包含関係と先行関係をもつ時区間論理における フレームの埋込み可能性

古賀 たかし　佐野 勝彦　東条 敏

本稿では，包含関係と先行関係を持つ決定可能な時区間論理を提案する．現実的な時区間を表現する論理がもつべき基礎的な性質を考察する．その基礎的な性質として，フレームを構成する時区間が，実数軸へ写せることを要請し，その性質をフレームの埋込み可能性として提案する．埋込み可能なフレーム・クラスは，我々の時区間論理式では特徴づけることができないが，任意の有限フレームについて，そのフレームが埋込み可能かどうかを判定する手続きを示す．

In this paper, we present an interval tense logic with the inclusion modality, together with the precedence modality. We show that our interval tense logics are decidable. We also investigate the fundamental features of logic to represent realistic temporal intervals, and among them we propose the notion of *embeddability* of a frame into the time axis, by which all the intervals are mapped into the time axis. Although the class of embeddable frames is not modally definable, we show a decision procedure whether given finite frames are embeddable.

1　はじめに

計算機科学の様々な分野では，時間の構造を形式的に取り扱うことが必要とされている．自然言語処理において，動詞の時制やアスペクトを形式的に表現する場合であったり，エージェント・モデルを構築し，エージェントに時間関係を推論させる場合などである．

時間の構造を形式的に取り扱う論理として，時間論理 [22] が広く知られている．時間論理は，将来の可能性を複数もつような分岐時間を表現したり，整数時間，実数時間等を表現することができるなど，非常に強力である [8]．しかしながら，時間の構造として，時点のみを考える時間論理では，動詞のアスペクトやイベント (event)・状態 (state) の時間的性質を形式的に表現することは困難であるなど，欠点も存在する [27]．一方，時間の構造として，時点ではなく，時区間を考える論理が提案され，これまで，多くの時区間論理が研究されてきた．例えば，プロセス論理 [20] [21] [10] や，Halpern と Shoham の論理 HS [11] [25]，包含関係と先行関係を持つ時区間論理 [5] [2] [3] がある．これら先行研究に影響を受けた最近の成果としては，文献 [16] [24] [12] [14] が挙げられる．時区間論理の歴史的動向は，文献 [1] [11] [26] [9] に詳しい．

本研究では，包含関係と先行関係をもつ時区間論理，特に van Benthem [3] が提案した包含関係の様相 $\Box^{\uparrow}$ と $\Box_{\downarrow}$ とをもつ時区間論理[†1]を扱う．

$\Box^{\uparrow}$ と $\Box_{\downarrow}$ は直観的にはそれぞれある時区間に対して "任意のより広い時区間" と "任意の部分時区間" を表す．これらの様相を時間論理に加えることにより，van Benthem [3] はアスペクトの形式化を試み，吉岡 [27]，Tojo [24] らは動詞の分類を試みている．アスペクトや時制といった自然言語の意味論を形式的

Frame Embeddability in Interval Tense Logic with Inclusion and Precedence Relations.

Takashi Koga.

Katsuhiko Sano and Satoshi Tojo, 北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科, School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology.

コンピュータソフトウェア, Vol.30, No.1 (2013), pp.152–163.
[研究論文] 2011 年 8 月 1 日受付.

†1　$\Box^{\uparrow}$ と $\Box_{\downarrow}$ は，文献 [3] では，それぞれ $\Box^{up}$ と $\Box_{down}$ と表されている．

に記述する研究については，吉岡 [27] が詳しく述べている．

時区間論理においては，応用の観点から，任意のフレーム (あるいはモデル) が時間軸 (本研究では，時間軸と実数軸を同一視する) 上に整合的に写せるかどうかが重要である．本稿では，この性質を埋込み可能性 (embeddability) として形式化する．埋込み可能性の意義については，以下のように考えることができる．我々が，時区間の集合と，その集合上の包含関係と先行関係のセットを得たとき，しばしば，我々の時間に対する直観に合うように，時間軸上に写すことができない場合がある．例えば，図 1 の左側を考える．図中，一重矢印は時間の順序関係，二重矢印は区間の包含関係を表し，u は v に包含されること，u は s に先行することなどが記述されている．しかしながら図 1 左の包含・先行関係は，図 1 右に示すように，一直線の時間軸上では実現不可能である．

与えられたフレームが実時間軸に還元可能であるかどうかは，計算機科学上プロセスの処理手順の問題として重要である．例えばプロセス間の時間関係が包含と順序の制約のみで与えられたときに，手続き順序 (時間的順序) として矛盾があって実行不可能であるのか，あるいは一直線の処理が可能でなくとも並列処理によって実現可能であるのか，あるいは一直線の時間で処理が可能かなどを判定する条件を一般に獲得できれば大変有用であろう．時間論理の祖と言える Prior の主張では「論理は，できる限り日常会話等に潜む直観と関連するものでなければならない」 [28] とし，時間関係の線形化は直観にもっとも近いものであるが，Prior 自身は埋込み可能でないループをもつようなフレームをも研究している [22]．実際，多くの時間論理は線形時間への埋込み可能性をもたないフレームをも分析の対象としてきた．例えば，分岐時間モデルの時間論理 (文献 [9] を参照) や，文献 [3] [24] [12] で議論されている時区間論理は並列プロセスを実現可能にするような分岐型時間も扱う枠組みになっている．本稿では以上を鑑み，どのような場合にフレームが埋め込み可能になるのかを与える指針を考察する．

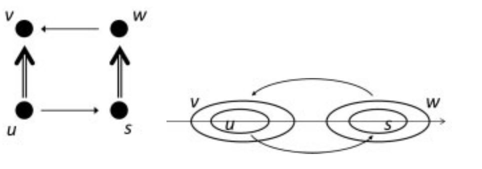

図 1 不自然なフレーム

本稿の主目的は，包含関係と先行関係をもつ時区間論理のフレームの埋込み可能性についての性質を明らかにすることである．この目的のもと，本論文を次のように構成する．まず第 2 節において第 2.1 節では時区間論理の公理系，第 2.2 節では Kripke 意味論を与え，埋込み可能なフレームの必要条件となるフレーム・クラスである $\mathbf{K}_{\mathbf{T}\Box\triangle}$ フレームを定義する．第 3 節では，応用の観点から重要となる，本時区間論理の決定可能性を有限モデル性 (定理 1, 定理 2) を経由して示す．第 4 節で，時区間論理のフレームが充たすべき性質を埋込み可能性として形式化し，埋め込み可能なフレームのクラスが時区間論理で表現できないことを示す (定理 3)．その後，有限フレームに対しては，そのフレームが埋込み可能かどうかを判定する手続きが存在することを示す (定理 4)．第 5 節においては，フレームの構造を精査することによって埋込み可能性を判定できる条件を議論する．最後に，第 6 節にて本稿を総括する．

2 時区間論理 $\mathbf{K}_{\mathbf{T}\Box}$ 及び $\mathbf{K}_{\mathbf{T}\Box\triangle}$

本節では，まず，包含関係と先行関係をもつ時区間論理の論理式を定義する．次に，我々の時区間論理の公理系と Kripke 意味論を与え，埋込み可能なフレームの必要条件となるフレーム・クラスである $\mathbf{K}_{\mathbf{T}\Box\triangle}$ フレームを定義する．

2.1 時区間論理の公理系

我々の時区間論理の言語 (language) は次からなる．

- 命題変数: $p, q, r, \ldots,$
- 論理演算子: $\neg, \wedge, \vee, \supset,$
- 様相演算子: $\Box^{\uparrow}, \Box_{\downarrow}, G, H$.
- 括弧: (,).

論理式は，通常の方法により，命題変数，論理演算子，様相演算子，括弧から帰納的に定義されるものとする．以下，ギリシャ文字の小文字 $(\varphi, \psi, \xi, \ldots)$

で論理式を表す．PROP をすべての命題変数の集合とし，論理式 $\Diamond^{\uparrow}\varphi, \Diamond_{\downarrow}\varphi, F\varphi, P\varphi$ は，それぞれ $\neg\Box^{\uparrow}\neg\varphi, \neg\Box_{\downarrow}\neg\varphi, \neg G\neg\varphi, \neg H\neg\varphi$ の略記であるとする．様相演算子を伴う論理式は次のように解釈される．

$\Box^{\uparrow}\varphi$： φ は現時区間を包含するすべての時区間で真となる

$\Box_{\downarrow}\varphi$： φ は現時区間のすべての部分時区間で真となる

$G\varphi$： φ はすべての未来で真となる

$H\varphi$： φ はすべての過去で真となる

論理式の集合 $\mathbf{L}$ が次の 4 条件を満たすとき，$\mathbf{L}$ を正規 (normal) な様相論理と呼ぶ．ただし， φ, ψ を任意の論理式，$\Box$ を $\Box^{\uparrow}, \Box_{\downarrow}$, G, H, のいずれかとする．

(N1) $\{\varphi : \varphi$ は命題論理のトートロジー $\} \subseteq \mathbf{L}$

(N2) $\Box(\varphi \supset \psi) \supset (\Box\varphi \supset \Box\psi) \in \mathbf{L}$

(N3) $\varphi \in \mathbf{L}$ かつ $\varphi \supset \psi \in \mathbf{L}$ ならば $\psi \in \mathbf{L}$

(N4) $\varphi \in \mathbf{L}$ ならば $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

時区間論理 $\mathbf{K_{T\Box}}$ は区間論理 $\mathbf{K_{\Box}}$ と時制論理 $\mathbf{K_t4}$ の融合 (fusion) である．$\mathbf{K_{\Box}}$ は公理 (A1) から (A4) をもつ，様相演算子 $\Box^{\uparrow}, \Box_{\downarrow}$ をもつ言語における，最小の正規な論理であり，$\mathbf{K_t4}$ は公理 (A5) から (A7) をもつ，様相演算子 G, H をもつ言語における，最小の正規な論理である．したがって，時区間論理 $\mathbf{K_{T\Box}}$ は公理 (A1) から (A7) をもつ最小の正規な論理である．

(A1) $\varphi \supset \Box^{\uparrow}\Diamond_{\downarrow}\varphi$

(A2) $\varphi \supset \Box_{\downarrow}\Diamond^{\uparrow}\varphi$

(A3) $\Box^{\uparrow}\varphi \supset \Box^{\uparrow}\Box^{\uparrow}\varphi$ †2

(A4) $\Box^{\uparrow}\varphi \supset \varphi$ †3

(A5) $\varphi \supset GP\varphi$

(A6) $\varphi \supset HF\varphi$

(A7) $G\varphi \supset GG\varphi$ †4

時区間論理 $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ を $\mathbf{K_{T\Box}}$ に次の 2 つの公理を加えた論理と定義する．

(A8) $G\varphi \supset \Box^{\uparrow}G\varphi$

(A9) $H\varphi \supset \Box^{\uparrow}H\varphi$

†2 (A1), (A2) を使えば (A3) から $\Box_{\downarrow}\varphi \supset \Box_{\downarrow}\Box_{\downarrow}\varphi$ を導くことができる．

†3 (A1), (A2) を使えば (A4) から $\Box_{\downarrow}\varphi \supset \varphi$ を導くことができる．

†4 (A5), (A6) を使えば (A7) から $H\varphi \supset HH\varphi$ を導くことができる．

これら公理 (A8) と (A9) を導入する意図は，意味論を定義する次節で述べる．

Tojo [24]・吉岡 [27] ですでに (A1) から (A9) の公理は導入されているが，時区間論理 $\mathbf{K_{T\Box}}$・$\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ の定義を与えたのは Koga and Tojo [13] である．本稿では，公理 $\Box_{\downarrow}\varphi \supset \Box_{\downarrow}\Box_{\downarrow}\varphi$, $\Box_{\downarrow}\varphi \supset \varphi$, $H\varphi \supset HH\varphi$ が [13] の $\mathbf{K_{T\Box}}$ の他公理から導出可能であることを用い，時区間論理 $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ と $\mathbf{K_{T\Box}}$ の公理系を再構築している．

論理 $\mathbf{L}$ で， $\varphi \supset \psi \in \mathbf{L}$ かつ $\psi \supset \varphi \in \mathbf{L}$ が成立するとき， $\varphi \equiv \psi$ と表す．このとき，文献[24] の結果の改良形として，$\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ では様相演算子に次の関係が成り立つ．

命題 1. 時区間論理 $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ で，任意の論理式 φ に対し，次が成立する．

1) $G\varphi \equiv \Box^{\uparrow}G\varphi \equiv G\Box_{\downarrow}\varphi \equiv \Diamond_{\downarrow}G\varphi$

2) $F\varphi \equiv \Box_{\downarrow}F\varphi \equiv F\Diamond_{\downarrow}\varphi \equiv \Diamond^{\uparrow}F\varphi$

3) $H\varphi \equiv \Box^{\uparrow}H\varphi \equiv H\Box_{\downarrow}\varphi \equiv \Diamond_{\downarrow}H\varphi$

4) $P\varphi \equiv \Box_{\downarrow}P\varphi \equiv P\Diamond_{\downarrow}\varphi \equiv \Diamond^{\uparrow}P\varphi$

(**証明**) 1) のみ示す．文献[24] において， $G\varphi \equiv \Box^{\uparrow}G\varphi \equiv \Diamond_{\downarrow}G\varphi$ と $G\varphi \supset G\Box_{\downarrow}\varphi \in \mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ とが示されているので， $G\Box_{\downarrow}\varphi \supset G\varphi \in \mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ のみ示せばよい $\Box_{\downarrow}\varphi \supset \varphi \in \mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ と条件 (N4) より，$G(\Box_{\downarrow}\varphi \supset \varphi) \in \mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ である．条件 (N2) より，$G(\Box_{\downarrow}\varphi \supset \varphi) \supset (G\Box_{\downarrow}\varphi \supset G\varphi) \in \mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ であるので，(N3) を用い， $G\Box_{\downarrow}\varphi \supset G\varphi \in \mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ を得る．2)〜4) も同様に得ることができる． ∎

2.2 時区間論理に対する Kripke 意味論

我々の時区間論理に対する Kripke フレーム $\mathfrak{F}$ は，5 つ組 $\langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\sqsupseteq}, R_{\prec}, R_{\succ}\rangle$ と定義される．ここで，W は非空な集合 (W の要素を時区間とよぶ) であり，その要素を $s, t, u, v, w, \ldots$ で表すものとし， $R_{\sqsubseteq}, R_{\sqsupseteq}, R_{\prec}, R_{\succ}$ はすべて，W 上の二項関係である．さらに，Kripke モデル $\mathfrak{M}$ は 6 つ組 $\langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\sqsupseteq}, R_{\prec}, R_{\succ}, V\rangle$，すなわち $\langle \mathfrak{F}, V\rangle$ と定義される．ここで，命題変数への付値関数 $V(p) \subseteq W$ が与えられたとき，充足関係 $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ が次の通り帰納的に定義される．

(V1) $\mathfrak{M}, u \Vdash p \Longleftrightarrow u \in V(p)$ ($p \in \mathsf{PROP}$)

(V2) $\mathfrak{M}, u \Vdash \neg\varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{M}, u \nVdash \varphi$

(V3) $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi \wedge \psi \Longleftrightarrow \mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ かつ $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$

(V4) $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow \mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ または $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$

(V5) $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi \supset \psi \Longleftrightarrow \mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ ならば $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$

(V6) $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box^{\uparrow}\varphi \Longleftrightarrow$ 任意の $v \in W$ に対し，$uR_{\sqsubseteq}v$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$

(V7) $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box_{\downarrow}\varphi \Longleftrightarrow$ 任意の $v \in W$ に対し，$uR_{\sqsupseteq}v$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$

(V8) $\mathfrak{M}, u \Vdash G\varphi \Longleftrightarrow$ 任意の $v \in W$ に対し，$uR_{\prec}v$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$

(V9) $\mathfrak{M}, u \Vdash H\varphi \Longleftrightarrow$ 任意の $v \in W$ に対し，$uR_{\succ}v$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$

Kripke モデル $\mathfrak{M} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\sqsupseteq}, R_{\prec}, R_{\succ}, V\rangle$ において，任意の $u \in W$ に対し $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ が成り立つとき，φ は $\mathfrak{M}$ で真であるといい，$\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ と表す．Kripke フレーム $\mathfrak{F}$ において，任意の付値 V に対し $\langle \mathfrak{F}, V\rangle \Vdash \varphi$ が成り立つとき，φ は $\mathfrak{F}$ で恒真であるといい，$\mathfrak{F} \Vdash \varphi$ と表す．同様に，論理式の集合 Δ が Kripke フレーム $\mathfrak{F}$ で恒真であるとは，任意の $\varphi \in \Delta$ に対し $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$ が成り立つことをいい，$\mathfrak{F} \Vdash \Delta$ と表す．

命題 2. $\mathfrak{F} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\sqsupseteq}, R_{\prec}, R_{\succ}\rangle$ を時区間論理に対する Kripke フレームとする．このとき，時区間論理の公理とフレームとの間に次の対応が成り立つ．

(1) $\mathfrak{F} \Vdash \varphi \supset \Box^{\uparrow}\Diamond_{\downarrow}\varphi \quad \Longleftrightarrow$
$\forall u, v\,(uR_{\sqsubseteq}v \Rightarrow vR_{\sqsupseteq}u)$

(2) $\mathfrak{F} \Vdash \varphi \supset \Box_{\downarrow}\Diamond^{\uparrow}\varphi \quad \Longleftrightarrow$
$\forall u, v\,(uR_{\sqsupseteq}v \Rightarrow vR_{\sqsubseteq}u)$

(3) $\mathfrak{F} \Vdash \Box^{\uparrow}\varphi \supset \Box^{\uparrow}\Box^{\uparrow}\varphi \quad \Longleftrightarrow$
$\forall u, v, w\,(uR_{\sqsubseteq}v \wedge vR_{\sqsubseteq}w \Rightarrow uR_{\sqsubseteq}w)$

(4) $\mathfrak{F} \Vdash \Box^{\uparrow}\varphi \supset \varphi \quad \Longleftrightarrow$
$\forall u\,(uR_{\sqsubseteq}u)$

(5) $\mathfrak{F} \Vdash \varphi \supset GP\varphi \quad \Longleftrightarrow$
$\forall u, v\,(uR_{\prec}v \Rightarrow vR_{\succ}u)$

(6) $\mathfrak{F} \Vdash \varphi \supset HF\varphi \quad \Longleftrightarrow$
$\forall u, v\,(uR_{\succ}v \Rightarrow vR_{\prec}u)$

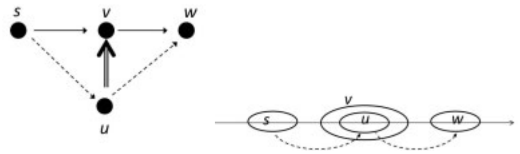

図 2 左・右に単調

(7) $\mathfrak{F} \Vdash G\varphi \supset GG\varphi \quad \Longleftrightarrow$
$\forall u, v, w\,(uR_{\prec}v \wedge vR_{\prec}w \Rightarrow uR_{\prec}w)$

(8) $\mathfrak{F} \Vdash G\varphi \supset \Box^{\uparrow}G\varphi \quad \Longleftrightarrow$
$\forall u, v, w\,(uR_{\sqsubseteq}v \wedge vR_{\prec}w \Rightarrow uR_{\prec}w)$

(9) $\mathfrak{F} \Vdash H\varphi \supset \Box^{\uparrow}H\varphi \quad \Longleftrightarrow$
$\forall u, v, w\,(uR_{\sqsubseteq}v \wedge vR_{\succ}w \Rightarrow uR_{\succ}w)$

(3) を $R_{\sqsubseteq}$ の推移性，(4) を $R_{\sqsubseteq}$ の反射性，(7) を $R_{\prec}$ の推移性と呼ぶ．また，(8) と (9) の右辺は，それぞれ右に単調 (right monotonicity)，左に単調 (left monotonicity) と呼ばれる性質である [2] [3]．図 2 の点線矢印は，与えられた包含関係と先行関係から導かれる単調性を示す．

また，(1) と (2) より，公理 (A1) と (A2) を恒真とするフレームでは，包含関係 $R_{\sqsubseteq}$ と $R_{\sqsupseteq}$ とが互いに逆関係になる．すなわち，任意の時区間 u, v に対し，$uR_{\sqsubseteq}v$ のとき，またそのときのみ $vR_{\sqsupseteq}u$ が成立する．同様に，(5) と (6) より，公理 (A5) と (A6) を恒真とするフレームでは，先行関係 $R_{\prec}$ と $R_{\succ}$ とが互いに逆関係になる．

Kripke フレーム $\mathfrak{F} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\sqsupseteq}, R_{\prec}, R_{\succ}\rangle$ において，命題 2 の (1) から (7) までの右辺が成立するとき，$\mathfrak{F}$ を $\mathbf{K_{T\Box}}$ フレームと呼ぶ．さらに，$\mathbf{K_{T\Box}}$ フレームが (8) と (9) の右辺を満たすならば，そのフレームを $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ フレームと呼ぶ．$\mathfrak{F}$ が $\mathbf{K_{T\Box}}$ フレーム，$\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ フレームであるとき，Kripke モデル $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V\rangle$ を，それぞれ $\mathbf{K_{T\Box}}$ モデル，$\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ モデルと呼ぶ．$\mathbf{K_{T\Box}}$, $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ フレームにおいては，包含関係 $R_{\sqsubseteq}$ と $R_{\sqsupseteq}$，先行関係 $R_{\prec}$ と $R_{\succ}$ が互いに逆関係になることから，包含関係の一方 $R_{\sqsupseteq}$, 先行関係の一方 $R_{\succ}$ を $\mathfrak{F} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\sqsupseteq}, R_{\prec}, R_{\succ}\rangle$ の表記から落とすことができる．我々の興味は $\mathbf{K_{T\Box}}$, $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ フレーム (及びモデル) のみにあるので，以後断らない限り，

Kripke フレームを $\langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\prec}\rangle$，Kripke モデルを $\langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\prec}, V\rangle$ と書き，$R_{\sqsupseteq}$, $R_{\succ}$ を，$R_{\sqsupseteq} := R_{\sqsupseteq}^{-1}$, $R_{\succ} := R_{\prec}^{-1}$ と定義された表記とする．

以下，本稿では，$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ はそれぞれ順序 $\leq, <$ が定義された実数全体，整数全体，自然数全体[†5]からなる集合を表すものとする．実数区間全体からなる集合を $\mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \{[x,y] : x, y \in \mathbb{R}$ かつ $x < y\}$ とし，また $[x,y] \sqsubseteq [z,w]$ であるのは，$z \leq x$ かつ $y \leq w$ が成立する場合とし，$[x,y] \prec [z,w]$ であるのは，$y \leq z$ が成立する場合とする．このとき，$\langle \mathrm{Int}(\mathbb{R}), \sqsubseteq, \prec\rangle$ は明らかに $\mathbf{K_{T\Box}}$ フレームであり，かつ $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ フレームとなる．

次節では，応用の観点から重要となる時区間論理の決定可能性を論理の有限モデル性の帰結として示す．

3 決定可能性

$\mathbf{K_{T\Box}}$ の決定可能性はシークエント計算を用いて Koga and Tojo [13] によって示されており，$\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ の決定可能性はタブロー法を用いることにより Hussain [12] により示されている[†6]．こういった証明体系を利用する方法では，$\mathbf{K_{T\Box}}$ モデルないし $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ モデルを，与えられた論理式に関してどのように有限サイズにまで小さくするかの構成方法が明らかではない．本稿では，既存研究と異なる貢献として，この構成方法を明示的に与える濾過法 (filtration) [8] を用いて論理の有限モデル性を示し，Harrop の定理 [8] の帰結として $\mathbf{K_{T\Box}}$, $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ の決定可能性に別証明を与える．ここで Harrop の定理とは「有限公理化可能で，かつ有限モデル性をもつ論理は決定可能である」という性質である．論理 $\mathbf{L}$ が有限モデル性 [17] をもつとは，$\varphi \notin \mathbf{L}$ ならばある有限の $\mathbf{L}$ モデル $\mathfrak{M}$ が存在し $\mathfrak{M} \not\Vdash \varphi$ となることである [8]．$\mathbf{K_{T\Box}}$ 及び $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ はその定義から有限公理化可能であるので，以下では，2 つの論理 $\mathbf{K_{T\Box}}$ 及び $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ の有限モデル性を示すことに関心を絞る．

まずは，本稿の時区間論理の言語に対する濾過法を定義しておく．以下では，論理式 φ の部分論理式全体の集合を $\mathrm{Sub}(\varphi)$ で表す．

定義 1 (濾過法). Φ を部分論理式をとる操作に閉じた論理式の集合とする，すなわち，任意の $\varphi \in \Phi$ に対して $\mathrm{Sub}(\varphi) \subseteq \Phi$ を満たす，とする．モデル $\mathfrak{M} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\prec}, V\rangle$ が与えられたとき，W 上の同値関係 $u \sim v$ を任意の $\varphi \in \Phi$ に対し $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ のとき，またそのときのみ $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ と定める．$\mathfrak{M}$ の Φ による濾過モデル $\mathfrak{M}^f_\Phi = \langle W^f, R^f_{\sqsubseteq}, R^f_{\prec}, V^f\rangle$ は次を満たすモデルである．

- **(FL1)** $W/\sim$ を $\sim$ に関する同値類全体の集合とし，$|u|$ を u の同値類とする．すなわち，$|u| = \{x \in W : u \sim x\}$ である．
- **(FL2)** $uR_{\sqsubseteq}v \Rightarrow |u|R^f_{\sqsubseteq}|v|$ $(u, v \in W)$
- **(FL3)** $|u|R^f_{\sqsubseteq}|v|$ $\Rightarrow$ 任意の $\Box^{\uparrow}\varphi \in \Phi$ に対し，$\mathfrak{M}, u \Vdash \Box^{\uparrow}\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ $(u, v \in W)$
- **(FL4)** $|u|R^f_{\sqsubseteq}|v|$ $\Rightarrow$ 任意の $\Box_{\downarrow}\varphi \in \Phi$ に対し，$\mathfrak{M}, v \Vdash \Box_{\downarrow}\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ $(u, v \in W)$
- **(FL5)** $uR_{\prec}v \Rightarrow |u|R^f_{\prec}|v|$ $(u, v \in W)$
- **(FL6)** $|u|R^f_{\prec}|v|$ $\Rightarrow$ 任意の $G\varphi \in \Phi$ に対し，$\mathfrak{M}, u \Vdash G\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ $(u, v \in W)$
- **(FL7)** $|u|R^f_{\prec}|v|$ $\Rightarrow$ 任意の $H\varphi \in \Phi$ に対し，$\mathfrak{M}, v \Vdash H\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ $(u, v \in W)$
- **(FL8)** $V^f(p) := \{|u| \mid \mathfrak{M}, u \Vdash p\}$ $(p \in \Phi)$

この定義では $R^f_{\sqsubseteq}$, $R^f_{\prec}$ の定義が具体的に与えられていないことに注意されたい[†7]．以下で，$\mathbf{K_{T\Box}}$, $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ のそれぞれの有限モデル性を示す場合に，個別に定義を与える．

命題 3. Φ を部分論理式をとる操作に閉じた論理式の集合, $\mathfrak{M}$ をモデルとする．$\varphi \in \Phi$ ならば，任意の $u \in W$ に対し $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ であるとき，そのときのみ $\mathfrak{M}^f_\Phi, |u| \Vdash \varphi$ である．

(証明) 論理式 $\varphi \in \Phi$ の構造に関する帰納法で容易に示すことができる．例として $\Box^{\uparrow}\varphi \in \Phi$ の場合のみ示す．まず $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box^{\uparrow}\varphi$ と仮定する．$\mathfrak{M}^f_\Phi, |u| \Vdash \Box^{\uparrow}\varphi$

†5 本稿では最小の自然数を 1 としておく．

†6 文献[12] では, $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ は K_{INT} と表されている．

†7 $R^f_{\sqsupseteq}$, $R^f_{\succ}$ は $R^f_{\sqsubseteq}$, $R^f_{\prec}$ の逆関係として定義しているため，命題 2 の (1), (2) および (5), (6) の同値は $R_{\sqsupseteq}$, $R_{\succ}$ の定義から自明に成立する．ここから，与えたモデルが $\mathbf{K_{T\Box}}$ モデル，$\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ モデルになるかどうかのチェックでは命題 2 の (1), (2) および (5), (6) のチェックは不要となる．

を示すために，$|u|R^f_{\sqsubseteq}|v|$ なる $|v| \in W^f$ を考える．(FL3) より $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ がわかる．$\varphi \in \varPhi$ より帰納法の仮定が適用でき，$\mathfrak{M}^f_\Phi, |v| \Vdash \varphi$ を得る．逆に，$\mathfrak{M}^f_\Phi, |u| \Vdash \Box^\uparrow\varphi$ と仮定して $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box^\uparrow\varphi$ を示す．そのために，$uR_{\sqsubseteq}v$ なる $v \in W$ を考える．(FL2) より $|u|R^f_{\sqsubseteq}|v|$．$\varphi \in \varPhi$ と帰納法の仮定より，$\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ を得る． ∎

もう 1 つの準備として，$\mathbf{K_{T\Box}}, \mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ の完全性を次のように示すことができる．

命題 4. $\mathbf{L}$ を時区間論理 $\mathbf{K_{T\Box}}$ か $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ とする．$\varphi \notin \mathbf{L}$ ならば，ある $\mathbf{L}$ モデル $\mathfrak{M}$ が存在し $\mathfrak{M} \nVdash \varphi$.

(**証明**) 一般に様相演算子の集合 Λ をもつ正規様相論理に，複数個の $\Diamond_1^k\Box_2^l\varphi \supset \Box_3^m\Box_4^n\Diamond_5^o\varphi$ (k, l, m, n, o は 0 ないし自然数，$\Diamond_i \in \Lambda$ は $\neg\Box_i\neg$ の略記，$O \in \{\Box_i, \Diamond_i \mid i = 1,2,3,4,5\}$ とするとき，O^k は $\underbrace{O\cdots O}_{k\text{ 個}}$ の略記) の形式の公理として加えた最小の正規様相論理は，$\Box_i$ に対応する到達可能性関係を R_i と書くとき，

$$\forall x, y, z[(xR_1^k y \text{ かつ } x(R_3^m \circ R_4^n)z) \text{ ならば } \exists w(yR_2^l w \text{ かつ } zR_4^o w)]$$

(ただし，$\circ$ は関係合成で，R_i^k は関係 R_i を k 回関係合成したもの) をみたすフレームのクラスに対して (強) 完全になる (cf. [6] 中の Proposition 8.6.8)．四様相論理である，$\mathbf{K_{T\Box}}$ と $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ に加えられる公理群はすべて上述の公理の形をしており，対応する到達可能性に対する性質が意図する $\mathbf{K_{T\Box}}$ モデル，$\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ モデルを与えるため，両方の論理に対する完全性は直ちに従う．例えば，公理 (A8) については，$\Box_1$, $\Box_2$, $\Box_4$, $\Box_5$ が全て G で，$\Box_3 := \Box^\uparrow$ と定め，$(k, l, m, n, o) = (0, 1, 1, 1, 0)$ とおけばよい．このとき，対応するフレームの性質は

$$\forall x, y, z[(xR^0_{\prec}y \text{ かつ } x(R^1_{\sqsubseteq} \circ R^1_{\prec})z) \text{ ならば } \exists w(yR^1_{\prec}w \text{ かつ } zR^0_{\prec}w)],$$

となるが，$zR^0_{\prec}w := z = w$ 等に注意をすれば，

$$\forall x, z[x(R_{\sqsubseteq} \circ R_{\prec})z \text{ ならば } xR_{\prec}z],$$

と書き換えられ，関係合成の定義から右単調性と同値になることに注意されたい． ∎

$\mathbf{K_{T\Box}}$ と $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ の有限モデル性を順に示そう†8．任意の濾過モデル $\mathfrak{M}^f_\varPhi$ のドメインの要素は，$\varPhi$ 中の論理式に関する $\mathfrak{M}$ での充足関係では区別できない時区間を同一視する同値関係 $\sim$ による同値類である (cf. (FL1))．

定理 1. $\mathbf{K_{T\Box}}$ は有限モデル性をもつ．

(**証明**) $\varphi \notin \mathbf{K_{T\Box}}$ とする．このとき，命題 4 より，ある $\mathbf{K_{T\Box}}$ モデル $\mathfrak{M}$ が存在し，$\mathfrak{M} \nVdash \varphi$. ここで，論理式の集合 $\varPhi$ を $\mathrm{Sub}(\varphi)$ (明らかに有限) とおき，$\mathfrak{M}$ の $\varPhi$ による濾過モデル $\mathfrak{M}^f_\varPhi$ の定義に必要な $R^f_{\sqsubseteq}$ と $R^f_{\prec}$ とを，$R^f_{\sqsubseteq}$ の反射性・推移性，および，$R^f_{\prec}$ の推移性を満たすように，

- $|u|R^f_{\sqsubseteq}|v| \iff$ 任意の $\Box^\uparrow\varphi, \Box_\downarrow\varphi \in \varPhi$ に対し，
  $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box^\uparrow\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box^\uparrow\varphi$,
  $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box_\downarrow\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box_\downarrow\varphi$;
- $|u|R^f_{\prec}|v| \iff$ 任意の $G\varphi, H\varphi \in \varPhi$ に対し，
  $\mathfrak{M}, u \Vdash G\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash G\varphi \wedge \varphi$,
  $\mathfrak{M}, v \Vdash H\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, u \Vdash H\varphi \wedge \varphi$,

と定める [8]．このとき，(FL2) から (FL7) を明らかに満たす．また，上述の $R^f_{\sqsubseteq}, R^f_{\prec}$ の定義から，$R^f_{\sqsubseteq}$ は反射性・推移性をみたし，$R^f_{\prec}$ は推移性をみたすことが実際に確認できる．よって，$\mathfrak{M}^f_\varPhi$ もまた $\mathbf{K_{T\Box}}$ モデルとなる．さらに $\varPhi$ が有限であることから，$\mathfrak{M}^f_\varPhi$ のドメインも有限となる．命題 3 と $\mathfrak{M} \nVdash \varphi$ から，$\mathfrak{M}^f_\varPhi \nVdash \varphi$ となる． ∎

定理 2. $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ は有限モデル性をもつ．

(**証明**) $\varphi \notin \mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ とする．このとき，命題 4 より，ある $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ モデル $\mathfrak{M}$ が存在し，$\mathfrak{M} \nVdash \varphi$. 論理式の

†8 時区間論理 $\mathbf{K_{T\Box}}$ とは，時制論理 $\mathbf{K_t}4$ と包含関係の論理 $\mathbf{K_\Box}$ との融合であった．$\mathbf{K_t}4$ の有限モデル性，包含関係の論理 $\mathbf{K_\Box}$ の有限モデル性は個別に定理 1 の議論を行うことで確立できる．一般に，独立に公理化可能な正規様相論理同士の融合は，お互いが有限モデル性をもつ場合に，有限モデル性を保つことが知られている (文献 [15] [7] による)．しかし，本稿では与えられた $\mathbf{K_{T\Box}}$ モデルをどのように有限サイズに小さくするかの構成方法を明らかにするために定理 1 の証明を直接与えた．

集合 $\varPhi$ を

$$\varPhi := \bigcup_{i=0}^{4} \varPhi_i\ ,\ \text{ただし} \begin{cases} \varPhi_0 = \mathrm{Sub}(\varphi) \\ \varPhi_1 = \{\Box_\downarrow G\varphi : G\varphi \in \varPhi_0\} \\ \varPhi_2 = \{\Box_\downarrow H\varphi : H\varphi \in \varPhi_0\} \\ \varPhi_3 = \{\Box_\downarrow \varphi : G\varphi \in \varPhi_0\} \\ \varPhi_4 = \{\Box_\downarrow \varphi : H\varphi \in \varPhi_0\} \end{cases}$$

と定める．$\varPhi_0$ が有限濃度なので $\varPhi$ も有限濃度となる．この $\varPhi$ は明らかに部分論理式をとる操作に閉じる．$\mathfrak{M}$ の $\varPhi$ による濾過モデル $\mathfrak{M}^f_\varPhi$ の定義にに必要な $R^f_\sqsubseteq$ と $R^f_\prec$ を，$R^f_\sqsubseteq$ の反射性・推移性，$R^f_\prec$ の推移性，および，右・左単調性を満たすように，

- $|u|R^f_\sqsubseteq|v| \iff$ 任意の $\Box^\uparrow\varphi, \Box_\downarrow\varphi, G\varphi, H\varphi \in \varPhi$ に対し，

  $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box^\uparrow\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box^\uparrow\varphi$,

  $\mathfrak{M}, u \Vdash G\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash G\varphi$,

  $\mathfrak{M}, u \Vdash H\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, v \Vdash H\varphi$,

  $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box_\downarrow\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box_\downarrow\varphi$;

- $|u|R^f_\prec|v| \iff$ 任意の $G\varphi, H\varphi \in \varPhi$ に対し，

  $\mathfrak{M}, u \Vdash G\varphi$ ならば，$\mathfrak{M}, v \Vdash \Box_\downarrow G\varphi \wedge \Box_\downarrow\varphi$,

  $\mathfrak{M}, v \Vdash H\varphi$ ならば $\mathfrak{M}, u \Vdash \Box_\downarrow H\varphi \wedge \Box_\downarrow\varphi$,

と定める．このとき，(FL2) から (FL7) を明らかに満たす．また，$R^f_\sqsubseteq, R^f_\prec$ の定義から，$R^f_\sqsubseteq$ は反射性・推移性をみたし，$R^f_\prec$ は推移性をみたし，さらに右単調性・左単調性をもみたすことが実際に確認できる (命題 1 を参照．右単調性については図 3 を参照．これらの単調性を保証するために $\varPhi_0$ ではなく $\varPhi$ を用い，$R^f_\sqsubseteq, R^f_\prec$ のそれぞれの定義において，包含関係・先後関係の両方の様相演算子が出現している)． よって，$\mathfrak{M}^f_\varPhi$ もまた $\mathbf{K_{T\Box\triangle}}$ モデルとなる．さらに定理 1 の証明と同様に，$\mathfrak{M}^f_\varPhi$ のドメインも有限となる．最後に，命題 3 と $\mathfrak{M} \nVdash \varphi$ から，$\mathfrak{M}^f_\varPhi \nVdash \varphi$ となる． ∎

定理 1, 2, $\mathbf{K_{T\Box}}, \mathbf{K_{T\Box\triangle}}$ の有限公理化可能性，とハ

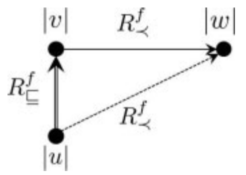

図 3 濾過モデルでの右単調性

ロップの定理より次の系を得る．

系 1. $\mathbf{K_{T\Box}}, \mathbf{K_{T\Box\triangle}}$ は決定可能である．

以上，包含関係と先行関係をもつ時区間論理 $\mathbf{K_{T\Box}}$ と $\mathbf{K_{T\Box\triangle}}$ を定義し，応用上の要である論理の決定可能性を示した．次節ではいよいよ本稿の主題である，フレームの埋込み可能性について論ずる．

4 埋込み可能性

第 1 節で議論したように，我々の時間に対する直観に合わない $\mathbf{K_{T\Box\triangle}}$ フレームが存在する．すなわち，時区間間の包含関係や先行関係にある種の齟齬がある場合である．

本節では，各時区間が互いに矛盾なく一直線の時間軸に配置できることを埋込み可能性として形式化し，埋込み可能性について，いくつかの性質を示す．

4.1 埋込み可能フレーム

まず，フレームの埋込み可能性を定義しよう．実数区間全体からなる集合を $\mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \{[x,y] : x, y \in \mathbb{R}$ かつ $x < y\}$ としたとき，$[x,y] \sqsubseteq [z,w]$ であるのは，$z \le x$ かつ $y \le w$ が成立する場合とし，$[x,y] \prec [z,w]$ であるのは，$y \le z$ が成立する場合と定めていたことを思い出そう．

定義 2. フレーム $\mathfrak{F} = \langle W, R_\sqsubseteq, R_\prec \rangle$ が (実数軸に) 埋込み可能であるとは，ある写像 $f : W \to \mathrm{Int}(\mathbb{R})$ が存在し，任意の $u, v \in W$ に対し，$uR_\sqsubseteq v$ のとき，またそのときのみ $f(u) \sqsubseteq f(v)$ となり，かつ，$uR_\prec v$ のとき，またそのときのみ $f(u) \prec f(v)$ となることである．

我々が着目する埋込み可能なフレーム・クラスを ER (Embeddable into Real axis) とする．ここで，フレーム・クラス ER は $\mathbf{K_{T\Box\triangle}}$ フレームのクラスに含まれることは容易に確認できる．

埋め込み可能なフレームの具体例として 2 つの時区間からなりお互いに包含関係にあるが先行関係をもたない $\mathbf{K_{T\Box\triangle}}$ フレームを考えよう[†9]．このとき 2 つの時区間を同じ閉区間 $[0,1]$ に送る写像によりこのフレームは埋め込み可能となる．この例が教えるのは埋

†9 $W = \{e, o\}$, $R_\sqsubseteq = \{\langle e,o\rangle, \langle o,e\rangle, \langle e,e\rangle, \langle o,o\rangle\}$, $R_\prec = \emptyset$ となる $\langle W, R_\sqsubseteq, R_\prec \rangle$.

め込みの写像は単射とは限らないということである(しかし，4.2 節冒頭の議論において，埋め込みの写像を単射とすることができる).

以下では，埋込み可能性についての性質を明らかにすることを試みる．まず，埋込み可能なフレームでのみ恒真となる時区間論理式が存在すれば，埋込み可能性を特徴づけたことになる．しかし，以下の定理 3 が示すように，残念ながらそのような論理式は存在しない．定理 3 の証明で用いる p-モルフィズムは次の通り定義される [8].

定義 3. $\mathfrak{F} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\prec}\rangle$ と $\mathfrak{G} = \langle W', R'_{\sqsubseteq}, R'_{\prec}\rangle$ を任意のフレームとする．このとき，写像 $f : W \to W'$ が p モルフィズムであるとは，任意の $\square \in \{\sqsubseteq, \sqsupseteq, \prec, \succ\}$ に対し，f が次の条件を充たすことである.

(i) $uR_{\square}v$ ならば $f(u)R'_{\square}f(v)$ となる.

(ii) $f(u)R'_{\square}v'$ ならば，ある $w \in W$ が存在して，$uR_{\square}w$ かつ $f(w) = v'$ となる.

ここで，$\mathfrak{F}$ から $\mathfrak{G}$ への全射となる p-モルフィズムが存在するとき，時区間論理式の集合 $\varDelta$ が $\mathfrak{F}$ で恒真となるならば，$\varDelta$ は $\mathfrak{G}$ でも恒真となる [8] ことに注意する.

定理 3. フレーム・クラス ER に対応する時区間論理式の集合は存在しない.

(**証明**) ある時区間論理式の集合 $\varDelta$ がフレーム・クラス ER に対応すると仮定し矛盾を導く．まず，$\mathfrak{F} \Vdash \varDelta$ のとき，またそのときのみ $\mathfrak{F} \in$ ER とする．次の $\mathbf{K_{T\square\Delta}}$ フレーム $\mathfrak{F} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\prec}\rangle$ と $\mathfrak{G} = \langle W', R'_{\sqsubseteq}, R'_{\prec}\rangle$ を考える．ここで，$W = \mathbb{Z}$，$W' = \{e, o\}$ とする．W 上の関係を次の通り定める (図 4 も参照．図 4 では，$R_{\sqsubseteq}$ が整数軸における二重矢印で表され，$R_{\prec}$ が整数軸の下部の矢印によって (煩雑さを避けるため，2 と $R_{\prec}$ で関係づけられる要素に関心を絞っている) 表されている) †10.

$$R_{\sqsubseteq} = \big\{\langle 2z-1, 2z\rangle : z \in \mathbb{Z}\big\} \cup \big\{\langle z, z\rangle : z \in \mathbb{Z}\big\},$$
$$R_{\prec} = \big\{\langle 2z, 2z+n\rangle : z \in \mathbb{Z} \text{ かつ } n \in \mathbb{N}\big\}$$
$$\cup \big\{\langle 2z-1, 2z+n\rangle : z \in \mathbb{Z} \text{ かつ } n \in \mathbb{N}\big\}.$$

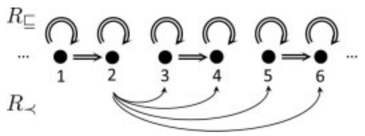

図 4　フレーム $\mathfrak{F}$ の $R_{\sqsubseteq}$ と $R_{\prec}$ の図示 (一部)

図 5　$\mathfrak{G}$ の図示

図 6　$\mathfrak{F}$ の実数軸への埋め込み

W' 上の関係を次の通りとする (図 5 を参照).

$$R'_{\sqsubseteq} = \{\langle o, e\rangle, \langle e, e\rangle, \langle o, o\rangle\},$$
$$R'_{\prec} = \{\langle e, o\rangle, \langle o, e\rangle, \langle e, e\rangle, \langle o, o\rangle\}.$$

次の写像 f が，W から W' の上への全射となる p-モルフィズムであることは容易に確かめられる.

$$f : 2z \mapsto e,\ 2z+1 \mapsto o \quad (z \in \mathbb{Z}).$$

したがって，論理式の集合 $\varDelta$ が $\mathfrak{F}$ で恒真となるならば，$\varDelta$ は $\mathfrak{G}$ でも恒真となる．しかし，$\mathfrak{F}$ は ER に属する (たとえば $2z \mapsto [2z-1, 2z+1]$，$2z-1 \mapsto [2z-\frac{1}{2}, 2z+\frac{1}{2}]$ なる埋め込みを考えればよい，図 6 を参照) が，明らかに $\mathfrak{G}$ は ER に属さない (図 5 を参照)．これは矛盾である. ∎

4.2　埋込み可能性の判定

前節において，埋込み可能であるフレーム・クラス ER を我々の時区間論理式では特徴づけることができないことを確認した．本節では，まず，有限フレームが与えられたとき，そのフレームが埋込み可能かどうかを判定できることを示す.

$\mathfrak{F} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\prec}\rangle$ を $\mathbf{K_{T\square\Delta}}$ フレームとする．まず，W 上の同値関係 $\approx$ を次のように定義する.

$$u \approx v \iff uR_{\sqsubseteq}v \text{ かつ } vR_{\sqsubseteq}u \text{ である}.$$

$|u|$ は $\{x \in W : u \approx x\}$ を表し，$W/{\approx}$ は $\approx$ の同値

†10 以下の $R_{\sqsubseteq}$ および $R_{\prec}$ の定義中の z, $2z-1$, $2z$, $2z+n$ の値は $W = \mathbb{Z}$ と定義した時点ですでに与えてある時区間の名称に過ぎず，$2z$ という時区間に対して -1 という演算を適用して $2z-1$ という時区間を得ているのではないことに注意されたい.

類を表すものとする．さらに，$W/\approx$ 上の関係 $R_{\sqsubseteq}^{\approx}$ と $R_{\prec}^{\approx}$ を次のように定義する．$|u|R_{\sqsubseteq}^{\approx}|v|$ であるのは，$uR_{\sqsubseteq}v$ であるときとし，$|u|R_{\prec}^{\approx}|v|$ であるのは，$uR_{\prec}v$ であるときとする．ここで，フレームの埋込み可能性の定義をフレーム $\mathfrak{F}^{\approx} = \langle W/{\approx}, R_{\prec}^{\approx}, R_{\sqsubseteq}^{\approx}\rangle$ に自然な形で拡張すると，関係 $R_{\sqsubseteq}^{\approx}, R_{\prec}^{\approx}$ は矛盾なく定義されているので，$\mathfrak{F}$ が埋込み可能であるとき，そのときのみ $\mathfrak{F}^{\approx}$ が埋込み可能であることがわかる．さらに $\mathfrak{F}^{\approx}$ では $|u|R_{\sqsubseteq}^{\approx}|v|$ かつ $|v|R_{\sqsubseteq}^{\approx}|u|$ のとき $|u| = |v|$ となる意味で反対称性が成立する．このことから $\mathfrak{F}^{\approx}$ が埋め込み可能となる場合，その埋め込みの写像は必ず単射となる．

区間 $[x, y] \in \mathrm{Int}(\mathbb{R})$ の始点，終点とは，それぞれ x, y のこととする．このとき，次の定理が成立する．

定理 4. $\mathfrak{F} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\prec}\rangle$ を埋込み可能な $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ フレームとし，$\mathfrak{F}^{\approx} = \langle W/{\approx}, R_{\prec}^{\approx}, R_{\sqsubseteq}^{\approx}\rangle$ を有限フレーム，すなわち，$W/\approx$ の要素数がある自然数 n であるとする．このとき，ある埋込み f が存在して，(i) 任意の $|u| \in W/\approx$ に対し，$f(|u|)$ の始点・終点がともに，$2n$ 以下の自然数であり，(ii) 任意の相異なる $|u|, |v| \in W/\approx$ に対し，$f(|u|)$ の始点・終点がともに，$f(|v|)$ の始点・終点それぞれと異なる値をもつ．

(証明) $\mathfrak{F} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\prec}\rangle$ を埋込み可能な $\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ フレームとし，$\mathfrak{F}^{\approx} = \langle W/{\approx}, R_{\sqsubseteq}^{\approx}, R_{\prec}^{\approx}\rangle$ を要素数 n の有限フレームとする．$\mathfrak{F}^{\approx}$ も埋込み可能であるので，$\mathfrak{F}^{\approx}$ の埋込み g が存在する．このとき，g によって写される $W/\approx$ の始点・終点のうち，重複するものに相異なる値を割り当て，さらにこの重複を取り除いて定義された新たな写像 g' が $\mathfrak{F}^{\approx}$ の埋込みとなるような手続きが存在する (例えば，文献[4] の方法に若干の修正を加えればよい)．この g' により写される始点・終点のうち，小さいものから順に自然数 $1, 2, \ldots, 2n$ を割り当てて定義される埋込みが，条件 (i) と (ii) を充たすのは明らかである． ∎

定理 4 により，有限フレーム $\mathfrak{F} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\prec}\rangle$ が与えられたとき，そのフレームが埋込み可能かどうか以下の通り判定することができる．まず，与えられた $\mathfrak{F}$ に対し，$\mathfrak{F}^{\approx} = \langle W/{\approx}, R_{\prec}^{\approx}, R_{\sqsubseteq}^{\approx}\rangle$ を定義する．$W/\approx$ の要素数を n とし，その要素を $|u_1|, \ldots, |u_n|$ とする．この $|u_1|, \ldots, |u_n|$ の始点・終点に $2n$ 以下の相異なる自然数に対応させる写像をすべて列挙する．このように定義される写像は高々有限個であり，それらを $g_1, \ldots, g_m$ とする．このうち，1 つでも $\mathfrak{F}^{\approx}$ の埋込みが存在すれば，$\mathfrak{F}$ は埋込み可能であり，もし存在しなければ，$\mathfrak{F}$ は埋込み可能でないと判定できる．

5 議論

一般に，任意のフレームが与えられたとき，そのフレームの構造がもつ性質から埋込み可能かどうかを判定することを試みる．そのためにまず $\mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \{[x, y] : x, y \in \mathbb{R}$ かつ $x < y\}$ から我々の判定に役立つフレーム構造の性質を抽出する．2 つの区間 $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ の間に包含関係 $[x_1, y_1] \sqsubseteq [x_2, y_2]$ が成立するとする．このときより小さい区間はより大きい区間に先行することはありえないし，より大きい区間がより小さい区間に先行することはない．この性質は Kripke フレームの観点から次の条件 (F1) として記述できる．

(F1) $\forall u, v \in W\left[uR_{\sqsubseteq}v \Rightarrow \neg(uR_{\prec}v \vee vR_{\prec}u)\right]$

先行関係にある 3 つの区間 $[x_1, y_1] \prec [x_2, y_2] \prec [x_3, y_3]$ と任意に選んだ区間 $[a, b]$ との包含・先行関係を考えよう．真ん中の区間 $[a, b]$ に $[x_2, y_2]$ が含まれていないなら，$[x_1, y_1]$ が $[a, b]$ に先行するか，$[a, b]$ が $[x_3, y_3]$ に先行するかのいずれか，がいえる．Kripke フレームの観点からこの性質に対応するのは次の性質 (F2) である (図 7 も参照せよ，但し，図中の点線矢印は，与えられた包含関係と先行関係から導かれる関係を表す)．

(F2) $\forall u, v, w, s \in W\left[(uR_{\prec}v \wedge vR_{\prec}w) \Rightarrow (uR_{\prec}s \vee vR_{\sqsubseteq}s \vee sR_{\prec}w)\right]$

条件 (F1) と同様に Kripke フレームが条件 (F2) を満たさないなら，そのフレームは明らかに埋込み可能で

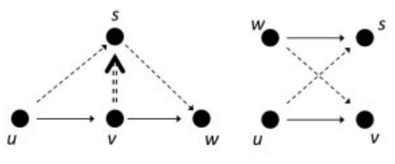

図 7 条件 (F2), (F3)

ない.

同様にして Int(ℝ) 上で次の条件

(F3) $\forall u, v, w, s \in W\left[(uR_{\prec}v \wedge wR_{\prec}s) \Rightarrow (uR_{\prec}s \vee wR_{\prec}v)\right]$

(F4) $\forall u, v, w, s \in W\left[(uR_{\prec}v \wedge uR_{\sqsubseteq}w \wedge vR_{\sqsubseteq}w) \Rightarrow (uR_{\prec}s \vee uR_{\sqsubseteq}s \vee vR_{\sqsubseteq}s \vee sR_{\prec}v \vee sR_{\sqsubseteq}w)\right]$

が成立することを確認できる．条件 (F3) は，先行関係にある二区間のペアを考えた場合 (すなわち四区間を考慮) の，四区間の間の先行関係に関する条件である (図 7 も参照せよ)．また，条件 (F4) は，先行関係にある二区間がより大きな区間に包含される場合 (すなわち三区間を考慮) に，任意に選んできた別区間が既存の三区間とどのような包含・先行関係をもつかを記述している．これらの二性質が Int(ℝ) 上で成立することから Kripke フレームが条件 (F3), (F4) を満たさない場合には，埋込み可能とならない.

われわれは W の要素数が 4 以下であるとき，フレームのすべての組み合わせ，すなわち 4 つの時区間の間に存在しうる関係を尽くすことで，上記の (F1), (F2), (F3), (F4) を満たすことが埋め込み可能な Kripke フレームの必要十分条件であることを検証した．すなわち時区間の個数が 4 以下のフレームが与えられたとき，まずそのフレームが条件 (F1) を満たすかどうかを検査し満たさなければ埋込み可能でないフレームと判定される．次に条件 (F2) から (F4) を満たすかどうかを検査し，もし 1 つでも条件を満たさないとすると，そのフレームは埋込み可能でないと判定される．例えば，図 1 の左側に示した，埋込み可能でなかった時区間が 4 のフレーム ($\mathbf{K_{T\Box\Delta}}$ フレームとなることが確認できる) では， $uR_{\prec}v$ かつ $uR_{\sqsubseteq}v$ が成立するため，条件 (F1) の前件は成立するが後件は成立しない．したがって，当該フレームは条件 (F1) を満たさない．よって上述の手続きに従って，このフレームは埋め込み可能ではない，と判定される.

しかしながら，このようにして発見された制約条件が任意の個数の要素からなるフレームの埋込み可能性を特徴づけることはできない．すなわち時区間が 5 個以上のフレームについては，改めて時区間の間の関係について場合を尽くすことで条件を模索しなければならない.

6 まとめと今後の課題

本稿では包含関係と先行関係をもつ時区間論理について議論を行った．埋め込み可能性に関連した研究として Int(ℝ) 上の時区間論理の公理化可能性を考えることができる．ℝ を位相空間とみて □ を開核演算子とみなしたとき，ℝ 上で妥当となる様相論理式の集合は様相論理 **S4** になることが知られている [19]．その核にあるアイデアは ℝ から有限濃度の **S4** フレーム (到達可能性関係が反射的かつ推移的) に論理式の妥当性を保つ全射を構成することといえる．これに対応して,「どのようなときに $f : \mathrm{Int}(\mathbb{R}) \to W$ が Int(ℝ) から $\mathfrak{F} = \langle W, R_{\sqsubseteq}, R_{\prec}\rangle$ への全射の p-モルフィズムになるか」という問題を時区間論理で考えることができる．これは，いわば Int(ℝ) が有限構造でどのように近似できるかという問題であり，埋め込みとは逆方向の投射可能性と捉えることができる.

本稿の寄与するところは以下の二点である．まず (i) 完全な公理系と Kripke 意味論を定義し，その決定可能性を示した．次に，われわれの時間に対する直観のもとで時区間論理がもつべき性質として，線形時間への埋込み可能性を提案し，形式化した．さらに，埋込み可能なフレーム・クラスが我々の時区間論理式では，特徴づけることができないことを示す一方で，(ii) 有限フレームにおいては，フレームが埋込み可能かどうかを判定する手続きが存在することを示した.

一般に時区間が n 個存在するフレームについて，フレームの構造からそのフレームが埋込み可能かどうかを判定する手続きを具体的に得られれば理想である．われわれは個数 4 以下の場合については時区間の間のあらゆる関係の組み合わせを尽くすことでアドホックにその判定条件を発見することができた．しかしこれらの判定条件が 5 つ以上の場合の判定条件を見つけ出す手がかりにはなっておらず，これは今後の課題である.

謝辞

有益かつ詳細なコメントを下さった三名の査読者の方に感謝したい．また，多様相論理の融合の有限モデル性について，第二著者の質問に答えてくださった

Frank Wolter 教授にも感謝する．しかし，依然として残る誤りは全て著者に帰されるべきものである．

参 考 文 献

[1] Allen, J.：Towards a general theory of action and time, *Artificial Intelligence*, Vol. 23(1984), pp. 123–154.

[2] van Benthem, J.: *The Logic of Time*, 2nd Edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[3] van Benthem, J.: Temporal logic, *Handbook of logic in artificial intelligence and logic programming*, Vol. 4, Gabbay, D., Hogger, J. and Robinson, J.(eds.), Clarendon Press, Oxford, 1995, pp. 241–350.

[4] Biedl, T.：Graph-theoretic algorithms, Lecture notes, University of Waterloo, 2005.

[5] Burgess, P.：Axioms for tense logic II. Time periods, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 23, (1982), pp. 375–383.

[6] Carnielli, W. and Pizzi, C.: Modalities and Multimodalities, *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, Vol. 12, Springer, 2008.

[7] Gabbay, D., Kurucz, A., Wolter, F. and Zakharyaschev, M.: *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*, Elsevier, 2003.

[8] Goldblatt, R.：*Logics of Time and Computation*, 2nd Edition, CLSI Lecture Note No. 7, Center for the Study of Language and Information, Stanford University, 1992.

[9] Goranko, V., Montanari, A. and Sciavicco, G.：A Road Map of Propositional Interval Temporal Logics and Duration Calculi, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, Special issue on Interval Temporal Logics and Duration Calculi, Vol. 14, No. 1–2(2004), pp. 11–56.

[10] Harel, D., Kozen, Z. and Parikh, R.：Process logic: expressiveness, decidability, completeness, in *Proc. of the 21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (*FOCS '80*), 1980, pp. 129–142.

[11] Halpern, J. and Shoham, Y.：A propositional modal logic of time intervals, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 38 (1991), pp. 935–962.

[12] Hussain, A.：A New Modal Approach to the Logic of Intervals, *Journal of Logic and Computation*, Vol. 17, No. 2(2007), pp. 221–254.

[13] Koga, T. and Tojo, S.:Tense and Aspect in Polymodal Interval Temporal Logic, in *Proceedings of the. Eighth International Conference on Computational Semantics* (*IWCS-7*), 2007, pp. 89–99.

[14] Konur, S.：An interval logic for natural language semantics, *Advances in Modal Logic,* Vol. 7(2008), pp. 177–191.

[15] Kracht, M. and Wolter, F.：Properties of independently axiomatizable bimodal logics, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 56(1991), pp. 1469–1485.

[16] Leith, M. and Cunningham, J.：Aspect and interval tense logic, *Linguistics and Philosophy*, Vol. 24(2001), pp. 331–381.

[17] 丸山晃生, 東条敏, 小野寛晰：マルチエージェント・モデルのための時相認識論理とその効率的な証明探索手続き, コンピュータソフトウェア, Vol. 20, No. 1(2001), pp. 51–65.

[18] Maruyama, A.：Towards Combined Systems of Modal Logics—a syntactic and semantic study, *Dissertation*, JAIST, 2003.

[19] Mckinsey, J. and Tarski, A.: The algebra of topology, *Annals of Mathematics*, Vol. 45(1944), pp. 141–191.

[20] Parikh, R.：A decidability result for a second order process logic, in *Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (*FOCS '78*), 1978, pp. 177–183.

[21] Pratt, R.：Process logic: preliminary report, in *Proc. of the 6th Annual Symposium on the Principles of Programming Languages* (*POPL '79*), 1979, pp. 93–100.

[22] Prior, A.：*Past, Present and Future*, Clarendon Press, Oxford, 1967.

[23] Shoham, Y.：*Reasoning about Change*, MIT Press, 1988.

[24] Tojo, S.：Multi-dimensional temporal logic for events and states, in *Inference in Computational Semantics* (*ICoS-5*), 2006.

[25] Venema, Y.：Expressiveness and completeness of an interval tense logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 31(1990), pp. 529–547.

[26] Venema, Y.:Temporal logic, *The Blackwell guide to philosophical logic*, Goble, L.(ed.), Blackwell publishers, Malden, 2001, pp. 203–223.

[27] 吉岡卓, 東条敏：時制と時区間を表現する複様相論理とその決定可能性, 人工知能学会論文誌, Vol. 23, No. 3(2006), pp. 257–265.

[28] Øhstrøm, P. and Hasle, P.：*Temporal Logic*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

古賀たかし

2006 年北陸先端科学技術大学院大学知識科学研究科博士前期課程修了．2010 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程単位取得退学．現在，人工知能の論理の研究に従事．

佐野勝彦

2000 年京都大学文学部人文学科卒業, 2003 年京都大学大学院文学研究科修士課程修了．京都大学博士 (文学)．日本学術振興会特別研究員，アムステルダム大学 ILLC 客員研究員 (2009)，レスター大学客員研究員 (2009) を経て，2011 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教．様相論理を中心とした非古典論理の意味論・証明論研究，および，論理学の自然言語・法律への応用への研究に従事.

東条　敏

1981 年東京大学工学部計数工学科卒業，1983 年東京大学大学院工学系研究科修士課程修了．博士 (工学). 1983–1995 年三菱総合研究所，1995 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授，2000 年同教授．自然言語の形式意味論および人工知能の論理，進化言語学，楽譜の文法解析の研究に従事．情報処理学会，人工知能学会，ソフトウェア科学会，言語処理学会，認知科学会各会員.