

Title	施設配置ゲームにおける仁・シャープレイ値の計算に関する研究
Author(s)	並河, 雄紀
Citation	
Issue Date	2013-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/11299
Rights	
Description	Supervisor:浅野哲夫, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

**施設配置ゲームにおける仁・シャーププレイ値の計算
に関する研究**

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

並河 雄紀

2013 年 3 月

修 士 論 文

施設配置ゲームにおける仁・シャーププレイ値の計算 に関する研究

指導教員 浅野 哲夫 教授

審査委員主査 浅野 哲夫 教授
審査委員 平石 邦彦 教授
審査委員 東条 敏 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

1110046 並河 雄紀

提出年月: 2013 年 2 月

概要

施設配置ゲームは、組合せ最適化問題の1つである施設配置問題から生じる協力ゲームである。この問題では、入力として顧客の集合と施設の集合が与えられ、各顧客はいずれかの施設と繋がることで何らかのサービスを受けたいと考えているとする。ただし、顧客を施設に繋ぐためには接続費用が、施設を使うためには施設の開設費用がそれぞれ必要となり、これらの費用はあらかじめ分かっていると仮定する。このとき、全ての顧客を施設に繋ぐためにいくつかの施設を開設し、その際の開設費用と接続費用の総和を最小化することが第1の目的である。そして第2の目的は、最小化した費用を顧客間でどのように負担し合うかを協力ゲーム理論における解概念に従って決定することである。

協力ゲーム理論では様々な解概念が提唱されているが、特に仁やシャープレイ値といった解は多くの良い性質を持っており非常に有用な解と考えられている。しかし、仁やシャープレイ値といった解を計算することは計算量理論の意味で難しいことが多く、施設配置ゲームの仁とシャープレイ値に関してはほとんど何も知られていないのが現状である。

本論文では、まず費用が2種類に制限されている場合を考える。施設配置問題は費用を2種類に制限してもNP困難であることを示した後、費用が2種類かつ施設が2個の場合の凸ゲームの特徴付けを行い、さらに費用が2種類かつ施設が2個の場合にはシャープレイ値が顧客数の多項式時間で計算可能であることを示す。また、一般の施設配置ゲームにおける仁とシャープレイ値について考察する。

目次

第1章	はじめに	1
1.1	研究の背景	1
1.2	研究の目的	2
1.3	本論文の構成	2
第2章	施設配置問題と協力ゲーム	3
2.1	施設配置問題	3
2.2	協力ゲーム	4
2.2.1	協力ゲームの定義	4
2.2.2	解概念	4
2.2.3	凸ゲーム	8
2.2.4	協力ゲームの例	8
2.3	施設配置ゲーム	9
2.3.1	施設配置ゲームの定義	9
2.3.2	先行研究	10
2.3.3	解の計算について	10
第3章	費用2種類の施設配置ゲーム	11
3.1	費用2種類の施設配置問題のNP困難性	11
3.2	施設が2個の場合	12
3.2.1	費用2種類かつ施設2個の施設配置問題	12
3.2.2	凸ゲームの特徴づけ	13
3.2.3	シャーププレイ値の計算	19
第4章	一般の施設配置ゲームについて	29
4.1	エッセンシャルな提携	29
4.2	仁とシャーププレイ値が一致する場合	30
第5章	おわりに	34

第1章 はじめに

1.1 研究の背景

施設配置ゲームとは、企業や自治体といった複数の主体が共同で出資し合って何らかの施設を建設しようと考えているときに、建設にかかる費用をどのように負担し合えば良いかを考えるためのモデルの1つである。施設を建設する際、施設の建設自体にかかる費用以外にも、建設した施設から何らかのサービスを受けるためにも費用が必要になる場合があり、これらの費用はあらかじめ分かっていると仮定する。例えば、複数の鉄道会社が共同で出資し合っている地域に駅を作ろうと考えているとする。このとき、駅の建設自体にかかる費用の他に、各鉄道会社はその駅から自社の駅に線路を引かなければならず、そのための費用もかかる。駅の建設候補地は複数あるが、ある鉄道会社にとっては、線路を引くためにかかる費用が（距離の問題等で）多くなってしまうかもしれない等の理由で好ましくない立地もあり得る。このとき、駅の建設地を決める1つの方法は、全体の費用が最小になるような立地を選ぶことである。この問題は組合せ最適化問題の1つである施設配置問題として定式化できる。では全体の費用が最小になるように立地を決めた後、全体の費用を各鉄道会社でどのように負担し合えば良いだろうか。

このような費用負担について考える際、1つの良い方法は協力ゲーム理論における解概念に基づいて考えることである。協力ゲーム理論はゲーム理論の一分野であり、人々の協力的行動とそれに基づく利得分配ないし費用負担について数学的に分析するための学問である。協力ゲーム理論における解概念は様々な考え方に基づいて様々な種類があり、なかでも仁やシャープレイ値と呼ばれる解は非常に有用な解であると認識されている。施設配置問題を解くことで最小化した費用をどのように負担し合うかを協力ゲーム理論の解概念に基づいて考える問題は施設配置ゲームと呼ばれており、一般に組合せ最適化問題から生じる協力ゲームは、組合せ最適化ゲームの名でオペレーションズリサーチ等の分野で研究されている。

しかし、協力ゲーム理論に基づく解を実際にコンピュータで計算しようとする、計算時間が膨大になってしまうことが多い。特に、施設配置ゲームにおける仁やシャープレイ値の計算はNP困難であり、入力サイズが大きくなっていったときに現実的な時間で計算することは絶望視されている。そのため、どのようなインスタンスであれば現実的な時間で計算できるのかが焦点となる。

Goemans, Skutella [3] は施設配置ゲームにおいて、コアと呼ばれる解集合の非空性判定がNP完全であること、そしてコアが非空であった場合にはコアの1要素は多項式時間計

算可能であること等を示し、さらにコアが非空となるいくつかのケースを紹介した。しかし仁やシャープレイ値については、重要な解概念であるにも関わらず、ほとんど何も知られていないのが現状である。

1.2 研究の目的

本論文では、施設配置ゲームの仁とシャープレイ値について議論する。第2章で詳しく述べるが、施設配置ゲームの仁やシャープレイ値を計算することはNP困難である。そのため、仁やシャープレイ値を多項式時間で計算できる施設配置ゲームのインスタンスを明らかにすることが本研究の主要な目的となる。また、施設配置ゲームにおける仁とシャープレイ値に関する性質、例えば、仁とシャープレイ値が一致するインスタンスを明らかにすることも目指す。

1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。第2章では、本研究で考える施設配置ゲームについて説明する。そのために、施設配置問題、協力ゲームに関してもそれぞれ説明する。第3章では、費用を2種類に制限した場合の施設配置ゲームについて考える。施設配置問題は費用が2種類に制限されていてもNP困難であることを示し、費用2種類かつ施設2個の場合の凸ゲームの特徴づけ、さらに費用2種類かつ施設2個の場合にはシャープレイ値が顧客数の多項式時間で計算可能であることを示す。第4章では、一般の施設配置ゲームにおける仁とシャープレイ値について考察する。第5章では、本研究の今後の課題を述べる。

第2章 施設配置問題と協力ゲーム

本章では、施設配置問題、協力ゲーム、施設配置ゲームに関してそれぞれ述べる。

2.1 施設配置問題

施設配置問題は多くの変種を持つ問題であるが、本論文では容量制約なし施設配置問題を考え、本論文では今後、容量制約なし施設配置問題を単に施設配置問題と呼ぶことにする。施設配置問題では、入力として2つの有限集合 D, F 、2つの費用関数 $f: F \rightarrow \mathbb{R}_+$ と $c: D \times F \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ の4項組 (D, F, f, c) が与えられる。各 $i \in D$ を顧客、各 $j \in F$ を施設と呼び、 f_j は施設 $j \in F$ を開設する際にかかる費用、 c_{ij} は顧客 $i \in D$ を施設 $j \in F$ に繋ぐ際にかかる費用を表す。この問題では、全ての顧客を施設に繋ぐためにいくつかの施設を開設し、その際の開設費用と接続費用の総和を最小化することが目的である。

施設配置問題のインスタンスは、図2.1のように表現することができる。円は顧客、四角は施設、施設の横の数字はその施設を開設する際にかかる費用、辺の横の数字は、その辺の両端にいる顧客と施設を繋ぐ際にかかる費用をそれぞれ表す。図2.1の問題例では、両方の施設を開設し、顧客 a, b を上側の施設に、顧客 c を下側の施設に繋ぐのが最適解であり、このときの費用は26である。施設配置問題はNP困難であることが知られている[2]。

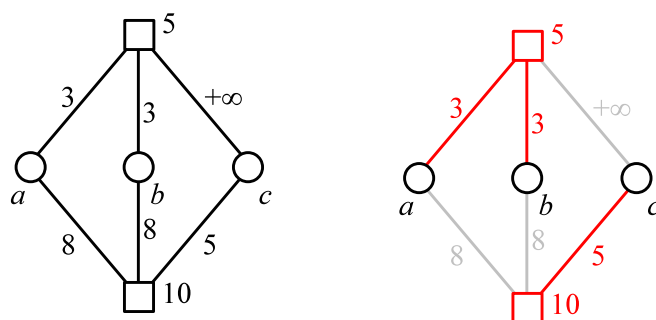


図 2.1: 施設配置問題のインスタンスの例とその最適解

施設配置問題は、施設 j を使うかどうかを決める 0-1 変数 x_j 、顧客 i を施設 j に繋ぐかどうかを決める 0-1 変数 y_{ij} を用いることで整数計画問題として以下のように定式化できる。

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j \in F} f_j x_j + \sum_{i \in D} \sum_{j \in F} c_{ij} y_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in F} y_{ij} = 1 && \text{for all } i \in D \\
& y_{ij} \leq x_j && \text{for all } i \in D, j \in F \\
& x_j, y_{ij} \in \{0, 1\} && \text{for all } i \in D, j \in F
\end{aligned}$$

2.2 協力ゲーム

協力ゲーム理論は 1944 年に von Neumann, Morgenstern [10] によって提唱された、人々や企業、自治体といった主体の提携行動とそれに基づく利得分配や費用負担について数学的に分析するための理論である。協力ゲーム理論は幅広い応用を有しており、経済学やオペレーションズリサーチに留まらず、通信ネットワークといった工学分野等にも応用されている。

本節では、協力ゲームの定義、協力ゲームの解概念、そして凸ゲームと呼ばれる協力ゲームのクラスをそれぞれ紹介する。また、協力ゲームの例を考察する。

2.2.1 協力ゲームの定義

協力ゲームにはいくつかの表現形式が存在するが、ここでは本研究で対象にしている TU ゲームについて述べる。TU (Transferable utility) **ゲーム** とは、有限集合 N と集合関数 $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ の組 (N, v) である。ただし、 $v(\emptyset) = 0$ とする。各 $i \in N$ を**プレイヤー**、集合関数 v を**特性関数**、各 $S \subseteq N$ を**提携**と呼ぶ。特に、プレイヤーの集合 N 全体から形成される提携を**全員提携**と呼ぶ。各提携 $S \subseteq N$ に対して $v(S)$ は、 S に属するプレイヤーたちが協力して行動した際に S 全体が得る利得ないしは費用と解釈される。

ゲーム (N, v) は、特性関数 v が利得を表すとき**利得ゲーム**、費用を表すとき**費用ゲーム**という。本研究で対象としている施設配置ゲームは費用ゲームであるため、本論文では今後、費用ゲームを前提として議論を進め、費用ゲームを単にゲームと呼ぶことにする。

2.2.2 解概念

ゲーム (N, v) では、 N 全体で協力した際にかかる費用 $v(N)$ をプレイヤー間でどのように負担し合うべきかについて考える。各プレイヤーはできるだけ少ない費用負担を望んでいるが、あるプレイヤーが自分勝手な意見を貫けば、提携から外されてしまったり他のプレイヤーが提携から抜けてしまうことで、結果としてそのプレイヤーは全員で協力したと

きよりも多くの費用を支払うことになりかねない。そのため、各プレイヤーが提携から抜ける動機や、一部のプレイヤーたちが提携から抜けて彼らだけで協力して行動してしまう動機を持たないような費用の分配方法でなければならない。そのような分配方法を考えるために、各提携における特性関数の値が必要となる。ではどのように費用を負担し合えば各プレイヤーが全員で協力する動機を持つかということについては、様々な考え方に基づいて様々な分配方法が提案されており、この分配方法が協力ゲーム理論における解概念である。

本節では、コア、仁、そしてシャープレイ値といった代表的な解を紹介し、これらを考える上で基本となる費用ベクトル、準配分、配分についても紹介する。これらの概念に関するより詳しい解説やその他の解概念については、中山、船木、武藤 [11] 等を参照されたい。

費用ベクトル

ゲーム (N, v) において、プレイヤー $i \in N$ が負担する費用を x_i と表し、 i の**費用**という。各プレイヤーの費用を並べたベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_{|N|}) \in \mathbb{R}^N$ を**費用ベクトル**という。つまり費用ベクトルは、各プレイヤーが負担する費用をベクトルで表現したものである。

準配分と配分

プレイヤーの集合 N 全体で協力して行動した際にかかる費用 $v(N)$ をプレイヤー間で分け合うことを考える。このとき、費用ベクトルはどのような性質を満たすべきであろうか。まず、 $v(N)$ は余すことなく分け合わなければならないであろう。この条件を明確化したものが準配分である。具体的には、費用ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ が $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ を満たすとき、 x を**準配分**という。

また、もしあるプレイヤーに割当てられる費用がそのプレイヤーが1人だけで行動した際にかかる費用よりも多い場合、そのプレイヤーは協力する動機を持たないであろう。そのため、各プレイヤーが負担する費用は各々が単独で行動した際にかかる費用以下である必要がある。この条件を明確化したものが配分である。具体的には、準配分 x が任意の $i \in N$ に対して $x_i \leq v(\{i\})$ を満たすとき、 x を**配分**という。ゲーム (N, v) の配分全体の集合を $\mathcal{I}(N, v)$ で表すことにする。協力ゲームの多くの解概念はこの配分の中で考えられている。

配分は常に存在するとは限らないが、 (N, v) が**劣加法性**を満たすとき、つまり、任意の互いに素な提携 $S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$ に対して、

$$v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$$

が成立するとき、配分は必ず存在する。なお、施設配置ゲームは劣加法性を満たすゲームである。

コア

コアは各提携に対して不満を与えないような配分の集合である。配分 $x \in \mathcal{I}(N, v)$ と提携 $S \subseteq N$ に対して、 $\sum_{i \in S} x_i - v(S)$ を配分 x に対して提携 S が持つ**不満**と定義する。**コア**とは、各提携が持つ不満が0以下となる配分全体の集合である。ゲーム (N, v) のコアを $\mathcal{C}(N, v)$ で表すと、

$$\mathcal{C}(N, v) = \left\{ x \in \mathcal{I}(N, v) \mid \sum_{i \in S} x_i \leq v(S) \text{ for all } S \subseteq N \right\}$$

である。 $x \in \mathcal{C}(N, v)$ を**コア分担**という。

コアは常に非空とは限らず、コアが非空かどうかの特徴づけは協力ゲームにおいて重要な問題の1つである。

仁

仁は Schmeidler [7] によって考えられた解であり、各提携が持つ不満をできるだけ均等化しようという考えに基づくものである。ここでは、Schmeidler による仁の定義と、線形計画問題としての定義を紹介する。

コアの定義で述べたように、配分 $x \in \mathcal{I}(N, v)$ と提携 $S \subseteq N$ に対して、 $\sum_{i \in S} x_i - v(S)$ を配分 x に対して提携 S が持つ不満と定義する。配分 x に対して各提携 $S \in 2^N \setminus \{\emptyset, N\}$ が持つ不満を大きい順に並べたベクトルを $\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_{2^N-2}(x))$ と表す。このとき、任意の配分 $x \in \mathcal{I}(N, v)$ に対して、

$$k = \min\{j \mid \theta_j(\mu(N, v)) \neq \theta_j(x)\} \Rightarrow \theta_k(\mu(N, v)) < \theta_k(x)$$

を満たす配分 $\mu(N, v)$ が**仁**である。

次に、線形計画問題として仁を定義する。線形計画問題 P_i を以下のように再帰的に定義する。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \epsilon \\ & \text{subject to } \sum_{i \in N} x_i = v(N), \\ & \quad \sum_{i \in S} x_i = v(S) - \epsilon_l \quad \text{for all } S \in \mathcal{C}_l, \\ & \quad \quad \quad \text{for all } l \in \{1, \dots, i-1\}, \\ & \quad \sum_{i \in S} x_i \leq v(S) - \epsilon \quad \text{for all } S \in \mathcal{C}_0 \setminus \bigcup_{l=1}^{i-1} \mathcal{C}_l, \end{aligned}$$

ただし、 $\mathcal{C}_0 := 2^N \setminus \{N, \emptyset\}$ 、 ϵ_l は P_l の最適値、また、任意の $l \in \{1, 2, \dots, i-1\}$ に対して、

$$\mathcal{C}_l := \left\{ S \in \mathcal{C}_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{l-1} \mathcal{C}_j \mid \sum_{i \in S} x_i = v(S) - \epsilon_l \text{ for all } P_l \text{ の最適解 } (x, \epsilon_l) \right\}$$

である。 $P_1, P_2, \dots$ を次々と解いていくと、ある P_t で一意最適解 $(\mu(N, v), \epsilon_t)$ が得られる。この $\mu(N, v)$ が仁である。

仁は一意解であり必ず存在する。また、コアが非空であれば必ずコアに属する等の良い性質を有している。

シャーププレイ値

シャーププレイ値は Shapley [8] によって提案された、提携に対するプレイヤーの貢献度に基づいた解である。

任意の提携 $S \subseteq N$ と任意のプレイヤー $i \in N \setminus S$ に対して、 $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ を提携 S に対する i の**貢献度**と定義する。ここで、1人ずつ順番にプレイヤーが加わっていくという $|N|!$ 通りの提携形成を考える。 $|N|$ 人のプレイヤーの順列を $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(|N|))$ とおき、 π 全体の集合を Π とする。順列 π における $\pi(k)$ の貢献度は $v(\{\pi(1), \dots, \pi(k-1), \pi(k)\}) - v(\{\pi(1), \dots, \pi(k-1)\})$ で与えられる。プレイヤー $\pi(1), \dots, \pi(k-1)$ を π における $\pi(k)$ の**先行者**と呼ぶ。順列 π において、プレイヤー i が $\pi(k)$ であるとき、 i の先行者 $\pi(1), \dots, \pi(k-1)$ の集合を $P^{\pi, i}$ と表す。プレイヤー i の π における貢献度は $v(P^{\pi, i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi, i})$ である。

1人ずつ順番にプレイヤーが加わっていく $|N|!$ 通りの提携形成が等確率で起こるとする。このとき、プレイヤー i の貢献度の期待値をプレイヤー i のシャーププレイ値という。 i のシャーププレイ値を $\phi_i(N, v)$ とおくと、

$$\phi_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi} v(P^{\pi, i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi, i})$$

である。各プレイヤーのシャーププレイ値を並べたベクトルを単に**シャーププレイ値**という。なお、プレイヤー i のシャーププレイ値は以下のように表現することもできる。

$$\phi_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!(|N| - |S| - 1)!(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

シャーププレイ値は配分とは限らないが、 (N, v) が劣加法性を満たすとき必ず配分になる。施設配置ゲームは劣加法性を満たすゲームであるため、施設配置ゲームのシャーププレイ値は配分である。また、仁と同様に一意解であり必ず存在する等の良い性質を有している。

また、シャーププレイ値は元々は協力ゲームにおける公理系から導出された解である。その公理系の中に対称性と呼ばれるものがあり、本論文でこの性質を利用するためここで紹介しておく。

定義 2.2.1. ゲーム (N, v) において、任意のプレイヤー $i, j \in N, i \neq j$ について、任意の提携 $S \subseteq N, i, j \notin S$ に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ となるとき、プレイヤー i, j は**対称**であるという。

命題 2.2.1. ゲーム (N, v) においてプレイヤー $i, j \in N$ が対称であれば、 $\phi_i(N, v) = \phi_j(N, v)$ 。

2.2.3 凸ゲーム

凸ゲームは協力ゲームのクラスの1つであり、提携の人数が増加するにしたがって新たに加わるプレイヤーの貢献度も増加するようなクラスである。ゲーム (N, v) が**凸ゲーム**であるとは、特性関数 v が**劣モジュラ関数**となるとき、つまり任意の提携 $S, T \subseteq N$ に対して、

$$v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

が成立するときをいう。

凸ゲームは多くの興味深い性質を有しており、コアが非空であること、シャープレイ値がコアに属すること等が挙げられる [9]。また、仁が楕円体法を用いて多項式時間で計算できるという性質は特に重要である [1]。このように凸ゲームは非常に良い性質を有しているため、凸ゲームの特徴づけも協力ゲームにおいて重要な問題である。

2.2.4 協力ゲームの例

協力ゲームの例を考察する。いま、3人の学生 a, b, c がそれぞれ欲しい本が数冊あるとする。 a さんと b さんはそれぞれ2冊、 c さんは3冊の本を購入しようとしており、本の金額はすべて1000円とする。ある本屋では、割引券5枚ごとに全体の金額から500円引きするキャンペーンを行っており、 a さんは1枚、 b さんは3枚、 c さんは6枚の割引券をそれぞれ持っている。全員が割引券を出し合うと全体の金額から1000円引きで本を購入することができる。そこで3人は、お互いの割引券を出し合って本を購入することにしたが、皆なるべくお金は払いたくと考えている。果たして1人いくらお金を払えばいいだろうか？

この問題を協力ゲームとして考える。簡単のため、1000円あたり1と表記する。プレイヤーの集合は $N = \{a, b, c\}$ 、特性関数の値はそれぞれ、

$$\begin{aligned} v(\{a\}) &= 2, v(\{b\}) = 2, v(\{c\}) = 2.5, \\ v(\{a, b\}) &= 4, v(\{b, c\}) = 4.5, v(\{c, a\}) = 4.5, \\ v(\{a, b, c\}) &= 6, v(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

となる。全体の費用 $v(\{a, b, c\}) = 6$ を3人で負担し合うことを考える。

このゲームの配分全体の集合 $\mathcal{I}(N, v)$ 、コア $\mathcal{C}(N, v)$ 、仁 $\mu(N, v)$ 、シャープレイ値 $\phi(N, v)$ はそれぞれ以下の通りである。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(N, v) &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_a \leq 2, x_b \leq 2, x_c \leq 2.5, x_a + x_b + x_c = 6\}, \\ \mathcal{C}(N, v) &= \{x \in \mathcal{I}(N, v) \mid x_a + x_b \leq 4, x_b + x_c \leq 4.5, x_c + x_a \leq 4.5\}, \\ \mu(N, v) &= (11/6, 11/6, 7/3), \\ \phi(N, v) &= (11/6, 11/6, 7/3). \end{aligned}$$

この問題では仁とシャープレイ値が一致しており、 $(x_a, x_b, x_c) = (11/6, 11/6, 7/3)$ が非常に良い分配方法であることを示唆している。なお、このゲームは凸ゲームである。

2.3 施設配置ゲーム

組合せ最適化ゲームとは、特性関数の値が組合せ最適化問題の最適値として表現される協力ゲームであり、1970年代頃から研究されている。組合せ最適化ゲームにおけるプレイヤーは、例えばグラフ上の組合せ最適化ゲームであればグラフの頂点や辺に対応する。組合せ最適化ゲームではこれまで、コアの非空性判定やコア分担の計算を中心に研究されてきたが、近年、Okamoto [5] 等でコア以外の解概念に関する研究も行われている。

本節では、組合せ最適化ゲームの1つである施設配置ゲームについて説明する。

2.3.1 施設配置ゲームの定義

施設配置ゲームとは、顧客の集合 D と集合関数 $\gamma: 2^D \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ の組 (D, γ) として表現され、各 $S \subseteq D$ に対して $\gamma(S)$ は施設配置問題の部分問題 $(S, F, f, c|_S)$ の最適値を意味する。ただし、 $c|_S$ は c の制限 $c|_S: S \times F \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ である。すなわち、 $S \times F$ の任意の要素 i, j に対して、 $(c|_S)_{ij} = c_{ij}$ である。

施設配置ゲームの例を挙げる。図 2.2 の施設配置問題のインスタンスが与えられたとき、対応する施設配置ゲームの特性関数 γ は、 $\gamma(\emptyset) = 0, \gamma(\{a\}) = 2, \gamma(\{b\}) = 4, \gamma(\{c\}) = 3, \gamma(\{a, b\}) = 6, \gamma(\{b, c\}) = 5, \gamma(\{c, a\}) = 4, \gamma(\{a, b, c\}) = 7$ となる。

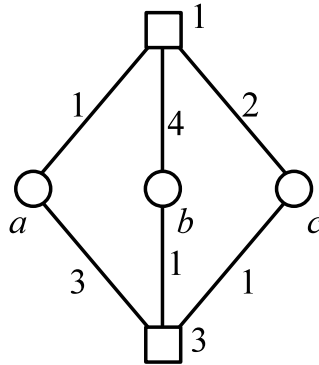


図 2.2: 施設配置問題のインスタンスの例

2.3.2 先行研究

施設配置ゲームに関する先行研究を紹介する。Goemans, Skutella [3] は、施設配置ゲームにおいてコアが非空であるための必要十分条件、非空性の判定が NP 完全であること、コアが非空であればコア分担の 1 つは多項式時間計算可能であること等を示した。しかし、施設配置ゲームの仁やシャープレイ値に関してはほとんど何も知られていないのが現状である。

2.3.3 解の計算について

本研究では、施設配置ゲームの仁とシャープレイ値を計算することを考える。このとき入力として、施設配置ゲームではなく施設配置問題のインスタンスを与える。

ここでいくつか注意点がある。2.2 節で概観したように、協力ゲームの解概念はゲームの特性関数に基づいて定義されている。しかし、プレイヤーの集合を N としたとき提携の数は $2^{|N|}$ 個ある。また、施設配置問題は NP 困難であるため、施設配置ゲームの特性関数の計算も NP 困難である。そのため、施設配置ゲームの仁やシャープレイ値を定義通りに計算しようとするのは無謀である。

さらに悪いことに、施設配置ゲームの準配分の計算は NP 困難であることが分かる。準配分の各成分の総和は元の問題の最適値と一致する、という性質を思い出そう。準配分の性質より、施設配置ゲームの準配分の計算は決定問題としての施設配置問題と同等以上に難しい上に明らかに NP には属さない。決定問題としての施設配置問題は NP 完全であるため、施設配置ゲームの準配分の計算は NP 困難である。この事実から、本研究で考える施設配置ゲームの仁とシャープレイ値の計算も NP 困難であることが分かる。しかし、多項式時間計算可能な問題から生じる協力ゲームの仁やシャープレイ値の計算がどの程度難しいかということについてはよく分かっていない。

本研究では、多項式時間計算可能な施設配置問題のインスタンスから生じる施設配置ゲームにおける仁とシャープレイ値について考える。

第3章 費用2種類の施設配置ゲーム

2.3.3 節では、施設配置ゲームの仁、シャープレイ値の計算は NP 困難であることを確認した。本章では、各種費用が2種類に制限された場合、つまり、 $r, s \in \mathbb{R}$ ($0 < r < s$) とし、各費用関数を $f: D \rightarrow \{r, s\}, c: D \times F \rightarrow \{r, s\}$ と制限した場合の施設配置ゲームを考える。

3.1 費用2種類の施設配置問題の NP 困難性

本節では、施設配置問題は費用を2種類に制限しても NP 困難であることを示す。

命題 3.1.1. 費用2種類の施設配置問題は NP 困難である。

証明. **集合被覆問題**とは、有限集合 S と S の部分集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ が与えられ、 $\bigcup_{I \in \mathcal{I}'} I = S$ となる最小要素数の $\mathcal{I}$ の部分集合 $\mathcal{I}'$ を求める問題であり、NP 困難であることが知られている [2]。集合被覆問題では、各要素 $s \in S$ に対して $s \in I$ を満たす $I \in \mathcal{I}$ が存在することを仮定できる。

集合被覆問題から費用2種類の施設配置問題への多項式時間還元を、以下の通り行う (図 3.1 参照)。集合被覆問題のインスタンス $S, \mathcal{I}$ が与えられたとき、各 $s \in S$ に対して顧客 p_s 、各 $I \in \mathcal{I}$ に対して施設 g_I をそれぞれ対応させる。各施設の開設費用は1とし、顧客 p_s と施設 g_I を繋ぐ費用は、 $s \in I$ のとき1、それ以外のとき2とする。明らかにこの還元は多項式時間で実行可能である。

次に、集合被覆問題のインスタンス $S, \mathcal{I}$ に対して、 $\bigcup_{I \in \mathcal{I}'} I = S$ と $|\mathcal{I}'| \leq k$ を満たす $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ が存在することの必要十分条件が、還元された施設配置問題インスタンスの最小費用が $|S| + k$ 以下であることを示す。

(必要性) 部分集合 $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ が、 $\bigcup_{I \in \mathcal{I}'} I = S$ と $|\mathcal{I}'| \leq k$ を満たすとする。このとき、各 $I \in \mathcal{I}'$ に対して施設 g_I を開設する。各 p_s は、任意の $s \in I \in \mathcal{I}'$ を満たす I を選び、 g_I に繋ぐ。このような $\mathcal{I}'$ は、 $\bigcup_{I \in \mathcal{I}'} I = S$ より、各 $s \in S$ に対して必ず存在する。総費用は $|S| + |\mathcal{I}'| \leq |S| + k$ である。

(十分性) 還元された施設配置問題のインスタンスの最小費用が $|S| + k$ 以下であるとすると、各顧客に対して費用1で繋がる施設が存在し、その施設の開設費用は1なので、最適解の中で費用2の接続を使っていないものが存在する。集合 $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ を、この条件を満たすある最適解で開設している施設に対応する部分集合族とする。各顧客はある施設と

費用1で繋がっているので, $\bigcup_{I \in \mathcal{I}'} I = S$ である. また, 総費用は $|S| + |\mathcal{I}'|$ であるので, $|\mathcal{I}'| \leq k$ である. $\square$

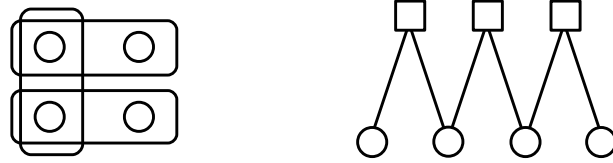


図 3.1: 左図は集合被覆問題のインスタンス例, 右図は左図のインスタンスから還元した施設配置問題のインスタンス. 右図において, 辺のあるところでは接続費用は1, 辺のないところでは接続費用は2とする.

命題 3.1.1 より, 費用2種類の施設配置ゲームの仁やシャープレイ値の計算も NP 困難である.

3.2 施設が2個の場合

3.1 節では, 費用2種類の施設配置ゲームの仁やシャープレイ値の計算も NP 困難であることを確認した. 本節では, 施設が2個に制限された施設配置ゲームを考える.

まず, 費用2種類かつ施設2個の場合の施設配置問題は多項式時間計算可能であることを概観する. 次に費用2種類かつ施設2個の施設配置ゲームの凸ゲームの特徴づけを行い, さらに費用2種かつ施設2個の施設配置ゲームのシャープレイ値が顧客数の多項式時間で計算可能であることを示す.

3.2.1 費用2種類かつ施設2個の施設配置問題

費用が $r, s \in \mathbb{R}$ ($0 < r < s$) の2種類かつ施設2個に制限された施設配置問題のインスタンスは, 図 3.2 のように2種類のインスタンスに分類することができる. 一方のインスタンスは施設の費用が異なり, もう一方のインスタンスは施設の費用が同じである. また, 顧客の集合 D を各施設への接続費用によって $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ と分割する. D_1 は両方の施設への接続費用が r , D_2 は両方の施設への接続費用が s , D_3 は上方の施設への

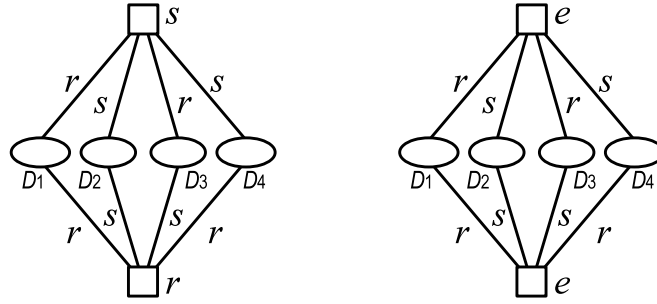


図 3.2: 費用 2 種類かつ施設 2 個の施設配置問題の 2 種類のインスタンス. $e \in \{r, s\}$ である.

接続費用が r , 下方の施設への接続費用が s , D_4 は上方の施設への接続費用が s , 下方の施設への接続費用が r といった具合である.

このように D を分割すると次のことが言える. まず, 同じ種類のプレイヤーは同じ施設と繋がる. さらに最適解の候補は, 全員が上方の施設と繋がるか, 全員が下方の施設と繋がるか, 両方の施設を開設して D_3 は上方, D_4 は下方の施設と繋がるかのいずれか (D_1 と D_2 はどちらの施設と繋がっても良い) である. そのため, 図 3.2 の左図のインスタンスにおいては, 最適値は以下の式を計算することで得られる.

$$\begin{aligned} & \min\{s + r|D_1| + s|D_2| + r|D_3| + s|D_4|, \\ & \quad r + r|D_1| + s|D_2| + s|D_3| + r|D_4|, \\ & \quad s + r|D_1| + s|D_2| + r|D_3| + r + r|D_4|\}. \end{aligned}$$

図 3.2 の右図のインスタンスにおいても同様に計算できる.

3.2.2 凸ゲームの特徴づけ

本節では, 費用 2 種類かつ施設 2 個の場合の施設配置ゲームの凸ゲームの特徴づけを行う.

定理 3.2.1. $r, s \in \mathbb{R}$ ($0 < r < s$), $d, e \in \{r, s\}$ とする. 費用が r, s の 2 種類かつ施設 2 個の施設配置ゲームが凸ゲームであるための必要十分条件は, インスタンス (D, F, f, c) が図 3.3 の各インスタンスを部分として含まないことである. ただし, パターン 4 を含んでいけないのは $s < 2r$ のとき.

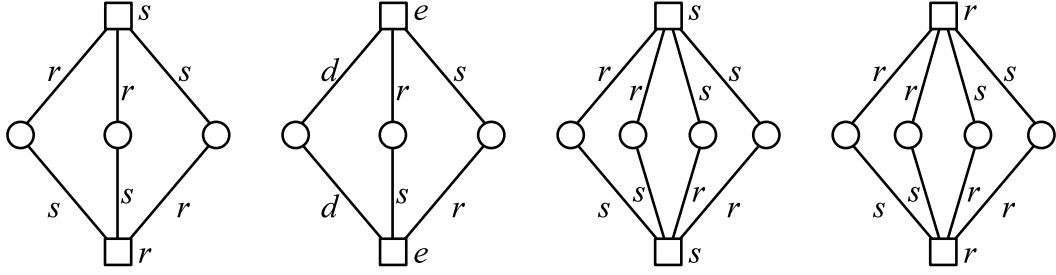


図 3.3: 定理 3.2.1 において禁止しているインスタンス. 左から順に, パターン 1, 2, 3, 4 と名づける.

証明. (必要性) 与えられたインスタンスが各パターンを含むとき, 凸ゲームにならないことを示すために, ある提携 $X, Y \subseteq D$ が存在して, $\gamma(X) + \gamma(Y) < \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ が成立することを示す. 図 3.3 の各パターンにおいて, 各顧客を左から順に $p_1, p_2, p_3, (p_4)$ と名づける.

Case 1: パターン 1 を含むとき.

$$\begin{aligned} \gamma(\{p_2\}) &= r + s, \gamma(\{p_1, p_2\}) = 2r + s, \gamma(\{p_2, p_3\}) = 2r + s, \\ \gamma(\{p_1, p_2, p_3\}) &= \begin{cases} 4r + s & \text{if } s \geq 2r \\ 2r + 2s & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

となる. このとき,

$$\gamma(\{p_1, p_2, p_3\}) + \gamma(\{p_2\}) - \gamma(\{p_1, p_2\}) - \gamma(\{p_2, p_3\}) = \begin{cases} r & \text{if } s \geq 2r \\ s - r & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立. よって, 凸ゲームにならない.

Case 2: パターン 2 を含むとき.

$$\begin{aligned} \gamma(\{p_1\}) &= d + e, \gamma(\{p_1, p_2\}) = d + e + r, \gamma(\{p_3, p_1\}) = d + e + r, \\ \gamma(\{p_1, p_2, p_3\}) &= \begin{cases} d + 2e + 2r & \text{if } s \geq 2r \\ d + e + s + r & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

となる. このとき,

$$\gamma(\{p_1, p_2, p_3\}) + \gamma(\{p_1\}) - \gamma(\{p_1, p_2\}) - \gamma(\{p_3, p_1\}) = \begin{cases} e & \text{if } s \geq 2r \\ s - r & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立. よって, 凸ゲームにならない.

Case 3: パターン 3 を含むとき.

$$\begin{aligned}\gamma(\{p_2, p_3\}) &= r + 2s, \gamma(\{p_1, p_2, p_3\}) = 2r + 2s, \gamma(\{p_2, p_3, p_4\}) = 2r + 2s, \\ \gamma(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) &= \begin{cases} 4r + 2s & \text{if } s \geq 2r \\ 2r + 3s & \text{otherwise} \end{cases}\end{aligned}$$

となる. このとき,

$$\gamma(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) + \gamma(\{p_2, p_3\}) - \gamma(\{p_1, p_2, p_3\}) - \gamma(\{p_2, p_3, p_4\}) = \begin{cases} r & \text{if } s \geq 2r \\ s - r & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立. よって, 凸ゲームにならない.

Case 4: パターン 4 を含むとき.

$s < 2r$ に注意する.

$$\begin{aligned}\gamma(\{p_2, p_3\}) &= 2r + s, \gamma(\{p_1, p_2, p_3\}) = 3r + s, \gamma(\{p_2, p_3, p_4\}) = 3r + s, \\ \gamma(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) &= \begin{cases} 3r + 2s & \text{if } s \leq \frac{3}{2}r \\ 6r & \text{otherwise} \end{cases}\end{aligned}$$

となる. このとき,

$$\gamma(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) + \gamma(\{p_2, p_3\}) - \gamma(\{p_1, p_2, p_3\}) - \gamma(\{p_2, p_3, p_4\}) = \begin{cases} s - r & \text{if } s \leq \frac{3}{2}r \\ 2r - s & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立. よって, 凸ゲームにならない. 以上で必要性の証明が完了した.

(十分性) 各パターンを部分として含まないインスタンスを考える. そのために, 3.2.1 節で考えたものと同じ 2 種類のインスタンスをもう 1 度考える (図 3.4). 左図をインスタンス 1, 右図をインスタンス 2 と名づける. 各 $D_i (i \in \{1, 2, 3, 4\})$ は D の分割であり, 各インスタンスの上方の施設を g_1 , 下方の施設を g_2 とおく. D_1 に属する顧客は各施設と繋がる際に費用 r , D_2 に属する顧客は各施設と繋がる際に費用 s , D_3 に属する顧客は施設 g_1 と繋がる際に費用 r , 施設 g_2 と繋がる際に費用 s , D_4 に属する顧客は施設 g_1 と繋がる際に費用 s , 施設 g_2 と繋がる際に費用 r がそれぞれ必要となる. このとき, 図 3.3 の各パターンを部分として含まないインスタンスは,

インスタンス 1 において,

条件 1: $|D_3| \leq 1$.

条件 2: $|D_3| \geq 2, D_4 = \emptyset$.

インスタンス 2 において,

条件 3: D_3 と D_4 のうち少なくとも一方が空集合.

条件 4: $D_1 = D_2 = \emptyset, e = s, |D_3| = 1 \text{ or } |D_4| = 1$.

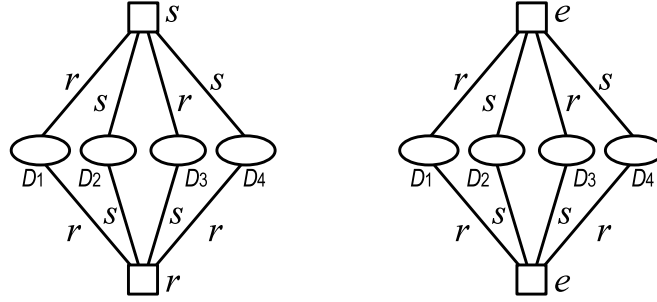


図 3.4: 定理 3.2.1 で考える 2 種類のインスタンス.

条件 5 : $D_1 = D_2 = \emptyset, e = r, s < 2r, |D_3| = 1 \text{ or } |D_4| = 1$.

条件 6 : $D_1 = D_2 = \emptyset, e = r, s \geq 2r$.

のいずれかを満たしている. 各条件を満たすインスタンスは凸ゲームになることを示すため, 任意の提携 $X, Y \subseteq D$ に対して, $\gamma(X) + \gamma(Y) \geq \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ が成立することを示す. ここで, $X \subseteq Y$ もしくは $Y \subseteq X$ を満たす提携に対して, $\gamma(X) + \gamma(Y) = \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ が成立することに注意する. また, 以下では, 任意の提携 $S \subseteq D$ に対して, $S \cap D_i$ を S_i とおく.

Case 1: インスタンスが条件 1 を満たすとき.

$|D_3| \leq 1$ に注意する. このとき, 非空な提携 $S \subseteq D$ について,

$$\gamma(S) = r + r|S_1| + s|S_2| + s|S_3| + r|S_4|$$

が成立. よって, γ はモジュラ関数となり, 凸ゲームになる.

Case 2: インスタンスが条件 2 を満たすとき.

このとき, 非空な提携 $S \subseteq D$ について,

$$\gamma(S) = \begin{cases} r + r|S_1| + s|S_2| & \text{if } S_3 = \emptyset \cdots (1) \\ s + r|S_1| + s|S_2| + r|S_3| & \text{if } S_3 \neq \emptyset \cdots (2) \end{cases}$$

が成立.

Case 2-1: 提携 $X, Y \subseteq D$ が (1) を満たすとき.

提携 $X \cup Y$ は (1) を満たし, 提携 $X \cap Y$ は空集合となるか, (1) を満たすかのいずれかである. 空集合のとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) > \gamma(X \cup Y)$, (1) を満たすとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) = \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ が成立.

Case 2-2: 提携 $X, Y \subseteq D$ が (2) を満たすとき.

提携 $X \cup Y$ は (2) を満たし, 提携 $X \cap Y$ は空集合となるか, (1) を満たすか, (2) を満

たすかのいずれかである。空集合のとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) > \gamma(X \cup Y)$, (1) を満たすとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) > \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$, (2) を満たすとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) = \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ が成立。

Case 2-3: 提携 $X, Y \subseteq D$ の一方が (1), もう一方が (2) を満たすとき。

提携 $X \cup Y$ は (2) を満たし, 提携 $X \cap Y$ は空集合となるか (1) を満たすかのいずれかである。空集合のとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) > \gamma(X \cup Y)$, (1) を満たすとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) = \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ が成立。よって, 凸ゲームになる。

Case 3: インスタンスが条件 3 を満たすとき。

D_3 と D_4 の対称性より, $D_4 = \emptyset$ を仮定する。このとき, 非空な提携 $S \subseteq D$ について,

$$\gamma(S) = e + r|S_1| + s|S_2| + r|S_3|$$

が成立。よって, γ はモジュラ関数となり, 凸ゲームになる。

Case 4: インスタンスが条件 4 を満たすとき。

一般性を失うことなく $|D_3| = 1$ を仮定する。このとき, 非空な提携 $S \subseteq D$ について,

$$\gamma(S) = \begin{cases} s + r & \text{if } S_4 = \emptyset \cdots (1) \\ s + s|S_3| + r|S_4| & \text{if } S_4 \neq \emptyset \cdots (2) \end{cases}$$

が成立。

Case 4-1: 提携 $X, Y \subseteq D$ が (1) を満たすとき。

$|D_3| = 1$ であることから, $X = Y = X \cup Y = X \cap Y$ となる。

Case 4-2: 提携 $X, Y \subseteq D$ が (2) を満たすとき。

提携 $X \cup Y$ は (2) を満たし, 提携 $X \cap Y$ は空集合となるか, (1) を満たすか, (2) を満たすかのいずれかである。空集合のとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) > \gamma(X \cup Y)$, (1) を満たすとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) > \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$, (2) を満たすとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) = \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ が成立。

Case 4-3: 提携 $X, Y \subseteq D$ の一方が (1), もう一方が (2) を満たすとき。

提携 $X \cup Y$ は (2) を満たし, 提携 $X \cap Y$ は空集合となるか (1) を満たすかのいずれかである。空集合のとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) > \gamma(X \cup Y)$, (1) を満たすとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) = \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ が成立。よって, 凸ゲームになる。

Case 5: インスタンスが条件 5 を満たすとき。

一般性を失うことなく $|D_3| = 1$ を仮定する。このとき, 非空な提携 $S \subseteq D$ について,

$$\gamma(S) = \begin{cases} 2r & \text{if } S_4 = \emptyset \cdots (1) \\ r + s|S_3| + r|S_4| & \text{if } S_4 \neq \emptyset \cdots (2) \end{cases}$$

が成立。

Case 5-1: 提携 $X, Y \subseteq D$ が (1) を満たすとき。

$|D_3| = 1$ であることから, $X = Y = X \cup Y = X \cap Y$ となる。

Case 5-2: 提携 $X, Y \subseteq D$ が (2) を満たすとき.

提携 $X \cup Y$ は (2) を満たし, 提携 $X \cap Y$ は空集合となるか, (1) を満たすか, (2) を満たすかのいずれかである. 空集合のとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) > \gamma(X \cup Y)$, (1) を満たすとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) > \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$, (2) を満たすとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) = \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ が成立.

Case 5-3: 提携 $X, Y \subseteq D$ の一方が (1), もう一方が (2) を満たすとき.

提携 $X \cup Y$ は (2) を満たし, 提携 $X \cap Y$ は空集合となるか (1) を満たすかのいずれかである. 空集合のとき, $s < 2r$ に注意すると, $\gamma(X) + \gamma(Y) > \gamma(X \cup Y)$, (1) を満たすとき, $\gamma(X) + \gamma(Y) = \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$ が成立. よって, 凸ゲームになる.

Case 6: インスタンスが条件6を満たすとき.

このとき, 非空な提携 $S \subseteq D$ について,

$$\gamma(S) = \begin{cases} r + r|S_3| & \text{if } S_3 \neq \emptyset \text{ かつ } S_4 = \emptyset \\ r + r|S_4| & \text{if } S_3 = \emptyset \text{ かつ } S_4 \neq \emptyset \\ 2r + r|S_3| + r|S_4| & \text{if } S_3 \neq \emptyset \text{ かつ } S_4 \neq \emptyset \end{cases}$$

となるが, これらをまとめて

$$\gamma(S) = r(|S_3| + 1) + r(|S_4| + 1)$$

と記述できる. よって, γ はモジュラ関数となり, 凸ゲームになる. 以上で十分性の証明が完了した. $\square$

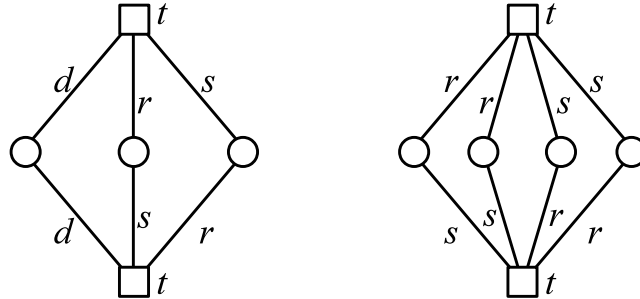


図 3.5: 系 3.2.1 において禁止しているインスタンス.

凸ゲームの性質より, 定理 3.2.1 の条件を満たすインスタンスの仁は楕円体法を用いて多項式時間で計算可能である.

定理 3.2.1 はかなり限定的な場合の特徴づけである．より実際的な問題を考えると，施設の開設費用は接続費用よりも高価であるのが自然なイメージであろう．そのため，入力 of 施設の開設費用が接続費用以上という条件は妥当であると考えられるが，定理 3.2.1 より次の系を得る．

系 3.2.1. 施設 2 個かつ接続費用が $r, s \in \mathbb{R}$ ($0 < r < s$) の 2 種類で，施設の開設費用が $t \in \mathbb{R}$ ($s \leq t$) に制限された施設配置ゲームが凸ゲームであるための必要十分条件は，インスタンス (D, F, f, c) が図 3.5 のパターンを部分として含まないことである．

3.2.3 シャーププレイ値の計算

本節では，費用が 2 種類かつ施設が 2 個の場合のシャーププレイ値が顧客数の多項式時間で計算可能であることを示す．

定理 3.2.2. 費用が $r, s \in \mathbb{R}$ ($0 < r < s$) の 2 種類かつ施設 2 個の施設配置ゲーム (D, γ) のシャーププレイ値は $|D|$ の多項式時間で計算可能である．

証明. 定理 3.2.1 で考えた 2 種類のインスタンスをもう一度考える．図 3.6 のように， $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ と分割する．

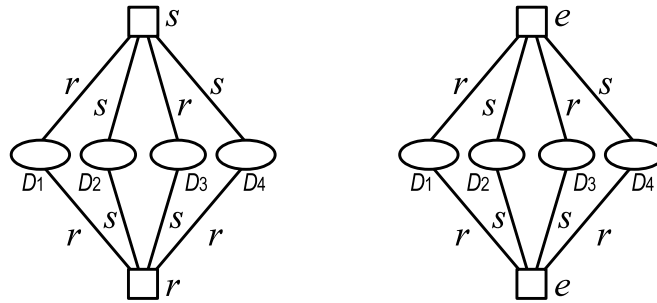


図 3.6: 定理 3.2.2 で考える 2 種類のインスタンス．

図 3.6 の左図をインスタンス 1，右図をインスタンス 2 と名づけ， $|D| = n$ とおく．なお， $e \in \{r, s\}$ である．命題 2.2.1 より，対称なプレイヤーどうしのシャーププレイ値は等しいことに注意する．

Case 1: インスタンス 1 のとき．

Case 1-1: $i \in D_1$ のシャーププレイ値．

$i \in D_1$ が新しく提携に加わる際に増加する費用を考えると, r 増加するか, もしくは $2r$ 増加する. $2r$ 増加するのは i の先行者が空のときなので, $(n-1)!$ 通りある. よって, $i \in D_1$ のシャーププレイ値は,

$$\phi_i(D, \gamma) = r + \frac{r(n-1)!}{n!} = r + \frac{r}{n}$$

となる.

Case 1-2: $i \in D_2$ のシャーププレイ値.

$i \in D_2$ が新しく提携に加わる際に増加する費用を考えると, s 増加するか, もしくは $s+r$ 増加する. $s+r$ 増加するのは i の先行者が空のときなので, $(n-1)!$ 通りある. よって, $i \in D_1$ のシャーププレイ値は,

$$\phi_i(D, \gamma) = s + \frac{r(n-1)!}{n!} = s + \frac{r}{n}$$

となる.

Case 1-3: $i \in D_3$ のシャーププレイ値.

$i \in D_3$ が新たに提携に加わる際に増加する費用の期待値を考える. そのために, 提携 $S \subseteq D$ が $\gamma(S)$ を達成するときに, どのような条件を満たせば上方の施設, 下方の施設, 両方の施設とそれぞれ繋がるかを考える. 提携 S において, 任意の $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対して a_i を $|D_i \cap S|$ とする. 提携 S が上方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成するときは,

$$s + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4 \leq r + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4$$

すなわち,

$$1 + a_4 \leq a_3$$

かつ,

$$s + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4 \leq s + r + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4$$

すなわち,

$$a_4 \leq \frac{r}{s-r}$$

が成立. 提携 S が下方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成するときは,

$$r + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4 \leq s + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4$$

すなわち,

$$a_3 \leq 1 + a_4$$

かつ,

$$r + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4 \leq s + r + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4$$

すなわち,

$$a_3 \leq \frac{s}{s-r}$$

が成立. 提携 S が両方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成するときは,

$$s + r + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4 \leq s + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4$$

すなわち,

$$\frac{r}{s-r} \leq a_4$$

かつ,

$$s + r + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4 \leq r + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4$$

すなわち,

$$\frac{s}{s-r} \leq a_3$$

が成立. $a_4 = r/(s-r)$ の場合には, $a_3 \leq s/(s-r)$ ならば上方の施設に繋がるか両方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成でき, そうでないなら下方の施設に繋がることで $\gamma(S)$ を達成できる. そこで, $a_4 = r/(s-r)$ のとき, $a_4 < r/(s-r)$ のとき, $a_4 > r/(s-r)$ のときのそれぞれの場合において, $i \in D_3$ が新たに提携 S に加わるときに費用がどのように増加していくかを考える. 図 3.7 は, a_3 が 1 ずつ増えていくときに増加する費用を表した図である. 具体的には, a_3 に応じた各状態から伸びる矢印は, $i \in D_3$ が加わる前と後での a_3 の変化を表し, r と s はそのときに増加する費用を表す. 例えば, 図 3.7 の左図において, $a_3 < s/(s-r)$ を満たすとき, $i \in D_3$ が加わることで $a_3 > s/(s-r)$ となる場合, 増加する費用は r であることを表している.

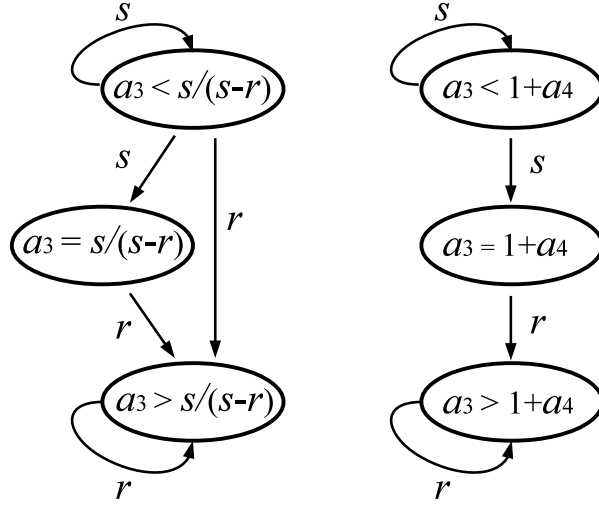


図 3.7: a_3 が 1 ずつ増えていくときに増加する費用と a_3 の変化を表した遷移図. 左図は $a_4 \geq r/(s-r)$ のとき, 右図は $a_4 < r/(s-r)$ のときの遷移をそれぞれ表す.

便宜上,

$$\text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) := \binom{n}{|D_3| + |D_4|} \binom{|D_3| - 1}{a_3} \binom{|D_4|}{a_4} (a_3 + a_4)! (|D_3| + |D_4| - a_3 - a_4 - 1)! (n - |D_3| - |D_4|)!$$

とする. これは D に属する顧客を 1 列に並べるときに, $i \in D_3$ の前に $D_3 \setminus \{i\}$ に属する顧客が a_3 人, D_4 に属する顧客が a_4 人いる場合の数である. $r/(s-r)$ と $s/(s-r)$ のうち一方が整数ならばもう一方も整数になることに注意する.

Case 1-3-1: $a_4 = r/(s-r)$ のとき.

$a_3 \leq s/(s-r) - 1$ ならば i が加わることで $a_3 \leq s/(s-r)$ となり費用は s 増加する. この場合は,

$$\sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, \frac{s}{s-r}-1\}} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある. $a_3 \geq s/(s-r)$ ならば i が加わることで $a_3 > s/(s-r)$ となり, 費用は r 増加する. この場合は,

$$\sum_{a_3=\frac{s}{s-r}}^{|D_3|-1} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある.

Case 1-3-2: $a_4 < r/(s-r)$ のとき.

$a_3 \leq a_4$ ならば i が加わることで費用が s 増加する。これらの場合は,

$$\sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{r}{s-r} \rceil - 1\}} \sum_{a_3=0}^{a_4} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある。 $a_3 \geq a_4 + 1$ ならば i が加わることで $a_3 > a_4 + 1$ となり費用は r 増加する。この場合は,

$$\sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{r}{s-r} \rceil - 1\}} \sum_{a_3=a_4+1}^{|D_3|-1} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある。また, $a_3 < a_4$ の場合には i が提携に加わる際に先行者がいない場合には施設の開設費用 r が余分に必要になる。この場合は,

$$(n-1)!$$

通りある。

Case 1-3-3: $a_4 > r/(s-r)$ のとき。

$a_3 \leq \lceil s/(s-r) \rceil - 1$ ならば i が加わることで $a_3 \leq s/(s-r)$ となり費用は s 増加する。この場合は,

$$\sum_{a_4=\lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor + 1}^{|D_4|} \sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, \lceil \frac{s}{s-r} \rceil - 1\}} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある。 $a_3 \geq s/(s-r)$ ならば i が加わることで $a_3 > s/(s-r)$ となり, 費用は r 増加する。この場合は,

$$\sum_{a_4=\lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor + 1}^{|D_4|} \sum_{a_3=\lceil \frac{s}{s-r} \rceil}^{|D_3|-1} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある。

よって, $i \in D_3$ のシャープレイ値 $\phi_i(D, \gamma)$ は,

$$\begin{aligned} \phi_i(D, \gamma) = & \\ & s \sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, \frac{s}{s-r}-1\}} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\ & + r \sum_{a_3=\frac{s}{s-r}}^{|D_3|-1} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + s \sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{r}{s-r} \rceil - 1\}} \sum_{a_3=0}^{a_4} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
& + r \sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{r}{s-r} \rceil - 1\}} \sum_{a_3=a_4+1}^{|D_3|-1} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
& + r(n-1)! \\
& + s \sum_{a_4=\lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor + 1}^{|D_4|} \sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, \lceil \frac{s}{s-r} \rceil - 1\}} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
& + r \sum_{a_4=\lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor + 1}^{|D_4|} \sum_{a_3=\lceil \frac{s}{s-r} \rceil}^{|D_3|-1} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)
\end{aligned}$$

となる.

Case 1-4: $i \in D_4$ のシャーププレイ値.

$k \in D_1, D_2, D_3$ のシャーププレイ値は既知であり, 命題 2.2.1 より対称なプレイヤーどうしのシャーププレイ値は等しい. よって, $i \in D_4$ のシャーププレイ値は,

$$\phi_i(D, \gamma) = \frac{\gamma(N) - \sum_{k \in D \setminus D_4} \phi_k(D, \gamma)}{|D_4|}$$

で計算できる.

Case 2: インスタンス 2 のとき.

Case 2-1: $i \in D_1$ のシャーププレイ値.

i が新しく提携に加わる際に増加する費用を考えると, r 増加するか, もしくは $r+e$ 増加する. $r+e$ 増加するのは i の先行者が空のときなので, $(n-1)!$ 通りある. よって, $i \in D_1$ のシャーププレイ値は,

$$\phi_i(D, \gamma) = r + \frac{e(n-1)!}{n!} = r + \frac{e}{n}$$

となる.

Case 2-2: $i \in D_2$ のシャーププレイ値.

$i \in D_2$ が新しく提携に加わる際に増加する費用を考えると, s 増加するか, もしくは $s+e$ 増加する. $s+e$ 増加するのは i の先行者が空のときなので, $(n-1)!$ 通りある. よって, $i \in D_1$ のシャーププレイ値は,

$$\phi_i(D, \gamma) = s + \frac{e(n-1)!}{n!} = s + \frac{e}{n}$$

となる.

Case 2-3: $i \in D_3$ のシャーププレイ値.

$i \in D_3$ が新たに提携に加わる際に増加する費用の期待値を考える。Case1 と同様に、提携 $S \subseteq D$ が $\gamma(S)$ を達成するときに、どのような条件を満たせば上方の施設、下方の施設、両方の施設とそれぞれ繋がるかを考える。提携 S が上方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成するときは、

$$e + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4 \leq e + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4$$

すなわち、

$$a_4 \leq a_3$$

かつ、

$$e + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4 \leq 2e + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4$$

すなわち、

$$a_4 \leq \frac{e}{s-r}$$

が成立。提携 S が下方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成するときは、

$$e + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4 \leq e + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4$$

すなわち、

$$a_3 \leq a_4$$

かつ、

$$e + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4 \leq 2e + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4$$

すなわち、

$$a_3 \leq \frac{e}{s-r}$$

が成立。提携 S が両方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成するときは、

$$2e + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4 \leq e + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4$$

すなわち,

$$\frac{e}{s-r} \leq a_4$$

かつ,

$$2e + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4 \leq e + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4$$

すなわち,

$$\frac{e}{s-r} \leq a_3$$

が成立. $a_4 = e/(s-r)$ の場合には, $a_4 \leq a_3$ ならば上方の施設に繋がるか両方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成でき, そうでないなら下方の施設に繋がることで $\gamma(S)$ を達成できる. そこで, $a_4 = e/(s-r)$ のとき, $a_4 < e/(s-r)$ のとき, $a_4 > e/(s-r)$ のときのそれぞれの場合において, $i \in D_3$ が新たに提携 S に加わる時に費用がどのように増加していくかを考える. 図 3.8 は, a_3 が 1 ずつ増えていくときに増加する費用を表した図である. 具体的には, a_3 に応じた各状態から伸びる矢印は, $i \in D_3$ が加わる前と後での a_3 の変化を表し, r と s はそのときに増加する費用を表す.

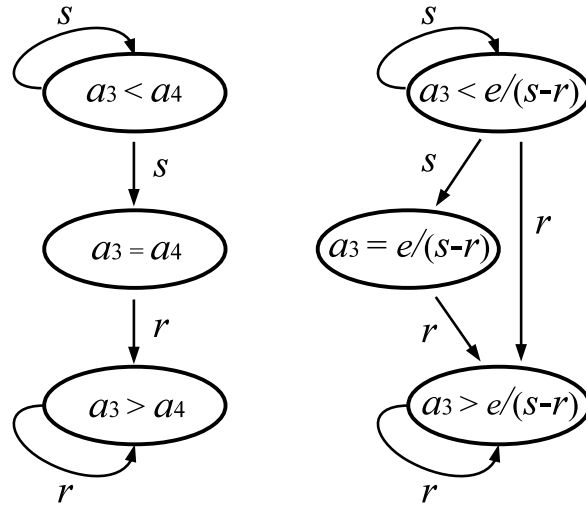


図 3.8: a_3 が 1 ずつ増えていくときに増加する費用と a_3 の変化を表した遷移図. 左図は $a_4 \leq e/(s-r)$ のとき, 右図は $a_4 > e/(s-r)$ のときの遷移をそれぞれ表す.

Case 2-3-1: $a_4 = e/(s-r)$ のとき.

$a_3 < a_4$ ならば i が加わることで $a_3 \leq a_4$ となり費用は s 増加する. この場合は,

$$\sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, a_4-1\}} \text{comb}(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある. $a_3 \geq a_4$ ならば i が加わることで $a_3 > a_4$ となり, 費用は r 増加する. この場合は,

$$\sum_{a_3=a_4}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある.

Case 2-3-2: $a_4 < e/(s-r)$ のとき.

$a_3 < a_4 - 1$ ならば i が加わることで費用が s 増加する. この場合は,

$$\sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{e}{s-r} \rceil - 1\}} \sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, a_4-2\}} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある. $a_3 \geq a_4 - 1$ ならば i が加わることで $a_3 \geq a_4$ となり費用は r 増加する. この場合は,

$$\sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{e}{s-r} \rceil - 1\}} \sum_{a_3=a_4-1}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある. また, $a_3 < a_4$ の場合には i が提携の中で一番最初に加わる時に施設の開設費用 e が余分に必要になる. この場合は,

$$(n-1)!$$

通りある.

Case 2-3-3: $a_4 > e/(s-r)$ のとき.

$e/(s-r)$ が整数のとき, $a_3 \leq \lceil e/(s-r) \rceil - 1$ ならば i が加わることで $a_3 \leq e/(s-r)$ となり費用は s 増加する. この場合は,

$$\sum_{a_4=\lfloor \frac{e}{s-r} \rfloor + 1}^{|D_4|} \sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, \lceil \frac{e}{s-r} \rceil - 1\}} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある. $a_3 \geq e/(s-r)$ ならば i が加わることで $a_3 > e/(s-r)$ となり, 費用は r 増加する. この場合は,

$$\sum_{a_4=\lfloor \frac{e}{s-r} \rfloor + 1}^{|D_4|} \sum_{a_3=\lceil \frac{e}{s-r} \rceil}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある.

よって, $i \in D_3$ のシャーププレイ値は,

$$\phi_i(D, \gamma) =$$

$$\begin{aligned}
& s \sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, a_4-1\}} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
& + r \sum_{a_3=a_4}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
& + s \sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{e}{s-r} \rceil - 1\}} \sum_{a_3=a_4-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
& + r \sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{e}{s-r} \rceil - 1\}} \sum_{a_3=a_4-1}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
& + e(n-1)! \\
& + r \sum_{a_4=\lfloor \frac{e}{s-r} \rfloor + 1}^{|D_4|} \sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, \lceil \frac{e}{s-r} \rceil - 1\}} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
& + s \sum_{a_4=\lfloor \frac{e}{s-r} \rfloor + 1}^{|D_4|} \sum_{a_3=\lceil \frac{e}{s-r} \rceil}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)
\end{aligned}$$

となる.

Case 2-4: $i \in D_4$ のシャーププレイ値.

$k \in D_1, D_2, D_3$ のシャーププレイ値は既知であり, 命題 2.2.1 より対称なプレイヤーどうしのシャーププレイ値は等しい. よって, $i \in D_4$ のシャーププレイ値は,

$$\phi_i(D, \gamma) = \frac{\gamma(N) - \sum_{k \in D \setminus D_4} \phi_k(D, \gamma)}{|D_4|}$$

で計算できる. □

第4章 一般の施設配置ゲームについて

本章では、一般の施設配置ゲームにおける仁とシャープレイ値について考察する。まず、仁と関係の深いエッセンシャルな提携の特徴づけを行い、さらに仁とシャープレイ値が一致するための十分条件を示す。

4.1 エッセンシャルな提携

仁を計算するためには第2章で述べたように線形計画問題を再帰的に解く必要がある。しかし、提携の数は指数個であるため、通常は制約条件の数が指数個になってしまう。Huberman [4] は制約条件として必要な提携はエッセンシャルと呼ばれる提携だけで良いことを示した。本節では、エッセンシャルな提携の定義を述べた後、施設配置ゲームにおけるエッセンシャルな提携の特徴づけを行う。

定義 4.1.1. 提携 $S \subseteq N$ が**エッセンシャル**であるとは、 $|S| = 1$ もしくは S の任意の分割 $\mathcal{P}$ に対して $v(S) < \sum_{P \in \mathcal{P}} v(P)$ が成立するときをいう。

命題 4.1.1. 施設配置ゲーム (D, γ) において、提携 $S \subseteq D, |S| \geq 2$ がエッセンシャルであるための必要十分条件は、 $\gamma(S)$ を達成する施設配置問題の解の中に2つ以上の施設と繋がる解が存在しないことである。

証明. (必要性) 提携 S が $\gamma(S)$ を達成する施設配置問題の解の中に2つ以上の施設と繋がる解があるとする。このとき、用いた施設をそれぞれ $g_1, g_2, \dots, g_n$ とし、施設 $g_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に繋がる S の部分集合を S_i とおく。すると、 S を $S_1, S_2, \dots, S_n$ と分割すれば、 $\sum_{i=1}^n \gamma(S_i) = \gamma(S)$ を満たす。よって S はエッセンシャルではない。

(十分性) 提携 S が $\gamma(S)$ を達成する施設配置問題の解が1つの施設と繋がる解だけだとする。このとき、 S の任意の分割を考え、それを $S_1, S_2, \dots, S_n$ とおく。 S_i 間で施設に重複がなければ、 $\gamma(S) < \sum_{i=1}^n \gamma(S_i)$ が成立。 S_i 間でいくつかの施設が重複している場合は、重複している施設を $1, 2, \dots, m$ とし、 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ の重複している数を h_j とおくと、 $\gamma(S) \leq \sum_{i=1}^n \gamma(S_i) - \sum_{j=1}^m f_j(h_j - 1) < \sum_{i=1}^n \gamma(S_i)$ が成立。よって S はエッセンシャルである。 $\square$

4.2 仁とシャープレイ値が一致する場合

仁とシャープレイ値は一般に異なる準配分である。本節では施設配置ゲームにおいて仁とシャープレイ値が一致するための十分条件を示す。

定義 4.2.1. 顧客 $i \in D$ に対してある施設 $j \in F$ が存在して、各提携 $S \subseteq D, i \in S$ に対して $\gamma(S)$ を達成する施設配置問題の解の中に i が j を開設して繋がるものが存在するとき、 j は i に対して**支配的**であるという。

定理 4.2.1. 施設配置ゲーム (D, γ) において、各顧客 $i \in D$ に対して支配的な施設が存在するとき、仁とシャープレイ値は一致し、その第 i 成分を x_i とおくと、

$$x_i = c_{ij} + \frac{f_j}{|D_j|}$$

となる。ただし、 D_j は施設 j と繋がる顧客全体の集合である。

定理 4.2.1 の証明を与えるため、補題 4.2.2 の証明を行う。そのためにまず被約ゲームを定義し、次に Potters による補題を紹介する。

定義 4.2.2. ゲーム (N, v) とその準配分 $x \in \mathbb{R}^N$ を考える。任意の非空な提携 $T \subseteq N, T \neq \emptyset$ に対して、**被約ゲーム** $(T, v_{T,x})$ を次のように定義する。

$$v_{T,x}(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } S = \emptyset, \\ v(N) - \sum_{i \in N \setminus T} x_i & \text{if } S = T, \\ \min \{ v(S \cup Q) - \sum_{i \in Q} x_i \mid Q \subseteq N \setminus T \} & \text{if } S \subseteq T, S \neq \emptyset, T. \end{cases}$$

補題 4.2.1 (Potters [6]). ゲーム (N, v) のコアが非空であるとして、 μ を (N, v) の仁であるとする。このとき、任意の非空な提携 $T \subseteq N$ に対して、 $\mu|_T \in \mathbb{R}^T$ は被約ゲーム $(T, v_{T,\mu})$ の仁である。ここで $\mu|_T$ は $\mu \in \mathbb{R}^N$ を T に制限したベクトルである。

補題 4.2.1 を用いて、補題 4.2.2 の証明を行う。

補題 4.2.2. ゲーム (N, v) が次の 2 条件を満たすとする。

1. N の分割 $N = N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_k$ と各 $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して、ゲーム (N_i, v_i) が存在して、任意の $S \subseteq N$ に対して、

$$v(S) = v_1(S \cap N_1) + v_2(S \cap N_2) + \cdots + v_k(S \cap N_k)$$

となる。

2. ゲーム $(N, v), (N_1, v_1), (N_2, v_2), \dots, (N_k, v_k)$ のコアはいずれも非空となる。

このとき、 $(N, v), (N_1, v_1), (N_2, v_2), \dots, (N_k, v_k)$ の仁をそれぞれ $\mu, \mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k$ とすると、任意の $i \in N$ に対して、

$$\mu_i = \mu_i^j$$

となる。ただし、 j は $i \in N_j$ を満たす唯一の添字である。

証明. 任意の $i \in N$ について, $i \in N_j$ を満たす唯一の添字 j をとる. このとき, 証明したいことは $\mu_i = \mu_i^j$ であるが, 補題 4.2.1 より, $\mu|_{N_j}$ は $(N_j, v_{N_j, \mu})$ の仁である. よって,

$$v_{N_j, \mu} = v_j$$

を証明すれば良い. 定義から $S \subseteq N_j$ のとき, $v(S) = v_j(S)$ となることに注意する.

Case 1: $S = \emptyset$ のとき.

定義より, $v_{N_j, \mu}(\emptyset) = 0$ であり, かつ $v_j(\emptyset) = 0$ なので $v_{N_j, \mu}(\emptyset) = v_j(\emptyset)$.

Case 2: $S = N_j$ のとき.

定義より,

$$v_{N_j, \mu}(N_j) = v(N) - \sum_{k \in N \setminus N_j} \mu_k$$

となるが, 仁は準配分なので,

$$v(N) = \sum_{k \in N} \mu_k$$

であり, かつ, 仁はコアの要素なので,

$$v(N_j) \geq \sum_{k \in N_j} \mu_k$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} v_{N_j, \mu}(N_j) &= v(N) - \sum_{k \in N \setminus N_j} \mu_k \\ &= \sum_{k \in N} \mu_k - \sum_{k \in N \setminus N_j} \mu_k \\ &= \sum_{k \in N_j} \mu_k \\ &\leq v(N_j) = v_j(N_j) \end{aligned}$$

となる. 一方で, 仁がコアの要素であることを再び用いると,

$$v(N \setminus N_j) \geq \sum_{k \in N \setminus N_j} \mu_k$$

となるので,

$$\begin{aligned} v_{N_j, \mu}(N_j) &= v(N) - \sum_{k \in N \setminus N_j} \mu_k \\ &\geq v(N) - v(N \setminus N_j) \\ &= v(N_j) = v_j(N_j) \end{aligned}$$

である。したがって、 $v_{N_j, \mu}(N_j) = v_j(N_j)$ となる。

Case 3: $S \neq \emptyset, N_j$ のとき。

定義より、

$$v_{N_j, \mu}(S) = \min \left\{ v(S \cup Q) - \sum_{k \in Q} \mu_k \mid Q \subseteq N \setminus N_j \right\}$$

であるので、

$$\begin{aligned} v_{N_j, \mu}(S) &= \min \left\{ v(S \cup Q) - \sum_{k \in Q} \mu_k \mid Q \subseteq N \setminus N_j \right\} \\ &\leq v(S \cup \emptyset) - v(\emptyset) \\ &= v(S) - 0 \\ &= v(S) = v_j(S) \end{aligned}$$

となる。一方、 N_j はコアの要素であるので、任意の $Q \subseteq N \setminus N_j$ に対して、

$$\sum_{k \in Q} \mu_k \leq v(Q)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} v_{N_j, \mu}(S) &= \min \left\{ v(S \cup Q) - \sum_{k \in Q} \mu_k \mid Q \subseteq N \setminus N_j \right\} \\ &\geq \min \left\{ v(S \cup Q) - v(Q) \mid Q \subseteq N \setminus N_j \right\} \\ &= \min \left\{ v_j(S) + v(Q) - v(Q) \mid Q \subseteq N \setminus N_j \right\} \\ &= \min \left\{ v_j(S) \mid Q \subseteq N \setminus N_j \right\} \\ &= v_j(S) \end{aligned}$$

となる。以上で $v_{N_j, \mu} = v_j$ の証明が完了した。 □

以上で準備が整ったので、定理 4.2.1 の証明を行う。

定理 4.2.1 の証明. 各 $i \in D$ について x_i が $i \in D$ のシャーププレイ値であることを示す。 i が新しく提携に加わる際に増加する費用を考えると、 c_{ij} 増加するか、もしくは $c_{ij} + f_j$ 増加する。 $c_{ij} + f_j$ 増加するのは既に提携にいる顧客の中に施設 j と繋がる顧客がいないときなので、 $|D| = m, |D_j| = n$ とおくと、 $\binom{m}{n}(m-n)!(n-1)!$ 通りある。 よって、 i のシャーププレイ値 $\phi_i(D, \gamma)$ は、

$$\begin{aligned} \phi_i(D, \gamma) &= c_{ij} + \frac{1}{m!} f_j \binom{m}{n} (m-n)!(n-1)! \\ &= c_{ij} + \frac{f_j}{n} = x_i \end{aligned}$$

となる.

次に x_i が仁の第 i 成分であることを示す. 各顧客 $i \in D$ に対してある施設 $j \in F$ が存在して, 各提携 $S \subseteq D, i \in S$ に対して $\gamma(S)$ を達成する施設配置問題の解の中に i が j を開設して繋がるものが存在するとき, (D, γ) は凸ゲームになるので, コアは非空. さらに, 各 $j \in F$ に対して, $\gamma_j := \gamma|_{D_j}$ とすることで, ゲーム $(D_1, \gamma_1), (D_2, \gamma_2), \dots, (D_k, \gamma_k)$ が存在して, 各提携 $S \subseteq D$ に対して, $\gamma(S) = \gamma_1(S \cap D_1) + \gamma_2(S \cap D_2) + \dots + \gamma_k(S \cap D_k)$ を満たし, 各ゲームは凸ゲームになるので, コアは非空. 補題 4.2.2 より, $(D, \gamma), (D_1, \gamma_1), (D_2, \gamma_2), \dots, (D_k, \gamma_k)$ の仁をそれぞれ $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ とおくと, 各 $i \in D$ に対して $\mu_i = \mu_i^j$ となる. あとは, 任意のゲーム (D_j, γ_j) において, 各 $i \in D_j$ の仁が x_i となることを証明すれば良い. そこで, 線形計画問題による仁の定義に従って以下の線形計画問題 P_1 を考える.

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \epsilon \\ & \text{subject to } \sum_{i \in D_j} x_i = \sum_{i \in D_j} c_{ij} + f_j, \\ & \sum_{i \in S} x_i \leq \sum_{i \in S} c_{ij} + f_j - \epsilon \quad \text{for all } S \subset D_j. \end{aligned}$$

ここで, $y_i = x_i - c_{ij}$ とおくと, 次のような線形計画問題に書き直すことができる.

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \epsilon \\ & \text{subject to } \sum_{i \in D_j} y_i = f_j, \\ & \sum_{i \in S} y_i \leq f_j - \epsilon \quad \text{for all } S \subset D_j. \end{aligned}$$

この線形計画問題について, $\epsilon = y_i = f_j/n, i \in D_j$, は実行可能解である. ここで提携のサイズが $n-1$ の制約条件に注目する. これらを全て足し合わせると,

$$\begin{aligned} (n-1)(y_1 + \dots + y_n) &\leq n(f_j - \epsilon) \\ y_1 + \dots + y_n &\leq \frac{n}{n-1}(f_j - \epsilon) \end{aligned}$$

となるが, もし $\epsilon > f_j/n$ とすると, $y_1 + \dots + y_n < f_j$ となり実行不可能となる. あとは, $\epsilon = f_j/n$ のときに $y_i = f_j/n$ となることを示せば良い. ある $i \in D_j$ について, $y_i < f_j/n$ であったとする. すると, この y_i を含まない, 提携のサイズが $n-1$ の制約条件において,

$$\frac{n-1}{n}f_j < y_1 + \dots + y_n \leq f_j - \frac{f_j}{n} = \frac{n-1}{n}f_j$$

となり矛盾. よって x_i は仁の第 i 成分である. □

第5章 おわりに

本論文では、施設配置ゲームの仁とシャープレイ値の計算について議論した。具体的には、費用2種類かつ施設2個に制限された場合の凸ゲームの特徴づけを行い、費用2種類かつ施設2個に制限された場合にはシャープレイ値が顧客数の多項式時間で計算可能であることを示した。また、一般の施設配置ゲームにおけるエッセンシャルな提携の特徴づけを行い、さらに仁とシャープレイ値が一致する場合を考察した。

最後に、本研究の今後の課題について述べる。まず、費用2種類かつ施設2個に制限された場合の凸ゲームの特徴づけを行ったが、これはかなり限定的な場合である。そのため、より多くのインスタンスに対して凸ゲームの特徴づけを行うことが考えられる。次に、費用2種類かつ施設2個の場合にシャープレイ値の計算が顧客数の多項式時間で計算可能であることを示したが、仁については未解決である。最後に、仁とシャープレイ値が一致するための十分条件を示したが、この条件を満たすかどうかの判定が多項式時間で行えるかどうかは未解決である。

謝辞

本研究を進めるにあたって、著者は多くの方々にお世話になりました。電気通信大学の岡本吉央准教授、北陸先端科学技術大学院大学の浅野哲夫教授、大館陽太助教には、日頃から懇切丁寧な指導を賜り、非常に多くのことを学びました。また、浅野哲夫研究室の学生の方々をはじめとして、友人には公私共に大変お世話になり、励まされました。ここに厚く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] U. Faigle, W. Kern, and J. Kuipers. On the computation of the nucleolus of a cooperative game. *Internat. J. Game Theory*, 30:79–98, 2001.
- [2] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co. New York, NY, USA, 1979.
- [3] M.X. Goemans and M. Skutella. Cooperative facility location games. *J. Algorithms*, 50:194–214, 2004.
- [4] G. Huberman. The nucleolus and the essential coalitions. *Analysis and Optimization of Systems, Lecture Notes in Control and Inform*, 28:416–422, 1980.
- [5] Y. Okamoto. Fair cost allocations under conflicts. *Discrete Optim.*, 5:1–18, 2008.
- [6] J.A.M. Potters. An axiomatization of the nucleolus. *Internat. J. Game Theory*, 19:365–373, 1991.
- [7] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17:1163–1170, 1969.
- [8] L.S. Shapley. A value for n-person games. *Annals of Mathematics Studies*, 28:305–317, 1953.
- [9] L.S. Shapley. Cores of convex games. *Internat. J. Game Theory*, 1:11–26, 1971.
- [10] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Game and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1953.
- [11] 武藤 滋夫, 中山 幹夫, 船木 由喜彦. **協力ゲーム理論**. 勁草書房, 2008.