Title	物理およびオートマトンの実験における Operational Logics の代数的構造
Author(s)	勝島, 尚之
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1233
Rights	
Description	Supervisor:石原 哉, 情報科学研究科, 修士

物理およびオートマトンの実験における Operational Logics の代数的構造

勝島 尚之

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1999 年 2 月 15 日

キーワード： 不確定性, orthomodular law, Greechie diagram, operational logics, 内部状態決定問題.

1900 年の M.Planck による量子仮説に始まる量子力学は, 現在では次のような公理を持つ体系としてまとめられている.

公理 1
物理系の状態は複素 Hilbert 空間 H の単位ベクトルによって表される. このベクトルを状態ベクトルと呼ぶ. ただし, $|\alpha| = 1$ となる任意の複素数 α に対して, 状態ベクトル $\psi \in H$ と $\alpha\psi \in H$ は同一の状態を表すものとする.

公理 2
物理量 — "observable" ともいう — は H 上の自己共役作用素によって表される.

公理 3
状態 ψ と物理量 A があったとき, ψ 状態での A の値の期待値は 2 つのベクトル ψ と $\hat{A}\psi$ の内積 $<\psi, \hat{A}\psi>$ で与えられる. ただし $\hat{A}$ は物理量 A に対応する自己共役作用素である.

ここで重要なことは自己共役作用素は一般に可換でないということである. すなわち $\hat{A}$ と $\hat{B}$ をこのような作用素とすると, 一般には $<\psi, \hat{A}\hat{B}\psi> \neq <\psi, \hat{B}\hat{A}\psi>$ となり, これは A,B についての実験結果が, 実験を行なう順序によって異なることを意味する. 実際, 電子の座標 x と運動量 p に対応する作用素 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ の間には $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$ の関係があり ($\hbar = 1.054 \times 10^{-27}$erg·sec は Planck 定数), このことから x と p の標準偏差 $\Delta x, \Delta p$ に対

し次の式が導かれる.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar. \tag{1}$$

これがよく知られた Heisenberg の不確定性原理の一例であり, これらの物理量の組にはこれ以上詳しくは調べられないという限界が存在することを意味している.

一方, オートマトンを対象としたある種の実験においても, 同様な不確定性が現れることが発見されている. 内部状態決定問題と呼ばれるものがその例である. いま出力つきのオートマトンがあり, 入力を与えてその出力を観測する実験を考える. オートマトンは各時間において状態集合に含まれるのどこか一つの状態にある. そして与えられたオートマトンが, 現在どの状態にあるのかを, この実験により見い出そうとすることを内部状態決定問題という.

この問題で重要なことは, 一つの実験を行なうと（すなわちある入力を与えると）, オートマトンは現在の状態から他の状態へと遷移するということである. したがって複数の実験を行なうとき, 得られる結果は実験を行なう順序に依存する. さらに内部状態決定問題はいつでも解決可能でなく, これ以上詳しくは調べられないという限界が存在することが, 1956 年 E.F.Moore によって指摘され, これらの量子力学と類似した性質は 1971 年 J.H.Conway により Moore の不確定性原理と名付けられた.

本研究では物理とオートマトンにおける実験を例にとり, 実験から得られる情報の間の関係を代数的に研究する. 量子力学におけるこの分野の研究は量子論理としてよく知られており, 先にあげた公理から出発すれば, 量子論理は一般に orthomodular lattice になることが示される ([1],[3]). 同様に内部状態決定問題についても, 状態集合の分割から出発し Hilbert 空間論を用いて研究する方法があり, これらは “automaton logics” あるいは “partition logics” と呼ばれている ([4],[5]).

しかし本研究ではこのような “top-down” 形式の方法はとらず, “bottom-up” 形式の手法を用いた. すなわち, 物理学者が実験を基に理論を構築するように, 実験の持つ数学的性質を調べることから出発する.

まず第 2 章では, orthomodular poset などの諸概念を定義したのち, “loop lemma” の証明を与え, “Greechie diagram” を導入する. Boole 代数の集まり $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, ..., B_{n-1}\}$ が与えられ, これらの上に以下の方法で共通の順序と, orthocomplementation を定義するものとする. すなわち $L = \bigcup \mathcal{B}$に対し,

- $x, y \in B$となる $B \in \mathcal{B}$ が存在して $x \leq_B y$となるとき, かつそのときのみ, $x \leq y$とする.
- $x \in B$となる $B \in \mathcal{B}$ が存在するとき, かつそのときのみ $x' = x'^B$とする.

これにより $L = \bigcup \mathcal{B}$を 1 つの代数と見なすことが可能になるが, loop lemma はこの L が全体として示す代数構造を調べる 1 つの方法であり, Greechie diagram はそれを視覚的に

示す方法である.

第 3 章では物理的な実験を例にとり, *experiment* を *outcomes* からなる集合として定義し, 複数の experiments がある性質を満たすとき, この experiments の集まりを *manual* と呼ぶことにする. manual が１つ定まると, 実行しようとしている実験の全体像が定まることになる.

さらに manual に属する各 experiment の部分集合を *event* として定義する. これが実際に観測される事象と対応するものである. これらの諸定義により, 実験を集合論的に扱うことが可能となる.

そして各 event に対してその orthocomplementation を, そして 2 つの events の間に適切な順序を定義する. これはそれぞれ否定と含意に対応するものである. すなわち events A, Bに対し,

- $A' \iff$ event A は観測されない.
- $A \leq B \iff$ event A が観測されるならば, event Bも観測される.

このようにして, manual を 1 つの代数として表すことができる. この代数を *operational logic* と呼ぶ. そして operational logic がいかなる代数的構造を持つかを, 2 章で導入した Greechie diagram を用いて調べる. するとこれは一般に orthoposet であり, ある条件を満たす時 orthomodular poset や orthomodular lattice になることが示される. そしてそれぞれの代数構造に対応した物理実験の例も与える.

第 4 章では出力つきオートマトンの諸定義を与えたのち, オートマトンの最小化や, 等価なオートマトンへの変換についての諸定理を紹介する. そして内部状態決定問題の例をあげ, operational logic の手法を適用して, この問題の持つ代数構造を調べる. orthoposet, orthomodular poset, orthomodular lattice にそれぞれ対応した例も与える.

さらに Moore の不確定性の起源について議論する. Heisenberg の不確定性は自然界の法則の一つとして受け入れなければならないが, オートマトンは人工的なものであるので, Moore の不確定性はその起源について考察してみる価値がある. そしてこれについて次のように定義する.

定義（内部状態決定問題の不確定性）

あるオートマトンに対し, 以下の条件が満たされる時, 内部状態決定問題は不確定性（uncertainty）を持つ, あるいは単に, このオートマトンは不確定（uncertain）であるという.

- どんな入力を選んでも, 2 つ以上の異なる内部状態が存在して, それらは同じ出力を与える.

オートマトンが不確定でないとき, 確定（decidable）という.

この定義から次のようなこと導かれる.

補題

最小化されていないオートマトンは不確定であり, 確定なオートマトンは最小化されている.

定理

任意の 1 文字の入力に対して 2 つ以上の異なる内部状態が存在し, これらが同じ出力を与え, しかもその後同一の内部状態に遷移するならば, このオートマトンは不確定である.

定理

M_1を最小かつ不確定なオートマトン, M_2を M_1と等価な任意のオートマトンとすると, M_2もまた不確定である.

さらに不確定性の程度に対して適切な定義を与え, Moore の不確定性について定量的な議論を行なった. オートマトン Mの不確定性の程度を $d(M)$ と書くことにすると, 以下のようなことが示される.

定理

$d(M) = 0$ のとき, かつそのときに限り, オートマトン Mは確定である.

系

$d(M) \geq 1$ のとき, かつそのときに限り, オートマトン Mは不確定である.

この系に現れる不等式は, Heisenberg の不確定性に現れる式 (1) と類似している.

さらにオートマトン M_1に対し, これと等価なオートマトン M_2を作った際, 一般に $d(M_1)$ と $d(M_2)$ は等しくならず, M_2 の作り方によって $d(M_1) \leq d(M_2)$ とも $d(M_1) \geq d(M_2)$ ともなり得ることが示される. その中で,

定理

一般に任意のオートマトンは, 最小化すると不確定性の程度が減少する.

などの定理も証明される.

参考文献

[1] G.Birkhoff and J.von.Neumann, *The Logic of Quantum Mechanics.* Annals of Math-

ematics Vol.37 No.4(1936) 823〜843.

[2] D.W.Cohen *An Introduction to Hilbert Space and Quantum Logic.* Springer-Verlag(1989).

[3] P.Ptak and S.Pulmannova *Orthomodular Structures as Quantum Logics.* Kluwer Academic Publishers(1991).

[4] M.Schaller and K.Svozil, *Partition Logics of Automata.* Il Nuovo Cimento Vol.109 B,N.2(1994) 167〜176.

[5] M.Schaller and K.Svozil, *Automaton Partition Logic Versus Quantum Logic.* International Journal of Theoretical Physics Vol.34 No.8(1995) 1741〜1749.