

Title	むだ時間を含むシステムにおけるスミス制御器の安定 余裕
Author(s)	花房, 聡人
Citation	
Issue Date	1998-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1119
Rights	
Description	Supervisor: 示村 悦二郎, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

むだ時間を含むシステムにおけるスミス制御器の安定余裕

指導教官 示村 悦二郎 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報システム学専攻

510099 花房 聡人

1998 年 2 月 13 日

要 旨

本稿では、むだ時間システムに対するスミス制御系において、ミスマッチが存在した場合のロバスト安定性の検討を行なう。まず、システムパラメータのゲインとむだ時間にミスマッチが存在すると仮定し、その安定条件を導出する。次に具体例に対して安定条件を求め、シミュレーションによりその有効性を確認した。この安定条件を用い、ゲインとむだ時間のミスマッチの相互的な影響を定量的に検討することができる。指針として時定数を変化させた制御対象に対してそれぞれの場合の安定条件を求め、その変化について比較検討を行なう。

この安定条件の導出によって、ゲインとむだ時間のミスマッチの安定性に対する相互的な影響の分析が可能であり、制御系設計において有用な情報を得ることができる。

目次

第1章 序論	1
1.1 はじめに	1
1.2 本論文の構成と各章の概要	2
第2章 スミス法	4
2.1 スミス法の構造および問題点	4
2.2 スミス制御器の特性	6
2.2.1 むだ時間を含まないフィードバック制御系	6
2.2.2 スミス制御系	7
第3章 スミス制御系においてゲインおよびむだ時間にミスマッチがある場合のロバ スト安定性	9
3.1 ミスマッチを導入した特性多項式	9
3.2 ゲインにのみミスマッチがある場合のゲイン余裕	13
3.3 むだ時間にのみミスマッチがある場合のむだ時間余裕	13
3.4 ゲインとむだ時間の両方にミスマッチがある場合の安定領域	22
第4章 安定条件の検証	27
4.1 例題	27
4.2 例題に対するゲイン余裕とその検証	28
4.3 例題に対するむだ時間余裕とその検証	30
4.3.1 1点で交わる場合 ($\epsilon = 0, L = 0.7$)	30
4.3.2 3点で交わる場合 ($\epsilon = 0, L = 1$)	34

第 5 章 安定領域の検証	36
5.1 例題に対する安定領域	36
5.2 時定数を変化させた場合の安定領域	44
5.2.1 時定数 $T = 3$ の場合	44
5.2.2 時定数 $T = 2$ の場合	47
5.2.3 時定数 $T = 1$ の場合	50
5.2.4 時定数 $T = 0.5$ の場合	54
5.2.5 時定数 $T = 0.2$ の場合	58
5.2.6 時定数 $T = 0.1$ の場合	62
5.3 考察	65
第 6 章 結論	67
付録 A	69

第 1 章

序論

1.1 はじめに

フィードバック制御は、目標入力と制御出力との偏差をよりどころにその出力偏差を小さくするように制御量を修正する方法である。しかし、制御系の信号路に沿ってむだ時間が存在すると制御の効果がすぐに現れない。そのため、単に同時刻の目標入力と制御出力との差からは有用な情報を得る事が出来ないため、通常システムに対する方法では制御量を適切に修正しシステムを安定化することは困難である。

このむだ時間を含むシステムに対する制御方法として、古くからスミス法^[1]が知られている。システムに制御対象のモデルを組み込み、等価的にむだ時間を閉ループの外へ出してしまおうという方法である。この方法の効果として、

- (1) むだ時間を含む制御系は一般に無限個の極を持つ。しかし、スミス法を用いた制御系では、特性方程式からむだ時間要素を取り除き通常の有限個の極として扱うことが可能となる。
- (2) 制御系設計において、通常の線形系と同様な方法の導入が可能である。

がある。これは制御対象とそのモデルとが完全に一致し制御がおこなわれたとき、もっとも理想的な効果を生む。

しかし、実際には正確に制御対象を同定する事は難しく、正確なモデルを構築することは困難である。したがって、どうしても制御対象とそのモデルとの間にある程度のモデル化誤差 (以後、ミスマッチ) が生じてしまう。このミスマッチが存在すると制御系の安定

性に影響を与えるために、上記の効果を十分に得ることが出来ない。そこで、どの程度の大きさのミスマッチにまで制御系の安定性が維持できるかといった、ミスマッチの大きさに対するロバスト安定性の解析が必要となる。

さいわい微小なミスマッチに対しては安定性が保たれる事が示されている。また、むだ時間のミスマッチはシステムパラメータとは違う問題を起こすため、これのみに限定した研究は多々なされている^{[6][13]}。しかし、むだ時間におけるミスマッチとその他のパラメータにおけるミスマッチはそれぞれが同時に存在し、複数のパラメータの相互的な影響があると考えられ、これらのミスマッチも同時に考える必要がある。Palmor^[6] はむだ時間のミスマッチを考察するため、伝達関数をもとに新たな関数を定義して、それをもとに安定性の条件を示している。しかし、状態方程式を基にむだ時間とその他のパラメータとのミスマッチが同時に存在するとし、その相互的な影響を取り扱ったものは殆ど見られない。

本稿では、状態空間表現で安定条件を考える第一段階として、システムパラメータのゲインによって他のパラメータを代表すると仮定し、これとむだ時間のミスマッチとの相互関係を扱うとした。安定条件を求める方法として、状態予測制御系に対する包ら^[11]の安定判別方法をスミス制御系に拡張する。これによって、定量的に安定条件を表す事が出来る。特に例題に対して定量的に安定条件を求めることで、視覚的にミスマッチの影響を考察する事が目的となる。制御対象の時定数を変化させた幾つかの場合に対して安定条件をもとめる。これにより、ゲインとむだ時間のミスマッチの相互的な関係を分析し、同時にミスマッチと時定数との関係について検討したい。

1.2 本論文の構成と各章の概要

第2章として、対象とするむだ時間を含むシステムに対するスミス法について説明する。まず、伝達関数とブロック線図をもとにその動作構造を表す。これにより、スミス制御系においてミスマッチが存在した時の問題点、その扱いの重要性について述べる。続いてシステムパラメータのミスマッチとしてゲインを扱うため、スミス制御系を状態空間表現により表し、それより特性多項式を求めその制御特性を明らかにする。

第3章では、ゲインとむだ時間にミスマッチがあると仮定し、そのミスマッチのパラメータを特性多項式に導入し定式化を行なう。準備として安定性の解析のための必要な形への式変形を表す。それをもとに、ナイキストの安定判別法による安定性の解析を段階的にゲインのみ、むだ時間のみ、ゲインとむだ時間両方についてと安定条件を述べる。

第4章では，例題対象にそれぞれの場合についての条件を求め，安定条件の検証を行った。

第5章では，4章の例題に対して ゲインのミスマッチ-むだ時間のミスマッチ 平面上で安定領域を求める．続いて，例題の制御対象の時定数を変化させその場合毎に同様の方法を用いて安定領域を求めた．

最後に，本論文の内容についてのまとめとした．

第 2 章

スミス法

本章では，本稿の研究対象となるむだ時間を含むシステムに対するスミス法について述べる．

2.1 スミス法の構造および問題点

スミス法は，むだ時間を含む制御対象 $G_r(s)e^{-sL}$ に対して制御対象のモデル $G_m(s)$ を用いて，動的補償器 $G_c(s)$ のまわりに以下の図 2.1 のような局所フィードバックを行う制御方法である．ただし， L_r は制御対象のむだ時間， L_m はモデルのむだ時間である．

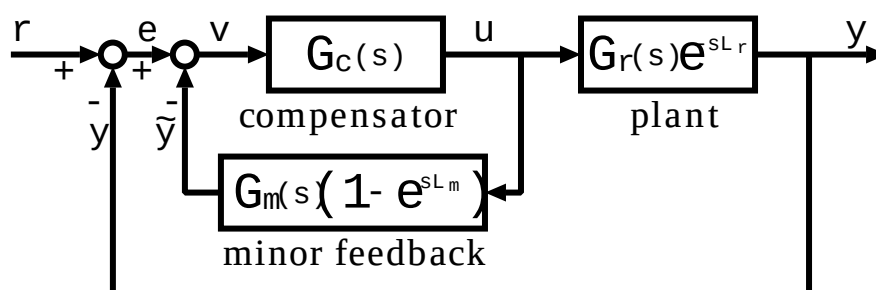


図 2.1: スミス制御系

ここで，制御対象とモデルとの間にミスマッチが存在しないとすると，目標入力 $r(s)$ か

ら出力 $y(s)$ までの伝達関数は,

$$y(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_m(s)} \times G_r(s)e^{-sL_r} \cdot r(s) \quad (2.1)$$

となる．このとき図 2.1 は等価変換されたつぎの図 2.2 のように考えられる．

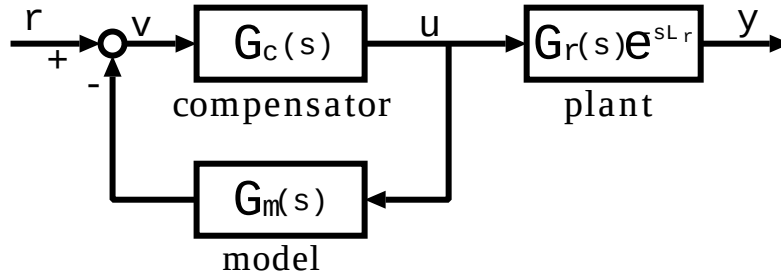


図 2.2: スミス制御系と等価な系 1

スミス制御系において制御対象とモデルが完全に一致した時，図 2.2 に見られるようにシステム全体に対してのフィードバックループが無くなってしまふことになる．言い換えると，むだ時間を含む制御対象に対してフィードフォワード制御が行なわれていると見る事が出来る．したがって，式 (2.1) からわかるように，むだ時間を含まないモデルと動的補償器によって制御対象に対して独立に制御系設計を行なうことが出来るため，通常の線形制御系の設計問題として取り扱う事ができる．

しかし，実際には制御対象 $G_r(s)$ と局所フィードバック部分のモデル $G_m(s)$ とはそれぞれ異なるものであり，それらの間に mismatch が存在する．同様に制御対象のむだ時間 L_r と局所フィードバック部分のモデルのむだ時間 L_m も異なる．したがって，式 (2.1) は次式のようになる．

$$y(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_m(s) + G_c(G_r e^{-sL_r} - G_m e^{-sL_m})} \times G_r(s)e^{-sL_r} \cdot r(s) \quad (2.2)$$

式 (2.2) から解るように，スミス法によって取り外されたはずの分母の特性多項式のむだ時間要素が再び現れてしまふことになる．これは，無くなったはずのフィードバックループの影響が出ることになり，むだ時間分遅れて現れる制御対象の出力の効果が入ってしまうからである．

このように、むだ時間を含むシステムに対して有効と言われるスミス法は、制御対象とそのモデルとの間に mismatches が生じると再びむだ時間の影響のためその制御に支障が出る事になる。よって、どの程度の大きさの mismatches にまでスミス制御系の安定性が保たれるのかという、ロバスト安定性の解析が必要となる。

2.2 スミス制御器の特性

2.2.1 むだ時間を含まないフィードバック制御系

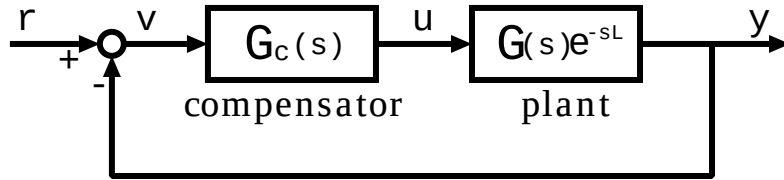


図 2.3: フィードバック制御系

状態方程式によりスミス制御系を扱うまえに、まず、通常のフィードバック系について言及しておく。以下に示す図 2.3 のシステムについて、状態方程式を基に表現する。また、本論文を通じて (A, b) は可制御、 (A, c) は可観測であるとする。

(plant)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t - L) \quad (2.3)$$

$$y(t) = cx(t) \quad (2.4)$$

(compensator)

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Dv(t) \quad (2.5)$$

$$u(t) = K_1v(t) + K_2z(t) \quad (2.6)$$

$$v(t) = r(t) - y(t) \quad (2.7)$$

この閉ループ系の状態方程式は式 (2.3)–(2.7) から、

$$\dot{x}(t) = (A - bK_1c)x(t) + bK_2z(t) + bK_1r(t) \quad (2.8)$$

$$\dot{z}(t) = -Dcx(t) + Fz(t) + Dr(t) \quad (2.9)$$

したがって、このフィードバック制御系の特性方程式は、

$$\phi(s) \equiv \det \begin{bmatrix} sI - A + bK_1c & -bK_2 \\ Dc & sI - F \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$= \det(sI - F) \det[sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc] \quad (2.11)$$

となる。

2.2.2 スミス制御系

状態方程式を基に図 2.1 のスミス制御系の安定特性について表す。制御対象は式 (2.3), (2.4), 局所フィードバック部分および動的補償器はそれぞれ以下のように表記する。

(minor feedback)

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + b[u(t) - u(t - L)] \quad (2.12)$$

$$\tilde{y}(t) = c\tilde{x}(t) \quad (2.13)$$

(compensator)

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Dv(t) \quad (2.14)$$

$$u(t) = K_1v(t) + K_2z(t) \quad (2.15)$$

$$v(t) = r(t) - y(t) - \tilde{y}(t) \quad (2.16)$$

定理 1 ^[5] 式 (2.3) の A 行列が安定でない時、制御対象 (2.3)–(2.4) はスミス法 (2.12)–(2.16) によつ安定化する事が出来ない。

Proof.

このスミス制御系の特性方程式は、式 (2.3), (2.4), (2.12)–(2.16) から、

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - bK_1cx(t - L) - bK_1c\tilde{x}(t - L) + bK_2z(t - L) + bK_1r(t - L) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) = & -bK_1cx(t) + bK_1cx(t - L) + (A - bK_1c)\tilde{x}(t) + bK_1c\tilde{x}(t - L) \\ & + bK_2z(t) - bK_2z(t - L) + bK_1r(t) - bK_1r(t - L) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\dot{z}(t) = -Dcx(t) - Dc\tilde{x} + Fz(t) + Dr(t) \quad (2.19)$$

これより、この閉ループ系の特性多項式はつぎのように計算できる．

$$\begin{aligned}
\psi(s) &= \det \begin{bmatrix} sI - A + bK_1ce^{-sL} & bK_1ce^{-sL} & -bK_2e^{-sL} \\ (1 - e^{-sL})bK_1c & sI - A + (1 - e^{-sL})bK_1c & -(1 - e^{-sL})bK_2 \\ Dc & Dc & sI - F \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} sI - A & bK_1e^{-sL} & -bK_2e^{-sL} \\ -(sI - A) & sI - A + (1 - e^{-sL})bK_1c & -(1 - e^{-sL})bK_2 \\ 0 & Dc & sI - F \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} sI - A & bK_1ce^{-sL} & -bK_2e^{-sL} \\ 0 & sI - A + bK_1c & -bK_2 \\ 0 & Dc & sI - F \end{bmatrix} \\
&= \det(sI - A) \det \begin{bmatrix} sI - A + bK_1c & -bK_2 \\ Dc & sI - F \end{bmatrix} \\
&= \det(sI - A) \det(sI - F) \det[sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc] \quad (2.20) \\
&= \det(sI - A)\phi(s) \quad (2.21)
\end{aligned}$$

となる．式 (2.21) の右辺第 2 項は前節で定義した $\phi(s)$ である．これは動的補償器により任意に調整が可能である．しかし、式 (2.21) の右辺第 1 項は制御対象のみに関する項である．これは、制御対象の A 行列に不安定な固有値が存在した場合には、式 (2.14)–(2.16) の動的補償器によって安定化することが出来ないことを意味している．よって、制御対象の A 行列が安定でないならば、この閉ループ系は不安定となる．■

この特性多項式より、図 2.1 のシステムが安定となるか否かは、以下の特性方程式

$$\psi(s) = 0 \quad (2.22)$$

のすべての根が s 平面の左半平面に存在するかそうでないかで判別する事ができる．

この結果を考慮し、本論文で取り扱う制御対象は安定であるとする．

第 3 章

スミス制御系においてゲインおよびむだ時間にミスマッチがある場合のロバスト安定性

本章では，スミス制御系においてシステムパラメータのゲインとむだ時間にミスマッチが存在するとした時，ゲインにのみ，むだ時間にのみ，およびその両方にミスマッチが存在する場合について安定条件を段階的に表す．

3.1 ミスマッチを導入した特性多項式

スミス制御系においてのミスマッチが，システムパラメータのゲインとむだ時間に存在すると考える．これは位相送れを生じるむだ時間のミスマッチと，システムパラメータを代表したゲインのミスマッチによって，システム全体のミスマッチが十分に表現できるといえるからで，したがってこの仮定のもとで得られる結果は十分実用的であると考えられる．

実際の制御対象のパラメータ A_r, b_r, c_r, L_r とモデルのパラメータ A, b, c, L との間に以下に示すような関係がある．ゲインのミスマッチが ϵ ，むだ時間のミスマッチが ζ とする (但し $\epsilon \geq -1, \zeta \geq -L$) ．

$$A_r = A, \quad b_r = b, \quad c_r = (1 + \epsilon)c, \quad L_r = L + \zeta \quad (3.1)$$

前節の式(2.17)–(2.19) の特性多項式に式(3.1) を導入すると、次のように簡単化する事が出来る.

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} sI - A + bK_1 \epsilon c e^{-s(L+\zeta)} & bK_1 c e^{-s(L+\zeta)} \\ bK_1 \epsilon c \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} & sI - A + bK_1 c \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} \\ D\epsilon c & Dc \end{bmatrix} \\
& \quad \begin{bmatrix} -bK_2 e^{(L+\zeta)} \\ -bK_2 \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} \\ sI - F \end{bmatrix} \\
& = \det \begin{bmatrix} sI - A & bK_1 c e^{-s(L+\zeta)} & -bK_2 e^{-s(L+\zeta)} \\ -\epsilon(sI - A) & sI - A + bK_1 c \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} & -bK_2 \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} \\ 0 & Dc & sI - F \end{bmatrix} \\
& = \det \begin{bmatrix} sI - A & bK_1 c e^{-s(L+\zeta)} \\ 0 & sI - A + bK_1 c \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} + \epsilon bK_1 c e^{-s(L+\zeta)} \\ 0 & Dc \end{bmatrix} \\
& \quad \begin{bmatrix} -bK_2 e^{-s(L+\zeta)} \\ -bK_2 \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} - \epsilon bK_2 e^{-s(L+\zeta)} \\ sI - F \end{bmatrix} \\
& = \det[sI - A] \\
& \quad \times \det \begin{bmatrix} sI - A + bK_1 c \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} + \epsilon bK_1 c e^{-s(L+\zeta)} \\ Dc \end{bmatrix} \\
& \quad \begin{bmatrix} -bK_2 \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} - \epsilon bK_2 e^{-s(L+\zeta)} \\ sI - F \end{bmatrix} \\
& = \det[sI - A] \det[sI - F] \\
& \quad \times \det \left[sI - A + bK_1 c \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} + \epsilon bK_1 c e^{-s(L+\zeta)} \right. \\
& \quad \left. - [-bK_2 \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} - \epsilon bK_2 e^{-s(L+\zeta)}](sI - F)^{-1} Dc \right] \\
& = \det[sI - A] \det[sI - F] \\
& \quad \times \det \left[sI - A + \{bK_1 c + bK_2 (sI - F)^{-1} Dc\} \{1 - (1 - e^{-s\zeta})e^{-sL}\} \right. \\
& \quad \left. + \epsilon \{bK_1 + bK_2 (sI - F)^{-1} Dc\} e^{-s(L+\zeta)} \right] \\
& = \det[sI - A] \det[sI - F]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \det[sI - A + \{bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc\}[1 + \{(1 + \epsilon)e^{-s\zeta} - 1\}e^{-sL}]] \\
& = \det[sI - A] \det[sI - F] \\
& \quad \times \det[sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc \\
& \quad \quad + \{bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc\}\{(1 + \epsilon)e^{-s\zeta} - 1\}e^{-sL}] \\
& = \det[sI - A] \det[sI - F] \det[sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc] \\
& \quad \times \det[I + \{sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc\}^{-1} \\
& \quad \quad \times \{bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc\}\{(1 + \epsilon)e^{-s\zeta} - 1\}e^{-sL}] \\
& = \det[sI - A] \det[sI - F] \det[sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc] \\
& \quad \times [1 + M(s)N(s)] \tag{3.2}
\end{aligned}$$

ただし、 $M(s)$ と $N(s)$ は以下のものである。

$$M(s) = c\{sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc\}^{-1}b\{K_1 + K_2(sI - F)^{-1}D\}e^{-sL} \tag{3.3}$$

$$N(s) = (1 + \epsilon)e^{-s\zeta} - 1 \tag{3.4}$$

式 (3.2) において、 $\det[sI - A] \det[sI - F] \det[sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc]$ は前出の式 (2.20) である。これは、ミスマッチが存在しない場合のスミス制御系の特性多項式である。制御対象の A 行列は安定であるとし、閉ループ系は動的補償器によって安定化されているものとしているので、 $\det[sI - A] \det[sI - F] \det[sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc]$ は不安定な極を持たない。したがって、スミス制御系のロバスト安定性は、

$$[1 + M(s)N(s)] = 0 \tag{3.5}$$

の根によって決定される。 $M(s)$ は、

$$\begin{aligned}
M(s) &= (\text{動的補償器によるフィードバック制御の伝達関数}) \\
&\quad \times (\text{動的補償器の伝達関数}) \times (\text{むだ時間要素}) \tag{3.6}
\end{aligned}$$

という意味の項で構成されている。しかし、実は巻末の付録 A に示したようにスミス制御系を等価変換した図 A.1 に表す系の伝達関数に正に一致している。

$$M(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}e^{-sL} \tag{3.7}$$

となる．また， $N(s)$ はゲインおよびむだ時間のミスマッチにのみ関する項である．もしミスマッチが無い場合は $N(s) = 0$ という事になる．

定理 2 図 2.1 のスミス制御系において式 (3.1) のミスマッチを考える． $M(s)N(s)$ の軌跡が点 $(-1, j0)$ を回らなければ，図 2.1 のスミス制御系は安定であり，回れば不安定である．

Proof.

式 (3.5) の安定性の解析に図 3.1 の s 平面の右半平面を囲む閉曲線により，ナイキストの安定判別法を考える．半径が $R \rightarrow \infty$ となったときの閉経路 Γ の円弧の部分での $M(s)N(s)$ の振る舞いが問題となる．式 (3.7) より， $M(s)$ はスミス制御系の伝達関数となる．これ

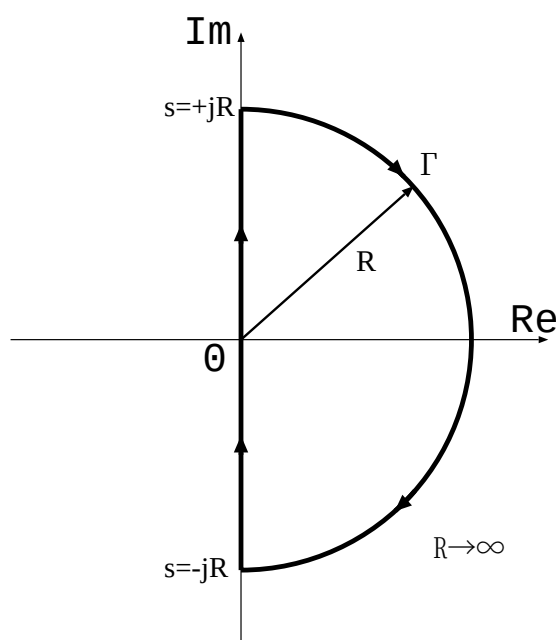


図 3.1: ナイキスト線図

は真にプロパーな有理関数とむだ時間要素の積となっている．また， $N(s)$ は指数関数であり， ϵ の変化にともなって一定 M 曲線となるので有界な曲線を描く．よって， $R \rightarrow \infty$ であるとき $M(s) \rightarrow 0$ となり，また $|N(s)|$: 有界 となる．したがって， $M(s)N(s) \rightarrow 0$ であることから， $R \rightarrow \infty$ のとき， s 平面の右半平面の $M(s)N(s)$ 平面への写像は一定領域に近付くことがわかる．これより， $M(s)N(s)$ の安定性について，ナイキストの安定判別法の導入が可能といえる．■

よって、スミス制御系の安定性の解析について $M(s)N(s)$ の振る舞いをナイキスト線図をもとに分析する。

3.2 ゲインにのみミスマッチがある場合のゲイン余裕

まず、システムパラメータのゲインにのみミスマッチが存在するときのゲイン余裕について示す。この時 $\zeta = 0$ であるので、

$$\begin{aligned} N(j\omega) &= (1 + \epsilon) - 1 \\ &= \epsilon \end{aligned} \tag{3.8}$$

となる。

定理 3 スミス制御系において、ミスマッチがない場合に制御系が安定となるように動的補償器のパラメータ F , D , K_1 , K_2 が選ばれているものとする。 $\zeta = 0$ のとき $M(j\omega)$ の軌跡が点 $(-1/\epsilon, j0)$ を回らなければ安定、回れば不安定となる。

Ploof.

$\zeta = 0$ のときは、 $N(j\omega) = \epsilon$ となる。これは ω に無関係に実軸上を動く点となる。これは、安定限界となる点が $M(j\omega)$ の軌跡と実軸との交点に一致するということで、考えるべき $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡は $\epsilon N(s)$ の軌跡を考察すれば良い。定理 2 より、 $M(j\omega)$ の軌跡が点 $(-1/\epsilon, j0)$ を回らなければ安定であり、回れば不安定となることがいえる。 ■

この定理よりゲイン余裕を考えると、図 3.2 に表すように $M(j\omega)$ の軌跡が最初に実軸と交わる点を P_1 とすると、この点の実部に対して、

$$\text{Re}[P_1] > -\frac{1}{\epsilon} \tag{3.9}$$

を満たす事である。

3.3 むだ時間にのみにミスマッチがある場合のむだ時間余裕

ゲインにミスマッチがない場合 ($\epsilon = 0$) に、むだ時間の変動に対してどのくらいこの制御系の安定性が保たれるかについて導く。

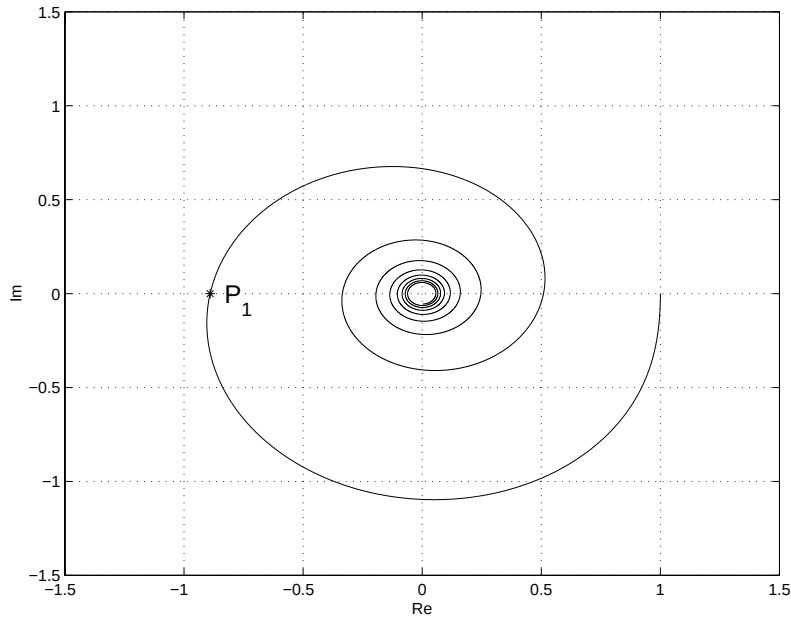


図 3.2: $M(j\omega)$ の軌跡と実軸との交点

まず準備として、この制御系の安定限界について検討を行なう。安定限界においては、

$$1 + M(j\omega)N(j\omega) = 0 \quad (3.10)$$

となる。つまり、特性方程式 (2.22) が虚軸上に極を持ち、ある角周波数 ω 対して、

$$M(j\omega) = -\frac{1}{N(j\omega)} \quad (3.11)$$

が成立する。 $M(s)$ は式 (3.3) のような構成になっている。周波数 ω が 0 から ∞ に変化した時の $M(j\omega)$ のナイキスト軌跡は、むだ時間要素 e^{-sL} の位相遅れのため実軸上の点から出発し、原点の周りを時計回りの方向に無限回回転しながら原点に収束する曲線となる。

式 (3.11) の右辺のナイキスト軌跡を分析するために以下のような式を考える。

$$\begin{aligned} \nu(j\alpha) &= (1 - e^{-j\alpha})^{-1} \\ &= \{1 - (\cos \alpha - j \sin \alpha)\}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} - j \left\{ \frac{\sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

これは図 3.3 に記述したように、 α の値の増加にともなって $\nu(j\alpha)$ のナイキスト軌跡は実部が $+\frac{1}{2}$ で、虚軸に平行な直線上を下から上へと周期 2π で上下運動をする軌跡となる。 α と $\nu(j\alpha)$ の対応関係を $0 < \alpha < 2\pi$ と $-2\pi < \alpha < 0$ の二つの区間について表すと、

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow +0 \text{ (および } \alpha \rightarrow -2\pi + 0) \text{ の時} & \quad \text{Im}[\nu(j\alpha)] \rightarrow -\infty \\ \alpha = \pi \text{ (および } \alpha = -\pi) \text{ の時} & \quad \text{Im}[\nu(j\alpha)] = 0 \\ \alpha \rightarrow 2\pi \text{ (および } \alpha \rightarrow -0) \text{ の時} & \quad \text{Im}[\nu(j\alpha)] \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (3.13)$$

この節ではゲインにミスマッチがない場合 ($\epsilon = 0$) を扱うので、式 (3.11) は、

$$M(j\omega) = -\frac{1}{N(j\omega)} = \nu(j\zeta\omega) \quad (3.14)$$

と表される。これより、このスミス制御系が安定限界にあることの必要十分条件は、

- (1) $M(j\omega)$ の軌跡と $\nu(j\omega)$ の軌跡が交わる。
- (2) $M(j\omega)$ の軌跡と $\nu(j\omega)$ の軌跡の交点において、 $M(j\omega)$ の軌跡上の ω と $\nu(j\omega)$ の軌跡上の α の間に $\alpha = \zeta\omega$ の関係がある。

となる。

この安定限界の考察をすることより、 $M(j\omega)$ の軌跡と $\nu(j\omega)$ の軌跡の関係とその交点における ω と α の値の分析からむだ時間の安定余裕の導出を考える。

定理 4 ^[11] 図 2.1 のスミス制御系において全てのパラメータにミスマッチがない場合に、この制御系が安定となるように動的補償器のパラメータ F, D, K_1, K_2 が選ばれているとする。むだ時間にのみミスマッチがある時 ($A_r = A$, $b_r = b$, $c_r = c$, $L_r = L + \zeta$)、次のことがなりたつ。

- (i) $M(j\omega)$ の軌跡と $\nu(j\omega)$ の軌跡が交わらなければ、どんな大きさのむだ時間に対しても制御系は安定となる。
- (ii) $M(0) > 0$ であり、図 3.3 のように $M(j\omega)$ の軌跡と $\nu(j\omega)$ の軌跡が 1 点 A_1 で交わるものとする。点 A_1 での $M(j\omega)$ の軌跡上の ω の値を ω_1 , $\nu(j\omega)$ の軌跡上の α の値で $0 < \alpha < 2\pi$ のものを α_1 , $-2\pi < \alpha < 0$ の範囲のものを α'_1 とする時、

$$\bar{\zeta} = \frac{\alpha_1}{\omega_1} \quad (3.15)$$

$$\underline{\zeta} = \max \left(-L, \frac{\alpha'_1}{\omega_1} \right) \quad (3.16)$$

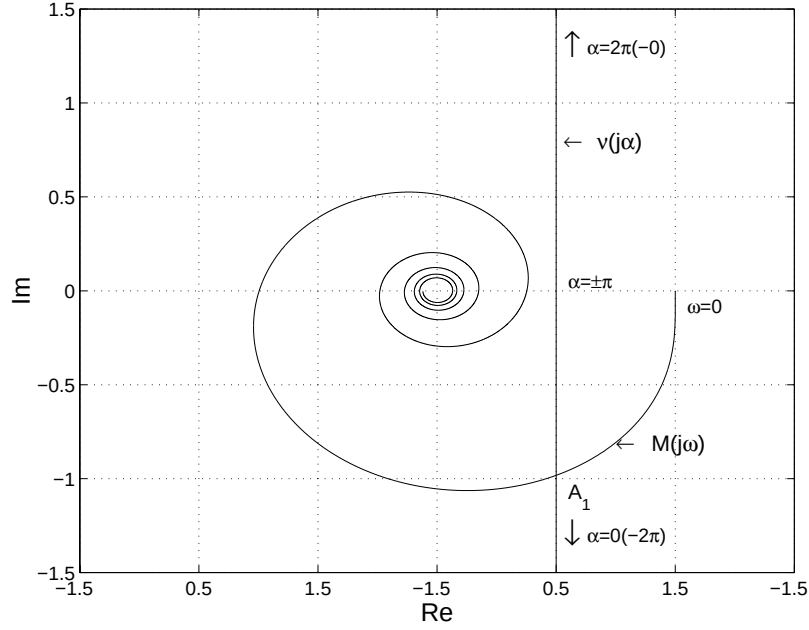


図 3.3: $M(j\omega)$ と $\nu(j\alpha)$ の軌跡が 1 点で交わる場合

とする. いま, むだ時間のミスマッチが以下の範囲にあるとき,

$$\underline{\zeta} < \zeta < \bar{\zeta} \quad (3.17)$$

このスミス制御系は安定となる. また, この範囲にないとき不安定となる.

- (iii) $M(0) > 0$ であり, 図 3.4 のように $M(j\omega)$ の軌跡と $\nu(j\omega)$ の軌跡が k 点 $A_1, \dots, A_k$ で交わるものとする. 点 A_i での $M(j\omega)$ の軌跡上の ω の値を ω_i , $\nu(j\omega)$ の軌跡上の α の値で $0 < \alpha < 2\pi$ のものを α_i , $-2\pi < \alpha < 0$ の範囲のものを α'_i とする時,

$$\bar{\zeta} = \min \left(\frac{\alpha_1}{\omega_1}, \dots, \frac{\alpha_k}{\omega_k} \right) \quad (3.18)$$

$$\underline{\zeta} = \max \left(-L, \frac{\alpha'_1}{\omega_1}, \dots, \frac{\alpha'_k}{\omega_k} \right) \quad (3.19)$$

とする. いま, むだ時間のミスマッチが以下の範囲にあるとき,

$$\underline{\zeta} < \zeta < \bar{\zeta} \quad (3.20)$$

このスミス制御系は安定となる.

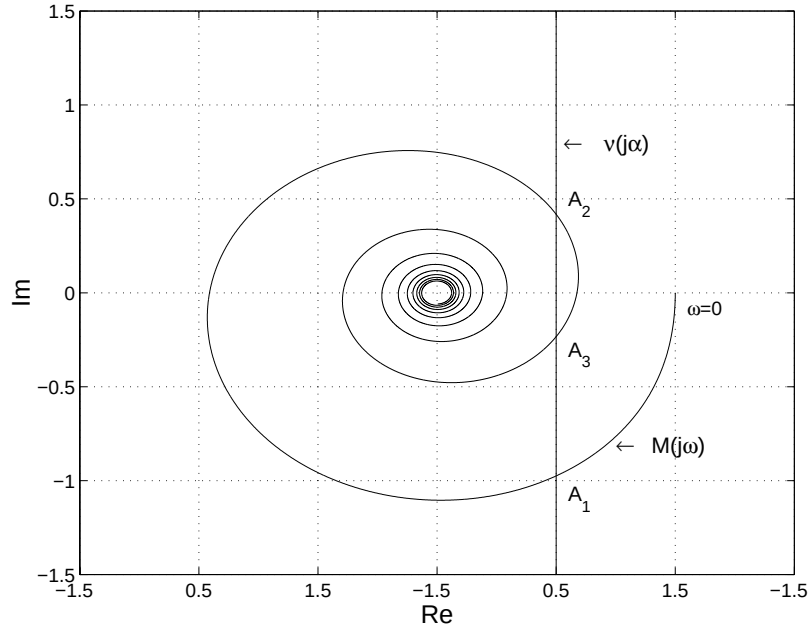


図 3.4: $M(j\omega)$ と $\nu(j\alpha)$ の軌跡が 3 点で交わる場合

Proof.

- (i) $M(j\omega)$ の軌跡と $\nu(j\omega)$ の軌跡が交わらなければ、章末の補題 A より、 $M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡は実軸の $(-\infty, -1)$ の部分と交わらないので、点 $(-1, j0)$ を回らない。したがって安定となる。
- (ii) $\zeta > 0$ の場合 ($0 < L < L_r$) を考える。式 (3.14) より、

$$\arg[N(j\omega)] = -\arg[\nu(j\zeta\omega)] - \pi \quad (3.21)$$

であるので、

$$\arg[M(j\omega)N(j\omega)] = \arg[M(j\omega)] - \arg[\nu(j\zeta\omega)] - \pi \quad (3.22)$$

が成立する。これより、 ω が $0 \sim \infty$ で変化したときの $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡について調べる。まず $\omega = 0$ では、

$$M(j0)N(j0) = 0 \quad (3.23)$$

である.

$\omega = +0$ であるとき, $\arg[\nu(j\zeta\omega)] \rightarrow -\pi/2$ であり, また $[M(0)] = 0$ であるので, 式 (3.22) を考えると, $\arg[M(j\omega)N(j\omega)] \rightarrow -\pi/2$ となる. これより,

$$\omega \rightarrow +0 \text{ のとき, } M(j\omega)N(j\omega) \text{ の軌跡は実軸の下部にある.} \quad (3.24)$$

$0 < \omega < \omega_1$ のときは, $1/2 < \operatorname{Re}[M(j\omega)]$ であるので, 補題A (b) より,

$$\begin{aligned} 0 < \omega < \omega_1 \text{ であるとき, } M(j\omega)N(j\omega) \text{ の軌跡は原点を除く実軸の} \\ [-1, \infty) \text{ の部分と交わらない. } \omega = K(2\pi/\zeta) \text{ であるときこの軌跡} \\ \text{は原点を通る (} K \text{ は整数).} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$\omega_1 < \omega < \infty$ のときは, $\operatorname{Re}[M(j\omega)] < 1/2$ であるので, 補題A (a) より,

$$\begin{aligned} \omega_1 < \omega < \infty \text{ であるとき, } M(j\omega)N(j\omega) \text{ の軌跡は実軸の } (-\infty, -1] \\ \text{の部分と交わらない.} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$\omega \rightarrow \infty$ のときは,

$$\omega \rightarrow \infty \text{ であるとき, } M(j\omega)N(j\omega) \rightarrow 0 \text{ となる.} \quad (3.27)$$

である. このように ω が $0 \sim \infty$ で変化するそれぞれの過程で, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡を考えることから, このナイキスト軌跡が点 $(-1, j0)$ を回るかそうでないかをみる事ができる.

もし, $0 < \zeta < \bar{\zeta}$ の範囲にある場合は, $0 < \zeta\omega_1 < \alpha_1 < 2\pi$ となる. したがって, $\omega = \omega_1$ のとき, $\nu(j\zeta\omega)$ の軌跡は点 A_1 の下方にあることになるので,

$$-\pi/2 < \arg[\nu(j\zeta\omega_1)] < \arg[M(j\omega_1)] < \pi/2 \quad (3.28)$$

である. よって, 式 (3.22) より,

$$-\pi < \arg[M(j\omega_1)N(j\omega_1)] < 0 \quad (3.29)$$

ということになる. これより, $\omega = \omega_1$ の時の $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡は実軸の下方にある. また, $\omega_1 < 2\pi/\zeta$ であるから, $0 < \omega < \omega_1$ において, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡は原点は通らない. ゆえに, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡は点 $(-1, j0)$ を回らない. よって,

定理 2 より, この制御系は安定となる. つぎに, $\bar{\zeta} < \zeta$ の範囲にある場合において, $\bar{\zeta} < \zeta < 2\pi/\omega_1$ の範囲にあるときを考える. $\zeta\omega_1 > \alpha_1$ であるので, $\omega = \omega_1$ において点 $\nu(j\zeta\omega)$ は点 A_1 の上方にある. ゆえに,

$$-\pi/2 < \arg[P(j\omega_1)] < \arg[\nu(j\zeta\omega_1)] < \pi/2 \quad (3.30)$$

である. よって, 式 (3.22) より,

$$-2\pi < \arg[M(j\omega_1)N(j\omega_1)] < -\pi \quad (3.31)$$

ということになる. これより, $\omega = \omega_1$ のときの $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡は実軸の上部にあることになり, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡は点 $(-1, j0)$ を回る. よって, 定理 2 より, この制御系は不安定となる. つぎに $2\pi/\omega \leq \zeta$ の範囲にあるときを考える. この範囲にある時には, ある $\omega = \hat{\omega}$ において $\zeta\hat{\omega} = 2\pi$ となる. $\omega \rightarrow \hat{\omega} - 0$ のとき, $\arg[\nu(j\omega)] \rightarrow \pi/2$ であり, $\arg[M(j\omega)]$ は,

$$-\pi/2 \arg[M(j\omega)] < \pi/2 \quad (3.32)$$

の範囲に収まる. よって, 式 (3.22) より $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡は実軸の上部から原点に収束することがわかる. これより, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡が点 $(-1, j0)$ を回ることがわかる. よって, 定理 2 よりこの制御系は不安定となる.

$\zeta < 0$ の場合 ($0 \leq L_1 < L$). $\zeta\omega$ の符号が負となる事を注意すると, $\zeta > 0$ の場合と同様に証明が可能である.

- (iii) $M(j\omega)$ の軌跡と $\nu(j\omega)$ の軌跡との交点が複数になった場合については, 定理 4(ii) の証明と同様に証明が可能であり, ここでは略証を与える. まず, 2 点で交わった場合 ($k = 2$) について考えてみる. ただし, $\omega_1 < \omega_2$ である.

$0 < \zeta < \bar{\zeta}$ の場合. 定理 4(ii) と同様につぎの事がいえる.

$$0 < \omega < \omega_1 \text{ であるとき, } M(j\omega)N(j\omega) \text{ の軌跡は実軸の } (-\infty, -1] \text{ の部分と交わらない.} \quad (3.33)$$

という事は,

$$0 > \arg[M(j\omega_1)N(j\omega_1)] > -\pi \quad (3.34)$$

また,

$\omega_1 < \omega < \omega_2$ であるとき, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡は原点を除く実軸の $[-1, \infty)$ の部分と交わらない. 原点と交わるのは $\omega = K(2\pi/\zeta)$ のときである. (3.35)

という事は,

$$0 > \arg[M(j\omega_1)N(j\omega_1)] > -\pi \quad (3.36)$$

また,

$\omega_2 < \omega < \infty$ であるとき, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡は実軸の $(-\infty, -1]$ の部分と交わらない. (3.37)

がいえる. これらと (ii) の証明による式 (3.22), (3.23), (3.26) より, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡が点 $(-1, j0)$ を回らない事がいえる.

同様に, $\bar{\zeta} < \zeta < 0$ の場合についてもいえる. ■

上記の定理については, (ii) については必要十分条件を示したが, (iii) については十分条件のみを述べている. これは, 実際に交点が複数個になった場合では, ひとつずつ各点毎に ω_i と α_i の値を調べて条件を求めていくこともできる. しかしながら, ただ複雑に成るだけであまり実用的といえないのでここでは省略した. 1点で交わる場合は, 求められた安定性の範囲内では安定であり, また範囲外ではたちまち不安定となる. 複数点で交わる場合では, 安定性の範囲内ではもちろん安定であるが, 範囲外においても安定となる点が存在することになる. しかし, 定理4で求められる安定性の条件はほとんど場合において安定限界で, この条件によっても十分実用的な値を得ることが出来る.

《補題 A》

$M(s)$, $N(s)$ が与えられ, ゲインのミスマッチがない場合 ($\epsilon = 0$) であるとする. $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$ とおく.

(a) $\omega \in \Omega$ に対して $\text{Re}[M(j\omega)] < \frac{1}{2}$ であるならば, $M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡は実軸の $(-\infty, -1]$ の部分と交わらない.

(b) $\omega \in \Omega$ に対して $\text{Re}[M(j\omega)] > \frac{1}{2}$ であるならば, $M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡は原点を除く実軸の $[-1, \infty)$ の部分と交わらない. また, $\omega = K(2\pi/\zeta)$ の時に限り, $M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡が原点を通る (K は整数倍).

Proof.

$M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡について考察する. $M(j\omega)N(j\omega)$ の実部および虚部は, $M(j\omega)$ の実部および虚部と $N(j\omega)$ の実部および虚部により, 以下のように表せる.

$$\text{Re}[M(j\omega)N(j\omega)] = -(1 - \cos \zeta\omega)\text{Re}[M(j\omega)] + \sin \zeta\omega\text{Im}[M(j\omega)] \quad (3.38)$$

$$\text{Im}[M(j\omega)N(j\omega)] = -\sin \zeta\omega\text{Re}[M(j\omega)] - (1 - \cos \zeta\omega)\text{Im}[M(j\omega)] \quad (3.39)$$

が成立する. ある ω において $M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡が実軸と交わったとすると, その ω の値において,

$$\text{Im}[M(j\omega)N(j\omega)] = 0 \quad (3.40)$$

である.

もし, $(1 - \cos \zeta\omega) = 0$ であるなら $\sin \zeta\omega = 0$ となり, $M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡は原点に一致する.

また, $(1 - \cos \zeta\omega) \neq 0$ であるなら,

$$\text{Im}[M(j\omega)] = \frac{-\sin \zeta\omega}{1 - \cos \zeta\omega} \text{Re}[M(j\omega)] \quad (3.41)$$

が成り立つ. この式 (3.41) を式 (3.38) に代入すると,

$$\begin{aligned} \text{Re}[M(j\omega)N(j\omega)] &= -\text{Re}[M(j\omega)](1 - \cos \zeta\omega + \frac{\sin^2 \zeta\omega}{1 - \cos \zeta\omega}) \\ &= -\text{Re}[M(j\omega)] \left(\frac{1 - 2 \cos \zeta\omega + \cos^2 \zeta\omega + \sin^2 \zeta\omega}{1 - \cos \zeta\omega} \right) \\ &= -2\text{Re}[M(j\omega)] \end{aligned} \quad (3.42)$$

となる. これより補題 A がいえる. ■

3.4 ゲインとむだ時間の両方にミスマッチがある場合の安定領域

ここでは、ゲインとむだ時間の両方にミスマッチがある場合について、その相互関係から安定領域について求める。まず、式 (3.11) の右辺の軌跡を考えるために以下のような式を考える。

$$\xi(\epsilon, j\alpha) = \{1 - (1 + \epsilon)e^{-j\alpha}\}^{-1} \quad (3.43)$$

この式について、ゲインのミスマッチ ϵ が一定であるとする。と $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡は点 $(-1/\epsilon, j0)$ と点 $(1/(2 + \epsilon), j0)$ を直径の両端とする円を描く。ゲインとむだ時間の両方にミスマッチが存在する場合は、 ϵ の値を適当な刻み幅で場合分けし、その ϵ の値毎に $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡と前節の $M(j\omega)$ の軌跡との交点を分析する事からパラメータ空間上で安定領域を求める事が出来る。

定理 5 図 2.1 のスミス制御系において全てのパラメータにミスマッチがない場合に、この制御系が安定となるように動的補償器のパラメータ F, D, K_1, K_2 が選ばれているとする。ゲインとむだ時間の両方にミスマッチがある時 ($A_r = A$, $b_r = b$, $c_r = (1 + \epsilon)c$, $L_r = L + \zeta$) に、以下のことがなりたつ。

$0 < \epsilon$ であるとき、

- (1) $M(j\omega)$ の軌跡が $\xi(\epsilon_0, j\alpha)$ の軌跡の内部にある時、 $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ の範囲のゲインのミスマッチ ϵ と、むだ時間のミスマッチ ζ のあらゆる値に対してこの制御系は安定となる。
- (2) $M(0) > 0$ であり、 $M(j\omega)$ の軌跡の位相角 $\angle M(j\omega)$ が単調に減少し、 $M(j\omega)$ の軌跡と $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡が k 点 $A_1, \dots, A_k$ で交わるものとする。ある点 A_i での $M(j\omega)$ の軌跡上の ω の値を ω_i , $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡上の α の値で $0 < \alpha < 2\pi$ の範囲のものを α_i , $-2\pi < \alpha < 0$ の範囲のものを α'_i とする。

$$\bar{\zeta} = \min \left(\frac{\alpha_1}{\omega_1}, \dots, \frac{\alpha_k}{\omega_k} \right) \quad (3.44)$$

$$\underline{\zeta} = \max \left(-L, \frac{\alpha'_1}{\omega_1}, \dots, \frac{\alpha'_k}{\omega_k} \right) \quad (3.45)$$

とする．いま，ゲインのミスマッチが ϵ であり，むだ時間のミスマッチが以下の範囲にあるとき，

$$\underline{\zeta} < \zeta < \bar{\zeta} \quad (3.46)$$

このスミス制御系は安定となる．

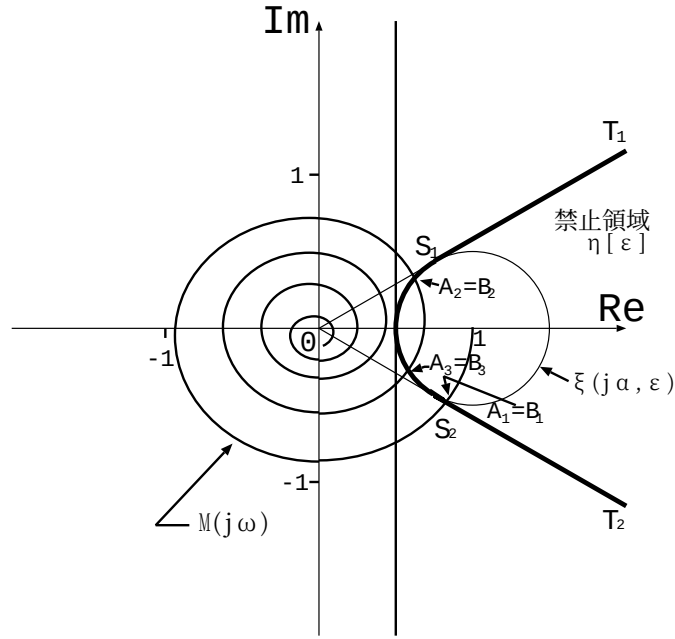


図 3.5: $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡と禁止領域

$0 > \epsilon$ であるとき，

- (3) $M(j\omega)$ の軌跡が禁止領域 $\eta[\epsilon_0]$ の外部にあるなら， $-1 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ の範囲のゲインのミスマッチと，むだ時間のミスマッチのあらゆる値に対してこの制御系は安定となる．
- (4) $M(0) > 0$ であり， $M(j\omega)$ の軌跡の位相角 $\angle M(j\omega)$ が単調に減少し， $M(j\omega)$ の軌跡と $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡が k 点 $A_1, \dots, A_k$ で交わるものとする．また， $M(j\omega)$ の軌跡と禁止領域 $\eta[\epsilon]$ の境界線とが点 $B_1, \dots, B_k$ で交わるとする．ある点 B_i における $M(j\omega)$ の軌跡の ω の値を ω_i とし，ある点 A_i における $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡上の α の値

で $0 < \alpha < 2\pi$ の範囲のものを α_i , $-2\pi < \alpha < 0$ の範囲のものを α'_i とおく. また,

$$\bar{\zeta} = \min \left(\frac{\alpha_1}{\omega_1}, \dots, \frac{\alpha_k}{\omega_k} \right) \quad (3.47)$$

$$\underline{\zeta} = \max \left(-L, \frac{\alpha'_1}{\omega_1}, \dots, \frac{\alpha'_k}{\omega_k} \right) \quad (3.48)$$

とする. いま, ゲインのミスマッチが ϵ であり, むだ時間のミスマッチ ζ が以下の範囲にあるとき,

$$\underline{\zeta} < \zeta < \bar{\zeta} \quad (3.49)$$

このスミス制御系は安定となる.

Proof.

- (1) このとき, 章末の補題 B(b) より, 点 $M(j\omega)$ が閉曲線 $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡の内部にあるとき, 点 $M(j\omega)N(j\omega)$ は実軸の $(-1, j0)$ の区間にあるので, 実軸の $(-\infty, -1]$ の部分と交わらないので, 点 $(-1, j0)$ を回らない.
- (2) $\zeta > 0$ である場合, $M(j\omega)$ の軌跡が閉曲線 $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡の内部にあるとき, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡が実軸の $(-\infty, -1]$ の部分と交わらない. また, $M(j\omega)$ の軌跡が $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡の外側にあるとき, ある周波数 $\tilde{\omega}$ において $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡が実軸の負の部分と交われば, 補題 B(a) より点 $M(j\tilde{\omega})$, 点 $\xi(\epsilon, j\zeta\tilde{\omega})$, および原点は一直線上にあることになり,

$$|M(j\tilde{\omega})| < |\xi(\epsilon, j\zeta\tilde{\omega})| \quad (3.50)$$

が成り立つ. よって, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡が実軸の $(-\infty, -1]$ の部分と交わらない事がいえる.

- (3) (1) と同様に証明できる.
- (4) (2) と同様に証明できる.

《補題 B》

$M(s)$, $N(s)$, $\xi(\epsilon, j\alpha)$ が与えられ, ゲインのミスマッチがない場合 ($\epsilon = 0$) であるとする. また, $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$ とおく.

- (a) ある $\tilde{\omega}$ において, $M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡は実軸の負の部分と交われば, 点 $M(j\tilde{\omega})$, 点 $\xi(\epsilon, j\zeta\tilde{\omega})$, および原点は一直線上にある.
- (b) $\epsilon > 0$ であるとき, $\omega \in \Omega$ において点 $M(j\omega)$ が $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡の内部に存在するならば, $\omega \in \Omega$ において $M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡は実軸の $(-\infty, -1]$ の部分と交わらない.
- (c) $\epsilon < 0$ であるとき, 原点 0 ($0, j0$) から $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡へ接線を引いて, その接点を S_1 および S_2 とする. その接線 OS_1 と OS_2 の延長線上の点を T_1 と T_2 とする. 半直線 S_1T_1 , S_2T_2 と $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡の弧 S_1S_2 の部分の右側にある部分を禁止領域と呼び, $\eta[\epsilon]$ で表す (図 3.5). $\omega \in \Omega$ において $M(j\omega)$ の軌跡が禁止領域 $\eta[\epsilon]$ の外部にあるなら, $\omega \in \Omega$ において $M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡は実軸の $(-\infty, -1]$ の部分と交わらない.

Proof.

(a) 式 (3.22) より,

$$\arg[N(j\omega)] = -\arg[\xi(\epsilon, j\zeta\omega)] - \pi \quad (3.51)$$

となるので,

$$\arg[M(j\omega)N(j\omega)] = -\arg[\xi(\epsilon, j\zeta\omega)] - \pi + \arg[M(j\omega)] \quad (3.52)$$

が成立する. $\omega = \tilde{\omega}$ において, $M(j\omega)N(j\omega)$ が実軸の負の部分と交われば,

$$\arg[M(j\tilde{\omega})N(j\tilde{\omega})] = \pm(2l+1)\pi \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (3.53)$$

よって, 式 (3.52) より

$$\arg[M(j\tilde{\omega})] = \arg[\xi(\epsilon, j\zeta\tilde{\omega})] \pm 2l\pi \quad (3.54)$$

となる. これは $\omega = \tilde{\omega}$ における点 $M(j\tilde{\omega})$, 点 $\xi(\epsilon, j\zeta\tilde{\omega})$ および原点が一直線上に存在することを意味している.

- (b) ω の値が $\tilde{\omega} \in \Omega$ であるとき, $M(j\omega)N(j\omega)$ のナイキスト軌跡が実軸の負の部分と交わるとすると, 点 $M(j\tilde{\omega})$ が $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡の内部あるので,

$$|M(j\tilde{\omega})| < |\xi(\epsilon, j\zeta\tilde{\omega})| \quad (3.55)$$

であるので, $|-1/N(j\tilde{\omega})| = |\xi(\epsilon, j\zeta\tilde{\omega})|$ より,

$$|M(j\tilde{\omega})N(j\tilde{\omega})| < 1 \quad (3.56)$$

である. これより, $M(j\tilde{\omega})N(j\tilde{\omega})$ は実軸の $(-1, 0)$ の区間に存在する.

- (c) ある $\tilde{\omega} \in \Omega$ において, $M(j\omega)N(j\omega)$ の軌跡が実軸の負の部分と交わるとすると, 点 $M(j\tilde{\omega})$ が禁止領域 $\eta[\epsilon]$ の外部に存在することになるので, 式 (3.55), (3.56) が成立する.

これより, この補題 B は明らかである. ■

第 4 章

安定条件の検証

例題を用いて安定条件を検証する．例題に対してゲイン余裕およびむだ時間余裕を求め，その安定条件の範囲についてシミュレーションにより有効性を確認する．

4.1 例題

つぎのような制御対象を例題とする．

$$G(s) = \frac{1}{5s + 1} \quad (4.1)$$

また，動的補償器は，

$$G_c(s) = \frac{14s + 11.25}{s} \quad (4.2)$$

とする．

式 (4.1)，(4.2) より，スミス制御系の伝達関数は，

$$G_s(s) = \frac{70s^2 + 70.25s + 11.25}{25s^3 + 80s^2 + 71.25s + 11.25} e^{-sL} \quad (4.3)$$

となる．ただし，むだ時間を L とする．

そして，試験入力 δ_t として，

$$\delta_t = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を用いた．

4.2 例題に対するゲイン余裕とその検証

まず，式 (4.1) の制御対象を状態空間表現により表すと，

$$A = -0.2, \quad b = 1, \quad c = 0.2, \quad d = 0 \quad (4.4)$$

となる．

また，式 (3.7) に述べたように，例題に対して与えられる式 (4.3) の伝達関数が，まさに安定条件を求める為に必要となる $M(s)$ である．

この例題に対して，ゲインにのみミスマッチがある場合 ($\zeta = 0$)， $M(j\omega)$ の軌跡が $\omega = 0$ を出発し，はじめて実軸を交わる点を P_1 とすると， $\text{Re}[P_1] = -0.890$ となる．定理 3 より安定性が保たれるゲイン余裕は，

$$\begin{aligned} \text{Re}[P_1] &> -\frac{1}{\epsilon} \\ -0.890 &> -\frac{1}{\epsilon} \\ \epsilon &< 1.1236 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ゲインについて式 (3.1) の仮定のもとで，安定限界となるゲインのミスマッチの値は $\epsilon = 1.1236$ である．このとき，制御対象のゲインは $c_r = 0.42472$ ，モデルのゲインは $c = 0.2$ となる．

実際に，このゲインのミスマッチの値が安定限界となっているかを検証する． $c_r = 0.42472$ の場合およびその ± 0.01 の場合について，スミス制御系に対するシミュレーションを行った．3つの場合のシミュレーションから，求められた条件で制御対象のゲインが $c_r = 0.42472$ ($\epsilon = 1.1236$ の場合) となる値を境界として 安定 – 定常状態 – 不安定 となっている．求められた条件は，確かにゲイン余裕である事が確認できた．

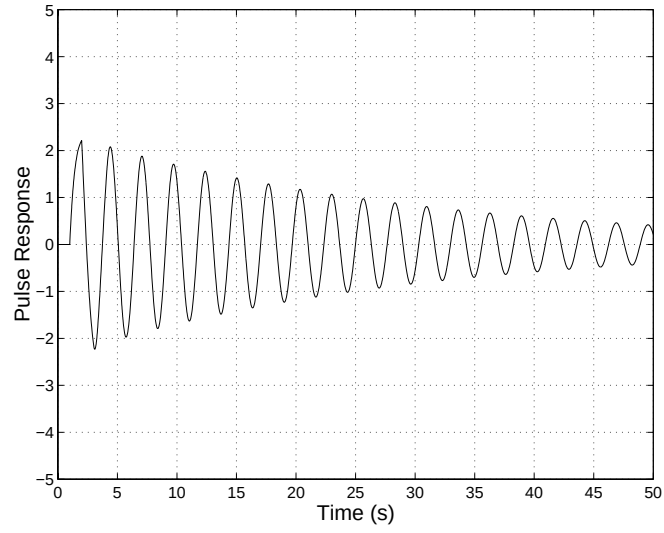


図 4.1: ゲイン余裕：検証 1 ($c_r = 0.41472$, $c = 0.2$)

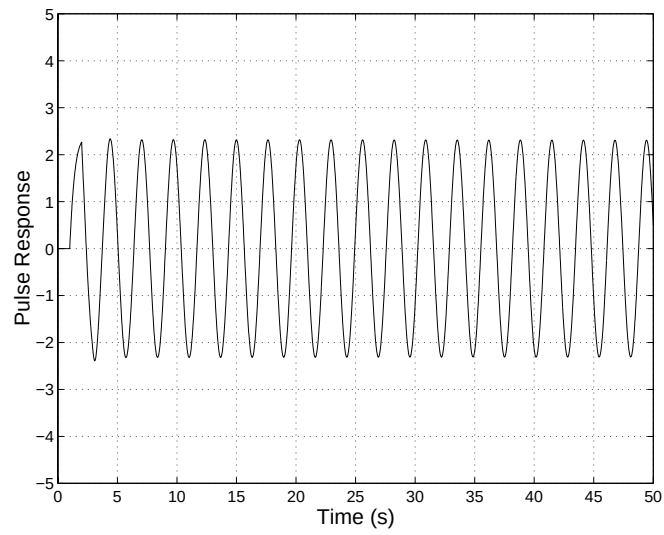


図 4.2: ゲイン余裕：検証 2 ($c_r = 0.42472$, $c = 0.2$)

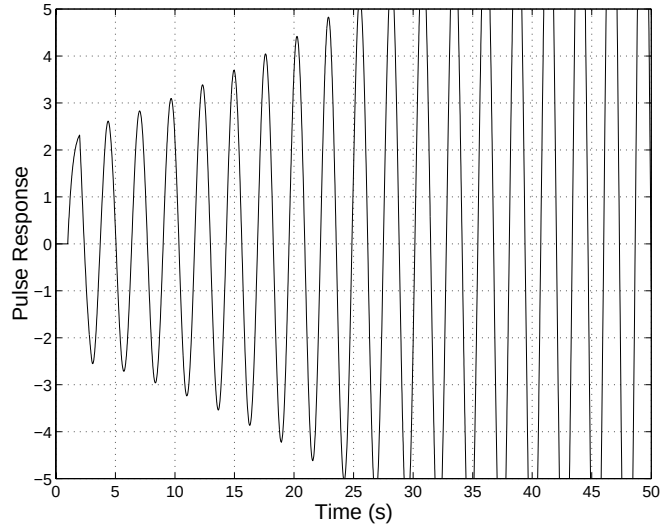


図 4.3: ゲイン余裕：検証 3 ($c_r = 0.43472$, $c = 0.2$)

4.3 例題に対するむだ時間余裕とその検証

式 (4.1), (4.2) の例題に対してむだ時間余裕を求めた．続いて，むだ時間余裕の条件の検証を行なった．この時，1 点で交わる場合をむだ時間 $L = 0.7$ ，3 点で交わる場合をむだ時間 $L = 1$ とした．

4.3.1 1 点で交わる場合 ($\epsilon = 0, L = 0.7$)

$L = 0$	A_1	$\omega_1=1.0996$	$\alpha_1=0.94248$	$\acute{\alpha}_1=-5.3407$
---------	-------	-------------------	--------------------	----------------------------

よって，定理 4 より，

$$\begin{aligned}\bar{\zeta} &= \alpha_1/\omega_1 \\ &= 0.8571\end{aligned}\tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\underline{\zeta} &= \max(\acute{\alpha}_1/\omega_1, -L) \\ &= \max(-4.8569, -0.7) \\ &= -0.7\end{aligned}\tag{4.7}$$

これよりむだ時間余裕は,

$$-0.7 < \zeta < 0.8571 \quad (4.8)$$

よって, 制御対象のむだ時間の安定範囲は,

$$0 < L_r < 1.5571 \quad (4.9)$$

となる. 下限点となる $L_r = 0 (\zeta = -0.7)$ の場合はこれ以下であると進み時間となるのため, まずこの下限点における検証を行なう. まず, この点においては安定となっている事

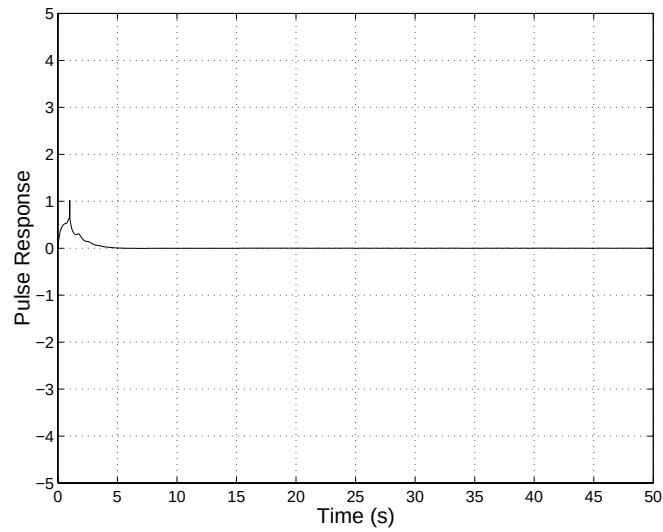


図 4.4: むだ時間余裕 (1点): 検証 1 ($L_r = 0$, $L = 0.7$)

が確認できる.

つぎに上限点となる $L_r = 1.5571 (\zeta = 0.8571)$ の場合について検証する．この点を中心に ± 0.1 の場合についてシミュレーションを行なう．定理 4(ii) より，この条件は必要十

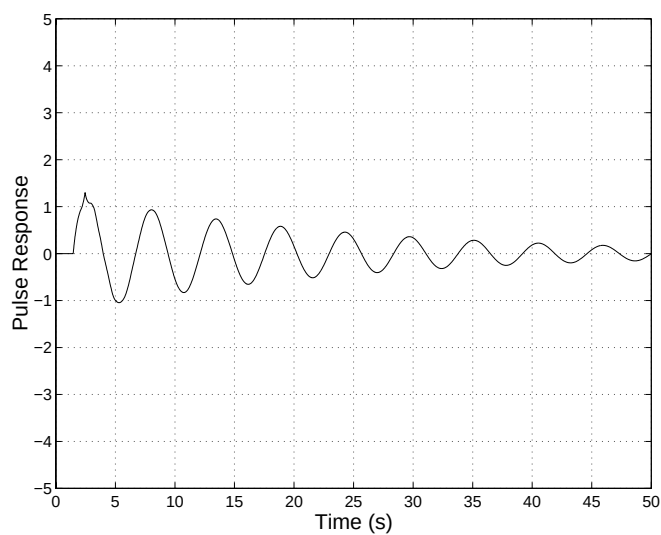


図 4.5: むだ時間余裕 (1 点) : 検証 2 ($L_r = 1.4571$, $L = 0.7$)

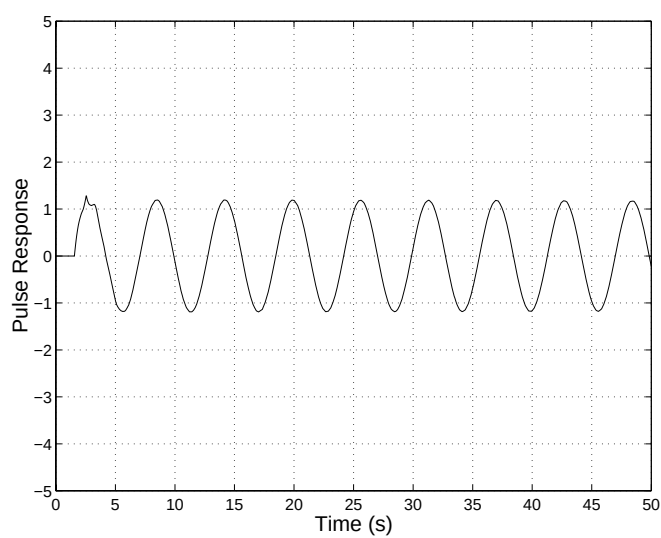


図 4.6: むだ時間余裕 (1 点) : 検証 3 ($L_r = 1.5571$, $L = 0.7$)

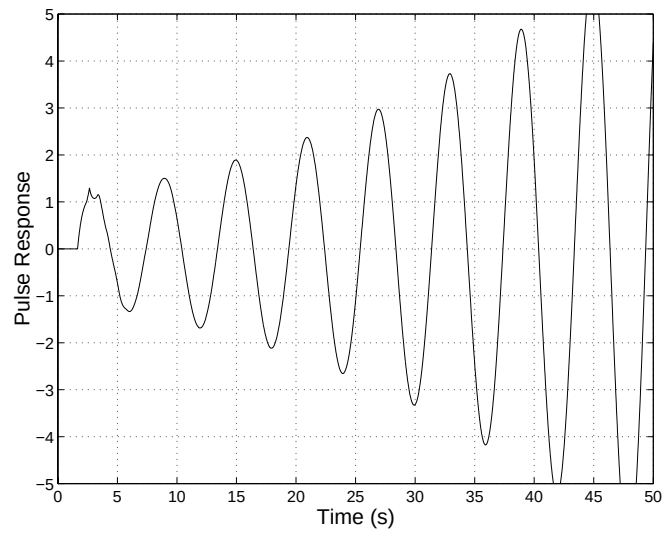


図 4.7: むだ時間余裕 (1 点) : 検証 4 ($L_r = 1.6571$, $L = 0.7$)

分条件であるので，むだ時間余裕の上限において定常状態を見る事ができ，またその上限のミスマッチの値 ($L_r = 1.5571$) をはさみ， ($L_r = 1.4571$) において安定， ($L_r = 1.6571$) において不安定となっている．これは安定余裕の上限がまさに安定限界となっていることを示している．

4.3.2 3点で交わる場合 ($\epsilon = 0, L = 1$)

$\epsilon = 0$	A_1	$\omega_1=0.87266$	$\alpha_1=0.94248$	$\acute{\alpha}_1=-5.3407$
	A_2	$\omega_2=4.7560$	$\alpha_2=3.9444$	$\acute{\alpha}_2=-2.3387$
	A_3	$\omega_3= 5.2098$	$\alpha_3=2.9583$	$\acute{\alpha}_3=-3.3249$

よって、定理 4(iii) より、

$$\begin{aligned}
 \bar{\zeta} &= \min(\alpha_1/\omega_1, \alpha_2/\omega_2, \alpha_3/\omega_3) \\
 &= \min(1.0800, 0.8294, 0.5678) \\
 &= 0.5678
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\zeta} &= \max(\acute{\alpha}_1/\omega_1, \acute{\alpha}_2/\omega_2, \acute{\alpha}_3/\omega_3, -L) \\
 &= \max(-6.1200, -0.4917, -0.6382, -0.7) \\
 &= -0.4917
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

である。これよりむだ時間余裕は、

$$-0.4917 < \zeta < 0.5678 \tag{4.12}$$

よって、制御対象のむだ時間の安定範囲は、

$$0.5083 < L_r < 1.5678 \tag{4.13}$$

図 4.8, 4.9 に見られるように、安定余裕の範囲の上限および下限において安定である事を示している。これは、式 (4.12) のむだ時間余裕を外れた値においても、安定となり得る場合が存在する可能性があると考えられ、求めた安定余裕の範囲の上限および下限が必ずしもシステムの安定限界ではないということである。

また、ここではむだ時間余裕を求めるとき、ゲインのミスマッチが存在しない場合 ($\epsilon = 0$) に限定したが、ゲインのミスマッチを変化させそれに対するむだ時間余裕を求めていけば、次章で示される ϵ - ζ 平面上の安定領域が求められる。

前章で述べられた安定条件について、例題に対して有効性を検証した。

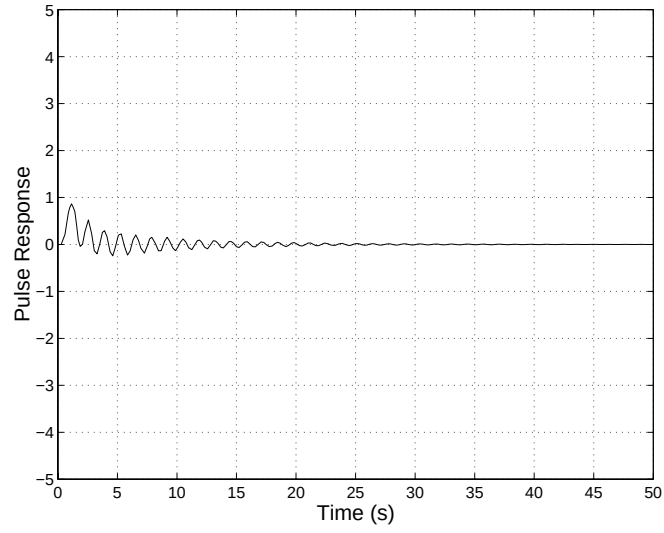


図 4.8: むだ時間余裕 (3 点): 検証 1 ($L_r = 0.5083$, $L = 1$)

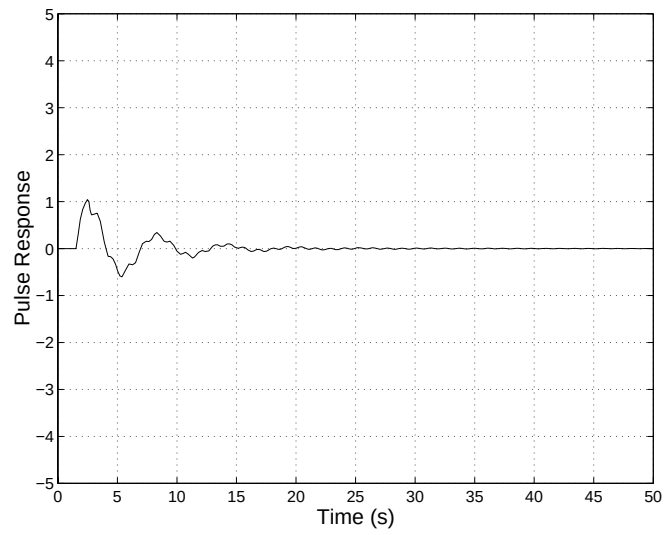


図 4.9: むだ時間余裕 (3 点): 検証 2 ($L_r = 1.5678$, $L = 1$)

第 5 章

安定領域の検証

例題に対して安定領域を求め、その安定条件の有効性を確認する。また、制御対象の時定数をひとつの指針として、その変化に対する安定領域の変遷を分析検討する。

5.1 例題に対する安定領域

式 (4.1), (4.2) の例題に対して、ゲインとむだ時間の両方にミスマッチが存在した場合の安定領域を求める。制御対象が式 (4.1) で表される時、時定数 $T = 5$ をとる。前章でむだ時間にのみミスマッチが存在した場合 ($\epsilon = 0$) のむだ時間余裕を示した。同様の手順を繰り返し、さまざまな ϵ に対してむだ時間余裕を求める。図 5.1 に示すように、ナイキスト線図上では ξ の軌跡は ϵ の値によって変化していく。 ϵ の変化に対して、それぞれの交点における ω , α の値を求めると表 5.1, 5.2 のようになる。続いて、定理 5 よりむだ時間余裕を求めると、表 5.3 が得られる。

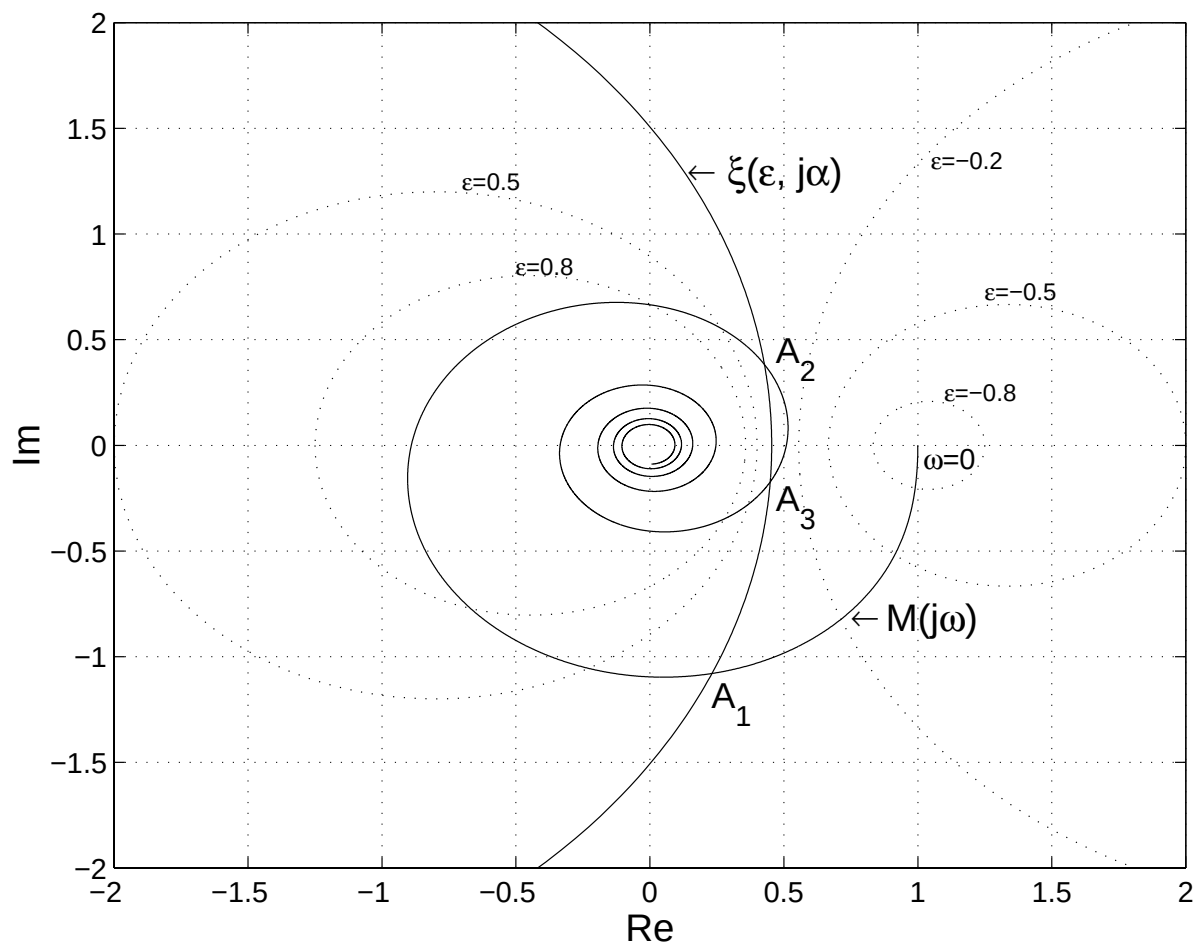


図 5.1: $M(j\omega)$ と $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡 ($\epsilon = 0.2$)

表 5.1: $M(j\omega)$ の軌跡と $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡との交点の ω と α の値, その 1

$\epsilon=-1$	A_1	なし		
$\epsilon=-0.9$	A_1	$\omega_1=0.09163$	$\alpha_1=1.4944$	$\acute{\alpha}_1=-4.7888$
$\epsilon=-0.8$	A_1	$\omega_1=0.18326$	$\alpha_1=1.4181$	$\acute{\alpha}_1=-4.8651$
$\epsilon=-0.7$	A_1	$\omega_1=0.27053$	$\alpha_1=1.3483$	$\acute{\alpha}_1=-4.9349$
$\epsilon=-0.6$	A_1	$\omega_1=0.35779$	$\alpha_1=1.2828$	$\acute{\alpha}_1=-5.0004$
$\epsilon=-0.5$	A_1	$\omega_1=0.44506$	$\alpha_1=1.2195$	$\acute{\alpha}_1=-5.0637$
$\epsilon=-0.4$	A_1	$\omega_1=0.53014$	$\alpha_1=1.1606$	$\acute{\alpha}_1=-5.1226$
$\epsilon=-0.3$	A_1	$\omega_1=0.61523$	$\alpha_1=1.1039$	$\acute{\alpha}_1=-5.1793$
$\epsilon=-0.2$	A_1	$\omega_1=0.70031$	$\alpha_1=1.0494$	$\acute{\alpha}_1=-5.2338$
$\epsilon=-0.1$	A_1	$\omega_1=0.7854$	$\alpha_1=0.99484$	$\acute{\alpha}_1=-5.2883$
$\epsilon=0$	A_1	$\omega_1=0.87266$	$\alpha_1=0.9403$	$\acute{\alpha}_1=-5.3429$
	A_2	$\omega_2=4.7538$	$\alpha_2=3.9466$	$\acute{\alpha}_2=-2.3366$
	A_3	$\omega_3=5.2098$	$\alpha_3=2.9627$	$\acute{\alpha}_3=-3.3205$
$\epsilon=0.1$	A_1	$\omega_1=0.96211$	$\alpha_1=0.88575$	$\acute{\alpha}_1=-5.3974$
	A_2	$\omega_2=4.5859$	$\alpha_2=4.2521$	$\acute{\alpha}_2=-2.0311$
	A_3	$\omega_3=5.3582$	$\alpha_3=2.666$	$\acute{\alpha}_3=-3.6172$
$\epsilon=0.2$	A_1	$\omega_1=1.0537$	$\alpha_1=0.82903$	$\acute{\alpha}_1=-5.4542$
	A_2	$\omega_2=4.4528$	$\alpha_2=4.4615$	$\acute{\alpha}_2=-1.8217$
	A_3	$\omega_3=5.4694$	$\alpha_3=2.4696$	$\acute{\alpha}_3=-3.8136$
$\epsilon=0.3$	A_1	$\omega_1=1.1476$	$\alpha_1=0.77231$	$\acute{\alpha}_1=-5.5109$
	A_2	$\omega_2=4.3306$	$\alpha_2=4.6317$	$\acute{\alpha}_2=-1.6515$
	A_3	$\omega_3=5.5654$	$\alpha_3=2.3169$	$\acute{\alpha}_3=-3.9663$
$\epsilon=0.4$	A_1	$\omega_1=1.2479$	$\alpha_1=0.71122$	$\acute{\alpha}_1=-5.5720$
	A_2	$\omega_2=4.2128$	$\alpha_2=4.78$	$\acute{\alpha}_2=-1.5032$
	A_3	$\omega_3=5.6527$	$\alpha_3=2.1882$	$\acute{\alpha}_3=-4.0950$

表 5.2: $M(j\omega)$ の軌跡と $\xi(\epsilon, j\alpha)$ の軌跡との交点の ω と α の値, その 2

$\epsilon=0.5$	A_1	$\omega_1=1.3526$	$\alpha_1=0.64795$	$\dot{\alpha}_1=-5.6352$
	A_2	$\omega_2=4.095$	$\alpha_2=4.9131$	$\dot{\alpha}_2=-1.3701$
	A_3	$\omega_3=5.7356$	$\alpha_3=2.0748$	$\dot{\alpha}_3=-4.2084$
$\epsilon=0.6$	A_1	$\omega_1=1.4617$	$\alpha_1=0.58032$	$\dot{\alpha}_1=-5.7029$
	A_2	$\omega_2=3.9728$	$\alpha_2=5.0418$	$\dot{\alpha}_2=-1.2414$
	A_3	$\omega_3=5.8163$	$\alpha_3=1.9722$	$\dot{\alpha}_3=-4.3110$
$\epsilon=0.7$	A_1	$\omega_1=1.5817$	$\alpha_1=0.50615$	$\dot{\alpha}_1=-5.7770$
	A_2	$\omega_2=3.8441$	$\alpha_2=5.1662$	$\dot{\alpha}_2=-1.1170$
	A_3	$\omega_3=5.8927$	$\alpha_3=1.8806$	$\dot{\alpha}_3=-4.4026$
$\epsilon=0.8$	A_1	$\omega_1=1.7148$	$\alpha_1=0.42324$	$\dot{\alpha}_1=-5.8599$
	A_2	$\omega_2=3.7066$	$\alpha_2=5.2927$	$\dot{\alpha}_2=-0.9905$
	A_3	$\omega_3=5.9668$	$\alpha_3=1.7977$	$\dot{\alpha}_3=-4.4855$
$\epsilon=0.9$	A_1	$\omega_1=1.8631$	$\alpha_1=0.32943$	$\dot{\alpha}_1=-5.9538$
	A_2	$\omega_2=3.5496$	$\alpha_2=5.4258$	$\dot{\alpha}_2=-0.8574$
	A_3	$\omega_3=6.0432$	$\alpha_3=1.7148$	$\dot{\alpha}_3=-4.5684$
$\epsilon=1.0$	A_1	$\omega_1=2.0442$	$\alpha_1=0.2138$	$\dot{\alpha}_1=-6.0694$
	A_2	$\omega_2=3.3663$	$\alpha_2=5.5741$	$\dot{\alpha}_2=-0.7091$
	A_3	$\omega_3=6.1152$	$\alpha_3=1.6406$	$\dot{\alpha}_3=-4.6426$
$\epsilon=1.1$	A_1	$\omega_1=2.2886$	$\alpha_1=0.054542$	$\dot{\alpha}_1=-6.2286$
	A_2	$\omega_2=3.1176$	$\alpha_2=5.7639$	$\dot{\alpha}_2=-0.5193$
	A_3	$\omega_3=6.1894$	$\alpha_3=1.5664$	$\dot{\alpha}_3=-4.7168$
$\epsilon=1.1236$	A_1	$\omega_1=2.3693$	$\alpha_1=0.0021817$	$\dot{\alpha}_1=-6.2810$
	A_2	$\omega_2=3.0347$	$\alpha_2=5.825$	$\dot{\alpha}_2=-0.4582$
	A_3	$\omega_3=6.2068$	$\alpha_3=1.549$	$\dot{\alpha}_3=-4.7342$

表 5.3: ϵ の値に対するむだ時間余裕の範囲 (時定数 $T = 5$ の場合)

$\epsilon=-0.9$	$-1 < \zeta < 16.3091$
$\epsilon=-0.8$	$-1 < \zeta < 7.7382$
$\epsilon=-0.7$	$-1 < \zeta < 4.9839$
$\epsilon=-0.6$	$-1 < \zeta < 3.5853$
$\epsilon=-0.5$	$-1 < \zeta < 2.7401$
$\epsilon=-0.4$	$-1 < \zeta < 2.1892$
$\epsilon=-0.3$	$-1 < \zeta < 1.7943$
$\epsilon=-0.2$	$-1 < \zeta < 1.4985$
$\epsilon=-0.1$	$-1 < \zeta < 1.2667$
$\epsilon=0.0$	$-0.4915 < \zeta < 0.5687$
$\epsilon=0.1$	$-0.4429 < \zeta < 0.4976$
$\epsilon=0.2$	$-0.4091 < \zeta < 0.4515$
$\epsilon=0.3$	$-0.3814 < \zeta < 0.4163$
$\epsilon=0.4$	$-0.3568 < \zeta < 0.3871$
$\epsilon=0.5$	$-0.3346 < \zeta < 0.3617$
$\epsilon=0.6$	$-0.3125 < \zeta < 0.3391$
$\epsilon=0.7$	$-0.2906 < \zeta < 0.3191$
$\epsilon=0.8$	$-0.2672 < \zeta < 0.2468$
$\epsilon=0.9$	$-0.2415 < \zeta < 0.1768$
$\epsilon=1.0$	$-0.2106 < \zeta < 0.1046$
$\epsilon=1.1$	$-0.1666 < \zeta < 0.0238$
$\epsilon=1.1236$	ゲイン余裕

表 5.3 を基に安定領域を求める.

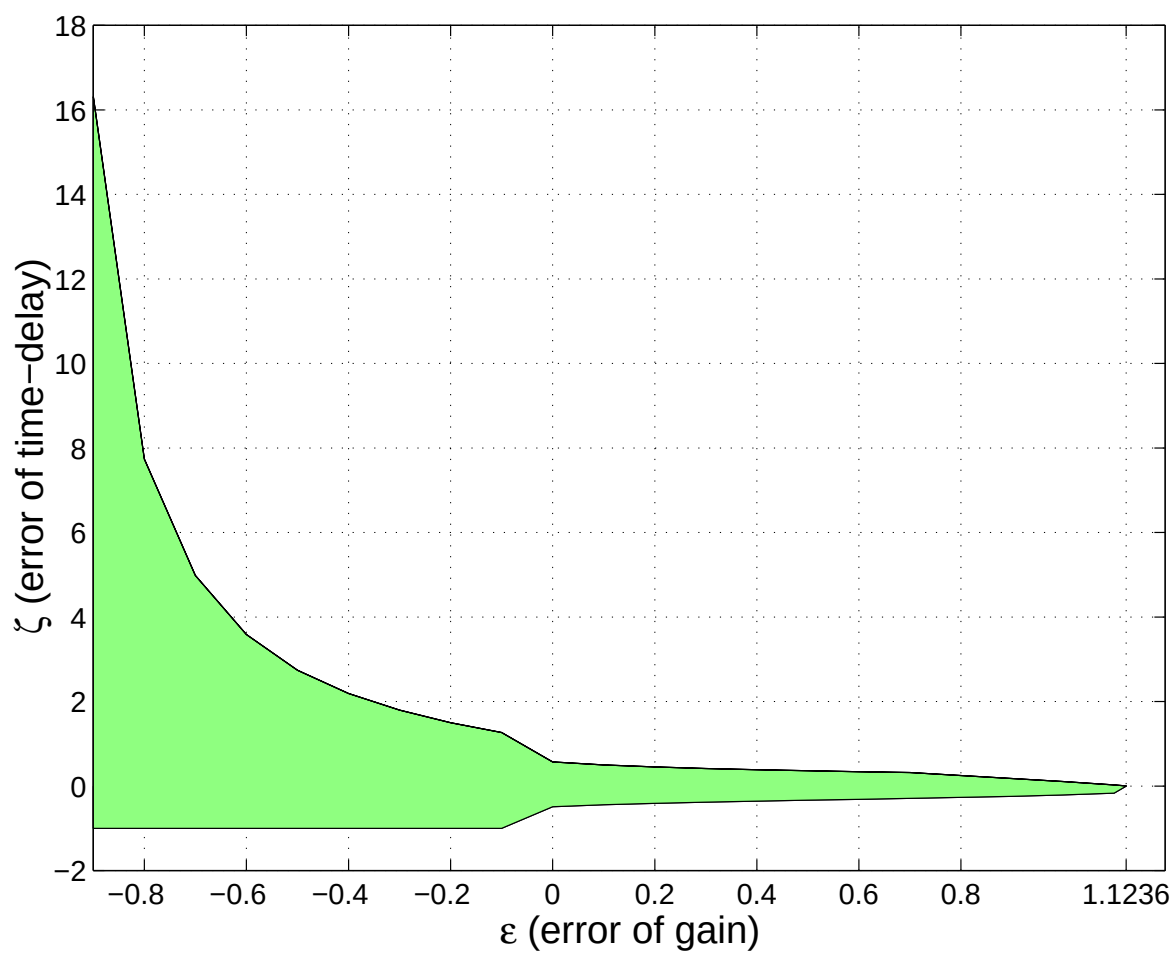


図 5.2: 例題に対する安定領域 (時定数 $T = 5$ の場合)

前章で検証したゲインにのみミスマッチがある場合は、表 5.3 中の $\epsilon = 1.1236$ の場合である。また、むだ時間にのみミスマッチがある場合は表 5.3 中の $\epsilon = 0$ のケースである。したがって、図 5.5 の検証として、 $\epsilon = -0.9$ の場合についてシミュレーションを行なう。

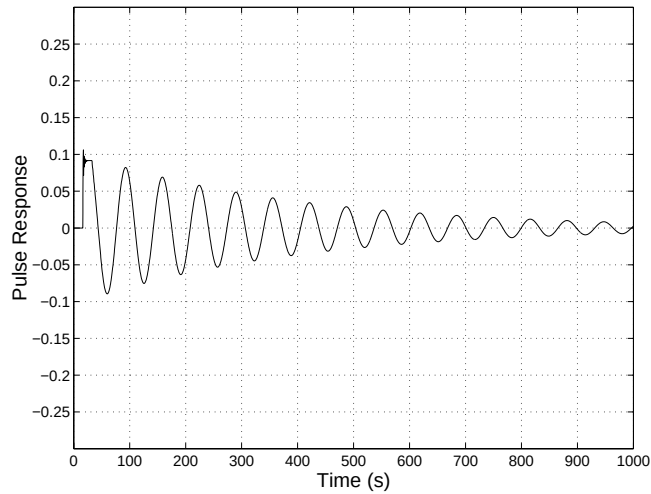


図 5.3: むだ時間余裕：検証 1 ($\epsilon = -0.9$, $c_r = 0.02$, $L_r = 16.3091$)

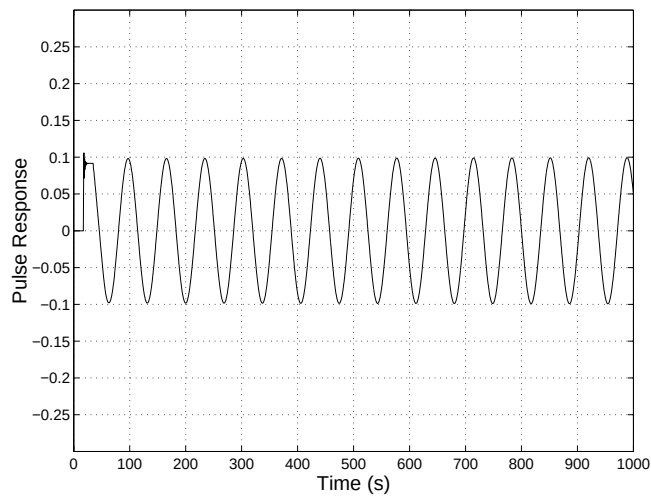


図 5.4: むだ時間余裕：検証 2 ($\epsilon = -0.9$, $c_r = 0.02$, $L_r = 17.3091$)

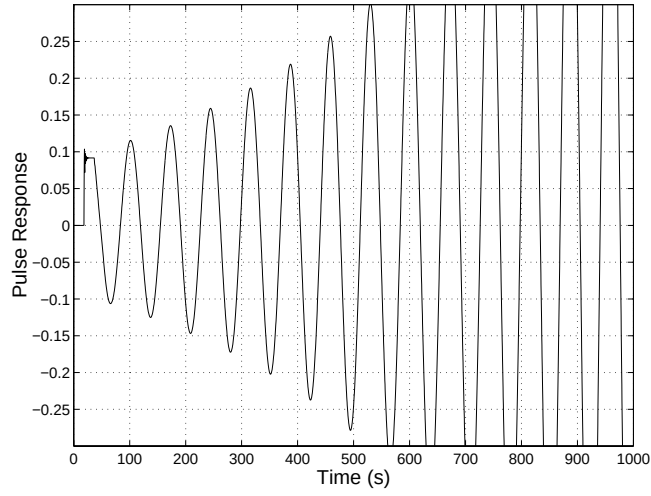


図 5.5: むだ時間余裕：検証 3 ($\epsilon = -0.9, c_r = 0.02, L_r = 18.3091$)

$\epsilon = -0.9$ の時のむだ時間余裕は,

$$-1 < \zeta < 16.3091 \quad (5.1)$$

である。したがって、制御対象のむだ時間の安定範囲は,

$$0 < L_r < 17.3091 \quad (5.2)$$

となる。ここでは、上限点である $L_r = 17.3091$ ($\zeta = 16.3091$) の場合の検証を行なう。よって、この点を中心に ± 1 の場合について、スミス制御系に対するシミュレーションを行なう。

このシミュレーション結果の応答特性は、これまで行なってきた場合と比較すると応答の振幅が大変に小さい。また、むだ時間のミスマッチの大きさがそのまま時間遅れとなつて影響するために、大変に長時間の観測を必要とする。ゲインが大変に微小であるために、むだ時間のミスマッチの影響が現れ難くなっている。言い換えると、むだ時間のミスマッチが大変大きい場合でも、ゲインが小さいとシステムは安定となる。しかしながら、応答が大変遅くなるといえる。

定理 5 を基にして求められた安定範囲の値で、安定条件として有効な値であることが確認できる。

5.2 時定数を変化させた場合の安定領域

例題は時定数 $T = 5$ である．ここでは，時定数 T がそれぞれ 5, 3, 2, 1, 0.5, 0.2, 0.1 に変化した場合の安定領域を求める．

5.2.1 時定数 $T = 3$ の場合

時定数 $T = 3$ の時，制御対象は，

$$G(s) = \frac{1}{3s + 1} \quad (5.3)$$

となる．

よって，式 (4.2)，(5.3) よりスミス制御系の伝達関数は，

$$G_{[3]}(s) = \frac{42s^2 + 47.75s + 11.25}{9s^3 + 48s^2 + 48.75s + 11.25} e^{-sL} \quad (5.4)$$

となる．ただし，むだ時間を L とする．

また，この例題に対しゲイン余裕を求める． $M(j\omega)$ の軌跡が始めて実軸と交わる点を $P_{[3]}$ とすると， $\text{Re}[P_{[3]}] = -0.95055$ となる．定理 3 より安定性が保たれるゲイン余裕は，

$$\begin{aligned} \text{Re}[P_{[3]}] &> -\frac{1}{\epsilon} \\ -0.95055 &> -\frac{1}{\epsilon} \\ \epsilon &< 1.0520 \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる．

表 5.4: ϵ の値に対するむだ時間余裕の範囲 (時定数 $T = 3$ の場合)

$\epsilon=-0.9$	$-1 < \zeta < 16.4571$
$\epsilon=-0.8$	$-1 < \zeta < 7.8905$
$\epsilon=-0.7$	$-1 < \zeta < 5.0605$
$\epsilon=-0.65$	$-1 < \zeta < 4.2506$
$\epsilon=-0.6$	$-1 < \zeta < 3.6375$
$\epsilon=-0.55$	$-0.5438 < \zeta < 0.5960$
$\epsilon=-0.5$	$-0.4700 < \zeta < 0.4973$
$\epsilon=-0.4$	$-0.4129 < \zeta < 0.4241$
$\epsilon=-0.3$	$-0.3785 < \zeta < 0.3797$
$\epsilon=-0.2$	$-0.3527 < \zeta < 0.3470$
$\epsilon=-0.1$	$-0.3321 < \zeta < 0.3205$
$\epsilon=0.0$	$-0.3141 < \zeta < 0.2981$
$\epsilon=0.1$	$-0.2978 < \zeta < 0.2782$
$\epsilon=0.2$	$-0.2826 < \zeta < 0.2604$
$\epsilon=0.3$	$-0.2676 < \zeta < 0.2440$
$\epsilon=0.4$	$-0.2527 < \zeta < 0.2288$
$\epsilon=0.5$	$-0.2372 < \zeta < 0.2144$
$\epsilon=0.6$	$-0.2207 < \zeta < 0.2006$
$\epsilon=0.7$	$-0.2023 < \zeta < 0.1874$
$\epsilon=0.8$	$-0.1809 < \zeta < 0.1747$
$\epsilon=0.9$	$-0.1538 < \zeta < 0.1536$
$\epsilon=1.0$	$-0.1122 < \zeta < 0.0676$
$\epsilon=1.0520$	ゲイン余裕

表 5.4 を基に安定領域を求める.

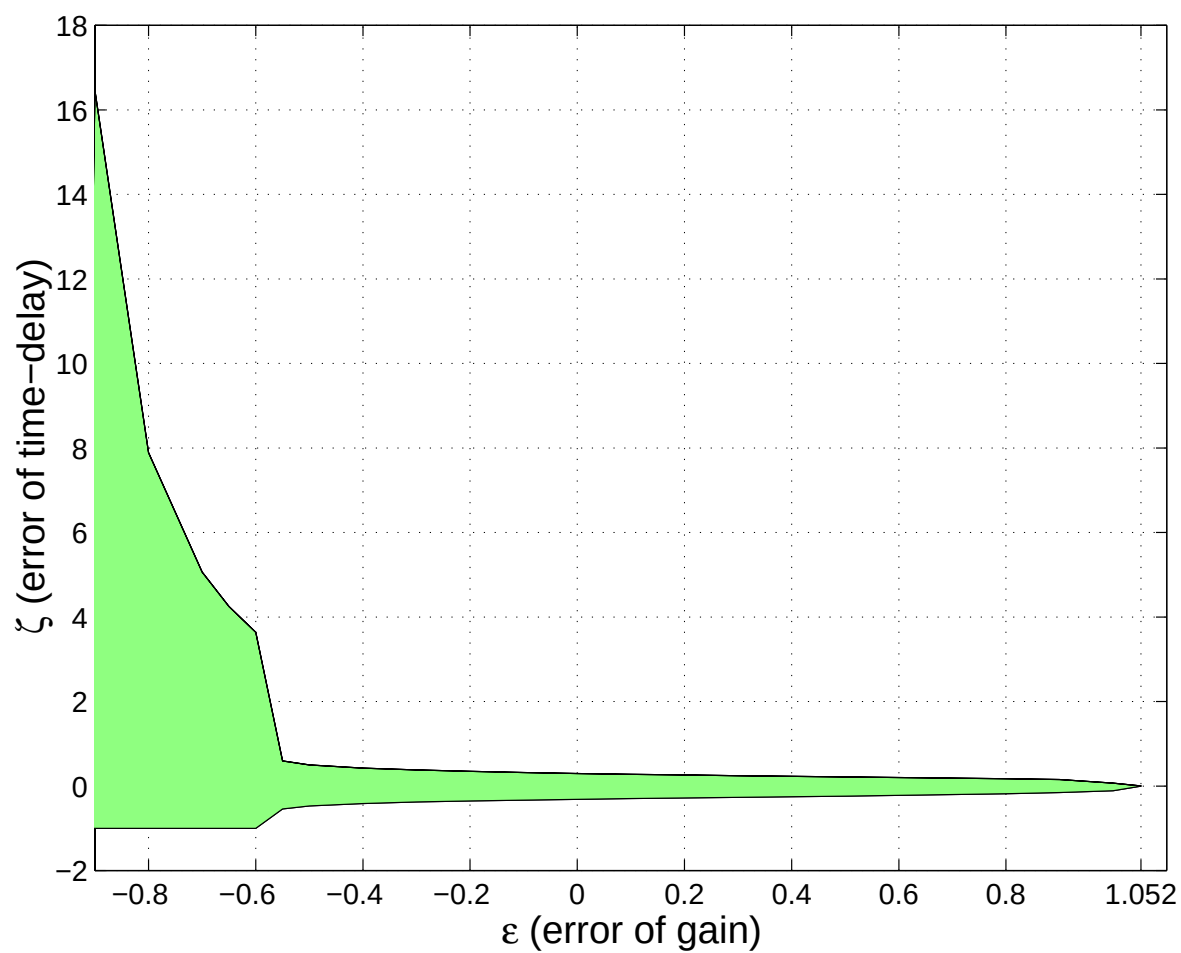


図 5.6: 時定数 $T = 3$ の場合の安定領域

5.2.2 時定数 $T = 2$ の場合

時定数 $T = 2$ の時, 制御対象は,

$$G(s) = \frac{1}{2s + 1} \quad (5.6)$$

となる.

よって, 式 (4.2), (5.6) よりスミス制御系の伝達関数は,

$$G_{[2]}(s) = \frac{28s^2 + 36.5s + 11.25}{4s^3 + 32s^2 + 37.5s + 11.25} e^{-sL} \quad (5.7)$$

となる. ただし, むだ時間を L とする.

また, この例題に対しゲイン余裕を求める. $M(j\omega)$ の軌跡が始めて実軸と交わる点を $P_{[2]}$ とすると, $\text{Re}[P_{[2]}] = -0.96752$ となる. 定理 3 より安定性が保たれるゲイン余裕は,

$$\begin{aligned} \text{Re}[P_{[2]}] &> -\frac{1}{\epsilon} \\ -0.96752 &> -\frac{1}{\epsilon} \\ \epsilon &< 1.0336 \end{aligned} \quad (5.8)$$

となる.

表 5.5: ϵ の値に対するむだ時間余裕の範囲 (時定数 $T = 2$ の場合)

$\epsilon = -0.9$	$-1 < \zeta < 16.5429$
$\epsilon = -0.8$	$-1 < \zeta < 7.9714$
$\epsilon = -0.75$	$-0.5036 < \zeta < 0.5240$
$\epsilon = -0.7$	$-0.4318 < \zeta < 0.4393$
$\epsilon = -0.6$	$-0.3739 < \zeta < 0.3696$
$\epsilon = -0.5$	$-0.3423 < \zeta < 0.3296$
$\epsilon = -0.4$	$-0.3203 < \zeta < 0.3010$
$\epsilon = -0.3$	$-0.3033 < \zeta < 0.2781$
$\epsilon = -0.2$	$-0.2888 < \zeta < 0.2585$
$\epsilon = -0.1$	$-0.2563 < \zeta < 0.2413$
$\epsilon = 0.0$	$-0.2132 < \zeta < 0.2226$
$\epsilon = 0.1$	$-0.1935 < \zeta < 0.1998$
$\epsilon = 0.2$	$-0.1789 < \zeta < 0.1831$
$\epsilon = 0.3$	$-0.1668 < \zeta < 0.1696$
$\epsilon = 0.4$	$-0.1563 < \zeta < 0.1582$
$\epsilon = 0.5$	$-0.1466 < \zeta < 0.1480$
$\epsilon = 0.6$	$-0.1375 < \zeta < 0.1389$
$\epsilon = 0.7$	$-0.1289 < \zeta < 0.1304$
$\epsilon = 0.8$	$-0.1204 < \zeta < 0.1226$
$\epsilon = 0.9$	$-0.1119 < \zeta < 0.1111$
$\epsilon = 1.0$	$-0.0756 < \zeta < 0.0570$
$\epsilon = 1.0336$	ゲイン余裕

表 5.5 を基に安定領域を求める.

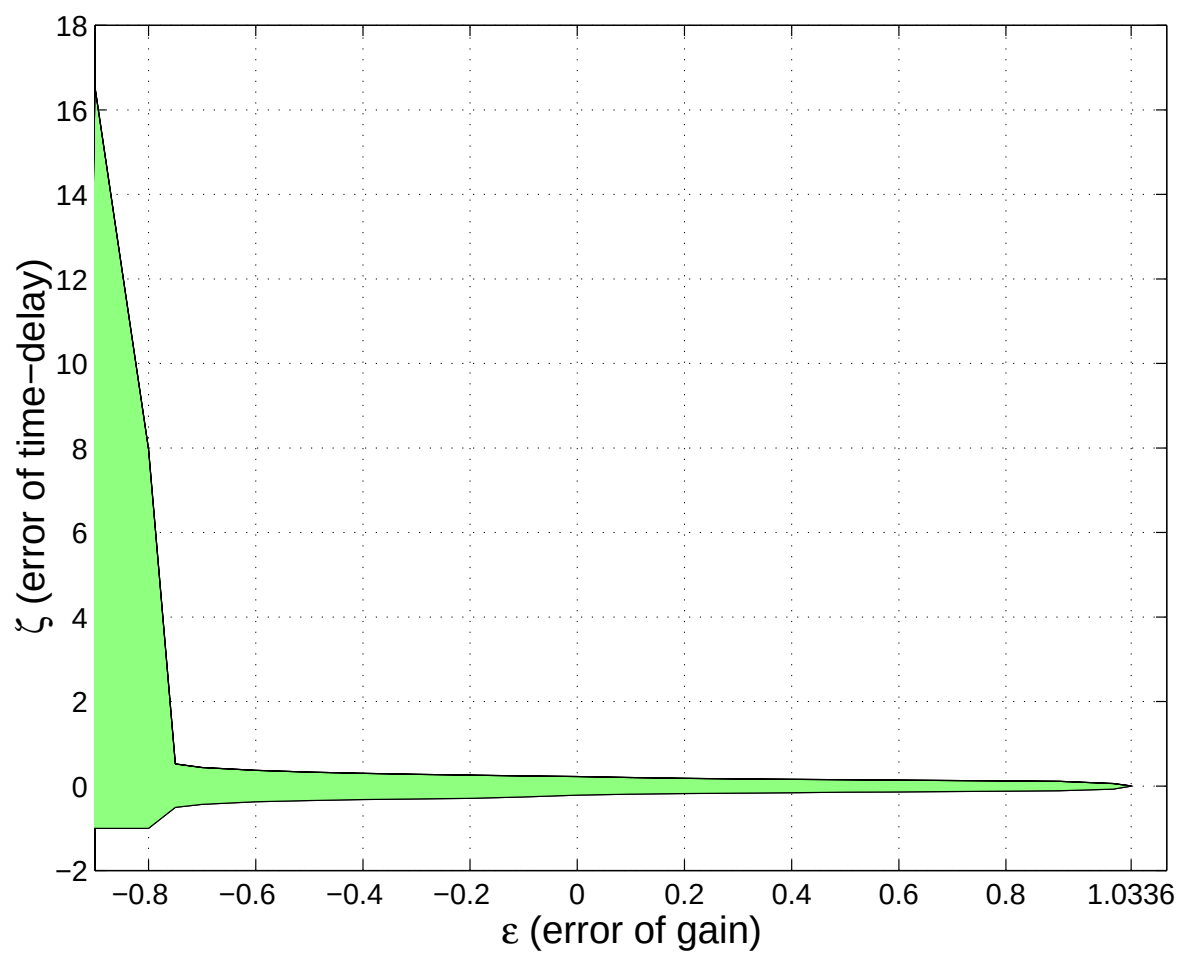


図 5.7: 時定数 $T = 2$ の場合の安定領域

5.2.3 時定数 $T = 1$ の場合

時定数 $T = 1$ の時, 制御対象は,

$$G(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (5.9)$$

となる.

よって, 式 (4.2), (5.9) より, スミス制御系の伝達関数は,

$$G_{[1]}(s) = \frac{14s^2 + 25.25s + 11.25}{s^3 + 16s^2 + 26.25s + 11.25} e^{-sL} \quad (5.10)$$

となる. ただし, むだ時間を L とする.

また, この例題に対しゲイン余裕を求める. $M(j\omega)$ の軌跡が始めて実軸と交わる点を $P_{[1]}$ とすると, $\text{Re}[P_{[1]}] = -0.96597$ となる. 定理 3 より安定性が保たれるゲイン余裕は,

$$\begin{aligned} \text{Re}[P_{[1]}] &> -\frac{1}{\epsilon} \\ -0.96597 &> -\frac{1}{\epsilon} \\ \epsilon &< 1.0352 \end{aligned} \quad (5.11)$$

となる.

表 5.6: ϵ の値に対するむだ時間余裕の範囲 (時定数 $T = 1$ の場合)

$\epsilon=-0.9$	$-0.4976 < \zeta < 0.5037$
$\epsilon=-0.8$	$-0.3446 < \zeta < 0.3350$
$\epsilon=-0.75$	$-0.3134 < \zeta < 0.3031$
$\epsilon=-0.7$	$-0.2740 < \zeta < 0.2648$
$\epsilon=-0.65$	$-0.2241 < \zeta < 0.2273$
$\epsilon=-0.6$	$-0.2017 < \zeta < 0.2025$
$\epsilon=-0.5$	$-0.1775 < \zeta < 0.1755$
$\epsilon=-0.4$	$-0.1623 < \zeta < 0.1585$
$\epsilon=-0.3$	$-0.1424 < \zeta < 0.1450$
$\epsilon=-0.2$	$-0.1263 < \zeta < 0.1272$
$\epsilon=-0.1$	$-0.1155 < \zeta < 0.1155$
$\epsilon=0.0$	$-0.1071 < \zeta < 0.1065$
$\epsilon=0.1$	$-0.1001 < \zeta < 0.0990$
$\epsilon=0.2$	$-0.0936 < \zeta < 0.0923$
$\epsilon=0.3$	$-0.0865 < \zeta < 0.0865$
$\epsilon=0.4$	$-0.0805 < \zeta < 0.0810$
$\epsilon=0.5$	$-0.0754 < \zeta < 0.0759$
$\epsilon=0.6$	$-0.0706 < \zeta < 0.0711$
$\epsilon=0.7$	$-0.0662 < \zeta < 0.0666$
$\epsilon=0.8$	$-0.0621 < \zeta < 0.0621$
$\epsilon=0.9$	$-0.0580 < \zeta < 0.0577$
$\epsilon=1.0$	$-0.0526 < \zeta < 0.0524$
$\epsilon=1.0352$	ゲイン余裕

表 5.6 を基に安定領域を求める.

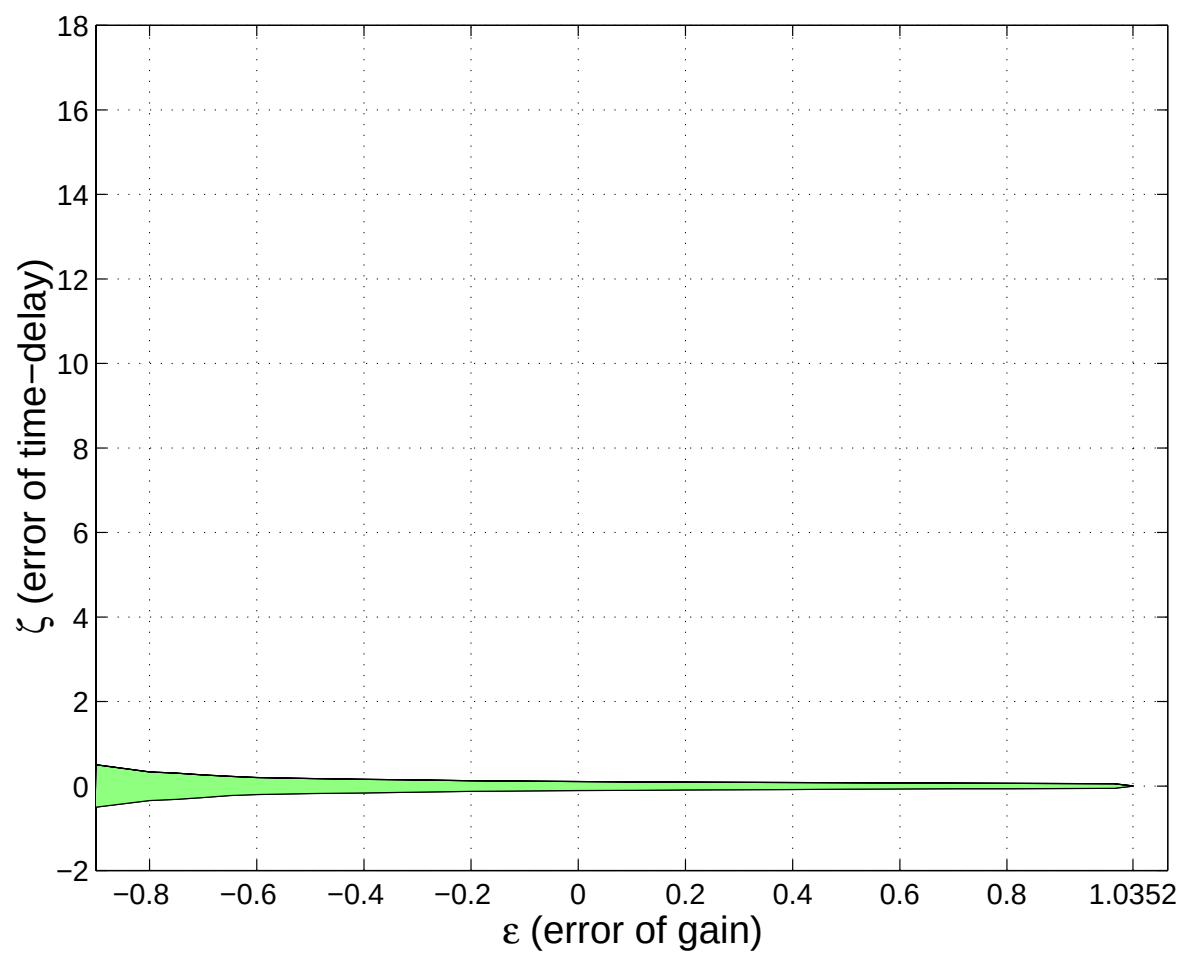


図 5.8: 時定数 $T = 1$ の場合の安定領域, その 1

ζ 軸の軸範囲を $(-2 < \zeta < 2)$ に変更する.

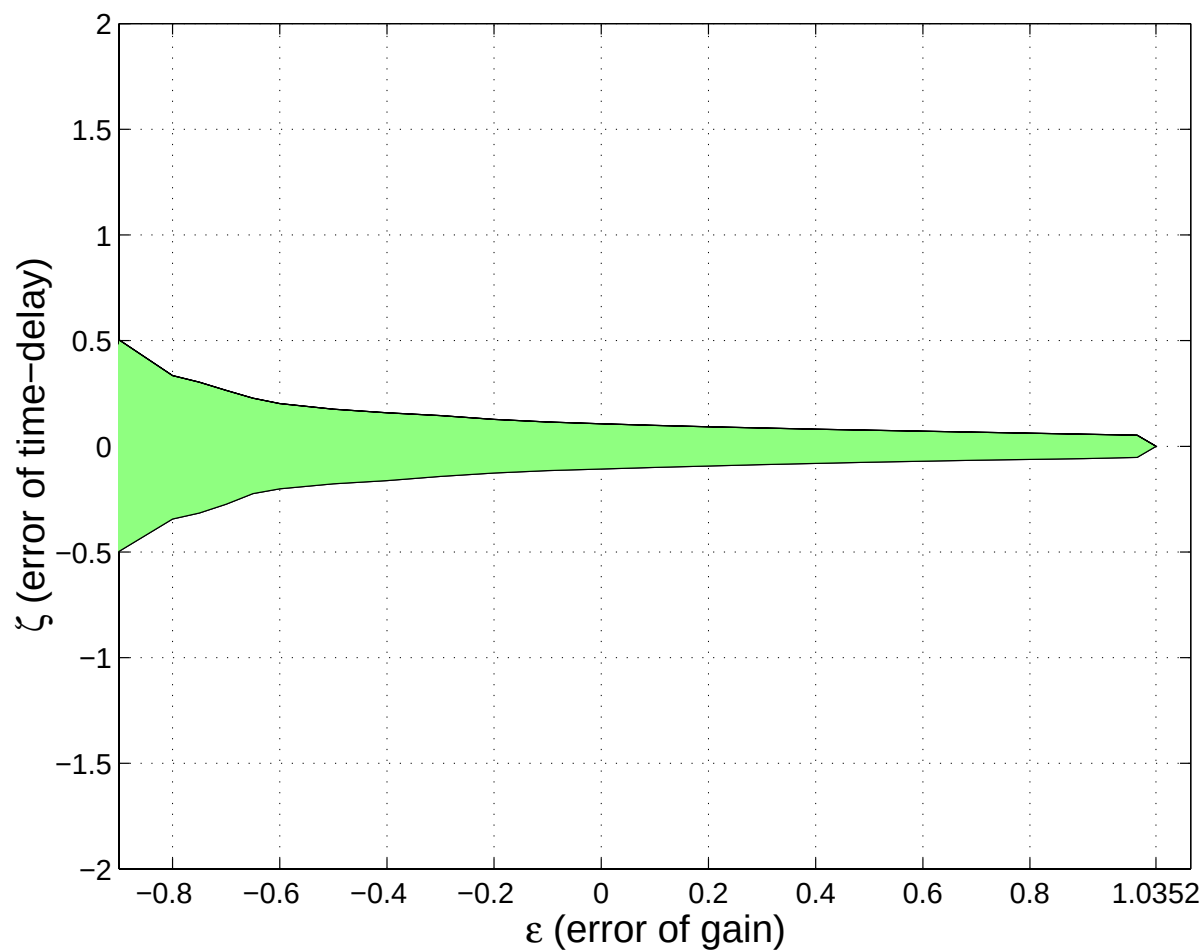


図 5.9: 時定数 $T = 1$ の場合の安定領域, その 2

5.2.4 時定数 $T = 0.5$ の場合

時定数 $T = 0.5$ の時，制御対象は，

$$G(s) = \frac{1}{0.5s + 1} \quad (5.12)$$

となる．

よって，式 (4.2)，(5.12) より，スミス制御系の伝達関数は，

$$G_{[0.5]}(s) = \frac{7s^2 + 19.625s + 11.25}{0.25s^3 + 8s^2 + 20.625s + 11.25} e^{-sL} \quad (5.13)$$

となる．ただし，むだ時間を L とする．

また，この例題に対しゲイン余裕を求める． $M(j\omega)$ の軌跡が始めて実軸と交わる点を $P_{[0.5]}$ とすると， $\text{Re}[P_{[0.5]}] = -0.95541$ となる．定理 3 より安定性が保たれるゲイン余裕は，

$$\begin{aligned} \text{Re}[P_{[0.5]}] &> -\frac{1}{\epsilon} \\ -0.95541 &> -\frac{1}{\epsilon} \\ \epsilon &< 1.0467 \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる．

表 5.7: ϵ の値に対するむだ時間余裕の範囲 (時定数 $T = 0.5$ の場合)

$\epsilon=-0.9$	$-0.3731 < \zeta < 0.3668$
$\epsilon=-0.85$	$-0.2132 < \zeta < 0.2131$
$\epsilon=-0.8$	$-0.1825 < \zeta < 0.1805$
$\epsilon=-0.7$	$-0.1292 < \zeta < 0.1289$
$\epsilon=-0.6$	$-0.1067 < \zeta < 0.1072$
$\epsilon=-0.5$	$-0.0909 < \zeta < 0.0905$
$\epsilon=-0.4$	$-0.0799 < \zeta < 0.0802$
$\epsilon=-0.3$	$-0.0711 < \zeta < 0.0710$
$\epsilon=-0.2$	$-0.0650 < \zeta < 0.0647$
$\epsilon=-0.1$	$-0.0588 < \zeta < 0.0589$
$\epsilon=0.0$	$-0.0542 < \zeta < 0.0541$
$\epsilon=0.1$	$-0.0503 < \zeta < 0.0502$
$\epsilon=0.2$	$-0.0466 < \zeta < 0.0467$
$\epsilon=0.3$	$-0.0434 < \zeta < 0.0434$
$\epsilon=0.4$	$-0.0406 < \zeta < 0.0406$
$\epsilon=0.5$	$-0.0381 < \zeta < 0.0380$
$\epsilon=0.6$	$-0.0358 < \zeta < 0.0357$
$\epsilon=0.7$	$-0.0335 < \zeta < 0.0335$
$\epsilon=0.8$	$-0.0314 < \zeta < 0.0314$
$\epsilon=0.9$	$-0.0293 < \zeta < 0.0293$
$\epsilon=1.0$	$-0.0270 < \zeta < 0.0269$
$\epsilon=1.0467$	ゲイン余裕

表 5.7 を基に安定領域を求める.

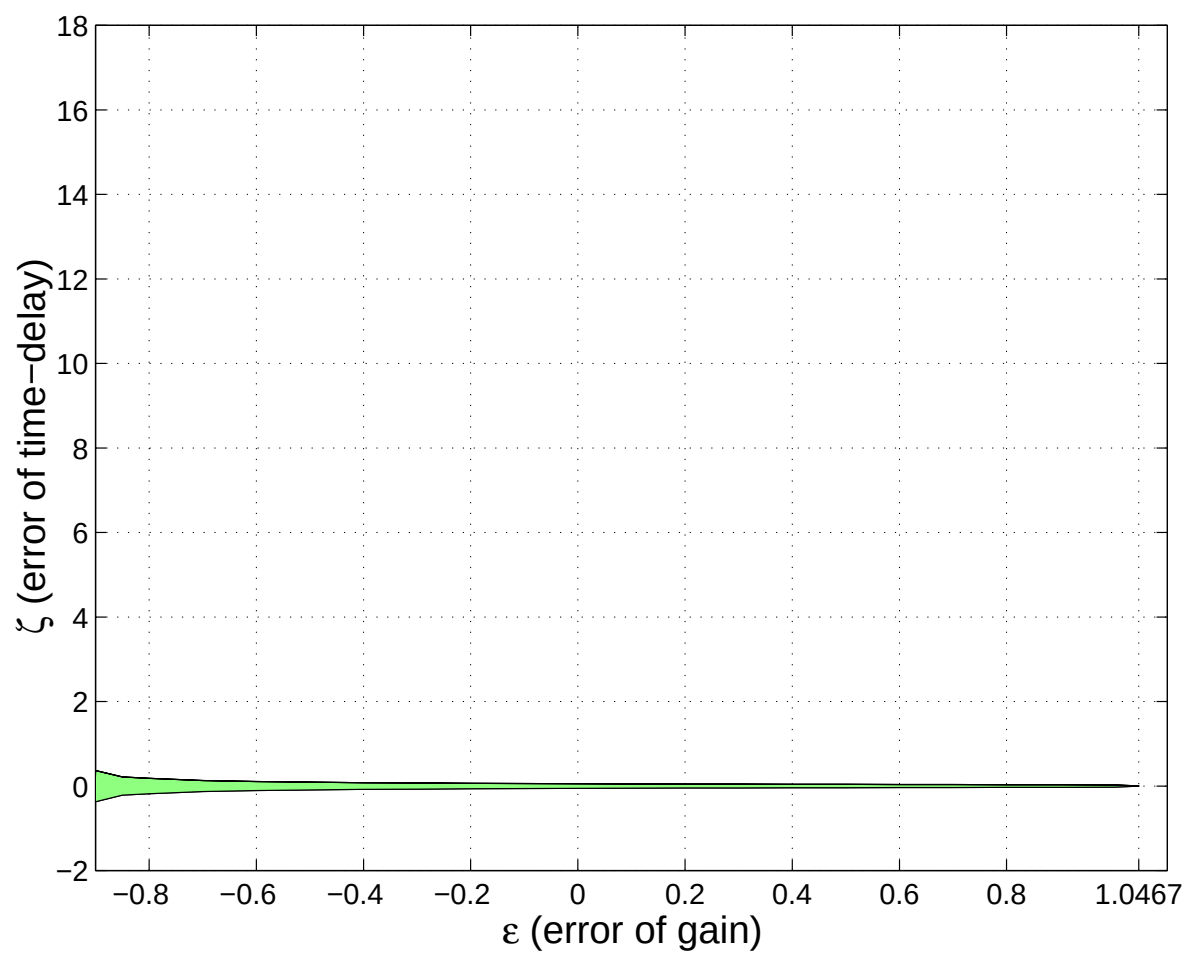


図 5.10: 時定数 $T = 0.5$ の場合の安定領域, その 1

ζ 軸の軸範囲を $(-2 < \zeta < 2)$ に変更する.

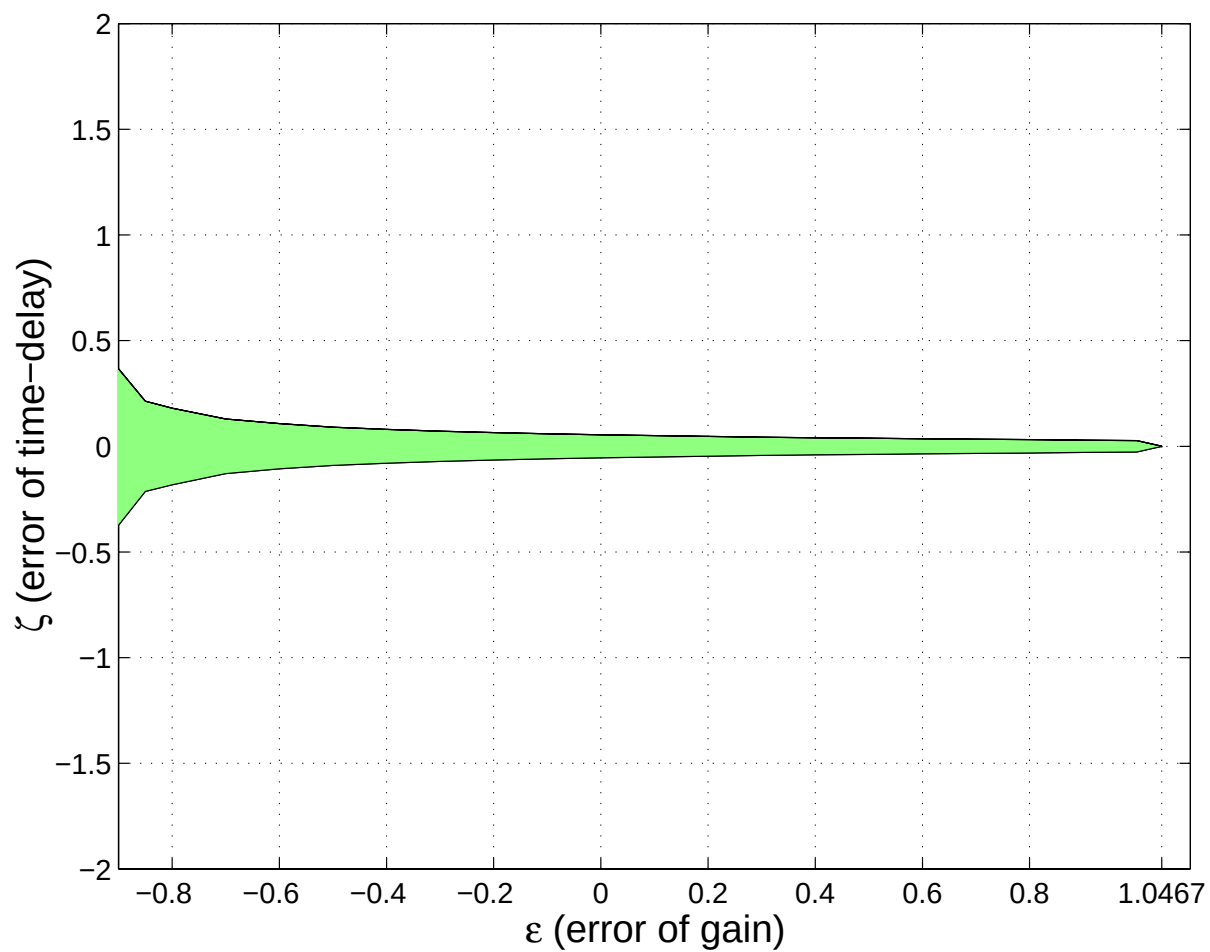


図 5.11: 時定数 $T = 0.5$ の場合の安定領域, その 2

5.2.5 時定数 $T = 0.2$ の場合

時定数 $T = 0.2$ の時, 制御対象は,

$$G(s) = \frac{1}{0.2s + 1} \quad (5.15)$$

となる.

よって, 式 (4.2), (5.15) より, スミス制御系の伝達関数は,

$$G_{[0.2]}(s) = \frac{2.8s^2 + 16.25s + 11.25}{0.04s^3 + 3.2s^2 + 17.25s + 11.25} e^{-sL} \quad (5.16)$$

となる. ただし, むだ時間を L とする.

また, この例題に対しゲイン余裕を求める. $M(j\omega)$ の軌跡が始めて実軸と交わる点を $P_{[0.2]}$ とすると, $\operatorname{Re}[P_{[0.2]}] = -0.94538$ となる. 定理 3 より安定性が保たれるゲイン余裕は,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[P_{[0.2]}] &> -\frac{1}{\epsilon} \\ -0.94538 &> -\frac{1}{\epsilon} \\ \epsilon &< 1.0578 \end{aligned} \quad (5.17)$$

となる.

表 5.8: ϵ の値に対するむだ時間余裕の範囲 (時定数 $T = 0.2$ の場合)

$\epsilon=-0.9$	$-0.1480 < \zeta < 0.1478$
$\epsilon=-0.85$	$-0.0981 < \zeta < 0.0979$
$\epsilon=-0.8$	$-0.0735 < \zeta < 0.0736$
$\epsilon=-0.7$	$-0.0540 < \zeta < 0.0540$
$\epsilon=-0.6$	$-0.0434 < \zeta < 0.0433$
$\epsilon=-0.5$	$-0.0370 < \zeta < 0.0369$
$\epsilon=-0.4$	$-0.0324 < \zeta < 0.0324$
$\epsilon=-0.3$	$-0.0289 < \zeta < 0.0289$
$\epsilon=-0.2$	$-0.0261 < \zeta < 0.0261$
$\epsilon=-0.1$	$-0.0238 < \zeta < 0.0238$
$\epsilon=0.0$	$-0.0218 < \zeta < 0.0218$
$\epsilon=0.1$	$-0.0203 < \zeta < 0.0202$
$\epsilon=0.2$	$-0.0189 < \zeta < 0.0189$
$\epsilon=0.3$	$-0.0177 < \zeta < 0.0177$
$\epsilon=0.4$	$-0.0166 < \zeta < 0.0168$
$\epsilon=0.5$	$-0.0156 < \zeta < 0.0158$
$\epsilon=0.6$	$-0.0146 < \zeta < 0.0148$
$\epsilon=0.7$	$-0.0137 < \zeta < 0.0138$
$\epsilon=0.8$	$-0.0128 < \zeta < 0.0128$
$\epsilon=0.9$	$-0.0118 < \zeta < 0.0119$
$\epsilon=1.0$	$-0.0109 < \zeta < 0.0109$
$\epsilon=1.0578$	ゲイン余裕

表 5.8 を基に安定領域を求める.

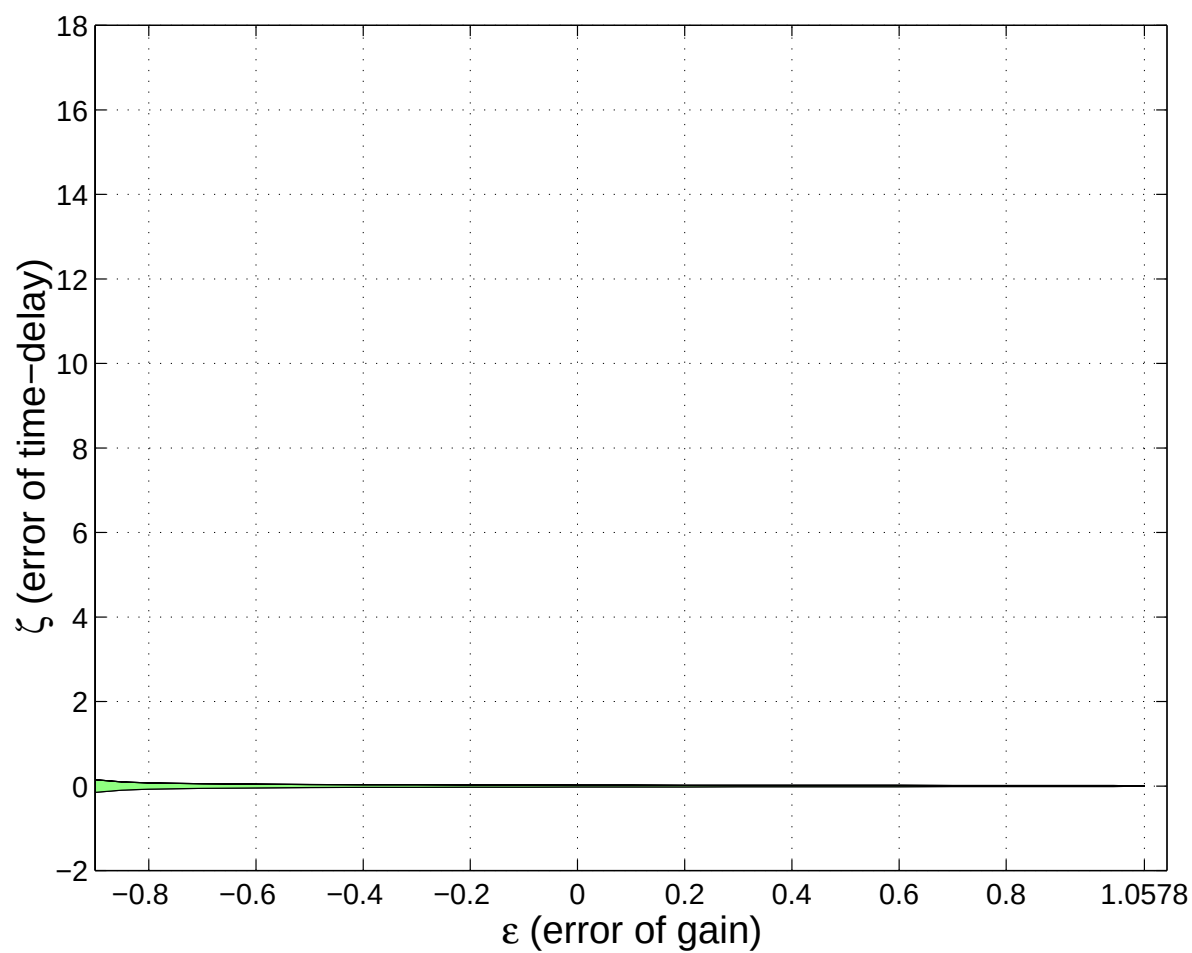


図 5.12: 時定数 $T = 0.2$ の場合の安定領域, その 1

ζ 軸の軸範囲を $(-0.5 < \zeta < 0.5)$ に変更する.

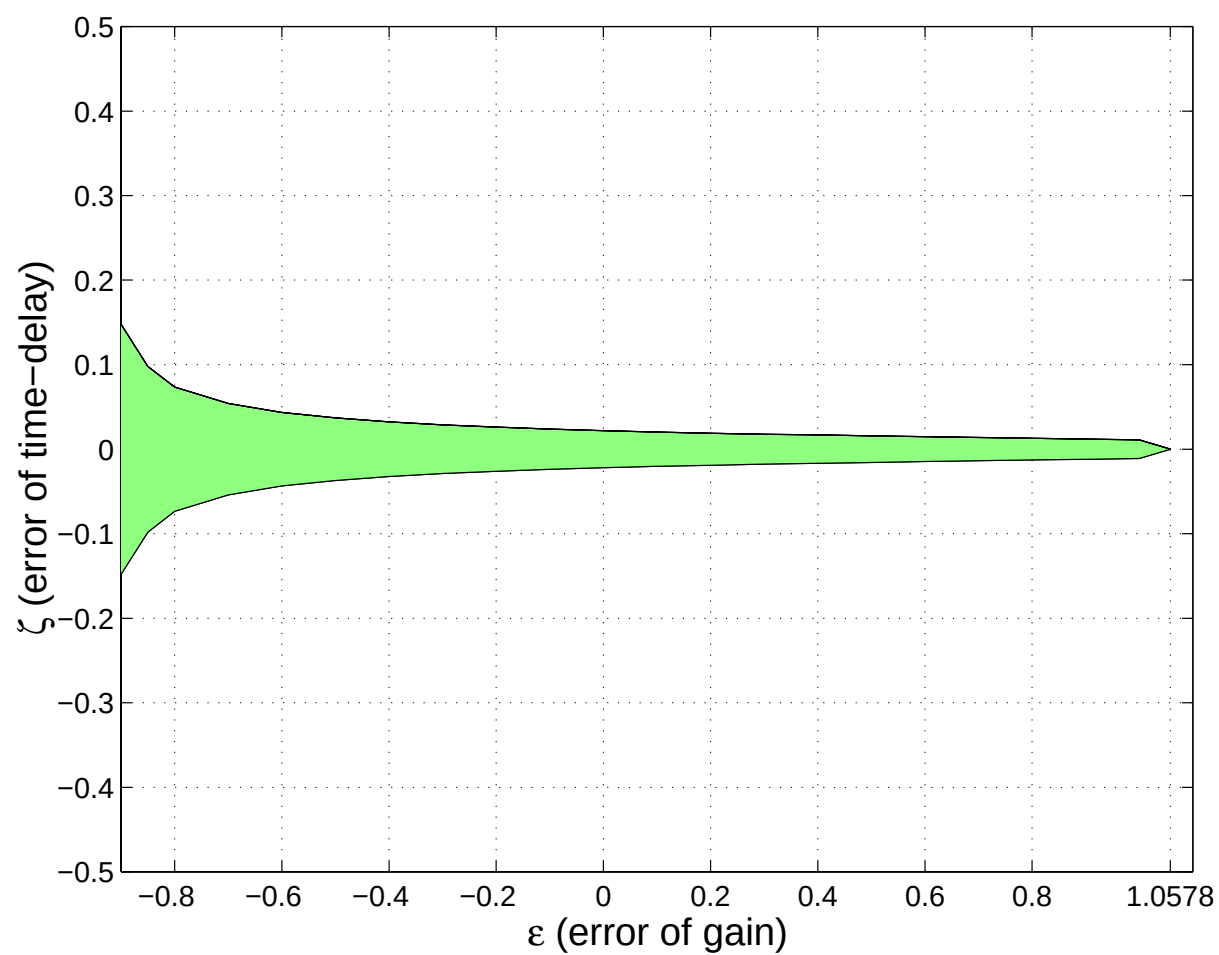


図 5.13: 時定数 $T = 0.2$ の場合の安定領域, その 2

5.2.6 時定数 $T = 0.1$ の場合

時定数 $T = 0.1$ の時, 制御対象は,

$$G(s) = \frac{1}{0.1s + 1} \quad (5.18)$$

となる.

よって, 式 (4.2), (5.18) より, スミス制御系の伝達関数は,

$$G_{[0.1]}(s) = \frac{1.4s^2 + 15.125s + 11.25}{0.01s^3 + 1.6s^2 + 16.125s + 11.25} e^{-sL} \quad (5.19)$$

となる. ただし, むだ時間を L とする.

また, この例題に対しゲイン余裕を求める. $M(j\omega)$ の軌跡が始めて実軸と交わる点を $P_{[0.1]}$ とすると, $\text{Re}[P_{[0.1]}] = -0.94140$ となる. 定理 3 より安定性が保たれるゲイン余裕は,

$$\begin{aligned} \text{Re}[P_{[0.1]}] &> -\frac{1}{\epsilon} \\ -0.94140 &> -\frac{1}{\epsilon} \\ \epsilon &< 1.0622 \end{aligned} \quad (5.20)$$

となる.

表 5.9: ϵ の値に対するむだ時間余裕の範囲 (時定数 $T = 0.1$ の場合)

$\epsilon=-0.9$	$-0.0801 < \zeta < 0.0802$
$\epsilon=-0.85$	$-0.0486 < \zeta < 0.0486$
$\epsilon=-0.8$	$-0.0375 < \zeta < 0.0375$
$\epsilon=-0.7$	$-0.0271 < \zeta < 0.0271$
$\epsilon=-0.6$	$-0.0228 < \zeta < 0.0228$
$\epsilon=-0.5$	$-0.0204 < \zeta < 0.0204$
$\epsilon=-0.4$	$-0.0188 < \zeta < 0.0187$
$\epsilon=-0.3$	$-0.0176 < \zeta < 0.0182$
$\epsilon=-0.2$	$-0.0165 < \zeta < 0.0171$
$\epsilon=-0.1$	$-0.0155 < \zeta < 0.0161$
$\epsilon=0.0$	$-0.0146 < \zeta < 0.0151$
$\epsilon=0.1$	$-0.0138 < \zeta < 0.0142$
$\epsilon=0.2$	$-0.0130 < \zeta < 0.0134$
$\epsilon=0.3$	$-0.0122 < \zeta < 0.0125$
$\epsilon=0.4$	$-0.0114 < \zeta < 0.0117$
$\epsilon=0.5$	$-0.0106 < \zeta < 0.0108$
$\epsilon=0.6$	$-0.0098 < \zeta < 0.0100$
$\epsilon=0.7$	$-0.0089 < \zeta < 0.0091$
$\epsilon=0.8$	$-0.0080 < \zeta < 0.0081$
$\epsilon=0.9$	$-0.0070 < \zeta < 0.0071$
$\epsilon=1.0$	$-0.0059 < \zeta < 0.0059$
$\epsilon=1.0622$	ゲイン余裕

表 5.9 を基に安定領域を求める.

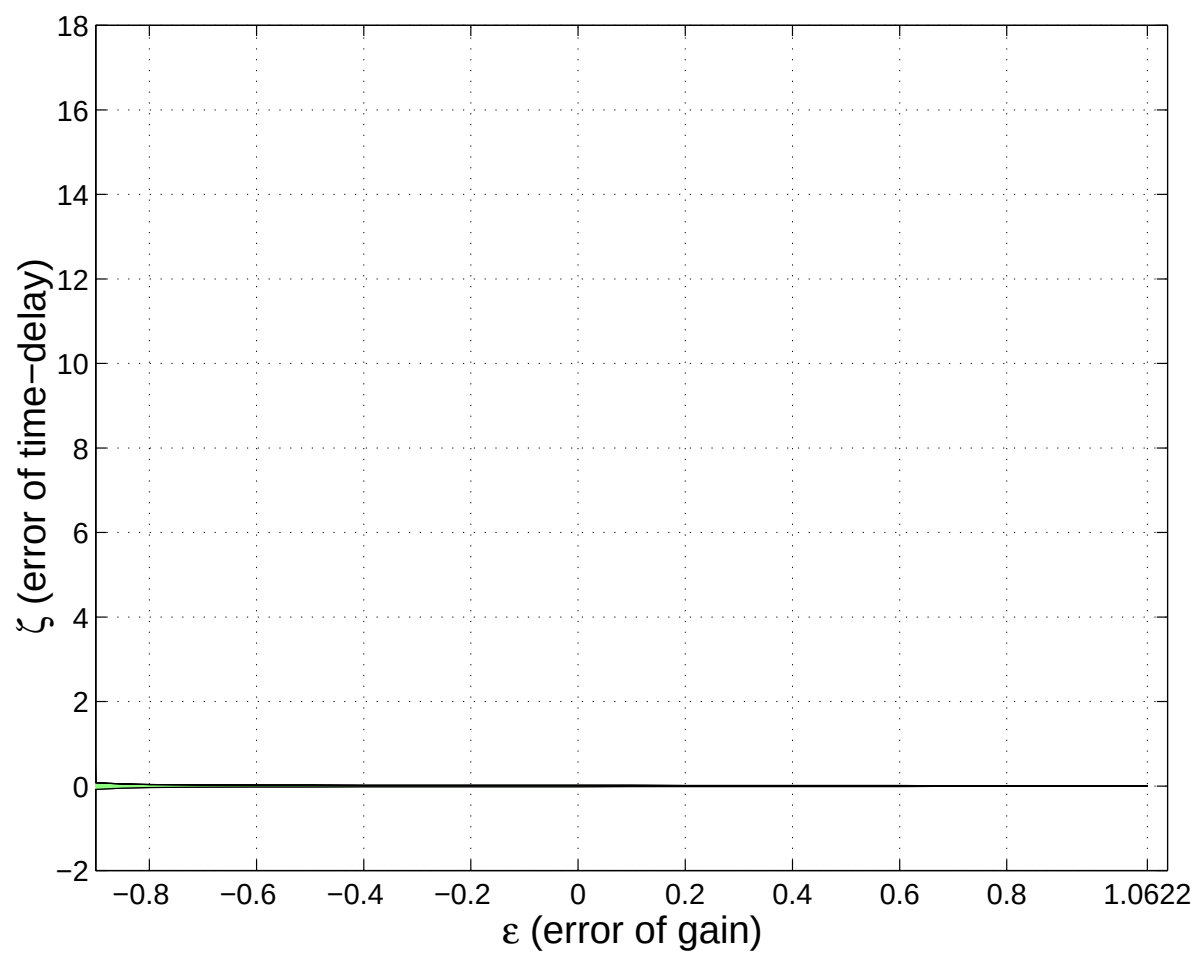


図 5.14: 時定数 $T = 0.1$ の場合の安定領域, その 1

ζ 軸の軸範囲を $(-0.2 < \zeta < 0.2)$ に変更する.

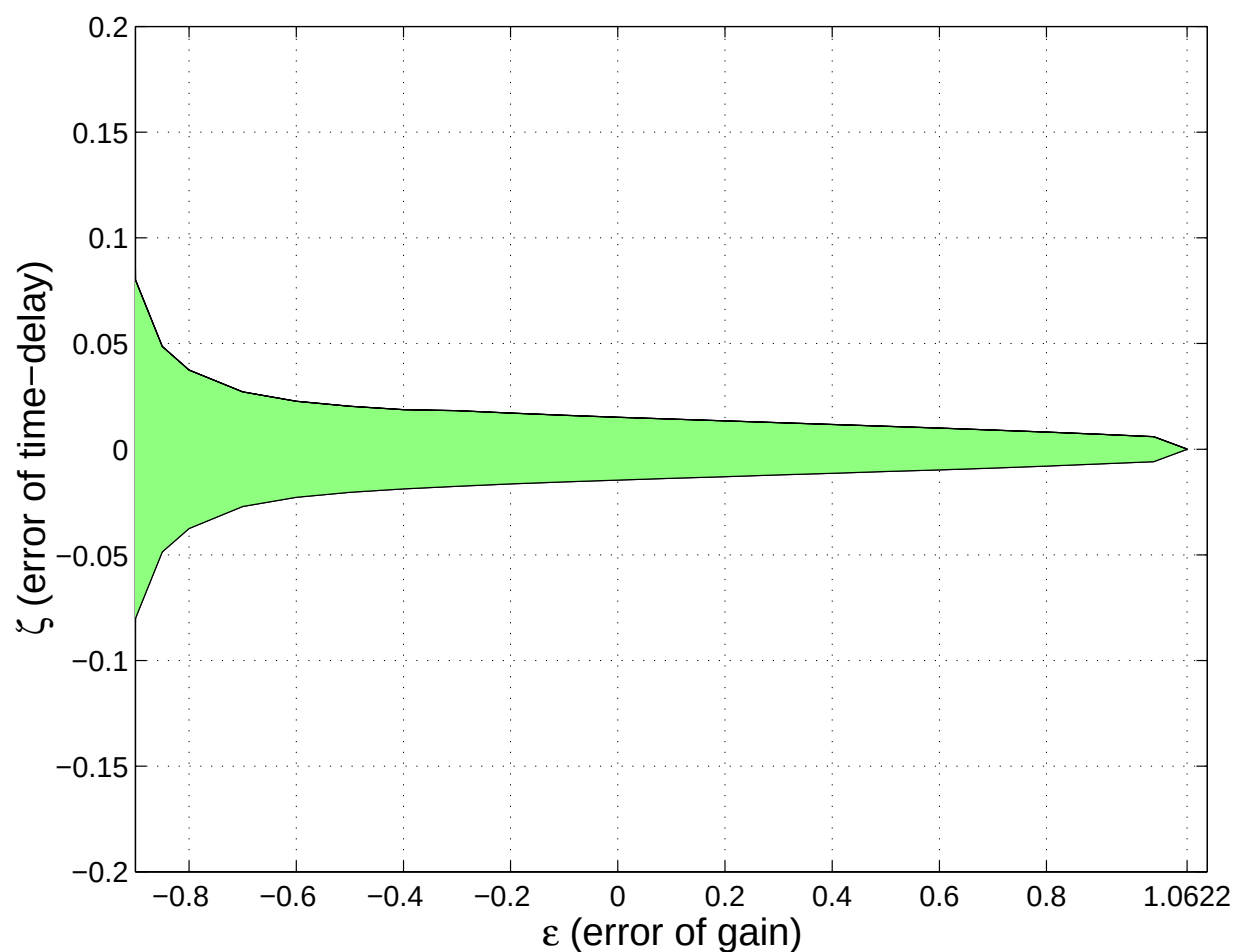


図 5.15: 時定数 $T = 0.1$ の場合の安定領域, その 2

5.3 考察

例題の時定数 $T = 5$ の場合を含め, $T = 3, 2, 1, 0.5, 0.2, 0.1$ の場合と合わせ計 7 種類の時定数の制御対象について安定領域を求めた.

時定数が小さくなるとともに, ϵ - ζ 平面上の安定領域も狭くなる. 例として, ゲインにミスマッチが無い場合 ($\epsilon = 0$) のむだ時間余裕の許容範囲を分析する.

時定数 T	むだ時間余裕	許容範囲の大きさ
$T = 5$	$-0.4915 < \zeta < 0.5687$	1.0602
$T = 3$	$-0.3141 < \zeta < 0.2981$	0.6122
$T = 2$	$-0.2132 < \zeta < 0.2226$	0.4356
$T = 1$	$-0.1071 < \zeta < 0.1065$	0.2136
$T = 0.5$	$-0.0542 < \zeta < 0.0541$	0.1083
$T = 0.2$	$-0.0218 < \zeta < 0.0218$	0.0436
$T = 0.1$	$-0.0146 < \zeta < 0.0151$	0.0297

時定数が小さくなる事に比例して許容範囲の大きさも小さくなっていることがこの表より解る．しかし，むだ時間にミスマッチが無い場合 ($\zeta = 0$) のゲイン余裕は，時定数が変化しても殆ど変動せずほぼ一定な値をとる．

また，時定数 $T = 5$ の場合の図 5.5において， $\epsilon = -0.1$ 付近から ϵ の値が減少にすると伴って，むだ時間のミスマッチの許容範囲が極端に増加する．同様の結果が，時定数 $T = 3$ の場合においては $\epsilon = -0.6$ の付近，時定数 $T = 2$ の場合においては $\epsilon = -0.8$ の付近で見られる．計算精度および作図の問題点から，それ以下の時定数の場合についてはこのような極端な変動を表現できない．しかしながら， $T = 5, 3, 2$ の場合と同様の，極端な変動が存在することが予想される．これはゲインとむだ時間のミスマッチの相互的な効果であると考えられる．

結果として，時定数が大きいとゲインとむだ時間のミスマッチとの間の関係が強く，例えば大きなむだ時間のミスマッチに対して，ゲインのミスマッチの大きさによっては安定となる可能性がある．逆に時定数が小さいとゲインのミスマッチの影響は殆ど無いと考えられ，システムの安定性はむだ時間のミスマッチの大きさにのみ関係すると言える．

第 6 章

結論

本稿では、スミス制御系においてゲインとむだ時間にミスマッチがあるとし、そのミスマッチの変動に対してロバスト安定性を検討した。例題に対し安定条件を定量的に表し、その検証を行なった。時定数を変化させた制御対象の安定条件を求めその変化から相互的な影響を検証した。

具体的には、次のような流れで研究を行なった。

まず、対象となるむだ時間を含むシステムにおけるスミス法について言及した。制御対象とモデルとの間にミスマッチが存在した場合のスミス法の問題点について明らかにし、ミスマッチに対するロバスト安定性の議論の必要性を述べた。むだ時間にのみのミスマッチを扱った多くの従来研究と違い、同時にゲインのミスマッチを考慮するため状態空間表現によりスミス制御系の構造について述べた。

状態方程式を基に表現されたスミス制御系について、ゲインとむだ時間のミスマッチを導入した。安定判別の方法として包ら^[11]が、スミス法と同様のむだ時間対策として有名な状態予測制御系に対して用いた方法をスミス制御系へ拡張した。これによって、スミス制御系のミスマッチに対する安定条件を示した。

次に、求められた安定条件を例題に対して用い、その応答特性をシミュレーションより求め有効性を検証した。まず、ゲインにのみミスマッチがある場合は、ゲイン余裕となる点を境界としてシステムが安定から不安定へ移り変わる。また、ゲイン余裕となる点においては定常状態となることが認められた。これは安定判別によって求められたゲイン余裕の点がまさにシステムの安定限界となる点であることを示している。続いて、むだ時間にのみミスマッチがある場合は、 $M(s)$ の軌跡と $N(s)$ の軌跡との交点の数によって

むだ時間余裕となる点の意味する事が異なった。まず、1点で交わる場合は求められたむだ時間余裕となる点を境界として安定から不安定へと移り変わることが認められる。これは、むだ時間余裕の点が安定限界となっている事になる。3点で交わる場合は、むだ時間余裕となる点では定常状態を見る事ができなかった。また、同時に安定となる範囲を外れた点においても安定となることが認められた。したがって検証結果から、求められたむだ時間余裕の範囲は全く的外れではなく十分に実用的であると言えた。

むだ時間とゲインの両方にミスマッチが存在した場合、前出のむだ時間余裕を求める手順をさまざまな ϵ の値に対しおこなうと、 ϵ - ζ 平面上にゲインとむだ時間の相互関係の安定領域が求められる。応答特性をシミュレーションによりもとめ、その有効性を確認した。

次に、時定数を変化させた幾つかの制御対象に対して、同様の方法を用いて ϵ - ζ 平面上の安定領域を求める。これにより、時定数を指針とした定量的な安定条件の移り変わりを見る事ができ、その変化に対し検討を行なった。分析結果として、時定数の変化に伴って、ゲイン余裕は殆ど変化しないのに比べてむだ時間余裕は変化に比例して変動していくことがわかる。時定数の小さい即応性の高い制御対象は、むだ時間のミスマッチの存在に対して大変敏感であり微小なミスマッチが存在してもすぐさまシステムが不安定となってしまう。時定数が大きな制御対象は、ゲインとむだ時間のミスマッチのかかわりが大きくなる。例としては取り扱いの難しいとされるむだ時間の大きなミスマッチに対しても、ゲインのミスマッチの変動によっては安定化できる可能性もあることが分析できた。

まとめとして、スミス制御系に対してゲインとむだ時間にミスマッチが存在した場合のロバスト安定性について検討した。例題を用い安定条件を定量的に示し時定数を一指針として分析を行なった。

付録 A

図 2.1 に表す通常のスミス制御系のブロック線図を等価変換すると以下の図 A.1 となる．
次のように状態方程式を基に伝達関数を求める．

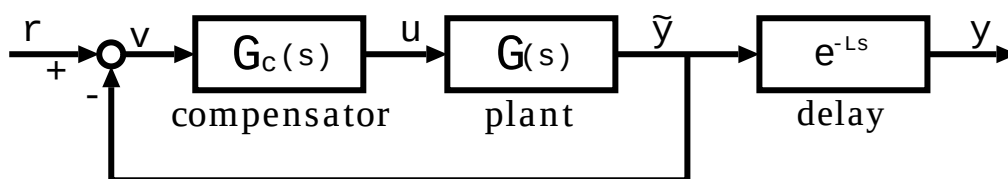


図 A.1: スミス制御系と等価な系 2

(plant)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t - L) \quad (\text{A.1})$$

$$\tilde{y}(t) = cx(t) \quad (\text{A.2})$$

(compensator)

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Dv(t) \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{y}(t) = K_1v(t) + K_2z(t) \quad (\text{A.4})$$

$$v(t) = r(t) - \tilde{y}(t) \quad (\text{A.5})$$

(delay)

$$y(t) = \tilde{y}(t - L) \quad (\text{A.6})$$

式 (A.1)–(A.5) より,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - bK_1cx(t) + bK_2z(t) + bK_1r(t) \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{z}(t) = Fz(t) - Dcx(t) + Dr(t) \quad (\text{A.8})$$

式 (A.7), (A.8) をラプラス変換し整理する.

$$(sI - A + bK_1c)x(s) = bK_2z(s) + bK_1r(s) \quad (\text{A.9})$$

$$(sI - F)z(s) = -Dcx(s) + Dr(s) \quad (\text{A.10})$$

式 (A.9), (A.10) より $z(s)$ を消去すると,

$$(sI - A + bK_1c)x(s) = bK_2(sI - F)^{-1}\{-Dcx(s) + Dr(s)\} + bK_1r(s) \quad (\text{A.11})$$

$$x(s) = \{sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc\}^{-1}\{bK_1 + bK_2(sI - F)^{-1}D\}r(s) \quad (\text{A.12})$$

式 (A.2), (A.6) より, $y(s) = cx(s)e^{-sL}$ であるので,

$$y(s) = c\{sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc\}^{-1}\{bK_1 + bK_2(sI - F)^{-1}D\}e^{-sL}r(s) \quad (\text{A.13})$$

よって, 目標入力 $r(t)$ から $y(t)$ までの伝達関数は,

$$c\{sI - A + bK_1c + bK_2(sI - F)^{-1}Dc\}^{-1}\{bK_1 + bK_2(sI - F)^{-1}D\}e^{-sL} \quad (\text{A.14})$$

となる.

謝辞

最後になりましたが、研究を進めるにあたり、終始暖かい御指導を頂きました示村悦二郎教授に心より感謝の意を表します。また、多くの暖かい御助言を頂きました藤田政之助教授ならびに増淵泉助手に深く感謝いたします。

そして、有益な御討論を頂いた北陸先端科学技術大学院大学ロボティクス講座の先輩諸氏、ならびに良き相談相手となり励ましてくださった同輩、後輩諸氏に感謝いたします。

最後に、これまでの研究生活を可能にし暖かく見守って下さった両親、今は亡き兄に感謝します。

参考文献

- [1] O.J.M.Smith; *A Controller to Overcome Dead Time*; ISA J., Vol.6, No.2, pp.28/33, 1959
- [2] 示村悦二郎; むだ時間を含む系の最適問題; 計測と制御, Vol.8, No.8, pp.526/536, 1969
- [3] 示村悦二郎, 山中一雄; むだ時間を含むシステムの諸問題; 計測と制御, Vol.19, No.11, pp.1051/1056, 1980
- [4] 示村悦二郎; むだ時間システムの制御—研究の歴史とその将来; システムと制御, Vol.28, No.5, pp.265/268, 1984
- [5] Toshio Furukawa and Etsujiro Shimemura; *Predictive control for systems with time delay*; Int.J.Control, Vol.37, No.1, 399/412, 1983
- [6] Z.Palmor; *Stability properties of Smith dead-time compensator controllers*; Int.J.Control, Vol.32, No.6, 937/949, 1980
- [7] 伊藤正美, 渡辺慶二; むだ時間をもつシステムの制御—Smith 法の復活—; システムと制御, Vol.26, No.8, pp.479/488, 1982
- [8] 渡部慶二, 伊藤正美; むだ時間を含む系に対する *Smith* 法の制御構造; 電気学会論文集C, Vol.97, No.9, pp.165/172, 1977
- [9] 渡部慶二, 伊藤正美; 入・出力にむだ時間を含むシステムの制御; システムと制御, Vol.28, No.5, pp.269/277, 1984
- [10] 荒木光彦, 古谷栄光; むだ時間を含むプラントの制御—スミス法の現代化—; 電気学会論文集C, Vol.116, No.10, pp.1081/1084, 1996

- [11] 包叔平, 荒木光彦; むだ時間を含むプラントに対する状態予測制御系のロバスト安定性; システムと制御, Vol.32, No.1, 58/65, 1988
- [12] 小野英一, 伊藤正美, 細江繁幸; むだ時間をもつ制御系のロバスト性; 第15回制御理論シンポジウム, 103/106, 1986
- [13] 阿部直人, 内田健康, 示村悦二郎; むだ時間を含む線形フィードバック系におけるむだ時間に誤差が生じた場合の安定条件; 計測自動制御学会論文集, Vol.25, No.1, 34/39, 1989
- [14] 小島晃, 内田健康, 示村悦二郎; むだ時間を含む系におけるロバスト安定性の解析; 計測自動制御学会論文集, Vol.26, No.1, 31/38, 1989
- [15] 添田喬, 中溝高好; 自動制御の講義と演習; 日新出版, 1988
- [16] 伊藤正美, 木村英紀, 細江繁幸; 線形制御系の設計理論; 計測制御学会編, 1978
- [17] 児玉慎三, 須田信英; システム制御のためのマトリクス理論; 計測制御学会編, 1978
- [18] 渡部慶二; むだ時間システムの制御; 計測自動学会編, 1993