

Title	確率ハイブリッドシステムの離散抽象化に関する研究
Author(s)	福井, 康仁
Citation	
Issue Date	2013-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/11323
Rights	
Description	Supervisor:平石邦彦, 情報科学研究科, 修士

修士論文

確率ハイブリッドシステムの
離散抽象化に関する研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

福井 康仁

2013年3月

修 士 論 文

確率ハイブリッドシステムの
離散抽象化に関する研究

指導教官 平石邦彦 教授

審査委員主査 平石邦彦 教授
審査委員 緒方和博 准教授
審査委員 浅野哲夫 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

1110052 福井 康仁

提出年月: 2013年2月

概要

ハイブリッドシステムとは、微分／差分方程式に代表される連続ダイナミクス、有限オートマトンに代表される離散ダイナミクスが混在した動的システムのクラスである。表現能力の高さから盛んに研究が行われている。近年とくに、ハイブリッドシステムの解析や制御の枠組を確率ハイブリッドシステムへ拡張する研究が盛んに行われている。確率ハイブリッドシステムは通信ネットワークや遺伝子ネットワークのモデルとして知られており、解析や制御問題を考えることは、理論面および応用面から重要である。一般的な確率ハイブリッドシステムのクラスを考えることは難しいことから、簡単なクラスを考える場合が多い。とくに、決定性の連続ダイナミクスに制限された確率ハイブリッドシステムのクラスはよく扱われている。このクラスに確率ハイブリッドシステムを制限したとしても、故障を考慮したシステムなどさまざまな応用が考えられる。

しかしながら、確率ハイブリッドシステムのクラスを限定したとしても、解析や制御の計算が困難な場合が多い。この問題を解決する方法として、離散抽象化が注目されている。離散抽象化とは、システムの状態空間を有限個の集合に分割し、これらの集合間の遷移によって、システムの振る舞いを表現する方法である。なお、分割した集合の代表点間の遷移を用いる場合もある。得られた離散抽象化システムを用いると、到達可能性問題などを離散ダイナミクスと同様に議論可能となる。元のシステムの振る舞いを何らかの意味で保存する離散抽象化システムを用いることで、解析や制御の計算は容易になる。

離散抽象化の方法としては、3種類の方法が知られている。まず、状態空間の分割が与えられている場合は述語抽象化と呼ばれている。このとき、集合間の遷移は元のシステムの振る舞いの上近似となるが、安全性の検証を考えることができる。次に、状態空間を双模倣性に基づき分割する方法が知られている。この方法では、双模倣の意味で元のシステムと等価な離散抽象化システムが得られ、安全性だけでなく、可到達性の検証や制御への応用が可能である。しかしながら、離散抽象化システムの計算手続きの停止性が保証されていない。最後に、状態空間の分割が与えられ、かつ各集合の代表点を与えられている場合において、近似双模倣性の概念が提案されている。なお、確率ハイブリッドシステムに対しては、双模倣性または近似双模倣による離散抽象化の方法がこれまでに提案されている。

本論文では、双模倣性に基づく確率ハイブリッドシステムの離散抽象化の方法を提案する。双模倣性に基づく方法では、計算手続きの停止性が保証されていないことから、本論文では、非確率的なハイブリッドシステムに対して提案されている、有界双模倣性の概念を確率ハイブリッドシステムへ拡張することを考える。有界双模倣性では、システムの振る舞いを有限時間区間のみで考えることから、計算手続きの停止性が保証される。なお、本論文では、確率ハイブリッドシステムのクラスとして、決定性の連続ダイナミクスに制限されたクラスを考えることとする。

目次

第1章	はじめに	2
第2章	確率ハイブリッドシステム	4
第3章	有界双模倣の定義	7
3.1	離散時間マルコフ決定過程	7
3.2	双模倣および有界双模倣の定義	8
3.3	有界双模倣の概要	9
第4章	離散抽象化の計算アルゴリズム	11
4.1	変数の定義	11
4.2	アルゴリズムの概要	11
4.3	アルゴリズムの詳細	13
4.3.1	$Pre_X(X, m, q)$	13
4.3.2	$Pre(X)$	14
4.3.3	$Partition(\pi)$	19
4.3.4	k -bounded bisimulation(π_0, k)	22
第5章	計算例	24
5.1	例題1. 確定的なハイブリッドシステム	24
5.2	例題2. 確率ハイブリッドシステム	29
5.3	例題3. ダイナミクスの変化による分割数の増加	30
5.4	遺伝子トグルスイッチの探索	33
第6章	おわりに	37

第1章 はじめに

ハイブリッドシステムとは、微分/差分方程式に代表される連続ダイナミクスと、有限オートマトンに代表される離散ダイナミクスが混在した動的システムのクラスである。表現能力の高さから盛んに研究が行われている。近年とくに、ハイブリッドシステムの解析や制御の枠組を確率ハイブリッドシステムへ拡張する研究が盛んに行われている [9]。確率ハイブリッドシステムは通信ネットワークや遺伝子ネットワークのモデルとして知られており [8, 9]、解析や制御問題を考えることは、理論面および応用面から重要である。一般的な確率ハイブリッドシステムのクラス [6] を考えることは難しいことから、簡単なクラスを考える場合が多い。とくに、決定性の連続ダイナミクスに制限された確率ハイブリッドシステムのクラスはよく扱われている。このクラスに確率ハイブリッドシステムを制限したとしても、故障を考慮したシステムなどさまざまな応用が考えられる [4, 5, 11]。

しかしながら、確率ハイブリッドシステムのクラスを限定したとしても、解析や制御の計算が困難な場合が多い。この問題を解決する方法として、離散抽象化 [1, 2, 3, 10, 12, 13] が注目されている。離散抽象化とは、図 1.1 に示すようにシステムの状態空間を有限個の集合に分割し、これらの集合間の遷移によって、システムの振る舞いを表現する方法である。なお、分割した集合の代表点間の遷移を用いる場合もある。得られた離散抽象化システムを用いると、到達可能性問題などを離散ダイナミクスと同様に議論可能となる。元のシステムの振る舞いを何らかの意味で保存する離散抽象化システムを用いることで、解析や制御の計算は容易になる。

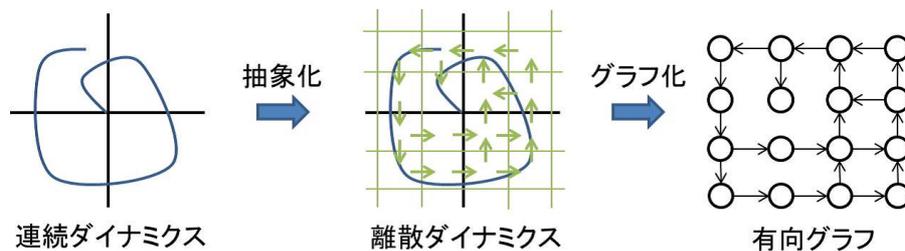


図 1.1: 離散抽象化の概念図

離散抽象化の方法としては、3種類の方法が知られている。まず、状態空間の分割が与えられている場合は述語抽象化と呼ばれている [3]。このとき、集合間の遷移は元のシステムの振る舞いの上近似となるが、安全性の検証を考えることができる。次に、状態空間

を双模倣性に基づき分割する方法 [2, 15] が知られている。この方法では、双模倣の意味で元のシステムと等価な離散抽象化システムが得られ、安全性だけでなく、可到達性の検証や制御への応用が可能である。しかしながら、離散抽象化システムの計算手続きの停止性が保証されていない。最後に、状態空間の分割が与えられ、かつ各集合の代表点が与えられている場合において、近似双模倣性の概念が提案されている [12]。なお、確率ハイブリッドシステムに対しては、双模倣性または近似双模倣による離散抽象化の方法がこれまでに提案されている [1, 7, 10]。

本論文では、双模倣性に基づく確率ハイブリッドシステムの離散抽象化の方法を提案する。双模倣性に基づく方法では、計算手続きの停止性が保証されていないことから、本論文では、確定的なハイブリッドシステムに対して提案されている、有界双模倣性 [17] の概念を確率ハイブリッドシステムへ拡張することを考える。有界双模倣性では、システムの振る舞いを有限時間区間のみで考えることから、計算手続きの停止性が保証される。なお、本論文では、確率ハイブリッドシステムのクラスとして、決定性の連続ダイナミクスに制限されたクラスを考えることとする。

以下、2章では、本論文で考える確率ハイブリッドシステムについて説明する。3章では、離散時間マルコフ決定過程の説明をした上で、有界双模倣を定義する。4章では、離散抽象化の計算アルゴリズムについて説明する。5章では、例を用いて離散抽象化の計算手順の説明や、得られる結果の説明を行う。6章はまとめである。

表記: \mathcal{R}^n は n 次元実数ベクトルの集合を表す。 I_n および $0_{m \times n}$ はそれぞれ n 次単位行列および $m \times n$ 次の零行列を表す。表記の簡単化のため、サイズが明らかな場合は、 I_n を I , $0_{m \times n}$ を 0 と表記する。

第2章 確率ハイブリッドシステム

本章では本研究で考える確率ハイブリッドシステムを説明し，例題を示す．

確率ハイブリッドシステムのモデルとして，各モードでダイナミクスが確率的に選択される離散時間区分的線形システム

$$x(k+1) = \begin{cases} A_{I(k),1}x(k) + B_{I(k),1}u(k) \\ \quad \text{with the prob. } pr(I(k),1), \\ A_{I(k),2}x(k) + B_{I(k),2}u(k) \\ \quad \text{with the prob. } pr(I(k),2), \\ \vdots \\ A_{I(k),q(I(k))}x(k) + B_{I(k),q(I(k))}u(k) \\ \quad \text{with the prob. } pr(I(k),q(I(k))), \\ \text{if } x(k) \in \mathcal{S}_{I(k)} \end{cases} \quad (2.1)$$

を考える．ここで $x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{R}^n$ は（連続）状態， $u(k) \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^m$ は（連続）制御入力である． $I(k) \in \mathcal{M} := \{1, 2, \dots, M\}$ はモード（離散状態）であり，モード I に対して，凸多面体 \mathcal{S}_I が割り当てられる．なお，すべての $I \neq J \in \mathcal{M}$ に対して， $\cup_{I \in \mathcal{M}} \mathcal{S}_I = \mathcal{X}$ および $\mathcal{S}_I \cap \mathcal{S}_J = \emptyset$ を仮定する．

モード I に対して， $q(I)$ 個の線形システムを割り当て，確率的に一つの線形システムが選択されることとする．モード I で線形システム $x(k+1) = A_{I,i}x(k) + B_{I,i}u(k)$ が割り当てられる確率は $pr(I,i)$ として与えられているとする．このとき， $\sum_{i=1}^{q(I)} pr(I,i) = 1$ が成立する．

本論文で考える確率ハイブリッドシステム (2.1) は，モード遷移のみが確率的となっている．したがって，離散確率分布のみを考えることになるが，正常／異常を考慮した機械システムなどさまざまな応用が考えられる．

確率ハイブリッドシステムの例として、2状態1入力の確率ハイブリッドシステム

$$x(k+1) = \begin{cases} \begin{cases} 0.8 \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{cases} & \begin{array}{l} \text{with the prob. } pr(1,1) = 0.8 \\ \text{with the prob. } pr(1,2) = 0.2 \end{array} \\ \text{if } x(k) \in \mathcal{S}_1 \\ \\ \begin{cases} 0.8 \begin{bmatrix} \cos(-\pi/3) & -\sin(-\pi/3) \\ \sin(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{cases} & \begin{array}{l} \text{with the prob. } pr(2,1) = 0.9 \\ \text{with the prob. } pr(2,2) = 0.1 \end{array} \\ \text{if } x(k) \in \mathcal{S}_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

を考える。ここで、 $x(k) \in \mathcal{X} \subseteq [-1 \ 1] \times [0 \ 2]$, $u(k) \in \mathcal{U} \subseteq [-1 \ 1]$, $I(k) \in \mathcal{M} := \{1, 2\}$, $\mathcal{S}_1 = [0 \ 1] \times [0 \ 2]$, $\mathcal{S}_2 = [-1 \ 0] \times [0 \ 2]$ である。このシステムでは、モードが2つに分かれており、各モードに2つずつ連続ダイナミクスが割り当てられている。

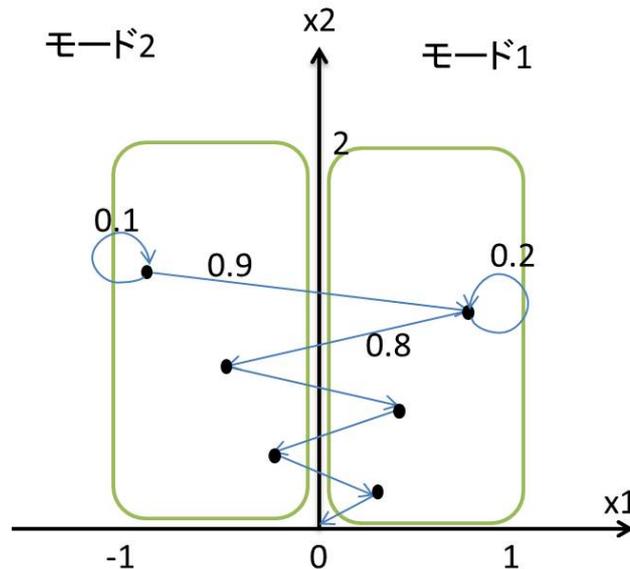


図 2.1: 例題 2 の振る舞い

図 2.1 に (2.2) 式の振る舞いを示す。モードごとに領域が割り振られており、現在の状態がどちらに含まれているかによって、選ばれる可能性のある線形システムが変化する。モード内には複数の線形システムが存在しており、選択される線形システムによって状態の遷移先が変化する。

モードごとに異なる確率分布を与えることができるため、システムの状態によって故障時の振る舞いや、故障が起きる確率が異なるシステムのモデル化などが行える。

確率ハイブリッドシステムは複雑なシステムを書き表せる一方で、状態と入力との組み合わせが非常に多くなりやすい。そのため、特定の状態にたどり着けるかといった問題（到達可能性問題）や到達に必要なステップ数、遷移確率などの解析が困難になることが考えられる。

本研究では、有界双模倣と呼ばれる離散抽象化手法を確率ハイブリッドシステムに適用することで、到達可能性を保存した離散ダイナミクスへ抽象化を行うことが目的である。

3章で有界双模倣の定義を行い、4章では有界双模倣の計算アルゴリズムの説明を行う。また、5章では (2.2) 式を含むいくつかの例題に対して提案手法による抽象化を行い、結果の説明を行う。

第3章 有界双模倣の定義

3.1 離散時間マルコフ決定過程

双模倣および有界双模倣を定義するために、確率ハイブリッドシステム (2.1) を離散時間マルコフ決定過程として表現することを考える。

まず、準備として、以下の定義を与える。

定義 1 $\mathcal{S} := \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ とし、 $s = (x, u) \in \mathcal{S}$ および $x' \in \mathcal{X}$ が与えられているとする。このとき、制御入力 u を印加することで、 x が次の時刻で x' となる確率を関数 $p: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ として定義する。 $\mathcal{S} := \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ より $p: \mathcal{S} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ と記述できるため、関数 p は $p(x, u, x')$ もしくは $p(s, x')$ と表記する。

ここで、本研究で考える確率ハイブリッドシステム (2.1) ではモード遷移確率 $pr(I, i)$ より、 $(x, u) \in \mathcal{S}$ から $x' \in \mathcal{X}$ への遷移確率 $p(x, u, x')$ が

$$V = \{i \in \{1, 2, \dots, q(I)\} \mid x' = A_{I,i}x + B_{I,i}u, x \in \mathcal{S}_I\}$$

$$p(x, u, x') = \sum_{i \in V} pr(I, i)$$

によって求められる。また、 (x, u) が固定されたとき、遷移先の状態の候補となる $x'_j, j = 1, 2, \dots, q(I)$ において、

$$\sum_{j=1}^{q(I)} p(x, u, x'_j) = 1$$

が成立する。

定義より、関数 $p(x, u, x')$ は確率ハイブリッドシステム (2.1) の状態間の推移確率を表す関数である。また、 \mathcal{S} は一般に無限集合である。文献 [17] では、 $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ を拡張状態と呼んでおり、本論文でも同様の呼び方を用いる。

つぎに、 \mathcal{X} , \mathcal{U} , \mathcal{S} および $p(x, u, x')$ を用いて、離散時間マルコフ決定過程を定義する。

定義 2 離散時間マルコフ決定過程 \mathcal{H} を

$$\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \mathcal{U}, p) \tag{3.1}$$

によって定義する。ここで、 \mathcal{X} は状態の集合、 p は定義 1 で述べた推移確率 $p: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ である。

次に、 \sim を \mathcal{S} 上の同値関係とする。ただし、本論文では同値類間の遷移確率は一意に定まる同値関係のみを考えることとする。また、 \sim の \mathcal{X} への射影によって関連付けられる \mathcal{X} 上の同値関係を \sim' とする。さらに、任意の同値類 $X, X' \in \mathcal{X}/\sim'$ が与えられている場合を考える。任意の $x \in X$ からある $x' \in X'$ に遷移させる入力関数 $f(x)$ によって与えられているとき、すべての $f(x)$ の集合を \mathcal{U} 上の同値類とし、 \mathcal{U} 上の同値関係を \sim'' と表記する。これらの同値関係を用いて、離散時間マルコフ決定過程 (3.1) の \sim による商遷移システムを以下で定義する。

定義 3 離散時間マルコフ決定過程 (3.1) の \sim による商遷移システム \mathcal{H}/\sim を

$$\mathcal{H}/\sim = (\mathcal{X}/\sim', \mathcal{U}/\sim'', p/\sim)$$

により定義する。ここで、 $p/\sim: \mathcal{X}/\sim' \times \mathcal{U}/\sim'' \times \mathcal{X}/\sim' \rightarrow [0, 1]$ は、任意の3つの同値類 $C_x \in \mathcal{X}/\sim', C_u \in \mathcal{U}/\sim'', C_{x'} \in \mathcal{X}$ に対して

$$\tilde{V} = \{i \in \{1, 2, \dots, q(I)\} \mid \forall x \in C_x, \forall u \in C_u, \exists x' \in C_{x'}, x' = A_{I,i}x + B_{I,i}u, C_x \subseteq \mathcal{S}_I\}$$

$$p/\sim(C_x, C_u, C_{x'}) = \sum_{i \in \tilde{V}} pr(I, i)$$

として定義する。

3.2 双模倣および有界双模倣の定義

離散時間マルコフ決定過程 (3.1) に対する双模倣を定義する。原子命題の集合 \mathcal{A} が与えられているとする。また、 \mathcal{S} の各要素に原子命題が、 $I: \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{A}}$ として割り当てられているとする。このとき、 \sim のもとでの同値類 $C \in \mathcal{X}/\sim'$ に対し、 $p(s, C) := \sum_{i \in \tilde{V}} pr(I, i)$, $V = \{i \in \{1, 2, \dots, q(I)\} \mid x' = A_{I,i}x + B_{I,i}u, x \in \mathcal{S}_I, x' \in C\}$, $s = (x, u)$ と定義する。

このとき、双模倣の定義を以下で与える。

定義 4 離散時間マルコフ決定過程 (3.1), 原子命題の集合 \mathcal{A} , および関数 $I: \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{A}}$ が与えられているとする。このとき、 $s \sim t$ となる任意の拡張状態 s, t に対して、 $I(s) = I(t)$ が成立し、かつ、任意の同値類 $C \in \mathcal{X}/\sim'$ に対して、 $p(s, C) = p(t, C)$ が成立するとき、 \sim は双模倣であるという。

双模倣な同値関係を \sim_B と表記することとする。 \mathcal{H} の \sim_B による商遷移システムを求めることを考える。このとき、次の結果が知られている。

定理 1 \sim_B を (3.1) 式の離散時間マルコフ決定過程 \mathcal{H} の双模倣とする。このとき、 \mathcal{H} が PCTL (Probabilistic Computation Tree Logic) 論理式 ϕ を満足するとき、かつそのときに限り、 \mathcal{H}/\sim は ϕ を満足する。

この定理から、 \mathcal{S} が無限集合であっても、得られた商遷移システムの拡張状態集合 \mathcal{S}/\sim_B が有限であれば、PCTL 論理式のモデル検査問題は可解となる。しかしながら、 \mathcal{S}/\sim_B が有限となることは一般には保証されていない。

文献 [17] では、決定性／非決定性のハイブリッドシステムに対して、与えられた有限時間区間のみで双模倣性を保証する方法を提案している。有限時間区間のみを考えることで、拡張状態集合の分割が有限となり、有界モデル検査問題を解くことができる。本研究では、文献 [17] の定義を離散時間マルコフ決定過程に拡張し、確率ハイブリッドシステムに対する PCTL 論理式の有界モデル検査を行うための方法を提案する。定義を以下で与える。

定義 5 離散時間マルコフ決定過程 (3.1), 原子命題の集合 \mathcal{A} , 関数 $I: \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{A}}$, および整数の時間区間 $[0, k]$ が与えられているとする。また、離散時間マルコフ決定過程に対する任意の 2 つの時系列を $s^{(0)}, s^{(1)}, \dots, s^{(k)}$ および $t^{(0)}, t^{(1)}, \dots, t^{(k)}$ と表記する。このとき、以下の条件を満足する同値関係 \sim_{B_k} を k -有界双模倣と定義する。また、 \sim_{B_k} の \mathcal{X} への射影によって関連付けられる \mathcal{X} 上の同値関係を \sim'_{B_k} とする。

$s^{(0)} \sim_{B_k} t^{(0)}$ が成立するならば、(i) 離散時間マルコフ決定過程の時系列 $t^{(0)}, t^{(1)}, \dots, t^{(k)}$ が存在し、 $I(s^{(i)}) = I(t^{(i)})$, $i = 0, 1, \dots, k$ が成立する、(ii) 任意の $C \in \mathcal{X}/\sim'_{B_k}$ に対して、 $p(s^{(i)}, C) = p(t^{(i)}, C)$ が成立する。

定義より、 \sim_{B_k} が双模倣であれば、 $\sim_{B_{k+1}} = \sim_{B_k}$ が成立する。逆に、 $\sim_{B_{k+1}} = \sim_{B_k}$ が成立すれば、 \sim_{B_k} は双模倣である。

3.3 有界双模倣の概要

提案する有界双模倣の計算アルゴリズムでは、 \mathcal{S}/\sim_{B_k} を与えた上で、 \mathcal{S}/\sim_{B_i} , $i = 0, 1, \dots, k-1$ を求める。 \mathcal{S}/\sim_{B_k} が有限個の拡張状態の分割で与えられている場合は \mathcal{S}/\sim_{B_i} , $i = 0, 1, \dots, k-1$ も有限個の拡張状態の分割となり、計算アルゴリズムの停止性が保証される。有界双模倣の具体的な計算手順については 4 章で説明を行う。

また、得られた結果を基に、有界双模倣グラフが作成できる。有界双模倣グラフの例を図 3.1 に示す。ここで、 $\pi_i := \mathcal{S}/\sim_{B_{k-i}}$ である。各頂点は拡張状態の領域を表す。

図 3.1 に示した例の場合は $k = 3$ であるため、3-有界双模倣グラフとなる。3-有界双模倣の場合、4 部グラフとなり、頂点は各時刻に割り当てられる。各時刻の頂点数は π_i の分割数によって決まる。有界双模倣に基づく拡張状態空間の分割では、初期分割 π_0 から時間に関して後向きに $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ を計算する。したがって、図 3.1 においては、 $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ の分割数はそれぞれ 4, 5, 6, 8 となっている。

さらに、有界双模倣グラフでは、頂点に確率ハイブリッドシステム (2.1) の状態の部分集合 (状態に関する線形不等式で表現される)、有向辺に領域間の遷移確率および確率ハイブリッドシステム (2.1) の状態と制御入力に関する線形不等式の条件が割り当てられる。

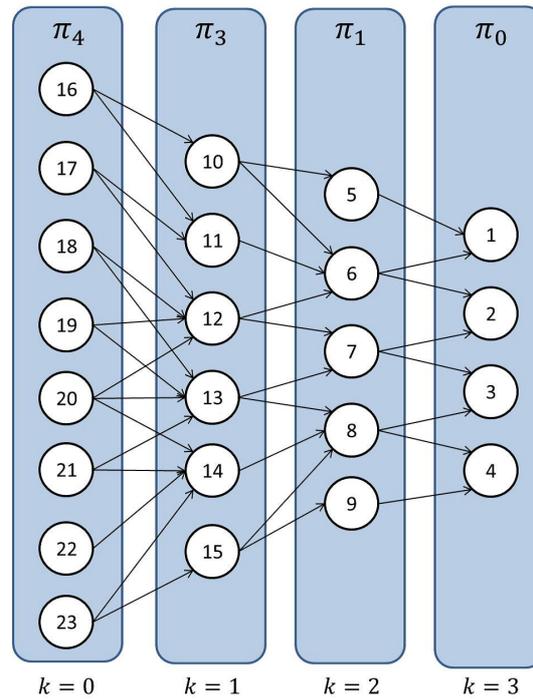


図 3.1: 離散抽象化によって得られる有界双模倣グラフ

有界双模倣グラフでどのように振る舞いが表現されているかを説明する．図 3.1 において，頂点 16 から頂点 10 への遷移を考える．このとき，頂点 16 の状態集合に含まれる任意の状態は，頂点 16 から頂点 10 への有向辺に割り当てられた条件を満たす制御入力を用いることで，頂点 10 の状態集合に含まれるある状態に，0 より大きいある確率で遷移可能である．したがって，有界双模倣グラフを用いることで，任意の状態同士の可到達性を確率的に検証できる．なお，頂点 16 から頂点 10 への有向辺も存在するが，有向辺に割り当てられた条件を満足する制御入力を選択することで，有向辺は選択可能である．

第4章 離散抽象化の計算アルゴリズム

この章では離散抽象化の計算アルゴリズムについて具体的に述べる。4.1節ではアルゴリズムに用いる変数の説明を行う。4.2節で各手続きの概要や入出力の関係などを述べ、4.3節で詳しい説明を行う。

4.1 変数の定義

確率ハイブリッドシステムは、2章で定義した(2.1)式を用いる。アルゴリズムの説明に必要な状態空間の分割 π と、与えられた領域を指定した実数空間へ射影する関数を以下のように定義する。

定義 6 拡張状態空間 S の部分集合の集合 $\pi := \{S_1, S_2, \dots\}$ をを状態空間の分割と表記する。ただし、 π の要素数は有限とし、 $\bigcup_i S_i = S$, $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$ を満足することとする。

定義 7 ある実数空間の領域 $X \subseteq \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ が与えられているとき、 X の \mathcal{X}_i への射影 X_i を求める関数を $X_i := Pro_{\mathcal{X}_i}(X)$ とする。

拡張状態の領域 S が与えられたとき、 \mathcal{X} への射影 X を求める場合は $X := Pro_{\mathcal{X}}(S)$ と記述する。

4.2 アルゴリズムの概要

アルゴリズム間の入出力の関係を図4.1に示し、各構成要素における入出力の大まかな流れを説明する。

$Pre_X(X, m, q)$:

m, q によって指定された連続ダイナミクスを用いたとき、 $X \subset \mathcal{X}$ へ遷移可能な拡張状態の領域 S_{pre} を出力する。

$Pre(X)$:

状態の領域 $X \subset \mathcal{X}$ を入力とし、その領域へ遷移可能な拡張状態の領域 S_j と確率 p_j の組の集合 $\rho = \bigcup_j \{(S_j, p_j)\}$ を出力する。

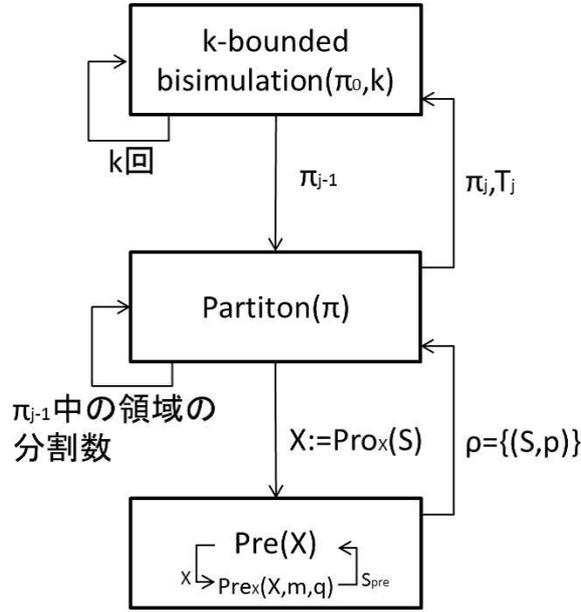


図 4.1: 計算アルゴリズムの構成

Partition(π) :

拡張状態空間の分割 $\pi = \{S_1, S_2, \dots\}$ を入力し, π に含まれる各領域の \mathcal{X} への射影 X_i から求められる $Pre(X_i)$ の結果を用いて π の分割を行う. π に含まれるすべての領域を用いて分割した結果を $\pi_{pre} = \{S'_1, S'_2, \dots\}$ としたとき, $S_i \in \pi$ と $S'_j \in \pi_{pre}$ の遷移確率を p_{ij} とする. このとき, 遷移確率 p_{ij} が 0 より大きい S_i, S'_j の組み合わせの集合を遷移関係 $T_{pre} = \{(S_i, S'_j, p_{ij}) \mid p_{ij} > 0\}$ とし, T_{pre} と π_{pre} を出力する.

k-bounded bisimulation(π_0, k) :

入力として, 状態空間の初期分割 π_0 と離散抽象化を行うステップ数 k が与えられたとき, 分割 π_j , 遷移関係 T_j , $j = 1, 2, \dots, k$ を出力する.

Pre(X) では, 入力された状態 X へ 1 ステップで遷移可能な拡張状態の領域と, 遷移確率の導出を行う. モード m 内の q 番目の連続ダイナミクスが用いられたとき, 拡張状態の領域 S へと遷移可能な領域は $Pre_X(X, m, q)$ から得られる. 連続ダイナミクスにはそのダイナミクスが採用される確率 $pr(m, q)$ が割り当てられているため, 得られた領域の重複関係から元となる領域 X への遷移確率が得られる.

Partition(π) ではまず, 入力された π に含まれる拡張状態の領域 S_i を \mathcal{X} へ射影し, 得られた X に対して *Pre*(X) の計算を行う. *Pre*(X) から得られた結果をもとに, 与えられた π に含まれる領域に遷移可能な拡張状態の領域と, それらの遷移関係を導出する. *Pre*(X) によって得られた領域によって π の分割を行い, 分割後の状態空間の分割を π_{pre} とする. π と π_{pre} の遷移関係 T_{pre} を求め, T_{pre} と π_{pre} を出力する.

k -bounded bisimulation(π_0, k)では、状態空間の初期分割 π_0 と、離散抽象化を行う回数 k が入力となる。Partition(π)によって、 π_j へ遷移可能な領域を含む状態空間の分割 π_{j+1} と、 π_j, π_{j+1} に含まれる領域どうしの遷移関係 T_{j+1} を求める。 $k - 1$ 回 Partition(π) の計算を行うことで、 k 個の状態空間の分割と、そこに含まれる領域間の遷移関係が得られる。以下、それぞれの関数の詳細を説明する。

4.3 アルゴリズムの詳細

$Pre_X(X, m, q)$, $Pre(X)$, Partition(π), k -bounded bisimulation(π_0, k) の詳しい計算手続きを説明する。

4.3.1 $Pre_X(X, m, q)$

Algorithm 1 Calculate $Pre_X(X, m, q)$

- 1: **begin**
 - 2: $S_{pre} := \{(x, u) \in \mathcal{S} \mid x' = A_{m,q}x + B_{m,q}u, x' \in X, x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\};$
 - 3: **return** S_{pre}
 - 4: **end.**
-

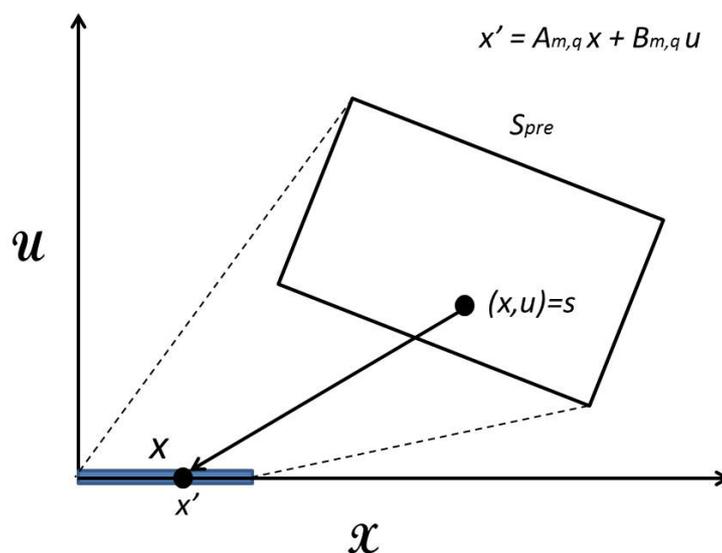


図 4.2: $Pre_X(X, m, q)$ の概要

Algorithm 1 の $Pre_X(X, m, q)$ では、状態空間上の領域 X と、連続ダイナミクス $x' = A_{m,q}x + B_{m,q}u$ が与えられた時、 $x' \in X$ となる状態 $x \in \mathcal{X}$ と入力 $u \in \mathcal{U}$ の組み合わせ (x, u) の取り得る領域を求める。

概念図を図 4.2 に示し説明を行う。本研究で考える確率ハイブリッドシステムは複数の連続ダイナミクスで構成されているが、一つの連続ダイナミクスに着目するとある状態 $x' \in X$ へ遷移する状態と入力の組み合わせは連続ダイナミクスを逆算することで求められる。また、 x' の状態集合である X に対しても同様に、 X へ遷移可能な (x, u) の集合を導出することができる。

この関数では、入力値 m, q で定められる連続ダイナミクスが採用されたとき X へ遷移する拡張状態 (x, u) の集合を計算し、拡張状態の領域 S_{pre} として出力する。

4.3.2 $Pre(X)$

Algorithm 2 Calculate $Pre(X)$

```

1: begin
2: for each  $m \in \mathcal{M}$  do
3:    $\rho_m := \{(S_m, 0)\}$ ; % モード  $m$  中の状態空間の分割.
      % 初期値として着目しているモードの領域全体を入力する
4:   for each  $q \in q(m)$  do
5:      $S_{m,q} := Pre_X(X, m, q)$ 
6:     while  $\exists (S'_i, p_i) \in \rho_m$  do
7:        $E_1 := S'_i \cap S_{m,q}$ ; % 重複部分
8:        $E_2 := S'_i - E_1$ ; % すでに求められていた領域内で,
      %  $S_{m,q}$  には含まれない部分
9:       if  $E_1 \neq \emptyset$  then
10:         $\rho_m := \{\rho_m - (S'_i, p_i)\} \cup \{(E_1, (p_i + pr(m, q))), (E_2, p_i)\}$ ;
11:       end if
12:     end while
13:   end for
14: end for
15: return  $Pre(X) = \bigcup_m \rho_m$ 
16: end

```

Algorithm 2 の $Pre(X)$ では、領域 X が与えられたとき、1 ステップ前にどのような状態と入力を取り得るかを求める。状態と入力の組は拡張状態の領域として得られる。複数存在する連続ダイナミクスに対してそれぞれ領域を求め、重複関係を調べることで拡張状態の状態空間上から X へ遷移できる領域を求める。

計算手続きの概要を説明する。 $Pre(X, m, q)$ を用いると、領域 X が与えられたとき、指定した連続ダイナミクスで取り得る拡張状態の領域 S が得られる。このとき、それぞれの連続ダイナミクスが採用される確率は $pr(m, q)$ で与えられている。

領域 X へ遷移可能な領域と、得られた領域から X への遷移確率を p として、領域と遷移確率の組み合わせ (S, p) を記録してゆくことで $Pre(X)$ の計算を行う。図 4.3～図 4.6 に例を示し、計算手続きの説明を行う。ここではモードが 2 つ存在し、それぞれのモードに二つ連続ダイナミクスが割り当てられている確率ハイブリッドシステムを用いて説明を行う。

line 2,3 :

まず、着目したモードに割り当てられた領域 S_m を ρ_m へ入力する。組となる遷移確率は 0 とする。

$$\rho_1 = \{(S_1, 0)\}$$

line 4,5 :

モード内に複数存在している連続ダイナミクスから一つを選択し、 (m, q) で選択される連続ダイナミクスを用いたとき、領域 X へ遷移確率を持つ領域 $S_{m,q} := Pre_X(X, m, q)$ を求める。 $m = 1, q = 1$ の時、図 4.3 に示される領域 $S_{1,1}$ が得られたとする。

$$S_{1,1} := Pre_X(X, 1, 1)$$

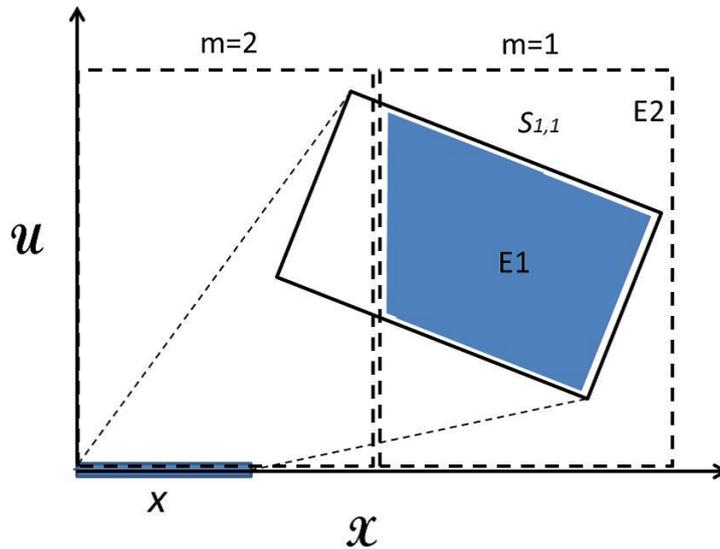


図 4.3: $Pre_X(X, m, q)$ の概要

line 6-8 :

得られた $S_{m,q}$ と、現在 ρ_m に記録されている領域の重複関係を調べる。この段階では ρ_1 には一組しか値が入力されていないため、 $(S'_i, p_i) = (\mathcal{S}_1, 0)$ が呼び出される。 $S_{m,q}$ と S'_i を比較し、重複している部分を E_1 、 S'_i には含まれるが、 $S_{m,q}$ には含まれない領域を E_2 とする。図 4.3 に E_1 、 E_2 の領域を示す。

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathcal{S}_1 \cap S_{1,1} \\ E_2 &= \mathcal{S}_1 - E_1 \end{aligned}$$

line 9,10 :

$S_{m,q}$ と S'_i に重複部分が存在している場合は、得られた拡張状態の領域、 E_1 と E_2 を ρ_m へと記録する。 $S_{m,q}$ から X への遷移確率は $pr(m, q)$ であるため、 $S_{m,q}$ に含まれる領域 E_1 も同様に、遷移確率 $pr(m, q)$ を持つ。このとき、 E_2 の持つ遷移確率は S'_i と同じである。

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (\rho_1 - (S'_i, p_i)) \cup \{(E_1, (p_i + pr_{m,q})), (E_2, p_i)\} \\ &= ((\mathcal{S}_1, 0) - (\mathcal{S}_1, 0)) \cup \{(E_1, (0 + pr_{1,1})), (E_2, 0)\} \\ &= \{(E_1, pr_{1,1}), (E_2, 0)\} \\ &= \{(S_1, pr_{1,1}), (S_2, 0)\} \end{aligned}$$

ここでは説明のため、得られた各領域に S_1 、 S_2 とラベル付けをしている。

line8 の式から解るように $S'_i = E_1 + E_2$ となる。 ρ_m から S'_i の領域を取り除いた後に E_1, E_2 を再入力しているため、 ρ_m に含まれる領域の合成は \mathcal{S}_m のままである。

ここまでの手順で、ある m, q が選択された際に X へと1ステップで遷移可能な領域とその遷移確率が得られた。モード m に連続ダイナミクスが一つしか存在していない場合は line2 へ戻り、別のモードに対して同様の処理を行う。このモードに、ほかにも連続ダイナミクスが存在数する場合は line4 へと戻り別の $q \in q(m)$ を選択し計算を続ける。

ここでは、各モードに二つずつ連続ダイナミクスが与えられている例を考えているため、line4 へと戻り説明を続ける。

line 4,5 :

以前選択した $q \in q(m)$ とは別の q に対して $S_{m,q} := Pre_X(X, m, q)$ を求める。ここでは、図 4.4 に示す領域 $S_{1,2}$ が得られた場合を考える。

$$S_{1,2} := Pre_X(X, 1, 2)$$

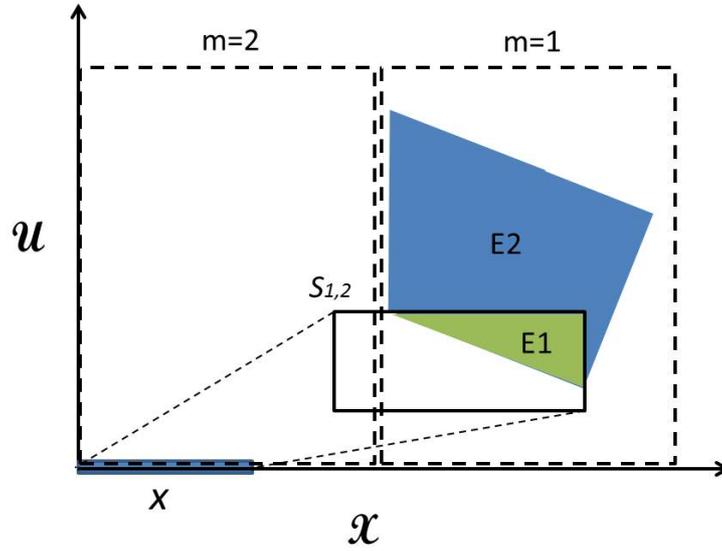


図 4.4: 領域 S_1 と $S_{1,2}$ の関係

line 6-9 :

ρ に含まれる領域と得られた $S_{1,2}$ の比較を行う。現在の領域の分割と遷移確率の組み合わせは、 $\rho_1 = \{(S_1, pr_{1,1}), (S_2, 0)\}$ であるため、まずは S_1 との比較を行う。

$$E_1 = S_1 \cap S_{1,2}$$

$$E_2 = S_1 - E_1$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (\rho_1 - (S_1, pr_{1,1})) \cup \{(E_1, (pr_{1,1} + pr_{1,2})), (E_2, pr_{1,1})\} \\ &= \{(S_1, pr_{1,1}), (S_2, 0)\} - (S_1, pr_{1,1}) \cup \{(E_1, (pr_{1,1} + pr_{1,2})), (E_2, pr_{1,1})\} \\ &= \{(S_2, 0)\} \cup \{(E_1, (pr_{1,1} + pr_{1,2})), (E_2, pr_{1,1})\} \\ &= \{(S_2, 0), (S_3, (pr_{1,1} + pr_{1,2})), (S_4, pr_{1,1})\} \end{aligned}$$

得られた領域に対して再びラベル付けを行う。領域が変化していない S_2 はそのまま、新たに得られた分割 E_1, E_2 を S_3, S_4 とした。

今回得られた E_1 の領域は、前のループで得られた $S_{1,1}$ と、今回の計算で得られた $S_{1,2}$ が重複する領域である。このような領域は、点 $s(x, u) \in E_1$ に着目すると、次のステップで確率 $pr_{1,1}$ で $x' \in X$ へ遷移し、確率 $pr_{1,2}$ で $x'' \in X$ へと遷移する。 X 内の同一の点に遷移することは保証されていないが、領域 E_1 内の点から X の領域内の点へ遷移する確率は、 $pr_{1,1} + pr_{1,2}$ で求められる。

line 6-11 :

ρ_m には S_1 だけでなく S_2 も含まれているため、 $S_{1,2}$ と S_2 の比較を行う。分割の様子を

図 4.5 に示す. ρ_m に他にも領域が存在している場合はこの計算を繰り返し行う.

$$\begin{aligned}
 E_1 &= S_2 \cap S_{1,2} \\
 E_2 &= S_2 - E_1 \\
 \rho_1 &= (\rho_1 - (S_2, 0)) \cup \{(E_1, (0 + pr_{1,2})), (E_2, 0)\} \\
 &= \{(S_2, 0), (S_3, (pr_{1,1} + pr_{1,2})), (S_4, pr_{1,1})\} - (S_2, 0) \cup \{(E_1, (pr_{1,2})), (E_2, 0)\} \\
 &= \{(S_3, (pr_{1,1} + pr_{1,2})), (S_4, pr_{1,1})\} \cup \{(E_1, pr_{1,2}), (E_2, 0)\} \\
 &= \{(S_3, (pr_{1,1} + pr_{1,2})), (S_4, pr_{1,1}), (S_5, pr_{1,2}), (S_6, 0)\}
 \end{aligned}$$

$q \in q(m)$ がほかにも存在する場合は, line4 へと戻り line4-12 の計算を続ける. 存在しない場合は line2 へ戻り, 別のモードに対して計算を続ける.

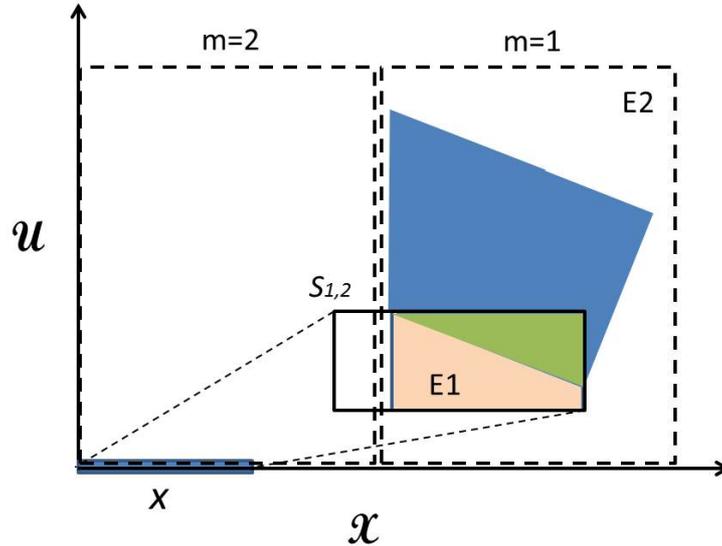


図 4.5: 領域 S_1 と $S_{1,2}$ の関係

line 15 :

以上の操作で, X へ遷移可能なモード 1 内の領域と, その遷移確率の組 ρ_1 が得られた. 図 4.6 に得られた領域を示す. 他にもモードが存在する場合は同様の操作を行い, $\rho_2, \rho_3 \dots \rho_m$ を求める.

図 4.6 から読み取れるように, この計算によって得られる領域はモードの領域 S_m の部分集合の集合群である. モードの領域どうしは重複しないため, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ に含まれる領域どうしも重複しない.

そのため, 違うモードに含まれる領域間では X への遷移確率に影響を与えあうことは

ない。全てのモードにおける ρ の合成,

$$\bigcup_{m=1}^2 \rho_m = \{\rho_1, \rho_2\}$$

が $Pre(X)$ の出力となる。

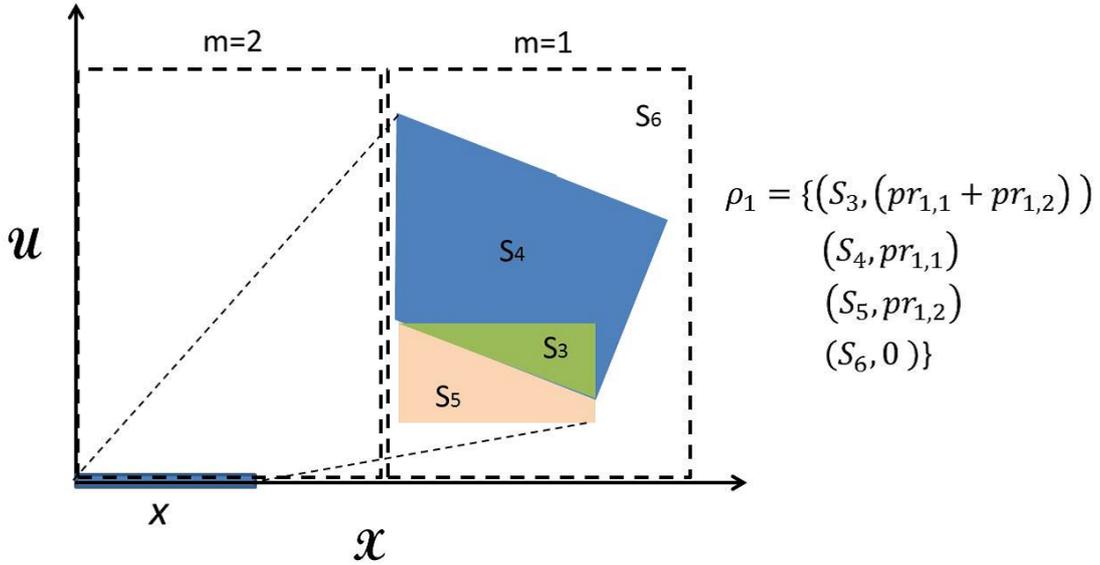


図 4.6: ρ_1 の分割とラベル

4.3.3 $Partition(\pi)$

Algorithm 3 の $Partition(\pi)$ では、入力された状態の分割情報 π 内の領域 S_i を $Pre(X)$ に入力し、得られた領域と遷移確率から、 $T_{pre} = \{(S_i, S'_j, p_{ij}) \mid S_i \in \pi, S'_j \in \pi_{pre}\}$ となる状態空間の分割 π_{pre} と T_{pre} を求める。 T_{pre} の概念図を図 4.7 に示し、説明を行う。

この計算手続きでは領域の集合 π が入力として与えられる。 π 中の領域 S の \mathcal{X} への射影 X を $Pre(X)$ に入力すると、 S へ遷移可能な拡張状態の領域と、その遷移確率が得られる。

π に含まれるすべての S でこの計算を行い、求められた領域で状態空間を分割する。これによって、 π に含まれる各領域へ遷移可能な領域と遷移確率が計算できる。計算結果を π と π_{pre} に含まれる領域どうしの遷移関係と組にして T_{pre} として記録する。

計算手順を以下に説明する。

Algorithm 3 Calculate $Partition(\pi)$

```
1: begin
2:  $\pi_{pre} := \pi$ ;
3: for each  $S_i \in \pi$  do
4:    $X := Pro_{\mathcal{X}}(S_i)$ 
5:    $\pi_i := Pro_S(Pre(X))$            %  $Pre(X) \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{R}$  の拡張状態空間  $\mathcal{S}$  への射影
6:    $T'_i := \{(S_i, S_p^{pre}, p_{ip}) \mid (S_p^{pre}, p_{ip}) \in Pre(X), p_{ip} > 0\}$ 
7:   while  $\exists S' \in \pi_{pre} : \emptyset \neq (S' \cap S_p) \neq S'$  do
8:     while  $\exists S''_p \in \pi_i$  do
9:        $S_1 := S' \cap S''_p$ ;
10:       $S_2 := S' - S''_p$ ;
11:       $\pi_{pre} := (\pi_{pre} - \{S'\}) \cup \{S_1, S_2\}$ ; % 領域の分割と保存は以前と同様に行う
12:     end while
13:   end while
14: end for
15: for each  $S_i \in \pi$  do
16:   for each  $S'_j \in \pi_{pre}$  do
17:     for each  $S_p^{pre} \in \pi_i$  do
18:       if  $S'_j \subset S_p^{pre}$  then
19:          $T_{pre} := T_{pre} \cup \{(S_i, S'_j, p_{ip})\}$ 
20:       end if
21:     end for
22:   end for
23: end for
24: return  $\pi_{pre}, T_{pre}$  % 戻り値は分割情報  $\pi_{pre}$  と遷移情報  $T_{pre}$ 
25: end.
```

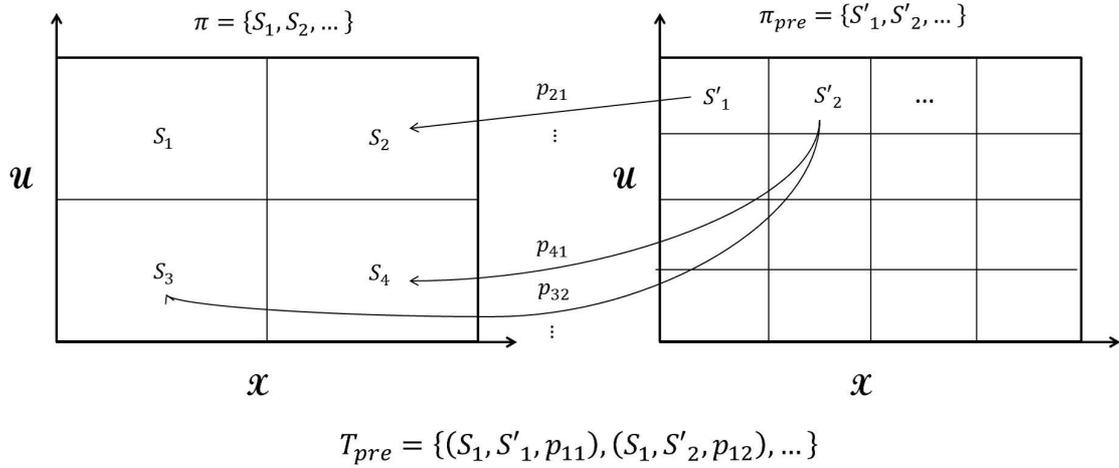


図 4.7: $S_i \in \pi$ と $S_j \in \pi_{pre}$ 及び T_{pre} の関係

line 3-6 :

$Pre(X)$ に、 π に含まれる領域 S_i の \mathcal{X} への射影である X を入力し、 X へ遷移可能な領域と遷移確率の組、 $\bigcup_p \{(S_p^{pre}, p_{ip})\}$ を得る。

得られた遷移関係のうち、遷移確率が 0 より大きいものを $T'_i = \bigcup_p \{(S_i, S_p^{pre}, p_{ip})\}$ へと記録する。また、領域の分割は π_i にも記録する。

line 9-14 :

π_i を用いて π_{pre} を分割する。 π_i は、それぞれの S_i から得られた領域の分割のみが記録されるが、入力として与えられた分割情報 π と、すべての π_i によって分割された領域が π_{pre} として導出される。

line 15-23 :

T_i には、対応した S_i へと遷移可能な領域 S_p^{pre} と、遷移確率 p_{ip} が記録されている。領域 S_p^{pre} に含まれている領域であれば、同様に p_{ip} で S_i へ遷移可能である。よって、 π_{pre} に内のある領域 S'_j が S_p^{pre} に包含されるならば、 S'_j が S_i へ遷移する確率は p_{ip} となる。 π_{pre} と $\pi_i, i = 1, 2, \dots, |\pi|$ に含まれる全ての領域間の包含関係を計算し、得られた結果から求められる領域間の遷移関係 (S_i, S'_j, p_{ip}) の組みの集合を T_{pre} へと記録してゆく。

line 24 :

$Partiton(\pi)$ の出力として、 π_{pre} と T_{pre} を返す。

4.3.4 k -bounded bisimulation(π_0, k)

Algorithm 4 Calculate k -bounded bisimulation(π_0, k)

```

1: begin
2: input  $\pi_0, k$ ;
3: for  $j = 0$  to  $k - 1$  do
4:    $(\pi_{j+1}, T_{j+1}) := Partition(\pi_j)$    % 各時刻の分割と遷移情報を記録する.
5: end for
6: output  $\pi_j, T_j, j = 1, 2, \dots, k - 1$ 
7: end

```

Algorithm 4 の k -bounded bisimulation(π_0, k) では、状態空間の初期分割 π_0 を入力し、離散抽象化を k ステップ分の遷移関係を求めて記録を行う。

まず π_0 を $Partition(\pi)$ へと入力し、 π_0 へ遷移関係を持つ π_1, T_1 を得て記録する。新たに得られた π_1 を再び $Partition(\pi)$ に入力することで、 π_2, T_2 が求められる。この処理を k 回行うと、入力した π_0 に加え $k - 1$ 個の状態空間の分割が得られるため、合わせて k 個の状態空間の分割と、その遷移関係が得られる。状態空間の分割 π_j と遷移関係 T_j の概念図を 4.8 に示す。

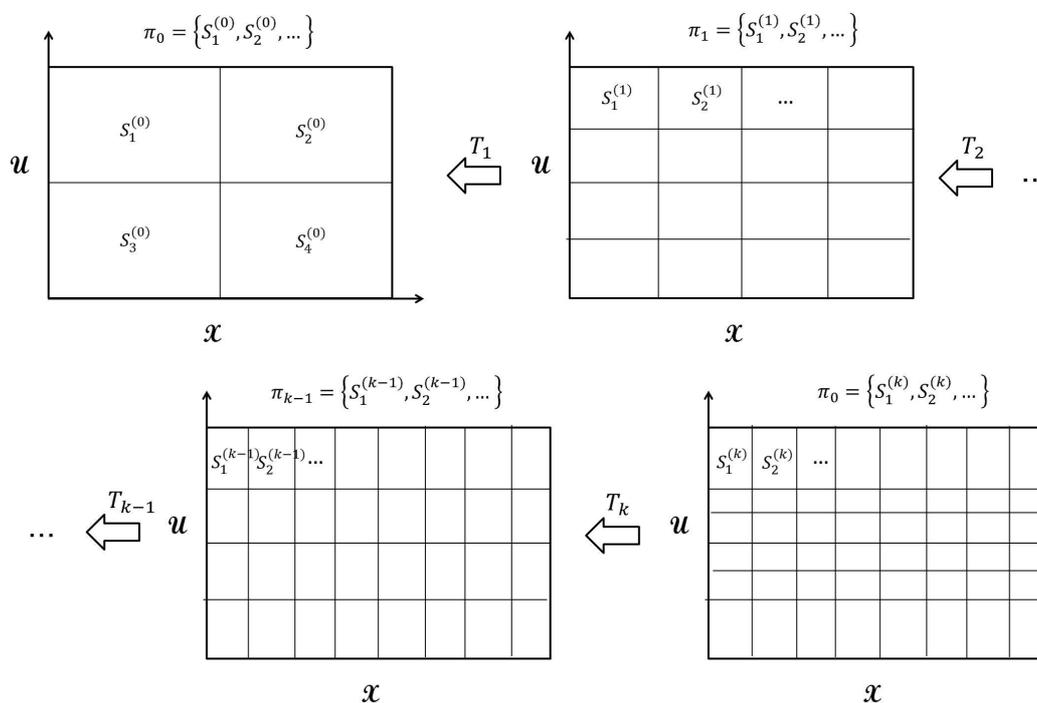


図 4.8: π_k と T_k の関係

この図を用いると、ある状態 $x(0)$ が与えられたとき π_k のどの領域 $S_i^{(k)}$ に $x(0)$ が含まれているか知ること、初期分割 π_0 内のある領域 $S_j^{(0)}$ への到達可能性や遷移確率が得られる。

初期分割として制御目標となる領域や制御するうえで避けたい領域などを与えることで、制御方針やそれを実現する制御入力を離散ダイナミクスから考えることができる。

第5章 計算例

この章では例題を用いて確率ハイブリッドシステムの離散抽象化によって得られるグラフの説明や、制御への利用法について述べる。

5.1節では確定的なハイブリッドシステムを例に、4章のアルゴリズムを実装したプログラムでどのような計算が行われているか説明する。また、例としたハイブリッドシステムの振る舞いや、結果として得られる領域と遷移関係についての説明を行う。次に、5.2節では5.1節で用いた確定的なハイブリッドシステムに連続ダイナミクスを追加し、確率ハイブリッドシステムへ拡張した問題に対して離散抽象化を行う。5.3節では、5.2節とは異なる連続ダイナミクスを追加した場合、分割や離散抽象化にどのような影響を与えるか考察を行う。最後に、5.4節で遺伝子のトグルスイッチを例として、実際の制御への応用例について説明を行う。

5.1 例題1. 確定的なハイブリッドシステム

この節では、確定的なハイブリッドシステムの例を用いて $Pre_X(X, m, q)$ の実装や、提案手法で得られる結果について説明を行う。例として、文献 [17] で紹介されている問題を用いる。

抽象化アルゴリズムは4章で示したアルゴリズムを用いて計算を行う。確率ハイブリッドシステム (2.1) では、モードごとに複数存在するダイナミクスに異なる確率分布を与えることで確率的な振る舞いを表現している。そのため、全てのモード $m := \mathcal{M}$ に対して $q(m) = 1$, $pr(m, q) = 1$ とすることで、確定的なハイブリッドシステムを記述できる。

[17] の例題を確率ハイブリッドシステム (2.1) で記述した

$$x(k+1) = \begin{cases} 0.8 \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \quad \text{with the prob. } pr(1, 1) = 1 \\ \text{if } x(k) \in \mathcal{S}_1 \\ 0.8 \begin{bmatrix} \cos(-\pi/3) & -\sin(-\pi/3) \\ \sin(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \quad \text{with the prob. } pr(2, 1) = 1 \\ \text{if } x(k) \in \mathcal{S}_2 \end{cases} \quad (5.1)$$

を考える. ここで, $x(k) \in \mathcal{X} \subseteq [-1 \ 1] \times [0 \ 2]$, $u(k) \in \mathcal{U} \subseteq [-1 \ 1]$, $I(k) \in \mathcal{M} := \{1, 2\}$, $\mathcal{S}_1 = [0 \ 1] \times [0 \ 2]$, $\mathcal{S}_2 = [-1 \ 0] \times [0 \ 2]$ である. この例題における状態 $x(k)$ と $x(k+1)$ の振る舞いを図 5.1 に示す.

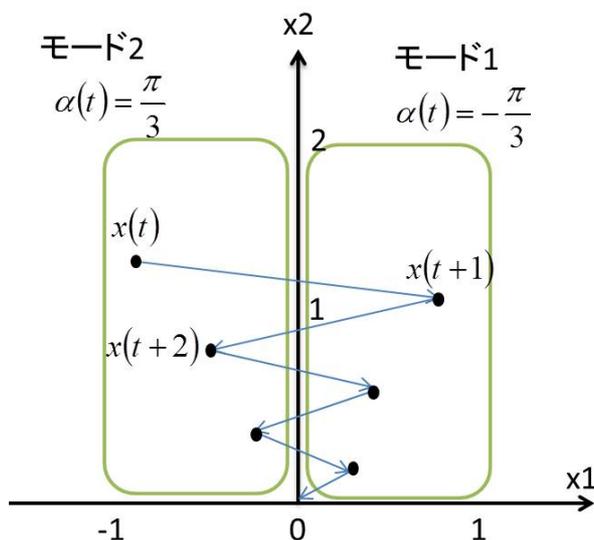


図 5.1: 例題 1 の振る舞い

この式は, 状態 $x(k)$ がそれぞれのモードに含まれているとき, 原点に対して異なる回転行列がかかるシステムを表している. 状態 $x(k)$ がモード 1 に含まれている場合はモード 2 の方向へと回転し, 状態 $x(k)$ がモード 2 に含まれている場合はモード 1 の方向へと回転する.

回転行列には 0.8 がかけられているため, 1 ステップごとに原点までの距離が短くなっていく.

入力行列 B によって状態の第 1 成分への影響がカットされている. 図 5.1 上では, 入力 $u(k)$ を加えると次ステップの状態 $x(k+1)$ に上下方向の影響を与えられる.

連続ダイナミクスは線形システムで与えられているため, $x(k+1)$ から $x(k), u(k)$ の取り得る範囲は以下の式から求められる. なお, 時刻 k における入力 $u(k) \in \mathcal{U}$ は定義された範囲内であれば任意の値をとることができる.

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
 x(k) &= A^{-1}x(k+1) - A^{-1}Bu(k) \\
 \begin{bmatrix} x(k) \\ u'(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}B \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

時刻 $k+1$ に状態 $x(k+1)$ へできる状態 $x(k)$ は, 入力 $u(k)$ の値によって複数存在する.

状態 $x(k+1)$ へと遷移可能な状態 $x(k)$ の集合は，入力 $u(k)$ が最大値と最小値を取ったときの $x(k)$ に対して線形補間を行うことで求められる。

同様のことが，拡張状態の領域 S にも言える．拡張状態の領域 S は凸多面体で与えられているため，その射影 $X = \text{Pro}_{\mathcal{X}}(S)$ も凸多面体となる．この X の各頂点に対して入力 $u(k)$ の最大値と最小値を与え，(5.2) 式から得た計算結果を線形補間することで X へ遷移可能な領域が得られる．

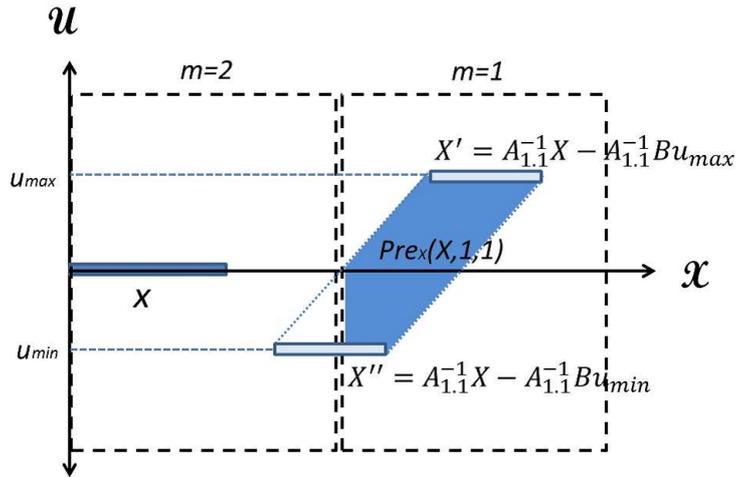


図 5.2: $(X, U) := \text{Pre}_X(X, m, q)$ の導出

図 5.2 に，1 状態 1 入力の場合，与えられた領域 X に対する $\text{Pre}_X(X, 1, 1)$ の導出例を示す．図に示されている X' と X'' はそれぞれ入力 u が最大値 u_{max} と最小値 u_{min} を取った際に状態が取り得る領域を表している．二つの領域は \mathcal{X} 上の領域だが，領域 X へ遷移可能な拡張状態の領域 (X', u_{max}) ， (X'', u_{min}) が求められる．この二つの領域を線形補間した領域が $(m, q) = (1, 1)$ のダイナミクスが選択されたときに X へと遷移可能な拡張状態上の領域となる．図では， X' と X'' を結ぶ破線で囲まれた領域がこれに当たる．

ただし，ダイナミクスが採用される範囲は，モードごとに定められた領域 \mathcal{S}_m によって制限されている．状態が \mathcal{S}_2 に含まれている場合は， \mathcal{S}_1 で選択されるダイナミクスが採用されることはないため，破線内部の塗りつぶされた領域が， X へ遷移可能な領域の取り得る範囲となる．

式 (5.1) のシステムに図 5.3 のように初期分割を与えて離散抽象化を行った結果，図 5.4 の分割が得られた．有界双模倣の計算には MATLAB 及び MPT(Multi-Parametric) Toolbox[18] を用いた．なお，この図は拡張状態の領域 S で得られた領域を状態 \mathcal{X} へと射影して描画している．

離散抽象化を 2 回行ったが，1 回目に得られた領域と 2 回目に得られた領域が同一のものであったため 2 ステップで計算を停止させた．領域間の遷移関係を図 5.5 に示す．図 5.3，図 5.4 の領域に割り振られている数字と，図 5.5 のノードに割り振られている番号が対応

している.

図 5.5 を有向グラフに書き直したものを図 5.6 に示す. ノードの位置は図 5.4 の領域と対応している. この問題では, 分割が止まっているため閉じた有向グラフが得られた.

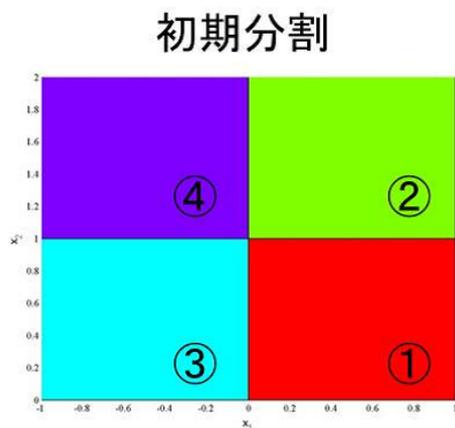


図 5.3: 例題 1 の初期分割

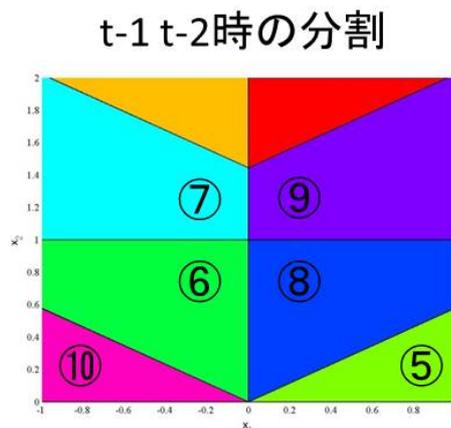


図 5.4: 例題 1 の分割結果

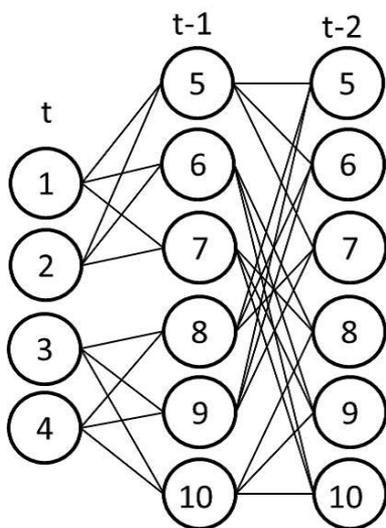


図 5.5: 例題 1 の遷移関係

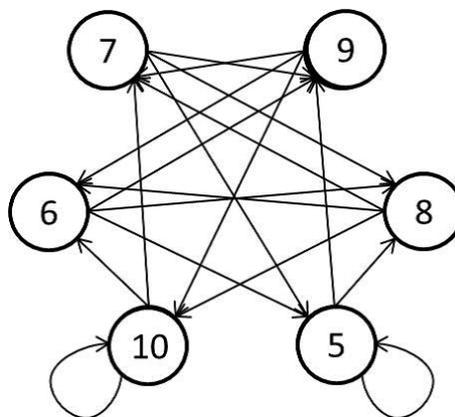


図 5.6: 遷移関係から得た有向グラフ

得られた結果について説明を行う. 7 番の領域に着目すると, 遷移可能な領域は 8, 9, 10 番の領域となっている. この領域を拡張状態で示すと図 5.7 のようになる, また, この 3 つの領域は, 連立不等式 (5.3),(5.4),(5.5), で書き表せる.

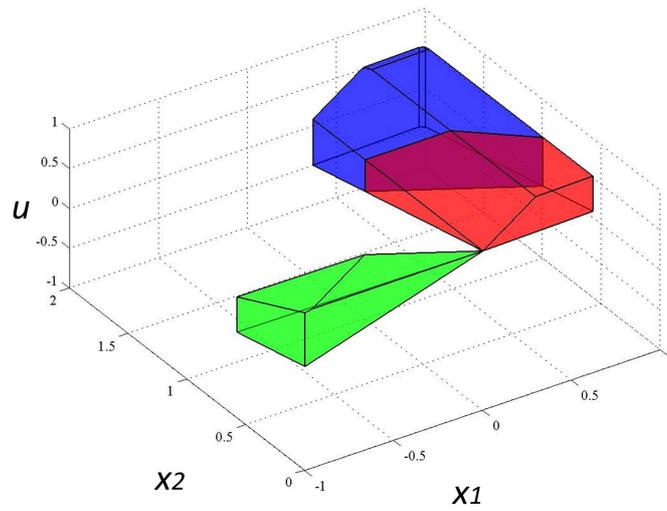


図 5.7: 7番の領域へ遷移確率を持つ拡張状態の領域

$$\begin{bmatrix} -0.541 & -0.31235 & -0.78087 \\ 0.5 & -0.86603 & 2.0173e-014 \\ 0.67855 & 4.0021e-015 & 0.73455 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -0.78087 \\ 2.8949e-014 \\ 1.0602 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$x(k+1) \in S_7, x(k) \in S_8$

$$\begin{bmatrix} -0.541 & -0.31235 & -0.78087 \\ 0.67855 & 4.0021e-015 & 0.73455 \\ -0.5 & 0.86603 & 0 \\ 0.541 & 0.31235 & 0.78087 \\ -1 & -0 & -0 \\ -0 & -1 & -0 \\ -0 & -0 & 1 \\ -0 & 1 & -0 \\ 1 & -0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -0.78087 \\ 1.0602 \\ 1.25 \\ 1.5617 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$x(k+1) \in S_7, x(k) \in S_9$

$$\begin{bmatrix} 0.541 & -0.31235 & -0.78087 \\ 0.5 & 0.86603 & 2.0173e-014 \\ -0.33928 & 0.58764 & 0.73455 \\ -1 & -0 & -0 \\ -0 & -1 & -0 \\ -0 & -0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -0.78087 \\ 2.8953e-014 \\ 1.0602 \\ 101 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$x(k+1) \in S_7, x(k) \in S_{10}$$

状態 $x(k)$ が、図 5.4 に示される 8, 9, 10 番の領域に含まれているならば、これらの連立不等式を満足する入力 $u(k)$ を与えることで時刻 $k+1$ に 7 番の領域内に存在する状態に遷移できる。

他の領域間の遷移も同様に遷移可能な領域が求められており、状態 $x(k)$ を与えらると次のステップの状態 $x(k+1)$ に任意の領域へ遷移するために必要な入力の幅が求められる。

5.2 例題 2. 確率ハイブリッドシステム

2 章, (2.2) 式の離散抽象化を行う。この式は (5.1) 式の各モードに、確率的に状態 $x(k+1)$ が $x(k)$ から変化しない連続ダイナミクスを与えたシステムである。

図 5.8 の左上図のように分割を与えた結果、同図の左下の図のような分割が得られた。この例でも 2 回目の離散抽象化で 1 回目と同様の分割が得られたため、ここで計算を停止させた。遷移関係を同図右に示す。遷移関係は線の太さと色を分けて描画した。

分割自体は (5.1) のシステムと変化していないが、領域 2 と領域 4 へ遷移可能な領域が新たに得られた。

領域 5 は元のシステムでも入力によっては領域 1 に遷移可能であった。例題 2 では $x(k)$ と $x(k+1)$ が確率的に変化しないダイナミクスが加えられている。

確率 0.8 で領域 1 へ遷移可能で、同様の入力で確率 0.2 で領域 1 へ遷移するため、領域 5 から領域 1 へ遷移する確率は 1 と出力されている。

$$T_{1,5} = (S_1, S_5, 0.8 + 0.2)$$

この例では分割が停止しているため、以降のステップでも領域 5~12 と同様状態空間の分割が得られ、同様の遷移関係が得られることが予測できる。

任意の状態 $x(k) \in \mathcal{X}$ が与えられたとき目的としている領域に遷移可能かといった到達可能性問題や、その到達確率や必要ステップ数などがこのグラフから求められる。

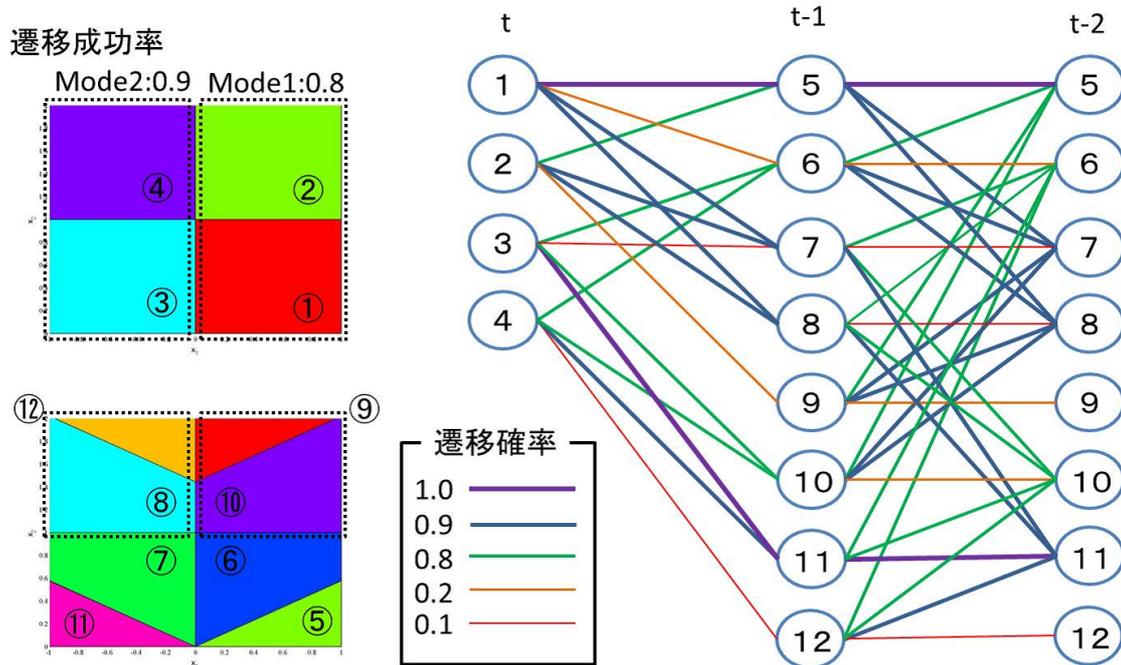


図 5.8: 例題 2 の分割と遷移

5.3 例題 3. ダイナミクスの変化による分割数の増加

例題 1, 例題 2 では離散抽象化による分割が停止するシステムを用いて, 離散抽象化を行うための実際の手順や計算結果の説明を行った. しかし, 一般的にハイブリッドシステムの離散抽象化では停止性が保障されておらず, 本研究で用いている確率ハイブリッドシステムの場合も同様である.

この節では (5.1) 式の確定的ハイブリッドシステムに異なる連続ダイナミクスを追加し, それぞれ離散抽象化を行い領域数の変化について考察する.

例題 2 で用いた確率的に状態が変化しない例を Case ①として, 以下の Case ②, Case ③に示す連続ダイナミクスを (5.1) 式に追加する.

Case ① : 入力によらず $x(k+1)$ が $x(k)$ から変化しない

Case ② : 入力によらず $x(k)$ の第 1 要素の正負が切り替わる

Case ③ : 元のダイナミクスとは逆の回転方向に遷移する. 回転角度は元のダイナミクスよりも小さい.

Case ②の式は

$$x(k+1) = \begin{cases} 0.8 \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \quad \text{with the prob. } pr(1,1) = 0.8 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \quad \text{with the prob. } pr(1,2) = 0.2 \\ \text{if } x(k) \in \mathcal{S}_1 \\ 0.8 \begin{bmatrix} \cos(-\pi/3) & -\sin(-\pi/3) \\ \sin(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \quad \text{with the prob. } pr(2,1) = 0.9 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \quad \text{with the prob. } pr(2,2) = 0.1 \\ \text{if } x(k) \in \mathcal{S}_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

Case ③の式は

$$x(k+1) = \begin{cases} 0.8 \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \quad \text{with the prob. } pr(1,1) = 0.8 \\ 0.8 \begin{bmatrix} \cos(-\pi/27) & -\sin(-\pi/27) \\ \sin(-\pi/27) & \cos(-\pi/27) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \quad \text{with the prob. } pr(1,2) = 0.2 \\ \text{if } x(k) \in \mathcal{S}_1 \\ 0.8 \begin{bmatrix} \cos(-\pi/3) & -\sin(-\pi/3) \\ \sin(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \quad \text{with the prob. } pr(2,1) = 0.9 \\ 0.8 \begin{bmatrix} \cos(\pi/27) & -\sin(\pi/27) \\ \sin(\pi/27) & \cos(\pi/27) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \quad \text{with the prob. } pr(2,2) = 0.1 \\ \text{if } x(k) \in \mathcal{S}_2 \end{cases} \quad (5.7)$$

とした。それぞれの式で表される振る舞いを図 5.9 に示す。

例題 1, 例題 2 と同様の初期分割を与えて離散抽象化を行った。拡張状態空間や入力
の範囲, モードの領域などは (5.1) 式と同様である。結果として得られた領域の分割数を以

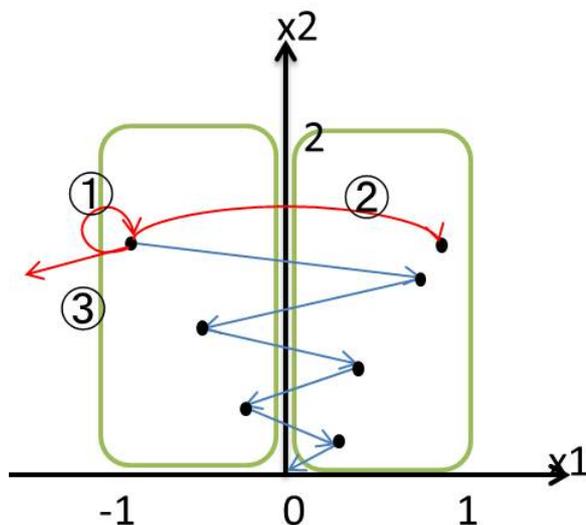


図 5.9: 各 Case での振る舞い

下の表に示す. 初期分割として4つの領域を与えているため, どの式も $k = 0$ では分割数が4つである. 図 5.10 に, 得られた結果を片対数グラフで示す.

表 5.1: 抽象化回数と領域の分割数

ステップ数	領域の分割数		
	Case ①	Case ②	Case ③
k			
0	4	4	4
1	8	8	12
2	8	14	26
3	8	34	77
4	8	131	3273

Case ①は前の節で示した通り, 分割が停止する. そのため初期分割以降は, 領域が8つから変化していない. Case ②, Case ③では $k = 4$ 時点では分割の停止は確認できなかった. ステップ数に対して分割数が指数的に増加しているため, この後も領域数は増加していくと考えられる.

Case ①, Case ②, Case ③ の領域数の増加を見比べると, 複雑なダイナミクスを持つシステムであるほど領域が分割されやすいという傾向が見て取れる. 確定的なハイブリッドシステムであっても一般的な離散抽象化では停止性が保障されていないが, 確率ハイブリッドシステムではさらに領域の分割数が増加しやすいと考えられる.

得られる離散ダイナミクスは有限時間区間内の物となるが, 確率ハイブリッドシステム

の離散抽象化には k -有界双模倣が適していると考えられる。

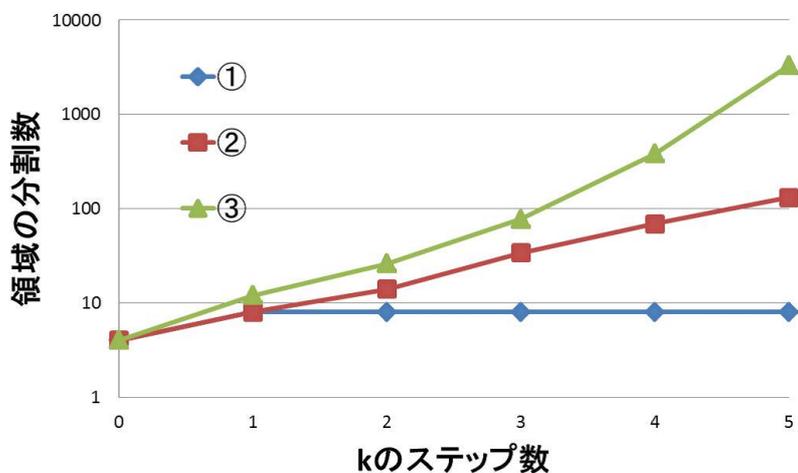


図 5.10: 分割階数と領域の分割数の変化

5.4 遺伝子トグルスイッチの探索

近年、特定の機能を持つタンパク質を組み合わせる任意の機能を実現する人工遺伝子ネットワークの研究が盛んに行われている。ここでは、特定の入力を加えると周期的な応答が得られる遺伝子トグルスイッチに着目する。

タンパク質は状態や複数の入力、確率的な振る舞いによって異なる反応を示すが、トグルスイッチの機能を持つ遺伝子機械を見つけ出すためには、複雑な反応から周期的な応答を示す状態と入力の組み合わせを見つけ出す必要がある。本節ではタンパク質の反応を確率ハイブリッドシステムで書き表し、離散抽象化を行う。これによって得られた離散ダイナミクスから周期的な応答を見つけ出す。

先行研究 [14] では、述語抽象化と呼ばれるあらかじめ状態の分割を与える手法を用いてトグルスイッチを実現する入力に関して考察を行っていた。

本研究ではモードの領域を初期分割として与え、有界双模倣を行うことでスイッチングが可能となる領域の導出を行う。

[14] に示されている例題の初期分割を図 5.11 に示す。例題に確率的な振る舞いを加えた確率ハイブリッドシステム

$$x(k+1) = \begin{cases} A_i x(k) + u(k) + a_i \\ \text{with the prob. } 0.9, \\ x(k) \\ \text{with the prob. } 0.1, \\ \text{if } x(k) \in \mathcal{S}_i \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & 0.98 \end{bmatrix}, a_1 = \begin{bmatrix} 0.92 \\ 1.53 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ -0.03 & 0.98 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0.92 \\ 2.9 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & 0.98 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0.92 \\ 0.15 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.02 \\ 0 & 0.98 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 1.39 \\ 0.153 \end{bmatrix} \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 0.99 & -0.02 \\ -0.03 & 0.98 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 1.38 \\ 2.9 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.02 \\ 0 & 0.98 \end{bmatrix}, a_6 = \begin{bmatrix} 1.41 \\ 0.15 \end{bmatrix} \\ A_7 &= \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & 0.98 \end{bmatrix}, a_7 = \begin{bmatrix} 1.7 \\ 1.53 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ -0.03 & 0.98 \end{bmatrix}, a_8 = \begin{bmatrix} 0.17 \\ 2.92 \end{bmatrix} \\ A_9 &= \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & 0.98 \end{bmatrix}, a_9 = \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を考える. ここで, $x(k) \in \mathcal{X} \subseteq [0 \ 100] \times [0 \ 100]$, $u(k) \in \mathcal{U} \subseteq [-15 \ 15] \times [-18 \ 18]$, $I(k) \in \mathcal{M} := \{1, 2, \dots, 9\}$, である.

それぞれのモードで対応した数字のダイナミクスが採用される. $1, 2, \dots, 9$ までのダイナミクスが採用される確率を 0.9 とし, どのモードであっても 0.1 の確率で状態が変化しないダイナミクスが採用される. モードの領域は図に示されているため省略する.

交互に遷移する領域を探すのが目的であるため, 2 ステップ分の遷移関係を求めた. 各ステップの領域数を以下の表に示す.

表 5.2: 遺伝子の例題の分割数

ステップ数	領域の分割数
0	9
1	69
2	1394

図 5.12 に 1 ステップの離散抽象化で得られた領域と, 領域間の遷移関係を示す. なお, 図 5.12 の描画は Graphviz(Graph Visualization Software)[19] を用いた. 2 重の円に配置されているノードのうち, 内周部にある 9 個のノードが初期分割 $\pi_0 = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_9\}$ であり, 外周部の 62 個のノードが $\pi_1 = \{\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \dots, \mathcal{S}'_{62}\}$ である. ノードのラベルを拡張状態の

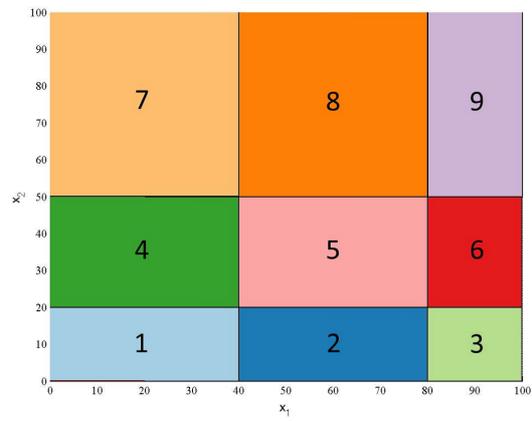


図 5.11: 状態空間の初期分割

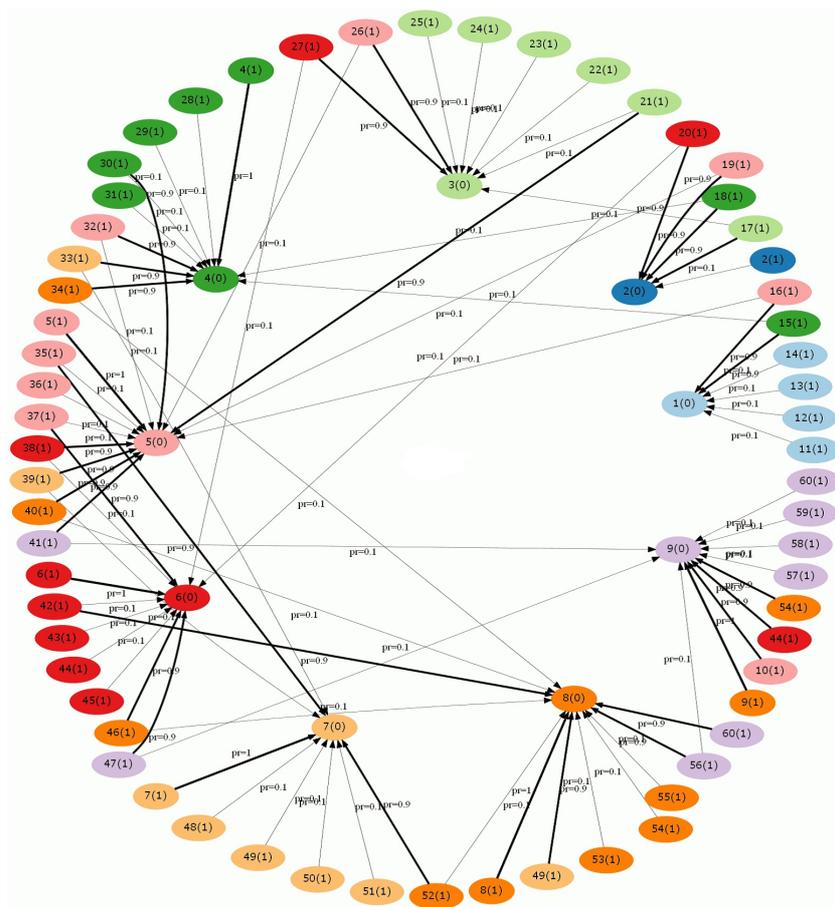


図 5.12: 1ステップ分の離散抽象化

領域を \mathcal{X} へ射影した際の分割を元に割り振ることで、同じ状態であっても入力との与え方によって別の遷移確率を持つ拡張状態の領域をグラフに表現している。また、ラベルの括弧内の数字はステップ数を示しており、初期分割 π_0 として与えた領域を (0), 1 回離散抽象化して得た π_1 内の領域を (1) としている。

π_1 のノードが初期分割のどの領域に含まれているかを色で示している。今回はモードの領域と初期分割の領域が同じため、同色のノードならば同じモードとなる。遷移確率はエッジにラベルが割り振っているが、エッジの太さでも区別している。太く描画されているエッジは遷移確率が大きく、細く描画されているエッジの遷移確率は小さい。

$k = 2$ までの遷移関係を見ると、領域 5 と領域 6 ではほかの領域に比べて特に相互の領域へ遷移可能な領域が多かった。そこで、得られた結果のうち領域 5, 領域 6, 領域 5 と一定確率以上で遷移可能な領域を求めた。領域 \mathcal{S}_5 に遷移可能な領域 6 内の領域 $S_1 \subset \mathcal{S}_6$ と S_1 に遷移可能な領域 $S_2 \subset \mathcal{S}_5$ の \mathcal{X} への射影を図 5.13 に示す。

計算結果から拡張状態の領域 S_2 から S_1 へ、 S_1 から \mathcal{S}_5 へ遷移可能なことは保障されている。しかし、 \mathcal{S}_5 には S_2 以外の領域も存在しているため、 S_1 から遷移した \mathcal{S}_5 上の状態から領域 6 内の状態へ再び遷移可能か計算結果からは判別できない。

S_2 に対して再び $Pre(X)$ の計算を行うことで、 S_2 へ遷移可能な領域が導出できる。 $Pre(Pro_{\mathcal{X}}(S_2))$ の領域を図 5.14 に示す。

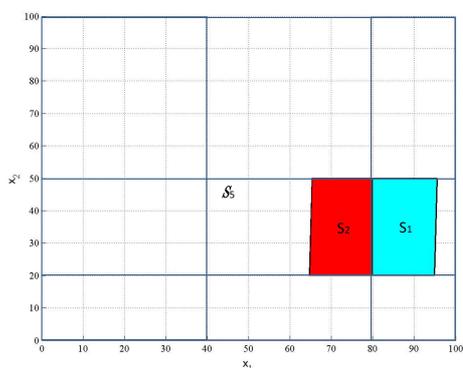


図 5.13: 領域 \mathcal{S}_5 への遷移確率が高い領域

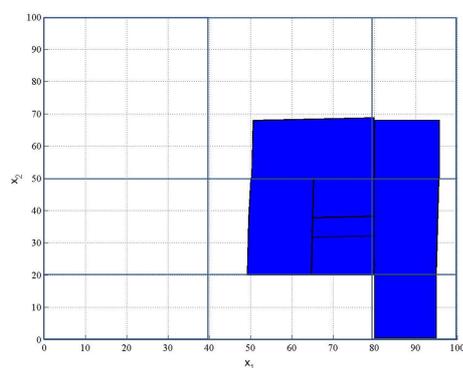


図 5.14: S_2 へ遷移可能な領域

得られた領域の \mathcal{X} への射影は、 S_1 の \mathcal{X} への射影を包含する領域であることがわかった。 $Pre(Pro_{\mathcal{X}}(S_2))$ 内の状態であれば S_2 へ遷移可能であり、 S_2 内の状態であれば $Pre(Pro_{\mathcal{X}}(S_2))$ 内の領域である S_1 へ遷移可能であるため、この二つの拡張状態の領域 S_1, S_2 間では、入力を適切に与えることである確率で交互に遷移できることが分かった。

このように、2 状態 2 入力 9 モードの複雑なシステムであっても、離散抽象化を行うと目的としている機能が実現可能な状態集合を離散ダイナミクスから探索できる。

第6章 おわりに

本論文では、確率ハイブリッドシステムに対する離散抽象化について考察した。双模倣性に基づく場合、離散抽象化システムの計算手続きの停止性は一般に保証されていない。そこで、文献 [17] で提案された有界双模倣性を確率ハイブリッドシステムに拡張することで、停止性が保証された離散抽象化システムの計算方法を提案した。

確率ハイブリッドシステムは、確定的なハイブリッドシステムではモードごとに一つずつであった連続ダイナミクスを複数存在することを認め、異なる確率分布を与えることでシステムの確率的な振る舞いを表現した。

提案手法の説明としてまず、確率ハイブリッドシステムに制約を加え、確定的なハイブリッドシステムとして k -有界双模倣の解説と計算手順の確認を行った。次に、確率ハイブリッドシステムに対して提案手法である拡張した k -有界双模倣の計算を行い、得られた離散ダイナミクスについて説明した。

確率ハイブリッドシステムの離散抽象化に有界双模倣を用いることの有効性については、異なるダイナミクスで構成された確率ハイブリッドシステムを離散抽象化し、領域の分割数を比較することで説明した。また、遺伝子トグルスイッチの例では、システムが特定の機能を満たす条件を離散抽象化によって得られた結果から求めた。

離散抽象化システムを用いることで、確率ハイブリッドシステムの解析や制御は容易となることからさまざまな応用が期待できる。

しかしながら、拡張状態空間の分割数は時間に関して指数関数的に増加するため、分割の計算が困難になる場合が考えられる。近似双模倣による離散抽象化 [15, 16] や、遷移確率の低い領域の枝狩りなど、近似手法の検討は今後の課題の一つである。

また、具体的な例題を用いた有効性の評価も今後の課題である。

謝辞

最後に，本研究を進めるにあたり貴重な御指導をいただいた，指導教官であり北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科の平石邦彦教授に衷心より感謝いたします。

また，同研究室の小林孝一助教，並びに大学院教育イニシアティブセンターの崔舜星特任助教には終始適切な助言をいただきました。心よりお礼申し上げます。

参考文献

- [1] A. Abate, A. D’Innocenzo, and M. D. Di Benedetto, Approximate abstractions of stochastic hybrid systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 56, no. 11, pp. 2688–2694, 2011.
- [2] R. Alur, T. A. Henzinger, G. Lafferriere, and G. J. Pappas, Discrete abstractions of hybrid systems, *Proceedings of the IEEE*, vol. 88, no. 7, pp. 971–984, 2000.
- [3] R. Alur, T. Dang, and F. Ivančić, Predicate abstraction for reachability analysis of hybrid systems, *ACM Trans. on Embedded Computing Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 152–199, 2006.
- [4] A. Bemporad and S. Di Cairano, Model-predictive control of discrete hybrid stochastic automata, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 56, no. 6, pp. 1307–1321, 2011.
- [5] P. Bolzern, P. Colaneri, and G. D. Nicolao, Markov Jump Linear Systems with switching transition rates: Mean square stability with dwell-time, *Automatica*, pp. 1081–1088, 2010.
- [6] M. L. Bujorianu and J. Lygeros, General stochastic hybrid systems: Modelling and optimal control, *Proc. 43rd IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 1872–1877, 2004.
- [7] M. L. Bujorianu and J. Lygeros, Bisimulation for general stochastic hybrid systems, *Proc. Int’l Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control*, LNCS 3414, pp. 198–214, 2005.
- [8] J. P. Hespanha, A model for stochastic hybrid systems with application to communication networks, *Nonlinear Analysis*, vol. 62, pp. 1353–1383, 2005.
- [9] J. P. Hespanha, Why Should I Care About Stochastic Hybrid Systems?, *49th IEEE Conf. on Decision and Control*, Semi-plenary talk, 2010.
- [10] A. A. Julius, A. Girard and G. J. Pappas, Approximate bisimulation for a class of stochastic hybrid systems *Proc. 2006 American Control Conf.*, pp. 4724–4729, 2004.
- [11] L. Shi, A. Abate, and S. Sastry, Optimal Control for a class of Stochastic Hybrid Systems, *Proc. 43rd IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 1842–1847, 2004.
- [12] P. Tabuada, *Verification and Control of Hybrid Systems*, Springer, 2009.
- [13] Y. Tazaki and J. Imura, Discrete abstractions of nonlinear systems based on error propagation analysis, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 57, no. 3, pp. 550–564, 2011.
- [14] J. Tumova, I. Cerna, J. Barnat, C. Belta, B. Yordanov, Temporal Logic Control of Discrete-Time Piecewise Affine Systems *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 57, no. 6, pp. 1491–1504, 2012.

- [15] 潮, 足立, ハイブリッドオートマトンの双模倣関係とその近似計算, システム/制御/情報, vol. 53, no. 10, pp. 434-442, 2009.
- [16] 崔, 平石, 小林, 遷移関係に基づくハイブリッドシステムの近似双模倣, 計測自動制御学会論文集, vol. 47, no. 12, pp. 614-620, 2011.
- [17] 平石, 小林, 崔, 有限時間区間に対するハイブリッドシステムの離散抽象化, 計測自動制御学会論文集, vol. 44, no. 9, pp. 751-759, 2008.
- [18] Multi-Parametric Toolbox: <http://control.ee.ethz.ch/~mpt/>
- [19] Graphviz: <http://www.graphviz.org/>

本研究に関する発表論文

- [1] 小林孝一, 福井康仁, 平石邦彦: 確率ハイブリッドシステムの離散抽象化と最適制御, 第55回自動制御連合講演会講演論文集, pp. 1791-1794 (2012)
- [2] 福井康仁, 小林孝一, 平石邦彦: 有限時間区間における確率ハイブリッドシステムの離散抽象化, 計測自動制御学会システム・情報部門学術講演会 2012 講演論文集, pp. 519-522 (2012)
- [3] 福井康仁, 小林孝一, 平石邦彦: 確率ハイブリッドシステムの離散抽象化 ~ 遺伝子トグルスイッチの解析への適用 ~, 電子情報通信学会システム数理と応用研究会 (2013) (発表予定)