Title	WAVELETを用いたナビエ・ストークス方程式の並列解法
Author(s)	福井，直人
Citation	
Issue Date	1998-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1115
Rights	
Description	Supervisor:松澤 照男，情報科学研究科，修士

WAVELET を用いたナビエ・ストークス方程式の並列解法

福井直人

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1998 年 2 月 13 日

キーワード： wavelet, preconditioning, conjugate gradient method, ,incomplete wavelet transform, matrix solver, differential equation.

数値流体解析においての数値シミュレーションは、ほとんどが大きな自由度を必要とする大規模計算である。このようなシミュレーションでは、対象となる現象を支配する偏微分方程式は、有限要素法や有限差分法といった方法で離散化することにより計算される。その計算の計算時間の大部分を占めるのが、連立一次方程式を解く部分である。一般に、その方程式の規模が大きい場合は反復解法が用いられるが、問題が大規模になれば、その係数行列の固有値分布が悪性化し、計算時間の増大を招くことになる。これは係数行列の固有値分布が悪性化し、反復数が増大するためである。このような計算時間の増大は詳細な数値解析を困難にしている要因のひとつである。

一方、近年フーリエ解析に代わる手法としてウェーブレット解析が信号解析、画像処理等で用いられるようになった。更に、コンパクトなサポートを持つウェーブレットが I.Daubechies により提案されたことにより、その適用範囲も広がり、数値解析の分野でもその応用が可能となった。

偏微分方程式の数値解法に、ウェーブレットを用いる解法は、適合格子法における、各レベルの格子を形成する解法、Galerkin 法での基底関数に、ウェーブレットのスケーリング関数を用いる解法、ウェーブレット変換による行列解法などがある。

田中らは、偏微分方程式を離散化して得られた連立一次方程式の係数行列にウェーブレットを利用すると、その条件数は格子点数に依存しなくなる、という特長から、ウェーブレットを共役勾配法の前処理に利用して楕円型問題であるポアソン方程式を解析した。

一般に、微分方程式を離散化して得られた連立一次方程式を、反復解法で解く場合、問題が大規模になるに従い、その係数行列の固有値分布が悪性化し、反復回数の増加、つまり、計算時間の増大を招く。

しかし、その係数行列にウェーブレット変換を行ない、適当なスケーリングを施すと、係数行列の条件数は、格子点に依存せず、格子点数を増やしても、反復数の増大は格子点数に依存しない。しかし、この特長を活かした従来の行列解法は次のような問題がある。

(a) 問題を周期化したものに変換しなければならない。

(b) DWT を周期化しなければならない。

(c) 変換後の行列がランク落ちする。（０となる固有値が現れる。）

(d) 解法が非常に複雑になる。

そこで、田中らは、ウェーブレットの特長を活かしつつ、これらの問題を解決するため容易に実行可能な不完全ウェーブレット変換を提案し、行列解法ではなく、その前処理に適用した。これは、行列解法自体には厳密さが要求されるが、行列解法の前処理としては、厳密で複雑なものより、処理手順が簡単で、計算効率の良い近似手法のほうが適しているからである。また、ウェーブレットの局所性という特長から、扱うデータも局所的なものだけでよく、故に、ベクトル化、並列化にも向いている。

本研究では、基本的な偏微分方程式に対して、ウェーブレットを用いてその信頼性を確認し、他の偏微分方程式にも、この解法を用い、その有効性を調べる。

本研究で用いた解法は、問題とする偏微分方程式を、差分法により、離散化された結果、得られた連立一次方程式に、ウェーブレットによる前処理を行なう前処理つき共役勾配法を実践した。

その結果、熱伝導方程式、ポアソン方程式、バーガーズ方程式について、その反復回数、精度等が得られ、その性能が確かめられた。ポアソン方程式の場合、前処理行列は、ウェーブレットのフィルタ係数を変換することで、処理を一部省略することができた。