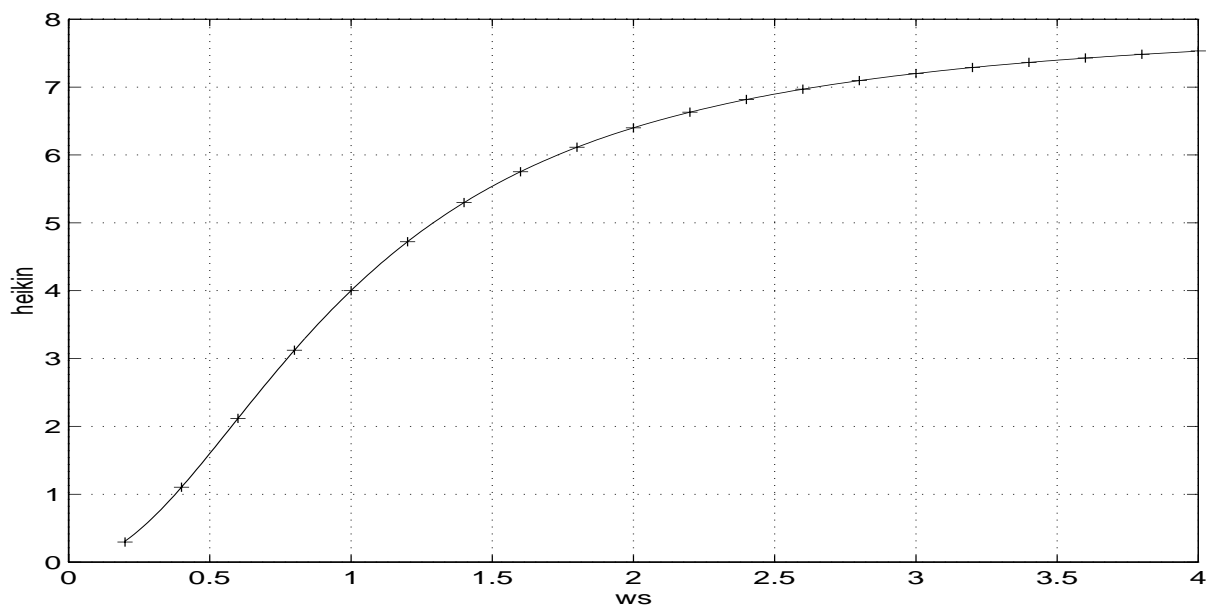


図 5.1: 瞬時的な平均値  $\bar{m}(t)$

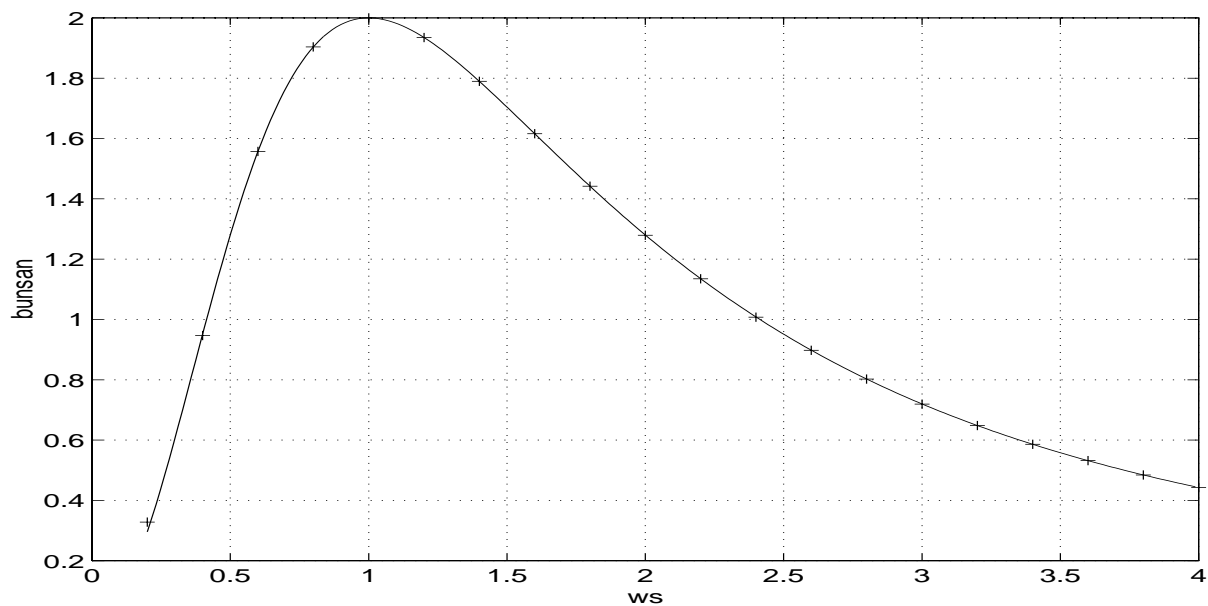


図 5.2: 瞬時的な分散  $(\Delta m)_{(t)}^2$