Title	A Semantic Investigation of Orthologic and Orthomodular Logic
Author(s)	宮崎, 裕
Citation	
Issue Date	1997-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1071
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 修士

A Semantic Investigation of Orthologic and Orthomodular Logic

宮崎 裕

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学科

1997 年 2 月 14 日

キーワード： 量子論理, ortholattice, orthomodular lattice, Rickart * 半群.

1 Introduction

量子論理の研究は、1936 年の G.Birkhoff と J.von Neumann の論文 ([1]) に始まる。ある量子系の観測命題は、Hilbert 空間を用いた標準的な量子力学の理論形式に従うと、Hilbert 空間の閉部分空間であらわされるが、彼らはこの論文の中で、Hilbert 空間の閉部分空間の集まりが orthomodular lattice をなすことを指摘した。それ以来、論理式の真理値を orthomodular lattice を使って解釈する論理（orthomodular logic）が、量子力学を支配する論理の有力な候補と考えられるようになった。しかしその後、orthomodular logic は、非古典論理の中でも特異かつ取り扱いにくい論理であることがわかり、代数的モデルとして ortholattice を用いる、orthomodular logic より弱い論理（orthologic）もこの分野の研究対象とされるようになった。

orthologic、orthomodular logic 双方において、さらに weak logic、strong logic という 2 種類の logic の定義の仕方がある ([5])。1974 年 R.I.Goldblatt は、strong orthologic に対する Kripke 流の semantics を与え、filtration によってそれが FMP を持ち、したがって決定可能であることを示した ([3])。

一方、orthomodular logic の決定問題は、現在のところまだ未解決である。Goldblatt は、同じ論文の中で strong orthomodular logic に対する Kripke 流の semantics をも与えているが、strong orthologic と同じ手法で、決定可能であることを示すことはできなかった。束論の研究に目を向けると、orthomodular lattice についての表現定理は、1960 年に D.J.Foulis によって得られている ([2],[4])。それによると、任意の orthomodular lattice は、ある種の半群の中のある条件によって制限された要素の集合と同型になる。

本稿は、2 つの Part からなる。Part I では、Goldblatt の手法を weak orthologic に適

用することを試みる。すると、weak orthologic でも Kripke 流の semantics を利用でき、これも決定可能であることが示される。Part II では、Foulis の表現定理を用いて strong orthomodular logic の別な semantics を与え、その完全性を示す。

2 Semantics of weak orthologic

Part I では、weak orthologic と strong orthologic の 2 つを ortholattice に関連づけて定義する。我々の言語は、命題変数を表す可算個の記号 $p_i \quad (i < \omega)$ とそれぞれ連言および否定を表す結合子$\wedge$、$\neg$からなる。この言語を使って構成される論理式の集合Φは通常のように定義され、論理式の真理値は、Φから ortholattice A への関数 $v : \Phi \to$ A (orthovaluation) を用いて解釈される。

Strong orthologic SOL とは、任意の ortholattice A と任意の orthovaluation vに対して、$v(\alpha) \leq v(\beta)$ を満たす論理式の 2 項組 (α, β) の集合として定義する。一方、weak orthologic WOL は、任意の ortholattice A と任意の orthovaluation vに対して、$v(\alpha) = \mathbf{1}$ ならば $v(\beta) = \mathbf{1}$ が成り立つ論理式の 2 項組 (α, β) の集合として定義する。

Goldblatt は、strong orthologic が決定可能であることを次のようにして証明した。

まず、strong orthologic に対する Kripke 流のモデル $\mathcal{M}$ を与え た。（彼は、これを orthomodel と呼んでいる。）これは、空でない集合と、非反射 的かつ対称的な 2 項関係と、valuation からなる。そして、このモデル $\mathcal{M}$ に よる strong orthologic の解釈が、完全であることを示した。つまり、任意の論理 式α、βについて、次の 2 つの statement は同値であることを示したの である。

(P_1) 任意の ortholattice A と任意の orthovaluation vに対して、$v(\alpha) \leq v(\beta)$ が成り立つ。

(Q_1) 任意の orthomodel$\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M} : \alpha \models \beta$が成り立つ。（この記号は、" モデル $\mathcal{M}$ の中の任意の点 x で、αならばβ" を意味する。）

次に、orthomodel $\mathcal{M}$ に filtration という技法を適用し、strong orthologic が有限モデル性を持つことを示した。すなわち、上の statement(Q_1) は次の statemenet(R_1) と同値である。

(R_1) 論理式α、β合わせて、k個の副論理式を含み l個の命題変数を含む時、高々2^{k+l}個の点を持つ任意の orthomodel $\mathcal{N}$に対して、$\mathcal{N} : \alpha \models \beta$が成り立つ。

Goldblatt の上の方法を応用し、彼の orthomodel と filtration という技法を使うと、任意の論理式α、β、σ、τに対して次の 3 つの statement が同値であることが示せる。

(P_2) 任意の ortholattice A と任意の orthovaluation vに対して、$v(\sigma) \leq v(\alpha)$ ならば$v(\tau) \leq v(\beta)$ が成り立つ。

(Q_2) 任意の orthomodel $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M} : \sigma \models \alpha$ならば $\mathcal{M} : \tau \models \beta$が成り立つ。

(R$_2$) 論理式α、β、σ、τ合わせて、k 個の副論理式を含み l個の命題変数を含む時、高々2^{k+l}個の点を持つ任意の orthomodel $\mathcal{N}$に対して、$\mathcal{N} : \sigma \models \alpha$ならば$\mathcal{N} : \tau \models \beta$が成り立つ。

(R$_2$) が成り立つかどうかは決定可能である。なおかつ、orthovaluation vの性質より、任意の論理式χに対して、$v(\neg(\chi \wedge \neg\chi)) = \mathbf{1}$ である。よって、σおよびτとして$\neg(\chi \wedge \neg\chi)$ を考えれば、与えられた論理式α、βについて $(\alpha, \beta) \in$ WOS かどうかを判定する方法があることになる。したがって 次の定理が成り立つ。

Theorem weak orthologic は決定可能である。

□

3 Semigroup sematics for orthomodular logic

Part II では、strong orthomodular logic について議論する。言語および論理式の集合は、Part I でのものと同様に定義する。論理式の真理値を解釈するのに、ここでは orthomodular lattice A と orthomodular valuation vを用いる。そして、strong orthomodular logic とは任意の orthomodular lattice A と任意の orthomodular valuation vに対して、$v(\alpha) \leq v(\beta)$ が成り立つ論理式の 2 項組 (α, β) の集合として定義する。

Orthomodular logic に対して Goldblatt が与えた Kripke 流の semantics とは別の semantics を与えるために、Rickart * 半群と呼ばれる次のような代数構造 $\mathcal{G} = \langle \mathrm{G}, \cdot, * \rangle$ を考える。すなわち $\langle \mathrm{G}, \cdot \rangle$ は零元 0 を持つ半群であり、G 上には次の (a),(b) を満たす 1 項演算子 $*$が定義されている。 (a): $(x^*)^* = x.$ (b): $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*.$
なおかつ、次の条件が満たされなければならない。任意の G の元 x に対して、ある射影元 e が存在して x の右零化集合が、下のようにあらわせる。すなわち
$\{ \ x \ \}^{(\mathrm{r})} = e \cdot \mathrm{G} = \{ \ e \cdot y \mid y \in \mathrm{G} \ \}.$

ここで少し補足をしておく。

- 等式 $e^* = e \cdot e = e$ を満たす G の元 e を射影元と呼び、G のすべての射影元からなる集合を P(G) とあらわす。
- G の元 x に対して、x の右から演算した時 0 となるような元 yの集合 $\{ \ x \ \}^{(\mathrm{r})} := \{ \ y \in \mathrm{G} \mid x \cdot y = 0 \ \}$ を、x の右零化集合という。
- 射影元 fに対してある G の元x が存在して、$\{ \ x \ \}^{(\mathrm{r})} = f \cdot \mathrm{G}$ が成り立つとき、この fを閉射影元という。G のすべての閉射影元からなる集合を $\mathrm{P}_c(\mathrm{G})$ とかく。

この Rickart * 半群を用いた orthomodular logic のモデル (orthomodular model) $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathrm{u} \rangle$ とは次のようなものである。すなわち、$\mathcal{G} = \langle \mathrm{G}, \cdot, * \rangle$ が Rickart *半群であり、u が各命題変数 p_iに閉射影元 $u(p_i)$ を割り当てる関数である。

モデル $\mathcal{M}$ の点 x で論理式αが真であるという関係（ $(\mathcal{M}, x) \models \alpha$ とかく ）を次のように帰納的に定義する。

(i) $(\mathcal{M}, x) \models p_i$ iff $x \in \mathrm{u}(p_i) \cdot \mathrm{G}$.

(ii) $(\mathcal{M}, x) \models \alpha \wedge \beta$ iff $(\mathcal{M}, x) \models \alpha$ and $(\mathcal{M}, x) \models \beta$.

(iii) $(\mathcal{M}, x) \models \neg\alpha$ iff $\forall y \in \mathrm{G}$, $[\ (\mathcal{M}, y) \models \alpha \quad \text{only if} \quad y^* \cdot x = 0\ ]$.

モデル $\mathcal{M}$ の任意の点 x に対して、$(\mathcal{M}, x) \not\models \alpha$ または $(\mathcal{M}, x) \models \beta$ が成り立つことを、$\mathcal{M} : \alpha \models \beta$とあらわす。そこで、この orthomodular model を用いて、orthomodular logic の完全性を示すことができる。

Theorem（ Orthomodular logic の完全性定理 ） 任意の論理式αとβに対して、次の 2 つの statemant は同値である。

(S) 任意の orthomodular lattice A と、任意の orthomodular valuation vについて $v(\alpha) \leq v(\beta)$ が成り立つ。

(T) 任意の orthomodular model について、$\mathcal{M}$, $\mathcal{M} : \alpha \models \beta$が成り立つ。

□

この証明は、1): (S) ならば (T) および 2): (T) ならば (S) の 2 つを示すことからなる。

1) の証明：次の 2 つに気づけば、(T) が成り立たないならば (S) も成り立たないことを示すのは難しくない。

- P(G) 上に、うまく順序を定義することができて、その順序で $\mathrm{P}_c(\mathrm{G})$ は、orthomodular lattice になる。
- さらに、orthomodular model での truth condition を用いて、Φから $\mathrm{P}_c(\mathrm{G})$ への orthomodular valuation をうまく定義できる。

2) の証明：1) の証明と同様に、(S) が成り立たないならば (T) も成り立たないことを示す方針で行うのだが、ある orthomodular lattice から Rickart *半群を構成するために、以下のような construction を考える。

(半) 順序集合 $\langle \mathrm{A}, \leq \rangle$ について、A から A への写像φ のうちφ が順序保存写像でかつ、条件: 任意の $x \in \mathrm{A}$ に対して、$\varphi^\sharp(\varphi(x)) \geq x$ および $\varphi(\varphi^\sharp(x)) \leq x$. を満たすような A から A への順序保存写像$\varphi^\sharp$（ φ の剰余写像 ）が存在するようなもの全体を考えてそれを G(A) であらわす。

G(A) は、写像の合成に関して半群をなす。特に、A が orthomodular lattice のとき G(A) 上にうまく*演算を定義して、$\mathcal{G}_\mathrm{A} = \langle \mathrm{G(A)}, \cdot, * \rangle$ を Rickart *半群とすることができる。よってある orthomodular lattice と orthomodular valuation が与えられたとき、それ

から適当な orthomodular model を構成することができる。これらのことから、(S) でないならば (T) でないことを示すことができる。

ここで述べた orthomodular logic の完全性定理の証明は、次の表現定理を基礎としている。

Theorem (Foulis の表現定理) A を orthomodular lattice とする。このとき、$\mathcal{G}_{\mathrm{A}} = \langle \mathrm{G(A)}, \cdot, * \rangle$ は Rickart * 半群であり、A と $\mathrm{P}_c(\mathrm{G(A)})$ とは同型である。

□

References

[1] G.Birkhoff and J.von Neumann, *The logic of quantum mechanics*, Annals of Mathematics Vol.37 No.4, 823–843 (1936).

[2] D.J.Foulis, *Baer *-semigroups*, Proceedings of American Mathematical Society 11, 648–654 (1960).

[3] R.I.Goldblatt, *Semantic analysis of orthologic* Journal of Philosophical Logic 3, 19–35 (1974).

[4] S.Maeda, *Lattice Theory and Quantum Logic* (in Japanese), Makishoten, Tokyo (1980).

[5] J.Malinowski, *Strong Versus Weak Quantum Consequence Operations*, Studia Logica 51, 113–123 (1992).