

Title	超多自由度マニピュレータの実形状とその動的制御に関する研究
Author(s)	楠本, 淑夫
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1244
Rights	
Description	Supervisor: 藤田 政之, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

**超多自由度マニピュレータの実形状とその動的制御に関する
研究**

指導教官 藤田政之 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

楠本淑夫

1999 年 2 月 15 日

要 旨

超多自由度マニピュレータは多くの自由度をもつロボットマニピュレータであり，豊富な自由度を活用した高度な作業達成が期待できる．このような高度な作業達成には手先だけでなくマニピュレータの全体を使うために，ダイナミクスを考慮して超多自由度マニピュレータの形状を動的に制御する必要がある．従来の超多自由度マニピュレータの形状制御では，形状を表現する際に空間曲線が用いられていた．しかし，空間曲線は，接線方向まわりの捻れがないため，超多自由度マニピュレータのリンクの長さ方向まわりの回転を表さず，マニピュレータの形状を完全に記述しない．そのために，この形状の不完全な記述が超多自由度マニピュレータの形状の制御において種々の問題点を生じさせる．そこで本稿では実際の超多自由度マニピュレータの持つ形を実形状と呼び，実形状の数学的表現を与える．その上で超多自由度マニピュレータの実形状の制御則を提案する．

目次

1 はじめに	1
1.1 本研究の動機と背景	1
1.2 従来の研究	2
1.3 本研究の目的	3
1.4 構成	3
2 曲線とマニピュレータ	4
2.1 実形状について	4
2.2 マニピュレータのモデル	7
2.2.1 動力学	13
2.3 実形状を表す拡張曲線	14
2.3.1 パラメトリックな空間曲線と Frenet-Serret の公式	14
2.3.2 拡張 Frenet-Serret の公式	15
2.3.3 拡張空間曲線	16
2.4 まとめ	18
3 実形状の一致	19
3.1 超多自由度マニピュレータの実形状と拡張空間曲線の関係	19
3.2 実形状ヤコビアン	24
3.3 実形状逆問題の解の存在領域	29
3.4 時間によって変化する拡張空間曲線への拡張	30
3.5 まとめ	32

4	実形状レギュレーション	33
4.1	問題設定	33
4.2	制御目標と曲線パラメータの推定	35
4.3	曲線パラメータ推定に基づく実形状レギュレーション	35
4.4	曲線パラメータ推定則の幾何学的解釈	38
4.5	レギュレーション制御則の再帰的表現	39
4.6	シミュレーション	42
4.7	まとめ	42
5	実形状トラッキング	45
5.1	問題の定式化	45
5.2	2次の曲線パラメータの推定	47
5.3	曲線パラメータ推定に基づく実形状トラッキング	48
5.3.1	Inverse-dynamics-based 実形状トラッキング	48
5.3.2	ID-based 実形状トラッキング制御則の再帰的表現	50
5.3.3	リアプノフベース実形状トラッキング	54
5.3.4	Lyapunov-based 実形状トラッキング制御則の再帰的な表現	56
5.4	まとめ	58
6	おわりに	59

第 1 章

はじめに

1.1 本研究の動機と背景

現在，社会構造の急速な変化に伴い，その社会を豊かにする科学技術の中で，ロボティクスは重要な役割を果たしている．ロボティクスの技術は，生産性および品質性の向上，熟練労働者の不足の解決，労働福祉との向上，そして極限環境における作業やエンターテインメント産業への応用等に必要とされ，また実際に使われている．このような環境の中で，ロボティクス技術の基盤を与える重要な役割を担うロボットマニピュレータにも高い性能が求められる．

例えば，一つのマニピュレータで多くの作業が可能であるといった汎用性，融通性が上げられる．多種小量生産では，それぞれの種類に応じてロボットマニピュレータを使い分けて作業を行なうことはコストがかかる．この場合に様々な作業を達成する性能を持つマニピュレータが必要である．この汎用性，融通性を測る重要な指標の一つが運動学的自由度である．手先効果器が 3 次元空間において自由な位置と姿勢を持つには，最低 6 つの自由度が必要である．この自由度を増加させると，手先効果器のみならずマニピュレータのアームの形を作ることが可能になる．このため，手先効果器による作業のみならず多くの自由度を活かしたマニピュレータの全体を使った新しい作業が期待できる．人間の指，腕のように物を指全体で扱って物を掴む作業，物を支える作業，物を押し退ける作業などである．具体的には，医療福祉分野などでは，人を抱きかかえる作業，クッションとなり補助する作業が期待できる．このように通常のマニピュレータと異なり作業達成するのに手先のみならず，マニピュレータの全体を使った作業達成が期待できるマニピュレータを

超多自由度マニピュレータと呼ぶ。本研究の動機は、多くの自由度を持つマニピュレータの有効性とその多種多様な作業達成の可能性に由来する。

1.2 従来の研究

この超多自由度マニピュレータが主として行なう作業、具体的には、抱き抱える、押し退ける、はたく、クッションの役割を果たすといった概念は Whole Arm Manipulation として 1987 年に Salisbury が提唱した [4]。それから、作業環境とマニピュレータの間の力の制御について、おおくの研究がなされた。しかしそのマニピュレーションのメカニズムについては長年明らかにされていなかった。

これに対して、Chirikjian, Burdick や望山らがマニピュレータの全体の形の制御の研究を試みた。彼らはマニピュレータを制御する際に、そのマニピュレータの巨視的に見た形を空間曲線とみなし、これを利用した。この空間曲線のマニピュレータへの利用は Variable Geometry Truss Manipulator の研究にみられ、与えられた曲線を満足するようなマニピュレータのコンフィギュレーションを決定する逆運動学的な手法であった。つまり、マニピュレータが空間曲線に合わせられるように、始めに与えられた作業条件を満足する曲線を導き出す方法であった。しかし、彼らはモデルベースド法で、与えられた曲線にマニピュレータを合わせる方法で行なった。

望山らはダイナミクスを考慮にいれたシリアルリジッド型の超多自由度マニピュレータの形状制御を提案し、そのマニピュレーションのメカニズムの基礎を与えた。彼らは制御目標を表す際に、3次元空間上にパラメトリックな空間曲線を与え、制御目標であるを推定する目標曲線パラメータ推定のアイデアを取り入れることで、ダイナミクスを考慮した動的形状制御に成功した。しかし目標形状を空間曲線で表現したため、超多自由度マニピュレータの長さ方向のねじれの情報が欠如していた。[1]

一方 Chirikjian と Burdick は、マニピュレータの長さ方向のねじれ、伸び縮みを考慮した超多自由度マニピュレータのより一般的な運動学を構築した。しかし、マニピュレータの全体で作業を行なっておらず、手先のみでの作業達成であった。また扱った対象が平行型のマニピュレータであったため、その機構の複雑さから、マニピュレータのダイナミクスを考慮にいれて統一的な枠組を確立するまでには至らなかった。[2]

1.3 本研究の目的

超多自由度マニピュレータは複雑な障害物回避や巻き付き把持作業など豊富な自由度を活用した高度な作業達成を行なうために作業達成には手先だけでなくマニピュレータの全体を使う。そのために、ダイナミクスを考慮して超多自由度マニピュレータの形状を制御する必要がある。従来の超多自由度マニピュレータの形状制御では、形状を表現する際に空間曲線が用いられていた。

しかし、実際の超多自由度マニピュレータはリンクの長さ方向まわりの回転を持っているが、空間曲線はこれを記述していない。そのために、この不完全な記述が超多自由度マニピュレータの形状の制御において種々の問題点を生じさせる。そこで本研究は実際の超多自由度マニピュレータの持つ形を実形状と呼び、Chirikjian と Burdick の超多自由度マニピュレータの運動学を土台として、実形状とは何かを考え、望山らが行なった動的形状制御の拡張を行なう。その上で実形状の動的制御の原理を解明する。

1.4 構成

2 章で、空間曲線と制御対象である超多自由度マニピュレータの運動学と動力学について示す。3 章では、超多自由度マニピュレータの実形状と目標実形状として与える空間曲線との関係について述べる。4 章で目標実形状として与えられた時不変な空間曲線に一致させる実形状レギュレーション制御則を、曲線パラメータ推定の考えを取り入れて示す。5 章では、目標実形状が時変な空間曲線の場合について 4 章まで行なってきたことを拡張し、2つの実形状トラッキング制御則を与える。

第 2 章

曲線とマニピュレータ

この章では超多自由度マニピュレータの持つ「形」について考え、超多自由度マニピュレータの実形状を定義する。超多自由度マニピュレータの実形状制御の制御対象である超多自由度マニピュレータの機構について示す。つぎに、制御目標として与える超多自由度マニピュレータの実形状の表現について考える。2.1 節では超多自由度マニピュレータの持つ形について考え、実形状の必要性を明らかにする。2.2 節で超多自由度マニピュレータのモデルである運動学と動力学を示す。2.3 節において、超多自由度マニピュレータの実形状の数学的表現について説明する。空間曲線のパラメータ表示を拡張した形で表せる。この表現と幾何的な量との関係を表す Frenet-Serret の公式を拡張した拡張 Frenet-Serret の公式を示す。

2.1 実形状について

超多自由度マニピュレータの特徴は多くの自由度を持ち、この自由度を活かしたマニピュレータの全体で作業を行なうことである。マニピュレータの全体で作業を行なうため、超多自由度マニピュレータの全体の形を制御する必要がある。従来、超多自由度マニピュレータの持つ形を制御する際に、リンク（関節）の位置の制御のみであり不十分であった。その不十分さのため、超多自由度マニピュレータの作業を考える場合に、望ましくない場合が生じる。複雑な障害物回避作業を例にあげると、あるリンクが図 2.1 の○で囲ってある状態、つまり、リンクが障害物に対して衝突状態にあると作業達成に不都合である。これを図 2.2 のように超多自由度マニピュレータの形状を変えずにリンクの長さ方

向まわりの回転を陽に制御することが可能ならば、この作業が遂行できる。その他、各々のリンクに取り付けるセンサーの位置により、同じ形状を保ちながらリンクの向きを変える必要性が生じるときもある。例えば、巻き付き把持作業のとき力センサーがこれから掴もうとしている物体の方向へ向いてなければならない。これを踏まえると、超多自由度マニピュレータのリンクの長さ方向回りの回転も制御する必要がある。本論文では、超多自由度マニピュレータが持つ形を制御するにあたり、そのマニピュレータの持つ形はマニピュレータのリンクの長さ方向回りの回転とリンクの位置から成ると考え、その形を「実形状」と呼ぶ。実形状を従来の超多自由度マニピュレータのリンク位置から成る形、すなわち、「形状」と区別する。

実形状を制御するに際し、望ましい実形状を持つことが可能な超多自由度マニピュレータとその実形状を表す表現が必要である。本論文で扱う超多自由度マニピュレータは3自由度関節を持つマニピュレータである。この理由は2自由度マニピュレータでは関節の位置に従属してマニピュレータのリンクの長さ方向回りの回転量が一意に固定され、マニピュレータのリンクの長さ方向回りの回転量を陽に制御できず、超多自由度マニピュレータの全体を使った作業に悪い影響を与えるからである。制御目標として与える超多自由度マニピュレータの実形状の表現はパラメトリックな空間曲線を拡張した曲線を使用する。この曲線上の点がマニピュレータの関節の位置を表し、また曲線上に割り振られる座標系がマニピュレータのマニピュレータのリンクの向きを表す。これから制御対象である3自由度関節を持つ超多自由度マニピュレータと目標として与える超多自由度マニピュレータの実形状を表す曲線について示す。

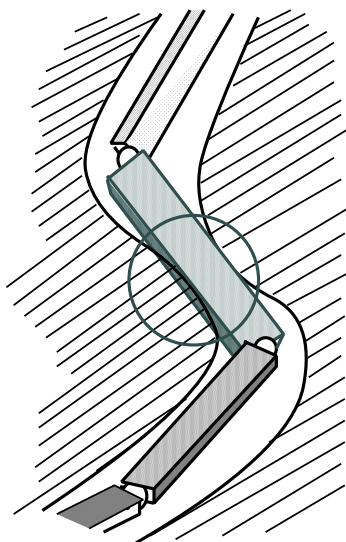


図 2.1: 障害物回避作業における不適切なリンクの形

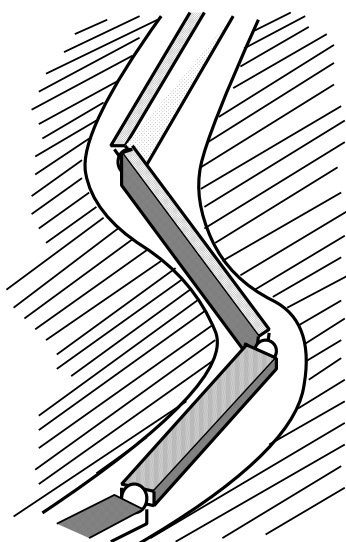


図 2.2: 障害物回避作業における適切なリンクの形

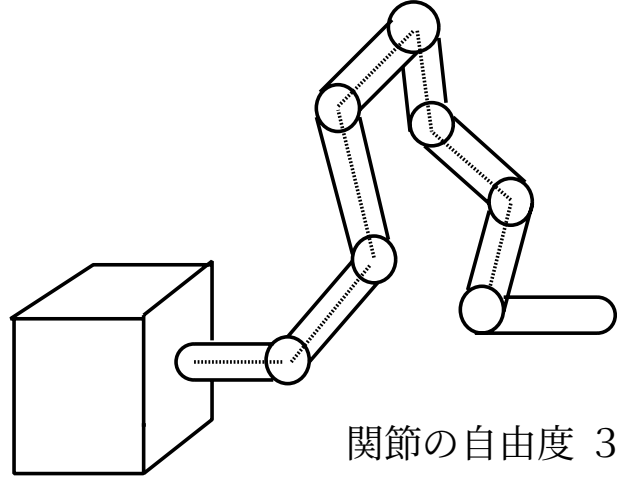


図 2.3: 超多自由度マニピュレータ

2.2 マニピュレータのモデル

制御対象である超多自由度マニピュレータについて運動学と動力学について示す．本論文では 3 自由度関節を有する超多自由度マニピュレータを扱う．はじめに，超多自由度マニピュレータの運動学を示し，その後に動力学を示す．

超多自由度マニピュレータの運動学

$n + 1$ 個の剛体と n 個の 3 自由度関節について考える．超多自由度マニピュレータの全体図は図 2.3 に示す．以下に示すように，座標系をすべての剛体と関節に取り付け，関節と剛体を取り付ける．1～2 は超多自由度マニピュレータのリンクについて，3～5 は関節について，6～7 でそのリンクと関節の関係を示す．

1. i 番目の剛体に対して， $\mathbf{p}_{t,i}$ を前の $i - 1$ 番目の剛体につなぐ点， $\mathbf{p}_{h,i}$ を後の $i + 1$ 番目の剛体につなぐ点とする． $\mathbf{l}_i$ を $\mathbf{p}_{t,i}$ と $\mathbf{p}_{h,i}$ を通る線とする．正の定数 l_i をこれらの 2 つの点の距離として定義し，これを「リンクの長さ」と呼ぶ．2.4
2. 座標系 $\Phi_i \in SO(3)$ を i 番目の剛体の $\mathbf{p}_{h,i}$ に取り付ける．その取り付けた点を「リンク位置」と呼び $\mathbf{p}_i$ とする．座標系を取り付ける際に直線 $\mathbf{l}_i$ に x 軸が重なるように置く．この方法で置くと座標系が一意に決まらないため， Φ'_i をその座標系の一つと

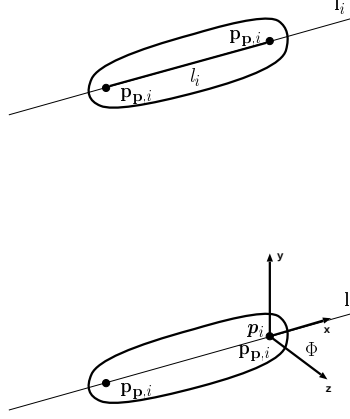


図 2.4: link

すると、 Φ_i は次のように表せる.

$$\Phi_i = \Phi'_i R(e_x, \alpha_i) \quad (2.1)$$

ここで $e_x := [1 \ 0 \ 0]^T$ を x 方向の単位ベクトルとする. $\alpha_i \in (-\pi \ \pi]$ は実定数とし $R(a, \theta) \in SO(3)$ は単位軸 $a \in E^3$ についてラジアン量で表される $\theta \in (-\pi \ \pi]$ だけの回転を記す.

3. i 番目の関節に対して, 3つの回転軸がある. 前の $i-1$ 番目の関節と結合する軸を「副軸」, 次の $i+1$ 番目の関節に結合する軸を「主軸」と呼び, これらの軸を $\mathbf{l}_{t,i}$ と $\mathbf{l}_{h,i}$ と一致するようにする. さらに $\mathbf{p}_i$ を2つの直線が交差する点とする. また, その点 $\mathbf{p}_i$ を通り, 主軸と副軸に垂直で次の $i+1$ 番目の関節に結合する軸を「補軸」と呼び, $\mathbf{l}_{r,i}$ とする. 2.5
4. 各々の座標系 $\Phi_{s,i} \in SO(3)$ の z 軸が $\mathbf{l}_{t,i}$ に, $\Phi_{m,i} \in SO(3)$ の z 軸が $\mathbf{l}_{h,i}$ と, また, $\Phi_{r,i} \in SO(3)$ の z 軸が $\mathbf{l}_{r,i}$ と一致するように, i 番目のジョイントとしてその座標系を $\mathbf{p}_i$ に取り付ける. またリンクの座標系の設置と同じようにこの場合も座標系の取り付け方は一意ではない. それで, 前の座標系の設置と同じように, ある一つの座標系を $\Phi'_{s,i}, \Phi'_{m,i}, \Phi'_{r,i}$ とし, そのとき, $\Phi_{s,i}, \Phi_{m,i}, \Phi_{r,i}$ を次のように表す.

$$\Phi_{s,i} = \Phi'_{s,i} R(e_z, \beta_i) \quad (2.2)$$

$$\Phi_{m,i} = \Phi'_{m,i} R(e_z, \gamma_i) \quad (2.3)$$

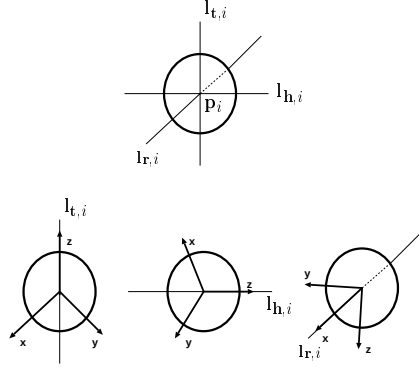


図 2.5: joint

$$\Phi_{r,i} = \Phi'_{r,i} R(e_z, d_i) \quad (2.4)$$

ここで, $e_z := [0 \ 0 \ 1]^T$ であり, z 軸方向の単位ベクトルである. また, $\beta_i, \gamma_i, d_i \in (-\pi \ \pi]$ は実定数である. $\theta_{s,i}, \theta_{m,i}, \theta_{r,i} \in (-\pi \ \pi]$ は $\Phi_{s,i}$ と $\Phi_{m,i}, \theta_{r,i}$ の z 軸を中心とした回転角度回転角度とする.

5. Q'_i, Q''_i を次のように定義する.

$$\Phi'_{m,i} = \Phi_{s,i} R(e_z, \theta_{s,i}) Q'_i \quad (2.5)$$

$$\Phi'_{r,i} = \Phi_{m,i} R(e_z, \theta_{m,i}) Q''_i \quad (2.6)$$

これらの定数の行列 Q'_i, Q''_i は 3 自由度の 3 つの軸の関係を示している.

6. $i-1$ 番目の剛体と i 番目の剛体を i 番目の関節でつなげる. このとき, $i-1$ 番目の剛体の $p_{h,i-1}$ と i 番目の剛体の $p_{t,i}$ と i 番目の関節の p_i が一致するようにする. 2.6

7. $Q'_{s,i}, Q'_{r,i}$ を次のように定義する.

$$\Phi'_{s,i} = \Phi'_{i-1} Q'_{s,i} \quad (2.7)$$

$$\Phi'_i = \Phi'_{r,i} R(e_z, \theta_{r,i}) Q'_{r,i} \quad (2.8)$$

これらの定数の行列は剛体と関節の間をつなぐ方法を示している.

上に示した座標系の設定で, 隣合うリンクの座標系の関係は次のように表せる.

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} R_{J,i} \quad (2.9)$$

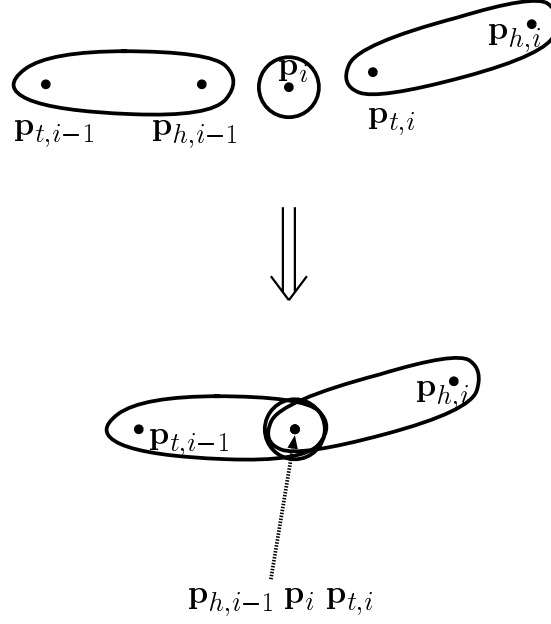


図 2.6: link と joint の結合

行列 $\mathbf{R}_{J,i} \in SO(3)$ は次のように定義される 3 自由度の回転動作を表す.

$$\mathbf{R}_{J,i} := \mathbf{Q}_{s,i} \mathbf{R}(e_z, \theta_{s,i}) \mathbf{Q}_{i1} \mathbf{R}(e_z, \theta_{m,i}) \mathbf{Q}_{i2} \mathbf{R}(e_z, \theta_{r,i}) \mathbf{Q}_{r,i} \quad (2.10)$$

ここで $\mathbf{Q}_{s,i}$, $\mathbf{Q}_{i1}$, $\mathbf{Q}_{i2}$, $\mathbf{Q}_{r,i}$ は

$$\mathbf{Q}_{s,i} = \mathbf{R}^T(e_z, \alpha_{i-1}) \mathbf{Q}'_{s,i} \mathbf{R}(e_z, \beta_i) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Q}_{i1} = \mathbf{Q}'_i \mathbf{R}(e_z, \gamma_i) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{Q}_{i2} = \mathbf{Q}''_i \mathbf{R}(e_z, d_i) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{Q}_{r,i} = \mathbf{Q}'_{r,i} \mathbf{R}(e_z, \alpha_i) \quad (2.14)$$

である. 定数 α, β, γ, d は座標系の設定によって決まり, マニピュレータの機構とは独立している. マニピュレータの機構は $\mathbf{Q}'_{s,i}$, $\mathbf{Q}'_i$, $\mathbf{Q}''_i$, $\mathbf{Q}'_{r,i}$ に反映する.

隣合うリンクの位置の関係は次のように表現される.

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} + l_i \Phi_i \mathbf{e}_x \quad (2.15)$$

参照形状

前に示した $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, d_i$ で座標系は任意に決められる．ここでは必要でない任意性を無くすために調整を行なう．直線は最も基本的な曲線である．参照するための基準となるマニピュレータの形状を表す曲線が直線であるとする．また，これは $\tau(\sigma) = 0, \kappa(\sigma) = 0, \vartheta(\sigma) = 0$ となる曲線として定義される．このことは次のことを意味する．

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{R} \quad \Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_2) \quad (2.16)$$

超多自由度マニピュレータの形状も同じように，マニピュレータの形状が直線状であるとき，次のようにリンク座標系を表現する．

$$\Phi_i = \Phi_{i+1} \quad (2.17)$$

ここで，マニピュレータの形状が直線状であるとき，すべての i に対して， $\theta_{s,i} = \theta_{m,i} = \theta_{r,i} = 0$ であるとし，これを参照コンフィギュレーションとして定義する．(2.9) より，参照コンフィギュレーションは $\mathbf{R}_{J,i} = \mathbf{I}_3$ となる．また，(2.10) と $\mathbf{R}(\cdot, 0) = \mathbf{I}_3$ から次のことがいえる．

$$\forall i \in 1, \dots, n \quad \mathbf{Q}_{s,i} \mathbf{Q}_{i1} \mathbf{Q}_{i2} \mathbf{Q}_{r,i} = \mathbf{I}_3 \quad (2.18)$$

となる．つまり，参照コンフィギュレーションは

$$\mathbf{R}_{J,i} = \mathbf{Q}_{s,i} \mathbf{Q}_{i1} \mathbf{Q}_{i2} \mathbf{Q}_{r,i} = \mathbf{I}_3 \quad (2.19)$$

逆に，式 (2.18) が成り立つすると，この式から

$$\mathbf{Q}_{i1} = \mathbf{Q}_{s,i}^T \mathbf{Q}_{r,i}^T \mathbf{Q}_{i2}^T \quad (2.20)$$

したがって $\mathbf{R}_{J,i}$ は (2.10) より次のようになる．

$$\mathbf{R}_{J,i} = \mathbf{R}(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) \mathbf{R}(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) \mathbf{R}(\mathbf{a}_{r,i}, \theta_{r,i}) \quad (2.21)$$

ここで

$$\mathbf{a}_{s,i} = \mathbf{Q}_{s,i} \mathbf{e}_z \quad (2.22)$$

$$\mathbf{a}_{m,i} = \mathbf{Q}_{r,i}^T \mathbf{Q}_{i2}^T \mathbf{e}_z \quad (2.23)$$

$$\mathbf{a}_{r,i} = \mathbf{Q}_{r,i}^T \mathbf{e}_z. \quad (2.24)$$

$R_{J,i} = R(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) R(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) R(\mathbf{a}_{r,i}, \theta_{r,i})$ は、それぞれ、 $\mathbf{a}_{s,i}$, $\mathbf{a}_{m,i}$, $\mathbf{a}_{r,i}$ の軸回りの 1 自由度の回転の積で表され、 $\mathbf{a}_{s,i}$, $\mathbf{a}_{m,i}$, $\mathbf{a}_{r,i}$ はマニピュレータの運動学的な構造を完全に規定する。

微分運動学

関節関数は時間の関数とする。つまり、 $\theta_{s,i}(t)$ $\theta_{m,i}(t)$ $\theta_{r,i}(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow (-\pi \pi]$ で i 番目の関節の主軸、副軸、補軸を回転軸とした回転角度である。その時に、 i 番目のリンク座標系の時間微分は次のように表せる。

$$\dot{\Phi}_i = [\omega_i \times] \Phi_i \quad (2.25)$$

ここで、 $\omega \in \mathbb{R}^3$ は i リンクの角速度で次のように定義される。

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \Phi_{i-1} \mathbf{a}_{s,i} \dot{\theta}_{s,i} + \Phi_{i-1} R(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) \mathbf{a}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i} \Phi_i \mathbf{a}_{r,i} \dot{\theta}_{r,i} \quad (2.26)$$

Φ_i から見た i リンクの角速度は、両辺に左から Φ_i^T を掛けると、次のようになる。

$${}^i\omega_i = R_{J,i}^T \left\{ {}^{i-1}\omega_{i-1} + \mathbf{a}_{s,i} \dot{\theta}_{s,i} + R(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) \mathbf{a}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i} \right\} + \mathbf{a}_{r,i} \dot{\theta}_{r,i} \quad (2.27)$$

また i リンクの角加速度 $\dot{\omega}_i \in \mathbb{R}^3$ は

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i &= \dot{\omega}_{i-1} + [\omega_{i-1} \times] \Phi_{i-1} \mathbf{a}_{s,i} \dot{\theta}_{s,i} + \Phi_{i-1} \mathbf{a}_{s,i} \ddot{\theta}_{s,i} \\ &+ [\omega_{i-1} \times] \Phi_{i-1} R(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) \mathbf{a}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i} + \Phi_{i-1} \dot{R}(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) \mathbf{a}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i} + \Phi_{i-1} R(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) \mathbf{a}_{m,i} \ddot{\theta}_{m,i} \\ &+ [\omega_i \times] \Phi_i \mathbf{a}_{r,i} \dot{\theta}_{r,i} + \Phi_i \mathbf{a}_{r,i} \ddot{\theta}_{r,i} \end{aligned} \quad (2.28)$$

となり、同様に、 Φ_i から見た i リンクの角加速度は以下の式で表せる。

$$\begin{aligned} {}^i\dot{\omega}_i &= R_{J,i}^T \left\{ {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + [{}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} \times] \mathbf{a}_{s,i} \dot{\theta}_{s,i} + \mathbf{a}_{s,i} \ddot{\theta}_{s,i} \right. \\ &+ [{}^{i-1}\omega_{i-1} \times] R(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) \mathbf{a}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i} + \dot{R}(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) \mathbf{a}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i} + R(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) \mathbf{a}_{m,i} \ddot{\theta}_{m,i} \left. \right\} \\ &+ [{}^i\omega_i \times] \mathbf{a}_{r,i} \dot{\theta}_{r,i} + \mathbf{a}_{r,i} \ddot{\theta}_{r,i} \end{aligned} \quad (2.29)$$

i 番目のリンク位置の速度と加速度、 Φ_i から見た i 番目のリンク位置の速度、加速度は次のように表せる。

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + l_i [\omega_i|_{\theta_{r,i}=0} \times] \Phi_i \mathbf{e}_x \quad (2.30)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_i = \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + l_i [\dot{\omega}_i|_{\theta_{r,i}=0} \times] \Phi_i \mathbf{e}_x + l_i [\omega_i|_{\theta_{r,i}=0} \times] [\omega_i|_{\theta_{r,i}=0} \times] \Phi_i \mathbf{e}_x \quad (2.31)$$

$${}^i\dot{\mathbf{p}}_i = R_{J,i}^T {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}}_{i-1} + l_i [{}^i\omega_i|_{\theta_{r,i}=0} \times] \mathbf{e}_x \quad (2.32)$$

$${}^i\ddot{\mathbf{p}}_i = R_{J,i}^T {}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + l_i [{}^i\dot{\omega}_i|_{\theta_{r,i}=0} \times] \mathbf{e}_x + l_i [{}^i\omega_i|_{\theta_{r,i}=0} \times] [{}^i\omega_i|_{\theta_{r,i}=0} \times] \mathbf{e}_x \quad (2.33)$$

2.2.1 動力学

Lagrange の公式

第 i 番目の関節が持つ各々の軸の回転角度をまとめた角度ベクトルを $\theta_i := [\theta_{s,i} \theta_{m,i} \theta_{r,i}] \in \mathbb{R}^3$ として, θ を $\theta := [\theta_1^T \cdots \theta_n^T] \in \mathbb{R}^{3n}$ と定義する. 各々の i 番目の 3 自由度関節のトルク $u_{m,i} \ u_{s,i} \ u_{r,i} \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, n)$ 加えられるとする. $3n$ 自由度の関節のマニピュレータのダイナミクスは次のように表現される.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) = u \quad (2.34)$$

ここで, $u = [u_1^T \cdots u_n^T]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ を制御入力トルクベクトルとする. ただし, $u_i := [u_{m,i} \ u_{s,i} \ u_{r,i}]^T$ $M(\theta) \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ は慣性行列, $C(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ は遠心力, コリオリを表す行列 $g(\theta) \in \mathbb{R}^{3n}$ 重力に関するトルクを表す. ここでは, 摩擦にたいするトルクはないとする.

性質 1 (マニピュレータのダイナミクス)

1. 任意の θ に対して $\|M(\theta)\|$ は正定対称行列である.
2. 任意の $\theta, \dot{\theta}$ に対して, $\dot{M}(\theta, \dot{\theta}) - 2C(\theta, \dot{\theta})$ は歪み対称行列である.

Newton-Euler の公式

i 番目のリンクの質量を m_i , 質量中心を r_i , 慣性テンソルを I_i とする. また i 番目の質量中心の位置を以下の式で表す.

$$p_{c,i} := p_{i-1} + r_i \quad (2.35)$$

Newton-Euler の公式は次の式で与えられる.

$$f_i = m_i \ddot{p}_{c,i} + f_{i+1} \quad (2.36)$$

$$n_i = I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i) + r_i \times (m_i \ddot{p}_{c,i}) + (l_i \Phi_i e_x) \times f_{i+1} + n_{i+1} \quad (2.37)$$

ここで, $f_i, n_i \in E^3$ は i 番目のリンクに加えられる力とモーメントである. 上式の各々の式の両辺に Φ^T を左から掛けて i 番目の座標系に関する式に変換すると以下ようになる.

$${}^i p_{c,i} := R_{J,i}^T {}^{i-1} p_{i-1} + {}^i r_i \quad (2.38)$$

$${}^i f_i = m_i {}^i \ddot{p}_{c,i} + {}^{i+1} f_{i+1} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} {}^i n_i &= {}^i I_i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times ({}^i I_i \omega_i) + {}^i r_i \times (m_i {}^i \ddot{p}_{c,i}) + l_i e_x \times (R_{w,i+1} {}^{i+1} f_{i+1}) \\ &\quad + R_{w,i+1} {}^{i+1} n_{i+1} \end{aligned} \quad (2.40)$$

また, $\mathbf{u}_i = [u_{s,i} \ u_{m,i} \ u_{r,i}]^T \in \mathbb{R}^2$ を 3 自由度関節に与えられるトルクとすると, 次のように表すことが出来る.

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_i^T \Phi_i^T \mathbf{n}_i \quad (2.41)$$

ここで, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は次のように定義される.

$$\mathbf{A}_i := \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{J,i}^T \mathbf{a}_{s,i} & \mathbf{R}_{J,i}^T \mathbf{R}(\mathbf{a}_{s,i}, \theta_{s,i}) \mathbf{a}_{m,i} & \mathbf{R}_{J,i}^T \mathbf{a}_{r,i-1} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

2.3 実形状を表す拡張曲線

この節で制御目標となる超多自由度マニピュレータの実形状を表す表現について説明する. 超多自由度マニピュレータの実形状はマニピュレータのリンクの長さ方向回りの回転とリンクの位置 (関節の位置) から成るため, この情報を含まなければならない. その情報を含んだ表現について考える.

超多自由度マニピュレータの実形状を表す空間曲線を拡張した表現, すなわち, 拡張曲線を示す. 空間曲線を拡張する理由はすでに曲線は超多自由度マニピュレータのリンクの位置の情報を持っているからである. この曲線による表現を活かし, マニピュレータのリンクの長さ方向まわりの回転の情報を加え拡張曲線を作る. まずパラメトリックな空間曲線とその空間曲線の幾何学的な量, 曲率・捻率の関係を表す Frenet-Serret の公式を示す. つぎに新たに幾何的な量「捻れ」を曲線に加えた拡張曲線について示し, その拡張曲線の意味について述べる.

2.3.1 パラメトリックな空間曲線と Frenet-Serret の公式

$\mathbb{R}^3$ のパラメトリックな空間曲線は次のように与えられる.

$$\mathbf{c}(\sigma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.43)$$

ここで, $\sigma \in \mathbb{R}$ は曲線パラメータと呼ばれる. また, この曲線の長さが

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma} \cdot \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} d\sigma \quad (2.44)$$

となるように σ で正規化されている. これは $\| \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma} \| = 1$ であることを意味する. この σ でパラメータ化された曲線と曲線の曲がり具合や曲線の捻れ具合を表す幾何的な量, 曲率

捻率との関係を表すのが Frenet-Serret の公式である．これを以下に示す．

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma) = \mathbf{\Phi}(\sigma)\mathbf{e}_x \quad (2.45)$$

$$\frac{d\mathbf{\Phi}}{d\sigma}(\sigma) = \mathbf{\Phi}(\sigma)[\mathbf{w}(\sigma)\times] \quad (2.46)$$

$$\mathbf{w}(\sigma) := \begin{bmatrix} \tau(\sigma) \\ 0 \\ \kappa(\sigma) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

ここで， $\mathbf{\Phi}(\sigma) \in SO(3)$ は Frenet 標構とよばれる曲線上の各点で定義される座標系， $\kappa : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$ ， $\tau : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ は各々曲線の曲率，捻率である．また， $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T \in \mathfrak{R}^3$ に対して， $[\mathbf{a}\times]$ は

$$[\mathbf{a}\times] := \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Frenet 標構は 2 つの曲線の表し方，すなわち， σ による曲線のパラメータ化表示と曲率・捻率による曲線の表示の関係を結び付け，1 つの曲線に一意に決まる．

2.3.2 拡張 Frenet-Serret の公式

空間曲線に新たに一つのパラメータを組み込むことで，次元をあげてリンク座標系を陽に与えるようにする．曲線上の各々の点での接線ベクトルを軸にした回転量 $\vartheta(\sigma)$ を新たに与える．そこで次のように修正し拡張する．

$$\mathbf{\Phi}_M = R\left(\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}, \vartheta(\sigma)\right)\mathbf{\Phi}$$

ここで $R(\bar{v}, \alpha)$ はベクトル $\bar{v}$ について左回りの角度 α だけの回転で， $\bar{e}_i : \mathbf{R}^3$ の i 番目の基底ベクトルとする． $\mathbf{\Phi}_M$ は拡張 Frenet 標構という．これが曲率と捻率といった従来の幾何的な量に曲線の長さ方向の捻れを加えた幾何的な量とパラメトリックな空間曲線との間の関係を示す．その関係を表す式を以下に示す．

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma) = R^T\left(\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}, \vartheta(\sigma)\right)\mathbf{\Phi}_M(\sigma)\mathbf{e}_x \quad (2.49)$$

$$\frac{dR^T\left(\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}, \vartheta(\sigma)\right)\mathbf{\Phi}_M(\sigma)}{d\sigma} = R^T\left(\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}, \vartheta(\sigma)\right)\mathbf{\Phi}_M[\mathbf{w}(\sigma)\times] \quad (2.50)$$

$$\boldsymbol{w}(\sigma) := \begin{bmatrix} \tau(\sigma) \\ 0 \\ \kappa(\sigma) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

上式を拡張 Frenet-Serret の公式と呼ぶ。これにより，空間曲線がマニピュレータのリンクの長さ方向回りの回転の情報を含むことができる。なぜならば同じ曲線にたいして ϑ により多くの座標系を表すことができるからである。

ここで，拡張 Frenet-Serret の公式により，パラメトリックな曲線がどのように変わったか図 2.7 に示す。通常のパラメトリックな空間曲線は図 2.7 の左上の図にあたる。これに曲線の接線方向を軸とした回転量 ϑ を与えると図 2.7 の右上の図のようになり，曲線の長さ方向の捻れが加わった曲線になる。これを「拡張空間曲線」または「拡張曲線」と呼ぶ。拡張曲線は別の見方をすると面を表している（図 2.7 の右下の図）。拡張 Frenet 標構の z 軸が x 軸と y 軸で張られる平面の法線ベクトルを表し，拡張曲線は帯のような曲線といえる。

2.3.3 拡張空間曲線

以上を改めて式で示す。

$$f: \sigma \mapsto (\boldsymbol{c}(\sigma), \vartheta(\sigma)) \quad (2.52)$$

ここで， $\sigma \in \mathbb{R}$ ， $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ ， $\vartheta \in \mathbb{R}$ であり， $\boldsymbol{c}$ は空間曲線を表し， ϑ は空間曲線上の点における曲線の長さ方向のねじれを表す。イメージとしては図 2.7 の右上の図である。ここで，上式に対して以下の仮定をおく。

仮定 1 (拡張空間曲線のパラメトリック表記)

(2.52) に対して

1. $\boldsymbol{c}$ と ϑ は σ で連続微分可能である。
2. 原点を通る。すなわち， $\boldsymbol{c}(\sigma_0) = \mathbf{o}$ であるような $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ が存在する。

また超多自由度マニピュレータの実形状が時間によって変化する場合は，次のようにこの実形状の数学的表現を行なう。

$$f: (\sigma, t) \mapsto (\boldsymbol{c}(\sigma, t), \vartheta(\sigma, t)) \quad (2.53)$$

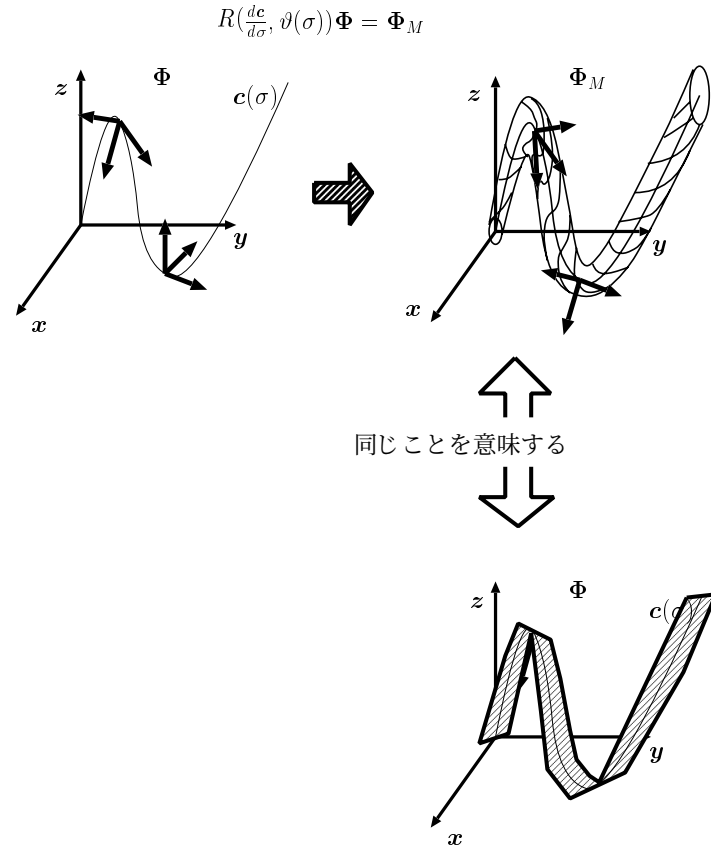


図 2.7: 拡張曲線

ここで, $\sigma \in \mathfrak{R}$ $t \in \mathfrak{R}$ $\mathbf{c} \in \mathfrak{R}^3$ $\vartheta \in \mathfrak{R}$ である. ϑ に以下の仮定をおく. これは次の仮定を満たすとする.

仮定 2 (時間によって変化する実形状)

(2.53) に対して

1. 写像 $\mathbf{c}, \vartheta$ は $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_+$ のクラス C^2 である.
2. すべての $t \in \mathfrak{R}_+$ に対して, $\mathbf{c}(0, t) = \mathbf{o}$

本論文では, (2.52) と (2.53) による表現を「拡張空間曲線」, 略して「拡張曲線」と呼ぶ.

2.4 まとめ

パラメトリックな空間曲線と超多自由度マニピュレータの運動学と動力学を示した．空間曲線は拡張 Frenet-Serret の公式で 3 つの幾何的な量を含み，曲線に幅を与えることを示した．超多自由度マニピュレータの運動学は通常のマニピュレータにたいして表現される Denavit-Hartenberg とは異なる表現である．運動学については Lagrange の公式と Newton-Euler の公式による 2 つの方法を示した．

第 3 章

実形状の一致

前章で，制御目標として与える拡張空間曲線について述べた．本章では，この拡張空間曲線に超多自由度マニピュレータをどのように合わせるのか，拡張空間曲線の何が超多自由度マニピュレータの実形状なのかについて考える．超多自由度マニピュレータの実形状と拡張空間曲線の関係について検討し，形状の一致をうまく拡張した実形状の一致について論じる．

3.1 節では，形状逆問題と呼ばれる非線系最適問題の解を使うことでマニピュレータと空間曲線の間に相当する形状を厳密に定義する．3.2 節では，実形状逆問題の解の存在性を示す．3.3 節では，角速度空間と，目標実形状とマニピュレータの実形状との誤差速度空間の写像である実形状ヤコビアンの特異点について論じる．3.4 節で，実形状ヤコビアンが特異でないという仮定の基で，実形状逆問題の解の存在領域の定理を与える．以上の 4 つの節では目標実形状が時不変な場合について考え，その結果を 3.5 節で時不変な場合へ拡張する．

3.1 超多自由度マニピュレータの実形状と拡張空間曲線の関係

前章で示した超多自由度マニピュレータのモデルと拡張空間曲線を扱う．

- 2.2 節で与えてある運動学の超多自由度マニピュレータ．

- 2.3 節で与えてある (2.52) の目標実形状.

まず、拡張空間曲線上に超多自由度マニピュレータの関節を合わせる．次に、超多自由度マニピュレータの各々のリンクの向きは、拡張空間曲線上にある拡張 Frenet-Serret 標構に対応すると考えるのが妥当である．リンクの向きは関節の補軸の回転により決まり、また拡張 Frenet-Serret 標構は曲線の接線方向を軸とした回転量により決まる．そこで、関節の補軸の回転量が曲線の接線方向を軸とした回転量と等しいとき超多自由度マニピュレータのリンクの向きと拡張空間曲線に合うとする．つまり、次のように表現できる．

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{c}(\sigma_i^*) \wedge \theta_{r,i} = \theta_r(\sigma_i^*) \quad (3.1)$$

$\theta_r(\sigma_i^*)$ はマニピュレータの長さ方向のねじれの目標角度であり、これは次のように何らかの方法で与えられてあるものとする．

$$\theta_r(\sigma_i^*) = g(\vartheta(\sigma_i^*)) \quad (3.2)$$

ここでは次のように考え議論を進める．

$$\theta_r(\sigma_i^*) = \vartheta(\sigma_i^*) \quad (3.3)$$

マニピュレータの運動学の制限は次のように表せる．

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

$$l_i = \|\mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}_{i-1}(\boldsymbol{\theta})\|, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

しかし、すべてのリンク位置が曲線上にあり、かつその点でマニピュレータの長さ方向に対する回転角度が目標角度に一致していても超多自由度マニピュレータの実形状と空間曲線が一致しているとはいえない場合がある．(図 3.1, 図 3.2) このため、式 (3.1) 式 (3.5) 式 (3.5) だけでは実形状一致を定義するには十分ではない．したがって次のように考える．

リンクの位置が不秩序に曲線上にある状況 (図 3.1) は、各リンクの目標位置に対応する曲線パラメータを用いて、次のように表すことができる．

$$\exists i \in 1, \dots, n \quad \sigma_{i-1}^* > \sigma_i^* \quad (3.6)$$

これを回避するするには次の制限を加えればよい．

$$0 = \sigma_0^* < \sigma_1^* < \dots < \sigma_n^* \quad (3.7)$$

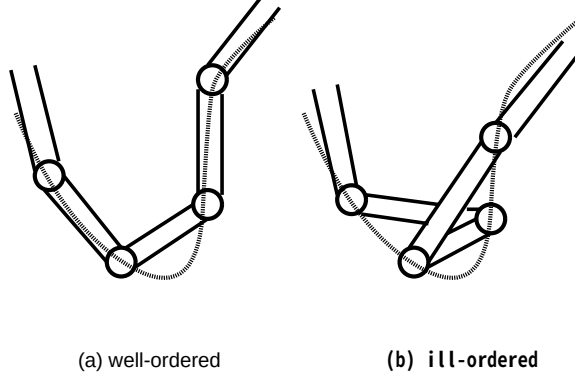


図 3.1: Well-ordered and ill-ordered situation

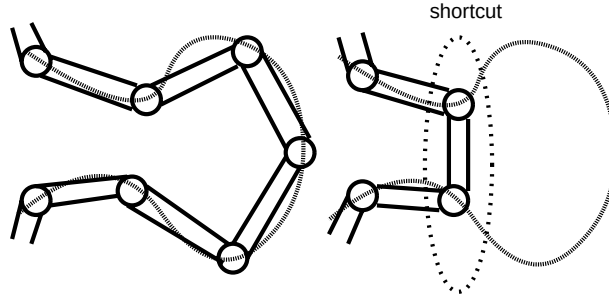


図 3.2: Shortcut situation

つまり,

$$\forall i \in 1, \dots, n \quad 0 < \sigma_i^* - \sigma_{i-1}^* \quad (3.8)$$

一方, 近道をしている状況 (図 3.2) は, 式 (3.5) を満足する σ_i^* より小さい解を見つけることができる. つまり,

$$\exists \sigma_i \in \mathcal{R} \quad (\sigma_{i-1}^* < \sigma_i < \sigma_i^*) \wedge (\|c(\sigma_i) - c(\sigma_{i-1}^*)\| = l_i) \quad (3.9)$$

である. したがって,

$$|\sigma_i^* - \sigma_{i-1}^*|, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

を最小にする解を見つけるという条件を付加すればよい.

ここで, 以上に示した制約を含めた状況を非線系最適化問題として定式化し, それを実形状逆問題と呼ぶ. そして, その解を用いて実形状の一致を定義する.

問題 1 (実形状問題)

前節で示した運動学を持つ超多自由度マニピュレータ, 拡張空間曲線 $f : \sigma \mapsto (\mathbf{c}(\sigma), \vartheta(\sigma))$ について考える.

$$\forall_i \in \{1, \dots, n\} \quad \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{c}(\sigma_i^*) \wedge \theta_{r,i} = \theta_r(\sigma_i^*) \quad (3.11)$$

を満足する $\boldsymbol{\theta}_i^* = [\theta_{s,i}^* \ \theta_{m,i}^* \ \theta_{r,i}^*]^T$ を求めよ. ただし, $\theta_r(\sigma_i^*)$ はマニピュレータの長さ方向のねじれの目標角度であり, これはすでに何らかの方法で与えられてあるものとする. $\sigma_i^* (i = 1, \dots, n)$ は次の式の解である.

$$\mathbf{c}(\sigma_0) = 0 \quad (3.12)$$

$$l_i = \|\mathbf{c}(\sigma_i^*) - \mathbf{c}(\sigma_{i-1}^*)\| \quad (3.13)$$

$$\sigma_i^* - \sigma_{i-1}^* > 0 \quad (3.14)$$

の制約下で

$$|\sigma_i^* - \sigma_{i-1}^*| \quad (3.15)$$

を最小にする値である. $\boldsymbol{\theta}^*$ は $\boldsymbol{\theta}^* := [\boldsymbol{\theta}_1^{*T} \cdots \boldsymbol{\theta}_n^{*T}]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ であり, 目標関節角度と呼び, $\boldsymbol{\sigma}^*$ は $\boldsymbol{\sigma}^* := [\sigma_1^* \cdots \sigma_n^*]^T \in \mathbb{R}$ であり, 目標曲線パラメータと呼ぶ. また, $(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$ を実形状問題の解と呼ぶ.

定義 1 (実形状の一致)

$\boldsymbol{\theta}^*$ を目標関節角度とする. 超多自由度マニピュレータの関節角度が目標関節角度 $\boldsymbol{\theta}^*$ と一致するとき, 超多自由度マニピュレータの実形状は拡張空間曲線 $f : \sigma \mapsto (\mathbf{c}(\sigma), \vartheta(\sigma))$ に一致するという.

実形状逆問題の解の存在性

形状逆問題の解は必ずしも存在するとは限らない. したがって, その解の存在を確かにする条件を与える必要がある. $\mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{c}(\sigma_i)$ となる条件は望山らが与えてある. それは以下の仮定を条件として示している.

仮定 3

1. 空間曲線の曲率が、最大リンク長の 2 倍の逆数を上界に持つ。すなわち、

$$\sup_{\sigma \in \mathfrak{R}} \kappa(\sigma) \leq \frac{1}{2 \max_{i \in \{1, \dots, n\}} l_i} \quad (3.16)$$

である。ここで、 $\kappa(\sigma) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$ は曲線の曲率関数で、 l_i は i 番目のリンクの長さである。

2. 2 自由度関節の 2 つの回転軸が直交しており、かつ、 $\mathbf{a}_{m,i}$ に対応する手先側の回転軸がリンクの長さ方向と直交している。すなわち、

$$\forall_i \in \{1, \dots, n\} \quad (\mathbf{a}_{s,i}^T \mathbf{R}_{J,i} \mathbf{a}_{m,i} = 0 \wedge \mathbf{a}_{m,i}^T \mathbf{e}_x = 0) \quad (3.17)$$

である。

また、 $\theta_{r,i} = \theta_r(\sigma_i)$ の存在性は明らかである。仮定 3 の 1 は目標形状として与える曲線にかんする条件であり、仮定 3 の 2 はマニピュレータの構造にかんする条件である。本稿で扱う制御対象であるマニピュレータは仮定 3 の 2 の「 $\mathbf{a}_{m,i}$ に対応する手先側の回転軸がリンクの長さ方向と直交している」はすでに満たしている。なぜならばリンクの長さ方向は $\mathbf{a}_{r,i}$ と同じであり、 $\mathbf{a}_{m,i}$ と $\mathbf{a}_{r,i}$ は直交するようにとりつけてあるからである。したがって次のように書き換えられ、定理として示す。

仮定 4 (マニピュレータの運動学と曲線)

次の 2 つの条件が成り立つ。

1. 拡張空間曲線の曲率が、最大リンク長の 2 倍の逆数を上界に持つ。すなわち、

$$\sup_{\sigma \in \mathfrak{R}} \kappa(\sigma) \leq \frac{1}{2 \max_{i \in \{1, \dots, n\}} l_i} \quad (3.18)$$

である。ここで、 $\kappa(\sigma) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_+$ は曲線の曲率関数で、 l_i は i 番目のリンクの長さである。

2. 3 自由度関節の 2 つの回転軸、主軸と副軸が直交している。すなわち、

$$\forall_i \in \{1, \dots, n\} \quad (\mathbf{a}_{s,i}^T \mathbf{R}_{J,i} \mathbf{a}_{m,i} = 0) \quad (3.19)$$

定理 1 (実形状逆問題の解の存在定理)

仮定 4 の条件下で、実形状逆問題の解が存在する。

3.2 実形状ヤコビアン

この節では、目標実形状として与えられた曲線と超多自由度マニピュレータの実形状との誤差を定義し、関節角速度空間と誤差速度空間の写像として表される実形状ヤコビアンを示す。そしてその特異点を調べる。

まず、すべてのマニピュレータのリンクの位置を配列したものを以下のように定義する。

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) := \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

また、与えられた曲線 $\mathbf{c}: \mathfrak{R} \rightarrow E^3$ の写像に対して $\mathbf{p}_d(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathfrak{R}^{3n}$ を次のように定義する。ここで $\boldsymbol{\sigma}$ は $\boldsymbol{\sigma}^*$ でない、解でないことに注意する。

$$\mathbf{p}_d(\boldsymbol{\sigma}) := \begin{bmatrix} \mathbf{c}(\sigma_1) \\ \vdots \\ \mathbf{c}(\sigma_n) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

ここで $\sigma_i \in \mathfrak{R} (i = 1, \dots, n)$ は変数であり、 $\boldsymbol{\sigma} := [\sigma_1 \cdots \sigma_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ とする。ここで、形状誤差は次のように定義された。

$$\mathbf{e} := \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}_d(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{c}(\sigma_1) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{c}(\sigma_n) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

しかし、ここではマニピュレータの長さ方向のねじれをも考慮するため、形状誤差を拡張し実形状誤差をつぎのように定義する。

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{c}(\sigma_1) \\ \theta_{r,1} - \boldsymbol{\theta}_r(\sigma_1) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{c}(\sigma_n) \\ \theta_{r,n} - \boldsymbol{\theta}_r(\sigma_n) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

ここで $\theta_r(\sigma_i)$ $i = 1 \cdots n$ は与えられてある値とする．これを時間で微分すると，

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \theta_{m,1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{m,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{r,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{m,2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{r,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{r,2}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} -\frac{d\mathbf{C}}{d\sigma}(\sigma_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d\mathbf{C}}{d\sigma}(\sigma_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{d\theta_r}{d\sigma_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{d\mathbf{C}}{d\sigma}(\sigma_n) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_{s,1}}{dt} \\ \frac{d\theta_{m,1}}{dt} \\ \frac{d\theta_{r,1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\theta_{s,n}}{dt} \\ \frac{d\theta_{m,n}}{dt} \\ \frac{d\theta_{r,n}}{dt} \\ \frac{d\sigma_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\sigma_n}{dt} \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_{s,1}}{dt} \\ \frac{d\theta_{m,1}}{dt} \\ \frac{d\theta_{r,1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\theta_{s,n}}{dt} \\ \frac{d\theta_{m,n}}{dt} \\ \frac{d\theta_{r,n}}{dt} \\ \frac{d\sigma_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\sigma_n}{dt} \end{bmatrix} \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{J} \in 4n \times 4n$ を実形状ヤコビアンと呼び次のように定義される.

$$\mathbf{J} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \theta_{m,1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{m,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{r,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{m,2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{r,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{r,2}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d\mathbf{C}}{d\sigma}(\sigma_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ -\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -\frac{d\mathbf{C}}{d\sigma}(\sigma_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_1) & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{d\mathbf{C}}{d\sigma}(\sigma_n) & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_n) & & & & \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

次に実形状ヤコビアンの特異点を調べる. まず, i 行と j 行を入れ換える基本行列を $\mathbf{I}_{i,j} \in \Re^{4n \times 4n}$ とする. この行列は次の性質を持つ.

$$\mathbf{I}_{i,j}^{-1} = \mathbf{I}_{i,j}^T \quad (3.26)$$

$$\det \mathbf{I}_{i,j} = -1 \quad (3.27)$$

この基本行列を使って, $\mathbf{P} \in \Re^{4n \times 4n}$ を定義する.

$$\mathbf{P} := \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{3(n-i)} \mathbf{I}_{3n+i-j, 3n+i-j+1} \quad (3.28)$$

この $\mathbf{P}$ に現れる基本行列の総数は

$$\sum_{i=1}^{n-1} 3(n-i) = 3 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \right\} \quad (3.29)$$

$$= 3 \left\{ (n-1)n - \frac{1}{2}(n-1) \right\} \quad (3.30)$$

$$= 3 \left\{ n^2 - n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \right\} \quad (3.31)$$

$$= 3 \left\{ \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \right\} \quad (3.32)$$

$$= \frac{3}{2}n(n-1) \quad (3.33)$$

であり、その性質は以下に示す式になる．

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T \quad (3.34)$$

また、 $n = 4k$, $n = 4k + 1$ (k : 正の整数) のとき、偶数であることから

$$\det \mathbf{P} = 1 \quad (3.35)$$

$n = 4k + 1$, $4k + 2$ (k : 正の整数) のときは、奇数になるから

$$\det \mathbf{P} = -1 \quad (3.36)$$

すなわち、 $\mathbf{P} \in SO(4n)$ である．さらにこの $\mathbf{P}$ を使うと、次のように $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \in \Re^{4n \times 4n}$ を定義する．

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) := \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{P} \quad (3.37)$$

このとき、 $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$ は以下のように 4×4 の下三角ブロック行列で表される．

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & & & \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{J}_{n1} & \mathbf{J}_{n2} & \cdots & \mathbf{J}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

ここで、 $\mathbf{J}_{ij} \in \Re^{4 \times 4}$ は次のように定義される．

$$\mathbf{J}_{ij} := \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{s,j}} & \frac{\partial \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{m,j}} & \mathbf{0} & -\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_i) \end{bmatrix}, & i = j, \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{s,j}} & \frac{\partial \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{m,j}} & \frac{\partial \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{r,j}} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & i > j \end{cases} \quad (3.39)$$

このとき、以下のようになる．注意として、ここでは特に $n = 4k - 3$ $n = 4k$ (k : 正の整数) の場合を計算する． $n = 4k - 2$, $n = 4k - 1$ (k : 正の整数) の場合は符合が逆になるだけで、特異点には何ら影響はない．

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{J}(\mathbf{q}) &= \det \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \\
&= \det \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & & & \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{J}_{n1} & \mathbf{J}_{n2} & \cdots & \mathbf{J}_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^n \det \mathbf{J}_{ii} \\
&= \prod_{i=1}^n \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,i}} & \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,i}} & \mathbf{0} & -\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_i) \end{bmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^n \left\{ -\det \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,i}} & \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,i}} & -\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \end{bmatrix} \right\} \\
&= (-1)^n \prod_{i=1}^n \left\{ \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,i}} & \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,i}} & -\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \end{bmatrix} \right\} \\
&= (-1)^{2n} \prod_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,i}} \times \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,i}} \right)^T \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \right\} \\
&= \prod_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,i}} \times \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,i}} \right)^T \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \right\} \tag{3.40}
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,i}} = \boldsymbol{\Phi}_i \left[\mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) \mathbf{a}_{s,i} \times \right] \mathbf{l}_i \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,i}} = \boldsymbol{\Phi}_i [\mathbf{a}_{m,i} \times] \mathbf{l}_i \tag{3.42}$$

それゆえ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,i}} \times \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,i}} &= \left\{ \boldsymbol{\Phi}_i \left[\mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) \mathbf{a}_{s,i} \times \right] \mathbf{l}_i \right\} \times \left\{ \boldsymbol{\Phi}_i [\mathbf{a}_{m,i} \times] \mathbf{l}_i \right\} \\
&= \boldsymbol{\Phi}_i \left[\left\{ \left(\mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) \mathbf{a}_{s,i} \right) \times \mathbf{l}_i \right\} \times \left\{ \mathbf{a}_{m,i} \times \mathbf{l}_i \right\} \right] \\
&= \boldsymbol{\Phi}_i \left\{ \det \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) \mathbf{a}_{s,i} & \mathbf{l}_i & \mathbf{l}_i \end{bmatrix} \mathbf{a}_{m,i} - \det \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) \mathbf{a}_{s,i} & \mathbf{l}_i & \mathbf{a}_{m,i} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{l}_i \right\} \\
&= \det \begin{bmatrix} \mathbf{l}_i & \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) \mathbf{a}_{s,i} & \mathbf{a}_{m,i} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{l}_i \\
&= \det \begin{bmatrix} \mathbf{l}_i & \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) \mathbf{a}_{s,i} & \mathbf{a}_{m,i} \end{bmatrix} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) \tag{3.43}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\det \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^n \left\{ \det \left[\mathbf{l}_i \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{m,i}, \theta_{m,i}) \mathbf{a}_{s,i} \mathbf{a}_{m,i} \right] (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1})^T \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \right\} \quad (3.44)$$

である. したがって, 関節が 2 自由度のときと特異点は同じとなり, 次の結果がえられる.

1. 第 i 座標系から見た, 第 i 関節の 2 つの回転軸とリンクの長さ方向のベクトルの 3 つのうち, 2 つ以上が同方向である.
2. 第 i リンクと第 $(i-1)$ リンクの位置の差と, 第 i リンク位置に対応する曲線パラメータ推定値 $\hat{\sigma}_i$ における接ベクトルが直交する.

3.3 実形状逆問題の解の存在領域

形状逆問題は非線形連立方程式を解かなければならないため, 複雑で難しい. そのため, 解を見つけるためにはコンピュータなどを使って数値的に解く方法を使わなければならない. しかしながら, ある仮定のもとで行なうと実形状の一致を表す原点 $\mathbf{e} = \mathbf{o}$ を含む局所的な領域で扱いやすくなることができる.

まず次の仮定を考える.

仮定 5

実形状逆問題の解の組 $(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$ に対して,

$$\det \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) \neq \mathbf{o} \quad (3.45)$$

そして, この仮定のもとで, 次の定理がいえる.

定理 2 (実形状逆問題の解の存在領域)

$D_\delta \subset \mathbb{R}^{4n}$ を次のように定義する.

$$D_\delta := \left\{ (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^{4n} \mid |\theta_{s,i}| < \frac{\pi}{2}, |\theta_{m,i}| < \pi, |\theta_{r,i}| < \pi, \delta < \sigma_i - \sigma_{i-1} < \frac{1}{\kappa_M} \right\} \quad (3.46)$$

ここで, $\delta \in [-l_M, l_m]$

仮定 4 と仮定 5 の下で, 任意の δ に対して次の式を満足するような解が唯一存在する.

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{o} \quad (3.47)$$

$$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) \in D_\delta \quad (3.48)$$

さらに, その解は実形状逆問題の解 $(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$ と一致する.

証明は望山らが示した形状逆問題の解の存在領域に関する定理とほぼ同じである．仮定 5 から逆関数定理より $\hat{e} = \mathbf{o}$ を満足する $(\boldsymbol{\theta}, \hat{\sigma})$ はその近傍でただ一つ決まり，仮定 4 から解の一意性を与える．

3.4 時間によって変化する拡張空間曲線への拡張

この節では時間によって変化しない目標実形状を表す拡張空間曲線に対して行なった結果を，目標実形状が時間によって変化する場合，つまり拡張空間曲線が時間に依存し変化する場合に拡張する．時間によって変化する拡張空間曲線に対する拡張実形状逆問題は次のように表す．

問題 2 (拡張実形状逆問題)

次のことを考える．

1. 2.2 節で表される運動学をもつ超多自由度マニピュレータ．

2. 仮定 2 を満足する拡張空間曲線．

$i = 1$ から n に対して，

$$\mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{c}(\sigma_i^*(t), t) \wedge \theta_{r,i} = \theta_r(\sigma_i^*(t), t) \quad (3.49)$$

を満足する $\boldsymbol{\theta}_i^*(t) := [\theta_{s,i}^*(t) \ \theta_{m,i}^*(t) \ \theta_{r,i}^*(t)]$ を見つけよ．ここで， $\sigma_i^*(t)$ は

$$\sigma_i^*(t) - \sigma_{i-1}^*(t) > 0 \quad (3.50)$$

$$\|\mathbf{c}(\sigma_i^*(t), t) - \mathbf{c}(\sigma_{i-1}^*(t), t)\| = l_i \quad (3.51)$$

の条件下で

$$|\sigma_i^*(t) - \sigma_{i-1}^*(t)| \quad (3.52)$$

を最小にする曲線パラメータ関数である．

$\boldsymbol{\theta}^*(t) := [\boldsymbol{\theta}_1^{*T}(t) \cdots \boldsymbol{\theta}_n^{*T}(t)]^T$ を目標関節角度関数と呼び，また $\boldsymbol{\sigma}^*(t) := [\sigma_1^*(t) \cdots \sigma_n^*(t)]^T$ を目標曲線パラメータ関数と呼ぶ．

定義 2 (時間 t での実形状の一致)

時間 t で超多自由度マニピュレータが関節角度 θ^* を持てば、マニピュレータの実形状がその時間で目標実形状を表す曲線 $f : (\sigma, t) \mapsto (c(\sigma, t), \vartheta(\sigma, t))$ $\sigma, t, \vartheta \in \mathbb{R}$ $c \in \mathbb{R}^3$ に一致するという。

そして前の節で示した仮定や定理も拡張することで以下のことがいえる。

仮定 6 (マニピュレータの運動学と時変な曲線)

次の 2 つの条件が成り立つ。

1. 拡張空間曲線の曲率が、最大リンク長の 2 倍の逆数を上界に持つ。すなわち、

$$\sup_{\sigma \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+} \kappa(\sigma, t) \leq \frac{1}{2 \max_{i \in \{1, \dots, n\}} l_i} \quad (3.53)$$

である。ここで、 $\kappa(\sigma, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ は曲線の曲率関数で、 l_i は i 番目のリンクの長さである。

2. 3 自由度関節の 2 つの回転軸、主軸と副軸が直交している。すなわち、

$$\forall_i \in \{1, \dots, n\} \quad (\mathbf{a}_{s,i}^T \mathbf{R}_{w,i} \mathbf{a}_{m,i} = 0) \quad (3.54)$$

定理 3 (拡張実形状逆問題の解の存在定理)

仮定 6 の条件下で、拡張実形状逆問題の解が存在する。

仮定 7 (時変実形状ヤコビアン)

実形状ヤコビアンは、任意の時間 t において目標関節角度と曲線パラメータ関数にたいして特異でない。すなわち、

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \det \mathbf{J}(\theta^*(t), \sigma^*(t), t) \neq \mathbf{o} \quad (3.55)$$

定理 4 (拡張存在領域)

仮定 6 と仮定 7 のもとで、任意の $\delta \in [-l_M, l_M]$ に対して

$$\mathbf{e}(\theta(t), \sigma(t)) = \mathbf{o} \quad (3.56)$$

$$(\theta(t), \sigma(t)) \in \mathcal{D}_\delta \quad (3.57)$$

を満たす一つの解が存在する。ここで、 $\mathcal{D}_\delta$ は (3.46) で定義された領域である。

3.5 まとめ

この章では制御目標であるマニピュレータ実形状を表す拡張空間曲線とマニピュレータの実形状との一致について、実形状逆問題の解のもとで定義を行なった。そして、実形状逆問題の解の存在性について、十分条件とその解の存在領域も示した。また、関節角速度空間と実形状の誤差速度空間の写像である実形状ヤコビアンを導き、その特異点を明らかにした。これらの結果を制御目標を表す拡張空間曲線が時間によって変化する場合にも拡張した。

第 4 章

実形状レギュレーション

この章では最も基本的な制御問題である「実形状レギュレーション」について論じる。実形状レギュレーションの制御目的は目標として与えるマニピュレータの実形状を表した時間によって変わらない拡張空間曲線に一致させることである。超多自由度マニピュレータの実形状レギュレーションを行なうにあたり、実形状逆問題を解かなければならない。これは非線形方程式を解かなければならず、計算を行なう上で困難を生じる。これを回避するため、実形状逆問題の解を推定することを取り入れる。そして、その推定則と制御目標を達成する制御則について論じる。

4.1 節では、実形状レギュレーションの制御目的を定式化し、これについて論じる。4.2 節で曲線パラメータの推定について、制御目標を達成するにあたり、問題がどのように変化するかを示す。4.3 節では制御則、推定則について示し、4.4 節で導かれた推定則の意味について考察する。4.5 節で導かれた制御則の、物理的な意味が分かり易く、計算する上で有効な再帰的表現について示す。

4.1 問題設定

実形状レギュレーションの制御目的は前もって与えられたパラメトリックな曲線で表現された実形状に一致させることである。これを問題として定式化する。

問題 3 (実形状レギュレーション)

1. 超多自由度マニピュレータは 2.3 節で示した構造を持ち、ダイナミクスは (2.34) 式で表される
2. 仮定 1 を満たす曲線である.
3. 仮定 4 を満足する.
4. 仮定 5 を満足する.

上のことを前提とした上で, $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\boldsymbol{\theta}(t) \rightarrow \boldsymbol{\theta}^* \quad (4.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \rightarrow \mathbf{o} \quad (4.2)$$

であるような (2.34) 式の制御入力 $\mathbf{u}$ を求めよ. ここで, $\boldsymbol{\theta}^*$ は実形状逆問題の解で, 目標関節角度である.

ここで, 上の問題を解決する次のような PD フィードバック制御則を考える.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{J}_p^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}^*) - \mathbf{K}_v \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.3)$$

ここで, $\mathbf{K}_p \in \Re^{4n \times 4n}$, $\mathbf{K}_v \in \Re^{3n \times 3n}$ は正定対称行列である. また, $\mathbf{J}_p$ は

$$\mathbf{J}_p := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \theta_{m,1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{m,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{r,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{m,2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{r,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{r,2}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

である. この制御則は次のスカラー関数を考え, これがリアプノフ関数になることにより求められる.

$$V(\hat{\mathbf{e}}^*, \dot{\boldsymbol{\theta}}) := \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*T} \mathbf{K}_p \mathbf{e}^{*T} \quad (4.5)$$

ここで, $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ はマニピュレータの慣性行列である. しかしこの制御則は $\boldsymbol{\sigma}^*$ をあらかじめ求めなければならない. これは非線形連立方程式 (3.13) を解かなければならないことを意味する. この手間を省くために, $\boldsymbol{\sigma}^*$ を推定して解くことを次の節から試みる.

4.2 制御目標と曲線パラメータの推定

逆実形状問題の解 σ^* を求めるには、非線形連立方程式を解かなければならない。そこで、これを解かずに σ^* を推定することを行なう。 $\hat{\sigma} := [\hat{\sigma}_1 \cdots \hat{\sigma}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ を逆実形状問題の解である σ^* の推定値とする。この σ^* を含んだマニピュレータの実形状と空間曲線との誤差、推定実形状誤差 $\hat{e} \in \mathbb{R}^{4n}$ を次のように定義する。

$$\hat{e} := e(\theta, \hat{\sigma}) \quad (4.6)$$

$$= \begin{bmatrix} p_1(\theta) - c(\hat{\sigma}_1) \\ \theta_{r,1} - \theta_r(\hat{\sigma}_1) \\ \vdots \\ p_n(\theta) - c(\hat{\sigma}_n) \\ \theta_{r,n} - \theta_r(\hat{\sigma}_n) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

このとき、 $\dot{\hat{e}} \in \mathbb{R}^{4n}$ は次のようになる。

$$\dot{\hat{e}} = J(\theta, \hat{\sigma}) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\hat{\sigma}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

定理 2 より,

$$\hat{e}(\theta, \hat{\sigma}) \rightarrow \mathbf{o} \quad (4.9)$$

$$\dot{\theta} \rightarrow \mathbf{o} \quad (4.10)$$

$$(\theta, \hat{\sigma}) \in \mathcal{D} \quad (4.11)$$

を満たすことは (4.1)(4.2) を保証する。したがって制御目標は (4.9)(4.10)(4.11) 式のように表すことができる。

$$\hat{e} \rightarrow \mathbf{o}, \dot{\hat{e}} \rightarrow \mathbf{o} \quad (4.12)$$

と表すことができる。

4.3 曲線パラメータ推定に基づく実形状レギュレーション

次のような正定関数 $V(\hat{e}, \dot{\theta})$ を考える。

$$V(\hat{e}, \dot{\theta}) := \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} + \frac{1}{2} \hat{e}^T K_p \hat{e} \quad (4.13)$$

これを時間微分すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\hat{\mathbf{e}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \dot{\hat{\mathbf{e}}} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T (\mathbf{u} - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})) + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \dot{\hat{\mathbf{e}}} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{u} - \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \end{bmatrix} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{u} - \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \end{bmatrix} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{u} - \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p [\mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{J}_c(\hat{\boldsymbol{\sigma}})] \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \end{bmatrix} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{u} - \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \{ \mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{J}_c(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{u} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \{ \mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \} - \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \{ \mathbf{J}_c(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{u} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \{ \mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \}^T \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}_c(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{u} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}_c(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}}^T [\mathbf{u} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}] - \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}_c(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{J}_p$ は (4.4) で与えられ, $\mathbf{J}_c$ は以下で定義される.

$$\mathbf{J}_c := \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{C}}{d\sigma}(\sigma_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\mathbf{C}}{d\sigma}(\sigma_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{d\theta_r}{d\sigma_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{d\mathbf{C}}{d\sigma}(\sigma_n) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_n) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

ここで, 次のような制御則を考える.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{J}_p^T \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_v \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \tag{4.16}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{K}_\sigma \mathbf{J}_c(\hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} \tag{4.17}$$

ここに現れる $K_p \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $K_v \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $K_\sigma^{n \times n}$ は正定対称行列とする．これを使うと $\dot{V}$ は次のようになる．

$$\dot{V} = -\dot{\theta}^T K_v \dot{\theta} - \hat{e}^T K_p J_c(\hat{\sigma}) K_\sigma J_c(\hat{\sigma}) K_p \hat{e} \quad (4.18)$$

と $(\hat{e}, \dot{\theta})$ に関して準負定になる．さらに LaSalle の定理を用いると，目標への局所的漸近安定性が示せる．以上を定理としてまとめ，その証明を示す．

定理 5 (曲線パラメータ推定に基づく実形状制御則)

次のような制御則を考える．

$$u = -J_p^T K_p \hat{e} - K_v \dot{\theta} + g(\theta) \quad (4.19)$$

$$\dot{\hat{\sigma}} = K_\sigma J_c^T(\hat{\sigma}) K_p \hat{e} \quad (4.20)$$

ここで $K_p \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $K_v \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $K_\sigma^{n \times n}$ は正定対称行列とする．上式の制御則を施した閉ループ系は $(e, \dot{\theta}) = (\mathbf{o}, \mathbf{o})$ を満足する平衡状態に関して局所的漸近安定となる．

証明

正の実数 γ を用いて表される次のような集合 $\mathcal{N}_\gamma$ を定義する．

$$\mathcal{N}_\gamma := \left\{ (\theta, \hat{\sigma}) \mid \frac{1}{2} \hat{e}^T(\theta, \hat{\sigma}) K_p \hat{e}(\theta, \hat{\sigma}) \leq \gamma \right\} \quad (4.21)$$

この集合 $\mathcal{N}$ は， $\hat{e}^T(\theta, \hat{\sigma}) = \mathbf{o}$ が複数もつので，有界でない．しかし， γ を十分に小さくすることで，この $\mathcal{N}_\gamma$ に次の性質を持たせることができる．

- $\forall (\theta, \hat{\sigma}) \in \mathcal{N}_\gamma, \det J(\theta, \hat{\sigma}) \neq 0$
- $\mathcal{N}_\gamma$ は互いに共通部分を持たない有界閉集合 $(\mathcal{N}_{\gamma, k} \mid k = 1, 2, \dots)$ の可算個の集合とみなせる．

$\mathcal{N}_\gamma$ を構成する有界閉集合 $\mathcal{N}_{\gamma, i}$ のうち， $(\theta^*, \hat{\sigma}^*)$ を含むものを， $\mathcal{N}_\gamma^*$ とする．すなわち， $(\theta^*, \hat{\sigma}^*) \in \mathcal{N}_\gamma^*$ である．ここで，集合 Ω を次のように定義する．

$$\Omega := \left\{ (\theta, \hat{\sigma}, \dot{\theta}) \mid (\theta, \hat{\sigma}) \in \mathcal{N}_\gamma^*, V \leq \gamma \right\} \quad (4.22)$$

この Ω は有界集合であり， $\dot{V} \leq 0$ であるから， Ω は正の不変集合である．したがって，LaSalle の定理より， Ω 内から出発した状態は， Ω 内で $\dot{V} = \mathbf{o}$ を満足する集合を E とすると，

$$E = \left\{ (\theta, \hat{\sigma}, \dot{\theta}) \in \Omega \mid \dot{\theta} = \mathbf{o}, J_c(\hat{\sigma}) K_p \hat{e}(\theta, \hat{\sigma}) = \mathbf{o} \right\} \quad (4.23)$$

このとき、 E 内の最大の不変集合 $\mathcal{M}^*$ は、

$$\mathcal{M}^* = \{(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \in \Omega \mid \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{o}, \hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{o}\} \quad (4.24)$$

である。なぜなら、まず、上式より $\mathcal{M}^*$ はその要素がすべて平衡状態であるので、不変集合であることは明らかである。また、 E 内で $\mathcal{M}^*$ 以外の点、すなわち、 $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{o}$ かつ $\hat{\mathbf{e}} \neq \mathbf{o}$ の点を、制御則をマニピュレータのダイナミクスの式に代入すると、 $\dot{\boldsymbol{\theta}} \neq \mathbf{o}$ となり、必ず E の外に出ていく。よって、 $\mathcal{M}^*$ が E 内の最大不変集合であることが結論できる。したがって、上式より $\hat{\mathbf{e}} \rightarrow \mathbf{o}$ かつ $\dot{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \mathbf{o}$ となる。これは $\hat{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \boldsymbol{\theta}^*$ かつ $\dot{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \mathbf{o}$ を意味するので、閉ループ系の局所的漸近安定性が示された。

4.4 曲線パラメータ推定則の幾何学的解釈

ここで、曲線パラメータ推定則がうまくいく機能する理由を、マニピュレータが実際に運動する3次元空間上での幾何的な意味を考えることによって考察する。

曲線パラメータ推定則は目標値の近傍で局所的に有効であるから、ここでは、特にマニピュレータが完全に曲線上にあるとして、推定則の意味を考えていくことにする。すなわち、真値 σ_i に対応する曲線上の点 $\mathbf{c}(\sigma_i)$ と各関節の位置 σ_i に対応する曲線上の点 $\mathbf{c}(\sigma_i)$ と各関節の位置 $\mathbf{p}_i$ が一致している場合について考える。

曲線パラメータ推定則において、その意味を見やすくするために正定行列 $\mathbf{K}_p$ および $\mathbf{K}_\sigma$ を単位行列にとると、以下ようになる。

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{J}_c^T \hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{d\theta_r}{d\sigma_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_n) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

したがって、

$$\dot{\hat{\sigma}}_i = \left\{ \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma_i}(\hat{\sigma}_i) \right\}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) + \frac{d\theta_r(\sigma_i)}{d\sigma_i} \cdot (\theta_{i,d} - \hat{\theta}_{r,i}) \quad (4.26)$$

これより、得られた推定則では、各推定則 $\hat{\sigma}_i$ における曲線の接ベクトル $\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \hat{\sigma}_i}$ と各関節の位置誤差ベクトル $(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\sigma_i))$ との内積と、リンクの回転軸まわりの角度と目標角度の差と目標角度 θ_r の変化率の積を計算し、これらの和を推定値の速度としていることが分かる。

4.5 レギュレーション制御則の再帰的表現

この節でレギュレーション制御則 (4.19) の再帰的表現を与える。これにより、物理的に分かり易く、コンピュータ上での実装を簡単にする。これを行なうためにゲイン行列に次のような制限を与える。

$$\mathbf{K}_v = \text{diag}\{k_{v,s,1}k_{v,m,1}k_{v,r,1}, \dots, k_{v,s,n}k_{v,m,n}k_{v,r,n}\} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \text{diag}\{k_{\sigma,1}, \dots, k_{\sigma,n}\} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p,1} & & & & \\ & k_{r,1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{K}_{p,n} & \\ & & & & k_{r,n} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

ここで、 $\mathbf{K}_{p,i} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $k_{r,i} \in \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, n$ である。レギュレーション制御則 (4.19) の右辺の第 1 項の要素は次のように計算される。

$$-\mathbf{J}_p^T \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \theta_{m,1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{m,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{r,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{m,2}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{r,1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,2}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{r,2}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,n}} & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,n}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} \quad (4.30)$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \theta_{s,1}}^T & 0 & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{s,1}}^T & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,1}}^T & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \theta_{m,1}}^T & 0 & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{m,1}}^T & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,1}}^T & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{r,1}}^T & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{r,1}}^T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{s,2}}^T & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,2}}^T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta_{m,2}}^T & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,2}}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{r,2}}^T & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{s,n}}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \theta_{m,n}}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} \quad (4.31)$$

この列ベクトルを n 個に分ける,

$$\mathbf{u}_j = \boldsymbol{\tau} + K_{v,j} + \mathbf{g}_j(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.32)$$

その要素 $\boldsymbol{\tau}_j := [\tau_{j,s} \ \tau_{j,m} \ \tau_{j,r}]^T \in \Re^3$ を計算していく.

$$\tau_{j,s} = - \sum_{i=j}^n \left\{ \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,j}}^T \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \right\} \quad (4.33)$$

$$= - \sum_{i=j}^n \left\{ [(\boldsymbol{\Phi}_{j-1} \mathbf{a}_{s,j}) \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{j-1})]^T \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \right\} \quad (4.34)$$

$$= \sum_{i=j}^n \left\{ [(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{j-1}) \times (\boldsymbol{\Phi}_{j-1} \mathbf{a}_{s,j})]^T \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \right\} \quad (4.35)$$

$$= \sum_{i=j}^n \left\{ \mathbf{a}_{s,j}^T \boldsymbol{\Phi}_{j-1}^T [(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{j-1}) \times]^T \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \right\} \quad (4.36)$$

$$= - \sum_{i=j}^n \left\{ \mathbf{a}_{s,j}^T \boldsymbol{\Phi}_{j-1}^T [(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{j-1}) \times] \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \right\} \quad (4.37)$$

$$= - \mathbf{a}_{s,j}^T \boldsymbol{\Phi}_{j-1}^T \left\{ \sum_{i=j}^n \{ \mathbf{p}_i \times \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma})) \} - \mathbf{p}_{j-1} \times \sum_{i=j}^n \{ \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \} \right\} \quad (4.38)$$

$$= - \mathbf{a}_{s,j}^T \mathbf{R}_{J,j} \boldsymbol{\Phi}_j^T \left\{ \sum_{i=j}^n \{ \mathbf{p}_i \times \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma})) \} - \mathbf{p}_{j-1} \times \sum_{i=j}^n \{ \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \} \right\} \quad (4.39)$$

$$\tau_{j,m} = - \sum_{i=j}^n \left\{ \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,j}}^T \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \right\} \quad (4.40)$$

$$= -\sum_{i=j}^n \left\{ \left[(\Phi_{j-1} \mathbf{R}(\mathbf{a}_{s,j}, \theta_{s,j}) \mathbf{a}_{m,j}) \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{j-1}) \right]^T \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \right\} \quad (4.41)$$

$$= -\mathbf{a}_{m,j}^T \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{s,j}, \theta_{s,j}) \mathbf{R}_{J,j} \Phi_j^T \left\{ \sum_{i=j}^n \{ \mathbf{p}_i \times \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \} \right. \\ \left. - \mathbf{p}_{j-1} \times \sum_{i=j}^n \{ \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \} \right\} \quad (4.42)$$

$$\tau_{j,r} = -k_{r,j}(\theta_{r,j} - \theta_r(\hat{\sigma}_j)) - \sum_{i=j+1}^n \left\{ \left[(\Phi_j \mathbf{a}_{r,j}) \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{j-1}) \right]^T \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \right\} \quad (4.43)$$

$$= -\mathbf{a}_{r,j}^T \Phi_j^T \left\{ \sum_{i=j+1}^n \{ \mathbf{p}_i \times \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \} - \mathbf{p}_{j-1} \times \sum_{i=j+1}^n \{ \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \} \right\} \\ -k_{r,j}(\theta_{r,j} - \theta_r(\hat{\sigma}_j)) \quad (4.44)$$

ここで $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}^3$ を定義する.

$$\alpha_j := \sum_{i=j}^n \{ \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \} \quad (4.45)$$

$$= \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_j - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_j)) + \alpha_{j+1} \quad (4.46)$$

$$\beta_j := \sum_{i=j}^n \{ \mathbf{p}_i \times \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) \} \quad (4.47)$$

$$= \mathbf{K}_{p,i}(\mathbf{p}_j - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_j)) + \beta_{j+1} \quad (4.48)$$

これを使って $\boldsymbol{\tau}_j = [\tau_{j,s} \ \tau_{j,m} \ \tau_{j,r}]^T \in \mathbb{R}^3$ を計算すると次のようになる.

$$\begin{bmatrix} \tau_{j,s} \\ \tau_{j,m} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{J,j}^T \mathbf{a}_{s,j} & \mathbf{R}_{J,j}^T \mathbf{R}(\mathbf{a}_{s,j}, \theta_{s,j}) \mathbf{a}_{m,j} \end{bmatrix}^T \Phi_j^T \{ \beta_j - \mathbf{p}_{j-1} \times \alpha_j \} \quad (4.49)$$

$$\tau_{j,r} = -\mathbf{a}_{r,j}^T \Phi_j^T \{ \beta_{j+1} - \mathbf{p}_{j-1} \times \alpha_{j+1} \} - k_{r,j}(\theta_{r,j} - \theta_r(\hat{\sigma}_j)) \quad (4.50)$$

(4.49) の式の形は超多自由度マニピュレータの形状制御のときと変わらない [1]. (4.50) は超多自由度マニピュレータの形状制御の部分とリンクの向きを制御する部分と分かれていることが分かる. 以下, これらの式を計算すると次のようになる.

$$\tau_{j,s} = -\mathbf{a}_{s,j}^T \mathbf{R}_{J,j} \Phi_j^T \{ \beta_j - \mathbf{p}_{j-1} \times \alpha_j \} \quad (4.51)$$

$$= -\mathbf{a}_{s,j}^T \mathbf{R}_{J,j} \{ {}^j\beta_j - {}^j\mathbf{p}_{j-1} \times {}^j\alpha_j \} \quad (4.52)$$

$$\tau_{j,m} = -\mathbf{a}_{m,j}^T \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{s,j}, \theta_{s,j}) \mathbf{R}_{J,j} \Phi_j^T \{ \beta_j - \mathbf{p}_{j-1} \times \alpha_j \} \quad (4.53)$$

$$= -\mathbf{a}_{m,j}^T \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{s,j}, \theta_{s,j}) \mathbf{R}_{J,j} \{ {}^j\beta_j - {}^j\mathbf{p}_{j-1} \times {}^j\alpha_j \} \quad (4.54)$$

$$\tau_{j,r} = -\mathbf{a}_{r,j}^T \boldsymbol{\Phi}_j^T \left\{ \beta_{j+1} - \mathbf{p}_{j-1} \times \alpha_{j+1} \right\} - k_{r,j}(\theta_{r,j} - \theta_r(\hat{\sigma}_j)) \quad (4.55)$$

$$= -\mathbf{a}_{r,j}^T \left\{ {}^j\beta_{j+1} - {}^j\mathbf{p}_{j-1} \times {}^j\alpha_{j+1} \right\} - k_{r,j}(\theta_{r,j} - \theta_r(\hat{\sigma}_j)) \quad (4.56)$$

このとき ${}^j\alpha_j$, ${}^j\beta_j$ は次のようになる.

$${}^j\alpha_j = \mathbf{K}_{p,i}({}^j\mathbf{p}_j - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) + {}^j\alpha_{j+1} \quad (4.57)$$

$$= \mathbf{K}_{p,i}({}^j\mathbf{p}_j - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) + \boldsymbol{\Phi}_j^T \boldsymbol{\Phi}_{j+1} {}^{j+1}\alpha_{j+1} \quad (4.58)$$

$$= \mathbf{K}_{p,i}({}^j\mathbf{p}_j - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) + \boldsymbol{\Phi}_j^T \boldsymbol{\Phi}_j \mathbf{R}_{J,j+1} {}^{j+1}\alpha_{j+1} \quad (4.59)$$

$$= \mathbf{K}_{p,i}({}^j\mathbf{p}_j - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) + \mathbf{R}_{J,j+1} {}^{j+1}\alpha_{j+1} \quad (4.60)$$

$${}^j\beta_j = {}^j\mathbf{p}_j \times \mathbf{K}_{p,i}({}^j\mathbf{p}_j - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) + {}^j\beta_{j+1} \quad (4.61)$$

$$= {}^j\mathbf{p}_j \times \mathbf{K}_{p,i}({}^j\mathbf{p}_j - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_i)) + \mathbf{R}_{w,j+1} {}^{j+1}\beta_{j+1} \quad (4.62)$$

レギュレーション制御則の j 番目の要素は次のように表すことができる.

$$\mathbf{u}_j = \boldsymbol{\tau}_j + \mathbf{K}_{v,j} \dot{\boldsymbol{\theta}}_j + \mathbf{g}_j(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.63)$$

次に推定則は, 簡単な計算をおこなうと以下のように表せる.

$$\dot{\hat{\sigma}}_j = k_{\sigma,j} \left\{ \frac{d\mathbf{c}}{d\sigma_j}(\hat{\sigma}_j) \right\}^T \mathbf{K}_{p,j}(\mathbf{p}_j - \mathbf{c}(\hat{\sigma}_j)) + k_{\sigma,j} k_{r,j} \frac{d\theta_r(\sigma_j)}{d\sigma_i} \cdot (\theta_{j,d} - \hat{\theta}_{r,j}) \quad (4.64)$$

4.6 シミュレーション

前節で示した再帰的表現をコンピュータ上で実現し, 実形状レギュレーション制御則の有効性の確認を行なった. その制御則のシミュレーションの結果を図 4.1 図 4.2 図 4.3 に示す.

4.7 まとめ

ここでは, 前もって与えられた超多自由度マニピュレータの実形状を表す空間曲線に一致させる実形状レギュレーション制御則を示した. また, 制御則を導く際に, 目標の位置とリンクの向きに対応した曲線パラメータを推定することを導入し, その推定則を同時に導いた. そして, これらの制御則, 推定則の再帰的表現を与えた.

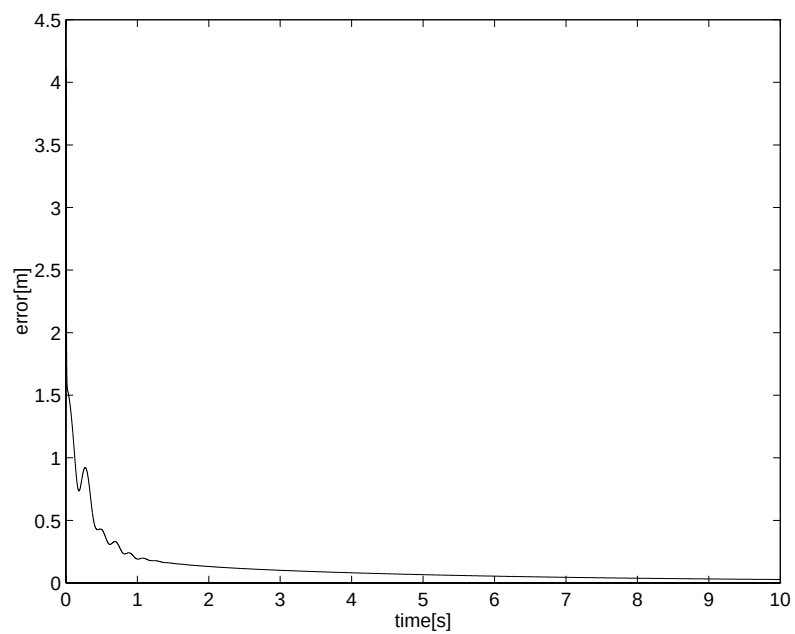


図 4.1: 実形状誤差

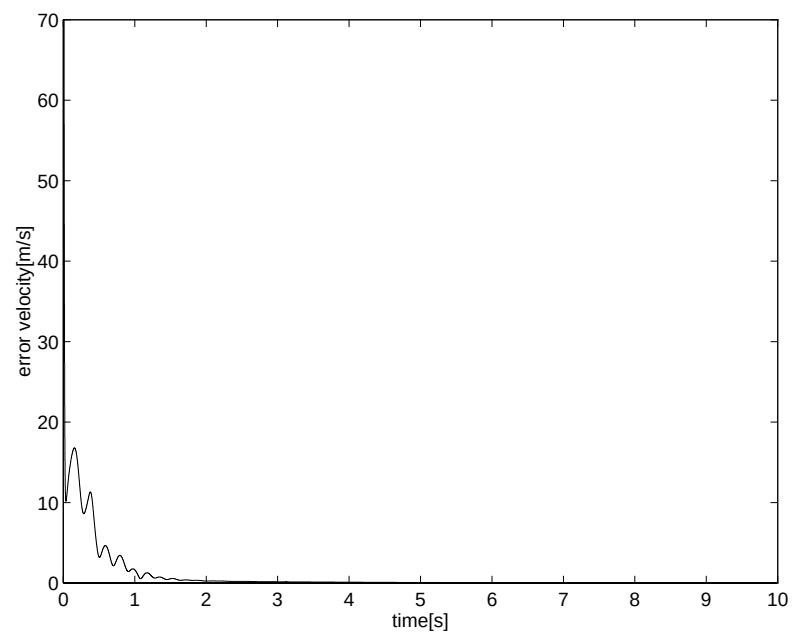


図 4.2: 実形状誤差速度

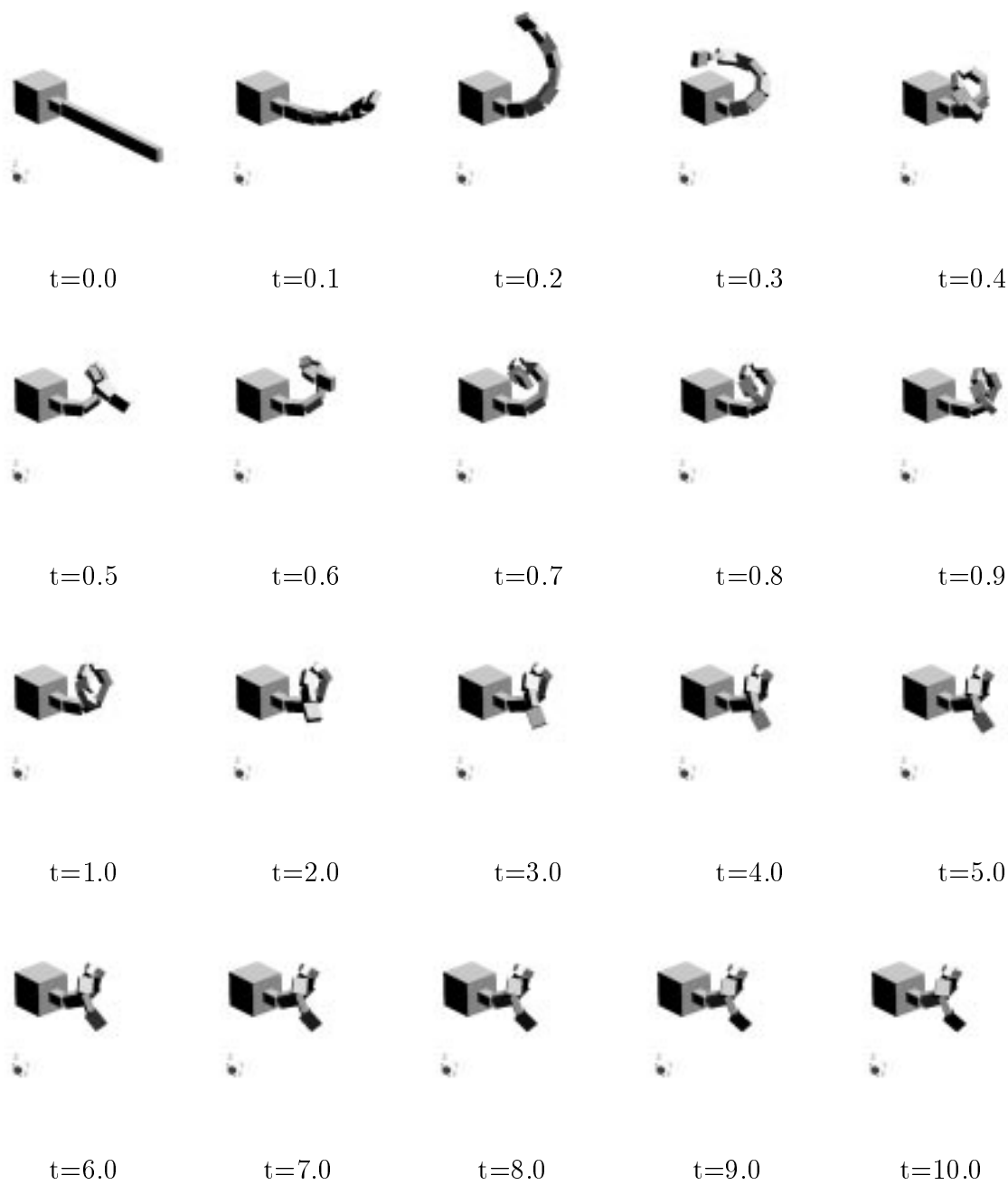


図 4.3: 実形状レギュレーション

第 5 章

実形状トラッキング

超多自由度マニピュレータの制御目標が時間によって変化するとき、その制御目標に追従する制御、実形状トラッキング制御が必要である。目標の実形状は時間によって変化する拡張空間曲線で表すために、実形状トラッキング制御の目的はマニピュレータの実形状がその拡張空間曲線を追従するように制御することである。前章の実形状レギュレーションを導く際に、導入した曲線パラメータ推定をここでも使用し、実形状トラッキング制御則を与える。ここでは2つの実形状トラッキング制御則を与えた。1つは Inverse-Dynamics(ID) に基づく ID-based 実形状トラッキング制御則で、もう1つは Lyapunov-based 法に基づく Lyapunov-based 実形状トラッキング制御則である。

5.1 節で実形状トラッキングを問題として定式化する。5.2 節で2次ダイナミクスを持つ推定器を導入した新しい超多自由度マニピュレータの合成ダイナミクスを与える。そして、5.3 節で合成ダイナミクスを基に、実形状トラッキング制御則を示す。

5.1 問題の定式化

実形状トラッキング制御の目的は与えられた時変な曲線に従うマニピュレータの実形状を形作ることである。実形状トラッキング問題を次のように定式化する。

問題 4 (実形状トラッキング)

次のことを考える。

1. 超多自由度マニピュレータはダイナミクス (2.34) を持つ。

2. 仮定2を満足する拡張曲線である.

3. 仮定6を満足する.

4. 仮定7を満足する.

上の仮定の基で, 次のような条件をみたす制御入力, $\mathbf{u}$, を見つけよ. その条件とは $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}^* \quad (5.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \rightarrow \dot{\boldsymbol{\theta}}^*(t) \quad (5.2)$$

であることである. ここで, $\boldsymbol{\theta}^*(t)$ は目標関節角度つまり拡張実形状逆問題の解である.

前の章で行なったように, $\hat{\boldsymbol{\sigma}} := [\hat{\sigma}_1 \cdots \hat{\sigma}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\sigma}^*$ の推定値である. そして時間によって変化する拡張空間曲線に対する $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ を含む実形状誤差 $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{4n}$ は次のように定義する.

$$\hat{\mathbf{e}} := \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t)) \quad (5.3)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{c}(\sigma_1(t), t) \\ \theta_{r,1} - \theta_r(\sigma_1(t), t) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{c}(\sigma_n(t), t) \\ \theta_{r,n} - \theta_r(\sigma_n(t), t) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

この時, $\dot{\hat{\mathbf{e}}} \in \mathbb{R}^{4n}$ は次のようになる.

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} := \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t)) \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{c}(\sigma_1(t))}{dt} \\ \frac{d\theta_r(\sigma_1(t))}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\mathbf{c}(\sigma_n(t))}{dt} \\ \frac{d\theta_r(\sigma_n(t))}{dt} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

定理4より, 任意の時間で実形状ヤコビアンが特異点を持たないという条件下で次のことを達成すれば目的を成すのに十分である. つまり, 以下のことを達成する制御則を見つければよい.

$$\hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.6)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}) \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.7)$$

$$(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \in \mathcal{D}_\sigma \quad (5.8)$$

5.2 2 次の曲線パラメータの推定

実形状トラッキング問題に対して、制御則を見つけるために効果的な方法を与える。次のような2次の曲線パラメータの推定器を考える。

$$\mathbf{M}_\sigma \ddot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{u}_\sigma \quad (5.9)$$

ここで、 $\mathbf{M}_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は正定対称行列であり、 $\mathbf{u}_\sigma \in \mathbb{R}^n$ は推定器への入力ベクトルである。このように選択した理由は後にマニピュレータとこの推定器のダイナミクスを合わせることを考えるうちに分かる。

マニピュレータのダイナミクスと推定器のダイナミクスを合わせた式、合成ダイナミクスは次のように表せる。

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{u}} \quad (5.10)$$

ここで $\mathbf{q} := [\boldsymbol{\theta} \ \hat{\boldsymbol{\sigma}}]^T$ であり、 $\bar{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{4n}$, $\bar{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{4n}$ と $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{4n}$ は次のように定義される。

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) := \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) & \\ & \mathbf{M}_\sigma \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) := \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\bar{\mathbf{u}} := \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_\sigma \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

合成ダイナミクス (5.10) はマニピュレータのダイナミクスと同じような形を持つ。Property 1 は $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ と $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ に対して保存される。結局、合成ダイナミクス (5.10) に対してもトラッキングに対する同類の方法が適用できる。これが2次の曲線パラメータ推定器を選んだ理由である。

推定器の役割は次のように説明することも出来る。2次の曲線パラメータ推定器を考えると、関節空間は、状態変数が $(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ とその微分であるような空間に拡張される。従って、拡張された関節空間は明確に実形状トラッキングの作業空間に関係する。このため作業空間で安定性の議論を行なうことができる。

5.3 曲線パラメータ推定に基づく実形状トラッキング

5.3.1 Inverse-dynamics-based 実形状トラッキング

合成ダイナミクス (5.10) にたいして、次のような制御則を考える.

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \quad (5.15)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) \left\{ \ddot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_d \dot{\hat{\mathbf{e}}} \right\} \quad (5.16)$$

ここで, $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ は正定対称行列であり, $\ddot{\mathbf{x}}_d \in \mathbb{R}^{4n}$ は次のように $\dot{\mathbf{x}}$ の時間微分で定義される.

$$\dot{\mathbf{x}}_d := \frac{\partial \mathbf{p}_d}{\partial t}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, t) \quad (5.17)$$

$$= \dot{\mathbf{p}}_d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{o}, t) \quad (5.18)$$

合成ダイナミクス (5.10) に (5.15) と (5.16) を代入すると

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{u}}_0$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) \left\{ \ddot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_d \dot{\hat{\mathbf{e}}} \right\}$$

$$\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_d \dot{\hat{\mathbf{e}}}$$

$$(\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{x}}_d) + \mathbf{K}_d \dot{\hat{\mathbf{e}}} + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{o}$$

となり, $\dot{\hat{\mathbf{e}}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{p}_d}{\partial t}$ を時間微分は $\ddot{\hat{\mathbf{e}}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}_d}{\partial t}$ なので, 次のような実形状誤差に関する微分方程式が導かれる.

$$\ddot{\hat{\mathbf{e}}} + \mathbf{K}_d \dot{\hat{\mathbf{e}}} + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{o} \quad (5.19)$$

この式より $\mathbf{K}_p$ と $\mathbf{K}_d$ が正定対称行列のとき $\hat{\mathbf{e}}$ と $\dot{\hat{\mathbf{e}}}$ が指数関数的にゼロに漸近する. このことを定理としてまとめる.

定理 6

次のような曲線パラメータ推定を含む制御則を考える.

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \quad (5.20)$$

ここで $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d \in \mathbb{R}^{2n}$ と $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d \in \mathbb{R}^n$ は

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d \\ \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}, t) \left\{ \ddot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{K}_p \hat{\boldsymbol{e}} - \boldsymbol{K}_d \dot{\hat{\boldsymbol{e}}} \right\} \quad (5.21)$$

また $\dot{\boldsymbol{x}}_d \in \mathbb{R}^{3n}$ は

$$\dot{\boldsymbol{x}}_d := \frac{\partial \boldsymbol{p}_d}{\partial t}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, t) \quad (5.22)$$

であり, $\boldsymbol{K}_p, \boldsymbol{K}_d \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ は正定対称行列である. このとき実形状やコビアンが 0 でないとき, この制御則を含む閉ループ系は平衡点 $(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = (\boldsymbol{\theta}^*, \dot{\boldsymbol{\theta}}^*)$ へ局所的に漸近する. つまり, 局所的に実形状トラッキングの制御目的を達成する.

次のように定義される写像 $T: \mathbb{R}^{8n} \rightarrow \mathbb{R}^{8n}$ を考える.

$$\boldsymbol{z} = T(\boldsymbol{x}) \quad (5.23)$$

ここで, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{8n}$ は

$$\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^* \\ \dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}^* \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$\boldsymbol{z} := \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{e}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{e}}} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

また, 仮定 7 より

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}} \Big|_{\boldsymbol{x}=\mathbf{0}} &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}^*, t) & \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}^*, t) \end{bmatrix} \\ &= \{\det \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}^*, t)\}^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\neq 0 \quad (5.27)$$

写像 T は微分写像である. したがって,

$$\boldsymbol{z} \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.28)$$

それゆえ, 局所的に漸近安定である.

5.3.2 ID-based 実形状ラッキング制御則の再帰的表現

式 (5.20) は Newton-Euler 法によって再帰的に計算することが出来るため、式 (5.21) の再帰的な表現のみを示す。

ゲイン行列が次のように対角行列であると仮定する。

$$\mathbf{K}_p = \text{blockdiag}\{\mathbf{K}_{p,1}, \dots, \mathbf{K}_{p,n}\} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{K}_d = \text{blockdiag}\{\mathbf{K}_{d,1}, \dots, \mathbf{K}_{d,n}\} \quad (5.30)$$

このとき、 $\mathbf{K}_{p,i}, \mathbf{K}_{d,i} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ $i = 1 \dots n$ は正定対称行列である。

式 (5.21) の両辺に $\mathbf{J}(\mathbf{q}, t)$ を乗じることで次式を得る。

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, t) \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d \\ \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d \end{bmatrix} = \ddot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \dot{\hat{\mathbf{e}}} \quad (5.31)$$

このとき (5.31) 式の行を入れ換え、 i 番目の関節に関する回転加速度と i 番目のリンク位置の目標値に関する曲線パラメータが組になるように、 $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d$ と $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d$ を n 個に分割する。

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, t) \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d \\ \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & & & \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{J}_{n1} & \mathbf{J}_{n2} & \dots & \mathbf{J}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{d,1} \\ \ddot{\sigma}_{d,1} \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_{d,n} \\ \ddot{\sigma}_{d,n} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

この時、各要素 $J_{ij} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ は i と j の大きさによって以下のようになる。

$$\mathbf{J}_{ij} := \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{s,j}} & \frac{\partial \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{m,j}} & \mathbf{0} & -\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_i) \end{bmatrix}, & i = j, \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{s,j}} & \frac{\partial \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{m,j}} & \frac{\partial \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{r,j}} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & i > j \end{cases}$$

式 (5.32) の i 番目の要素をそれぞれ $\ddot{\theta}_{d,i} \in \mathbb{R}^3, \ddot{\sigma}_{d,i} \in \mathbb{R}$ とし、 $\ddot{\mathbf{q}}_{d,i} := [\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{d,i}^T \ \ddot{\sigma}_{d,i}]^T \in \mathbb{R}^4$ とすると次のようになる。

$$\ddot{\mathbf{q}}_{d,i} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{d,i} \\ \ddot{\sigma}_{d,i} \end{bmatrix}$$

$$= J_{ii}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, 0, 0, t) \\ \ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, 0, 0, t) \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{J}_{ik} \ddot{\mathbf{q}}_{d,k} - \sum_{k=1}^i \mathbf{J}_{ik} \dot{\mathbf{q}}_k - \mathbf{K}_{p,i} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i - \mathbf{K}_{d,i} \hat{\mathbf{e}}_i \right\} \quad (5.33)$$

この時、式 (5.33) のカッコ内第 2 項は以下のようにになる。

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{J}_{ik} \ddot{\mathbf{q}}_{d,k} &= - \sum_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,k}}(\theta) & \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,k}}(\theta) & \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{r,k}}(\theta) & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{s,k} \\ \ddot{\theta}_{m,k} \\ \ddot{\theta}_{r,k} \\ \ddot{\sigma}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} - \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,k}} \ddot{\theta}_{s,k} + \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,k}} \ddot{\theta}_{m,k} + \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{r,k}} \ddot{\theta}_{r,k} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{i-1} \left((\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{a}_{s,k} \ddot{\theta}_{s,k} + (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,k}, \theta_{r,k}) \mathbf{a}_{m,k} \ddot{\theta}_{m,k} + \right. \\ 0 \\ \left. (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{a}_{r,k} \ddot{\theta}_{r,k} \right) \\ \left. \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \Delta \dot{w}_{2,k}(\boldsymbol{\theta}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d) \right\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.34) \end{aligned}$$

ただし、 $\Delta \dot{w}_{2,k}(\boldsymbol{\theta}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d) \in \mathbb{R}^3$ は次のように定義される。

$$\Delta \dot{w}_{2,k}(\boldsymbol{\theta}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d) := \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{a}_{s,k} \ddot{\theta}_{s,k} + \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,k}, \theta_{r,k}) \mathbf{a}_{m,k} \ddot{\theta}_{m,k} + \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{a}_{r,k} \ddot{\theta}_{r,k}$$

また、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial \theta_{s,k}} &= \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{a}_{s,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \\ \frac{\partial p_i}{\partial \theta_{m,k}} &= \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,k}, \theta_{r,k}) \mathbf{a}_{m,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \\ \frac{\partial p_i}{\partial \theta_{r,k}} &= \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{a}_{r,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \end{aligned}$$

また、カッコ内第 3 項は以下のようにになる。

$$- \sum_{k=1}^i \mathbf{J}_{ik} \dot{\mathbf{q}}_{d,k} = - \sum_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,j}}(\theta) \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,j}}(\theta) \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{r,j}}(\theta) \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{s,k} \\ \dot{\theta}_{m,k} \\ \dot{\theta}_{r,k} \\ \dot{\sigma}_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,i}}(\theta) \right) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,i}}(\theta) \right) & 0 & -\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \right) \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt}(1) & -\frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_i) \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{s,i} \\ \dot{\theta}_{m,i} \\ \dot{\theta}_{m,i} \\ \dot{\sigma}_i \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,k}}(\theta) \right) \dot{\theta}_{s,k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,k}}(\theta) \right) \dot{\theta}_{m,k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,k}}(\theta) \right) \dot{\theta}_{m,k} \right\} \\ 0 \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,i}}(\theta) \right) \dot{\theta}_{s,i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,i}}(\theta) \right) \dot{\theta}_{m,i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \right) \dot{\sigma}_i \\ -\frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_r}{d\sigma}(\sigma_i) \right) \dot{\sigma}_i \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^i \left\{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \Delta \dot{\mathbf{w}}_{1,k}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \times \Delta \mathbf{w}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \right\} \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^i \left\{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) \times \Delta \dot{\mathbf{w}}_{1,s,i}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \times \Delta \mathbf{w}_{s,k}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \right\} \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma \partial t}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma^2}(\dot{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i^2 \\ \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \sigma \partial t}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \sigma^2}(\dot{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i^2 \end{bmatrix} \tag{5.35}
\end{aligned}$$

ただし、 $\Delta \dot{\mathbf{w}}_{1,k}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}), \Delta \mathbf{w}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \in \Re^3$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{\mathbf{w}}_{1,k}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &:= \left([\mathbf{w}_{k-1} \times] \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{a}_{s,k} \dot{\theta}_{s,k} + ([\mathbf{w}_k \times] \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,k}, \theta_{r,k}) \mathbf{a}_{m,k} + \boldsymbol{\Phi}_k \dot{\mathbf{R}}^T(a_{r,k}, \theta_{r,k}) \mathbf{a}_{m,k}) \dot{\theta}_{m,k} \right. \\
&\quad \left. + [\mathbf{w}_k \times] \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{a}_{r,k} \dot{\theta}_{r,k} \right) \\
\Delta \mathbf{w}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &:= \left(\boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{a}_{s,k} \dot{\theta}_{s,k} + \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,k}, \theta_r) \mathbf{a}_{m,k} \dot{\theta}_{m,k} + \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{a}_{r,k} \dot{\theta}_{r,k} \right) \\
\Delta \dot{\mathbf{w}}_{1,s,i}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &:= \left([\mathbf{w}_{i-1} \times] \boldsymbol{\Phi}_{i-1} \mathbf{a}_{s,i} \dot{\theta}_{s,i} + [\mathbf{w}_i \times] \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,i}, \theta_r) \mathbf{a}_{m,i} \boldsymbol{\Phi}_i \dot{\mathbf{R}}^T(a_{r,k}, \theta_{r,k}) \mathbf{a}_{m,k} \dot{\theta}_{m,i} \right) \\
\Delta \mathbf{w}_i(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &:= \left(\boldsymbol{\Phi}_{i-1} \mathbf{a}_{s,i} \dot{\theta}_{s,i} + \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,i}, \theta_r) \mathbf{a}_{m,i} \dot{\theta}_{m,i} \right)
\end{aligned}$$

また、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,k}}(\theta) \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,k}}(\theta) \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{r,k}}(\theta) \right)$ は次のように表せることに注意する。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{s,k}}(\theta) \right) &= \frac{d}{dt} \left\{ \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{a}_{s,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \right\} \\
&= \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{k-1} \mathbf{a}_{s,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) + \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{a}_{s,k} \times (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \\
&= [\mathbf{w}_{k-1} \times] \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{a}_{s,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) + \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{a}_{s,k} \times (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{m,k}}(\theta) \right) &= \dot{\boldsymbol{\Phi}}_k \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,k}, \theta_{r,k}) \mathbf{a}_{m,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) + \boldsymbol{\Phi}_k \dot{\mathbf{R}}^T(\mathbf{a}_{r,k}, \theta_{r,k}) \mathbf{a}_{m,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \\
&\quad + \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,k}, \theta_{r,k}) \mathbf{a}_{m,k} \times (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\mathbf{w}_k \times] \Phi_k \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,i}, \theta_r) \mathbf{a}_{r,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) + \Phi_k \dot{\mathbf{R}}^T(\mathbf{a}_{r,k}, \theta_{r,k}) \mathbf{a}_{m,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \\
&\quad + \Phi_k \mathbf{R}^T(\mathbf{a}_{r,i}, \theta_r) \mathbf{a}_{m,k} \times (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \theta_{r,k}}(\theta) \right) &= \dot{\Phi}_k \mathbf{a}_{r,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) + \Phi_k \mathbf{a}_{r,k} \times (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \\
&= [\mathbf{w}_k \times] \Phi_k \mathbf{a}_{r,k} \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) + \Phi_k \mathbf{a}_{r,k} \times (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{c}}{d\sigma}(\sigma_i) \right) &= \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma \partial t}(\hat{\sigma}_i, t) + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma^2}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i
\end{aligned}$$

このとき、次の関係式がある。

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1} &= \Delta \mathbf{w}_k \\
\dot{\mathbf{w}}_k - \dot{\mathbf{w}}_{k-1} &= \Delta \dot{\mathbf{w}}_{1,k} + \Delta \dot{\mathbf{w}}_{2,k}
\end{aligned}$$

また、次のことを暗黙に意味する。

$$\ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, 0, 0, t) + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma^2}(\hat{\sigma}_i, t) \hat{\sigma}_i^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma \partial t}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i = \ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, \dot{\sigma}_i, 0, t) \quad (5.36)$$

$$\ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, 0, 0, t) + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \sigma^2}(\hat{\sigma}_i, t) \hat{\sigma}_i^2 + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \sigma \partial t}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i = \ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, \dot{\sigma}_i, 0, t) \quad (5.37)$$

よって、式 (5.32) のカッコ内第1項、第2項、第3項をまとめると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, 0, 0, t) \\ \ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, 0, 0, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{i-1} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \Delta \dot{\mathbf{w}}_{2,k}(\boldsymbol{\theta}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{i-1} \{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \Delta \dot{\mathbf{w}}_{1,k}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \times \Delta \mathbf{w}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) \times \Delta \dot{\mathbf{w}}_{1,s,i}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{i-1}) \times \Delta \mathbf{w}_{s,i}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma \partial t}(\sigma_i, t) \dot{\sigma}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma^2}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i^2 \\ \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \sigma \partial t}(\sigma_i, t) \dot{\sigma}_i + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \sigma^2}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, \dot{\sigma}_i, 0, t) \\ \ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, \dot{\sigma}_i, 0, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{i-1} \{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \Delta \dot{\mathbf{w}}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d) + (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \times \Delta \mathbf{w}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) \times \Delta \dot{\mathbf{w}}_{1,s,i}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{i-1}) \times \Delta \mathbf{w}_{s,i}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, \dot{\hat{\sigma}}, 0, t) \\ \ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, \dot{\hat{\sigma}}, 0, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{d}{dt} \left\{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \Delta \mathbf{w}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \right\} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) \times \Delta \dot{\mathbf{w}}_{1,s,i}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{i-1}) \times \Delta \mathbf{w}_{s,i}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, \dot{\hat{\sigma}}, 0, t) - \ddot{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d) |_{\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{d,i}=\mathbf{0}} \\ \ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, \dot{\hat{\sigma}}, 0, t) \end{bmatrix} \quad (5.38)
\end{aligned}$$

よって、再帰的な表現は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{q}}_{d,i} &= \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{d,i} \\ \ddot{\sigma}_{d,i} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{J}_{ii}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, \dot{\hat{\sigma}}, 0, t) - \ddot{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d) |_{\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{d,i}=\mathbf{0}} \\ \ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, \dot{\hat{\sigma}}, 0, t) \end{bmatrix} - \mathbf{K}_{p,i} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i - \mathbf{K}_{d,i} \hat{\mathbf{e}}_i \right) \quad (5.39)
\end{aligned}$$

5.3.3 リアプノフベース実形状トラッキング

Slotine, Li によって提案された Lyapunov-based 法を超多自由度マニピュレータの実形状制御に適用する．つまり直接システムの状態を目標点に持っていくのではなく，スライディングサーフェスに持っていく．

はじめに次のような目標点に収束するスライディングサーフェスを考える．

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} + \boldsymbol{\Lambda} \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \quad (5.40)$$

ここで $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ は正定対称行列である．次に，下式のようなサーフェスを考える．

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) (\dot{\hat{\mathbf{e}}} + \boldsymbol{\Lambda} \hat{\mathbf{e}}) = \mathbf{0} \quad (5.41)$$

そして，スライディング変数 s_c を上式の左辺とし定義する．

$$\mathbf{s}_c := \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) (\dot{\hat{\mathbf{e}}} + \boldsymbol{\Lambda} \hat{\mathbf{e}}) \quad (5.42)$$

さらに， $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref} \in \mathbb{R}^{3n}$ と $\dot{\hat{\sigma}} \in \mathbb{R}^n$ を組み合わせた $\mathbf{s}_c := \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{ref}$ となるような仮想的な速度 $\dot{\mathbf{q}}_{ref} \in \mathbb{R}^{4n}$ を定義する．

$$\dot{\mathbf{q}}_{ref} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref} \\ \dot{\hat{\sigma}}_{ref} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned}
&:= \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{s}_c \\
&= \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) (\dot{\hat{\mathbf{e}}} - \Lambda \hat{\mathbf{e}}) \\
&= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{e}}} - \Lambda \hat{\mathbf{e}} \right\} \\
&= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{p}_d}{\partial t}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, t) - \Lambda \hat{\mathbf{e}} \right\} \\
&= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, t) \left\{ \frac{\partial \mathbf{p}_d}{\partial t}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, t) - \Lambda \hat{\mathbf{e}} \right\}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

ここで次のような Lyapunov-based 制御則を考える.

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_{ref} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_{ref} + \bar{\mathbf{g}} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}, t)\mathbf{K}_p\hat{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_v\mathbf{s}_c \tag{5.45}$$

ここで $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ と $\mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ は正定対称行列である. 制御則 (5.45) を合成システム (5.10) に代入し, 定義 (5.42) を使うと次のようになる.

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_c + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_c + \mathbf{K}_v\mathbf{s}_c + \mathbf{J}^T(\mathbf{q}, t)\mathbf{K}_p\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \tag{5.46}$$

$V_c : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ は次のような $(\mathbf{s}_c, \hat{\mathbf{e}})$ に関する正定関数とする.

$$V_c(\mathbf{s}_c, \hat{\mathbf{e}}) := \frac{1}{2}\mathbf{s}_c^T \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{s}_c + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p\hat{\mathbf{e}} \tag{5.47}$$

時間微分をとると

$$\dot{V}(\mathbf{s}_c, \hat{\mathbf{e}}) = \mathbf{s}_c^T \dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{q})\mathbf{s}_c + \frac{1}{2}\mathbf{s}_c^T \dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{q})\mathbf{s}_c + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p\dot{\hat{\mathbf{e}}} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
&= -\mathbf{s}_c^T \mathbf{K}_v\mathbf{s}_c + \frac{1}{2}\mathbf{s}_c^T \left\{ \dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) - 2\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right\} \mathbf{s}_c \\
&\quad - \mathbf{s}_c^T \mathbf{J}^T(\mathbf{q}, t)\mathbf{K}_p\hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p\dot{\hat{\mathbf{e}}}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$= -\mathbf{s}_c^T \mathbf{K}_v\mathbf{s}_c - \hat{\mathbf{e}}^T \Lambda^T \mathbf{K}_p\hat{\mathbf{e}} \tag{5.50}$$

ここで, $\dot{V}$ は, もし $\Lambda^T \mathbf{K}_p = \mathbf{K}_p^T \Lambda > 0$ ならば, $(\mathbf{s}_c, \hat{\mathbf{e}})$ に関して負定である. したがって, リアプノフの定理より $\hat{\mathbf{e}}$ と $\mathbf{s}_c$ 漸近的にゼロへ収束する. つまり, $\mathbf{s}_c$ の定義より, $\hat{\mathbf{e}}$ と $\dot{\hat{\mathbf{e}}}$ は漸近的にゼロへ収束する.

上の結果を定理としてまとめる.

定理 7 (Lyapunov-based Real Shape Tracking)

次のような曲線パラメータ推定を持つ制御則を考える.

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{ref} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\tau}_\theta \tag{5.51}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_{ref} + \mathbf{K}_\sigma \boldsymbol{\tau}_\sigma \tag{5.52}$$

ここで, $\tau_\theta \in \mathbb{R}^{3n}$ と $\tau_\sigma \in \mathbb{R}^n$ は

$$\begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\sigma \end{bmatrix} = -J^T(q, t)K_p \hat{e} - K_v(\dot{q} - \dot{q}_{ref}) \quad (5.53)$$

であり, $\dot{q}_{ref} \in \mathbb{R}^{4n}$, $\dot{\theta} \in \mathbb{R}^{3n}$, $\dot{\sigma}_{ref} \in \mathbb{R}^n$ は次のように定義される.

$$\dot{q}_{ref} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{ref} \\ \dot{\sigma}_{ref} \end{bmatrix} := J^{-1}(q, t) \left\{ \frac{\partial p_d}{\partial t}(\hat{\sigma}, t) - \Lambda \hat{e} \right\} \quad (5.54)$$

また, $K_p, \Lambda \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ は $\Lambda^T K_p = K_p^T \Lambda > 0$ という関係を持つ正定対称行列であり, $K_v \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $K_\sigma := M_\sigma^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ もまた正定対称行列である. この時仮定6の基で, この制御則を持つ閉ループ系は $(\theta, \dot{\theta}) = (\theta^*, \dot{\theta}^*)$ で局所的漸近安定である.

証明は ID-based 制御則と同じなので略す.

5.3.4 Lyapunov-based 実形状トラッキング制御則の再帰的な表現

$$u = M(\theta)\ddot{\theta}_{ref} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_{ref} + g(\theta) + \tau_\theta \quad (5.55)$$

この式の最初の3つの項は普通の Lyapunov-based method と同じように計算される.

$$\begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\sigma \end{bmatrix} = -J^T(q, t)K_p \hat{e} - K_v(\dot{q}, \dot{q}_{ref}) \quad (5.56)$$

この式は前にしめした形状レギュレーションの制御則と同じような構造を持っているので, $\dot{q}_{ref}, \ddot{q}_{ref}$ の再帰的な表現さえ考えれば良い.

まず, Λ を次のように考える.

$$\Lambda = \text{blockdiag} \{ \Lambda_1, \dots, \Lambda_n \} \quad (5.57)$$

ここで, $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は正定対称行列である.

$\ddot{q}_{d,i}$ の定義と同じ方法で $\dot{q}_{ref,i}$ を定義すると次の式が得られる.

$$\dot{q}_{ref,i} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{ref,i} \\ \dot{\sigma}_{ref,i} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$= \bar{J}_{ii}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{c}(\hat{\sigma}_i, 0, t) \\ \dot{\theta}(\hat{\sigma}_i, 0, t) \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{J}_{i,k} \dot{q}_{ref,k} - \Lambda_i \hat{e}_i \right\} \quad (5.59)$$

括弧の中の 2 番目の項は次のように表される.

$$-\sum_{k=1}^{i-1} \bar{\mathbf{J}}_{ik} \dot{\mathbf{q}}_{ref,k} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{p}}_{i-1}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

したがって次のようになる.

$$\dot{\mathbf{q}}_{ref,i} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref,i} \\ \dot{\sigma}_{ref,i} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

$$= \bar{\mathbf{J}}_{ii}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, 0, t) \\ \dot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, 0, t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{i-1}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref})|_{\dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref,i}=\mathbf{0}} \\ 0 \end{bmatrix} - \boldsymbol{\Lambda}_i \hat{\mathbf{e}}_i \right\} \quad (5.62)$$

$$= \bar{\mathbf{J}}_{ii}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, 0, t) - \dot{\mathbf{p}}_{i-1}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref})|_{\dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref,i}=\mathbf{0}} \\ \dot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, 0, t) \end{bmatrix} - \boldsymbol{\Lambda}_i \hat{\mathbf{e}}_i \right\} \quad (5.63)$$

一方, $\ddot{\mathbf{q}}_{ref,i}$ は次のように書くことができる.

$$\ddot{\mathbf{q}}_{ref,i} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{ref,i} \\ \ddot{\sigma}_{ref,i} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

$$= \bar{\mathbf{J}}_{ii}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, \dot{\sigma}_i, 0, t) \\ \ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, \dot{\sigma}_i, 0, t) \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{\mathbf{J}}_{ik} \ddot{\mathbf{q}}_{ref,k} - \sum_{k=1}^i \dot{\bar{\mathbf{J}}}_{ik} \dot{\mathbf{q}}_{ref,i} - \boldsymbol{\Lambda}_i \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i \right\} \quad (5.65)$$

括弧の第 2 項と第 3 項は, 上式は (5.33) 式と同じ形であるため詳細な計算は省くが, 次のように表される.

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{i-1} \bar{\mathbf{J}}_{ik} \ddot{\mathbf{q}}_{ref,k} &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{2,k}(\boldsymbol{\theta}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{ref}) \right\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.66) \\ -\sum_{k=1}^i \bar{\mathbf{J}}_{ik} \dot{\mathbf{q}}_{ref,k} &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^i \left\{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{1,k}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \times \Delta \mathbf{w}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \right\} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^i \left\{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) \times \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{1,s,i}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{k-1}) \times \Delta \mathbf{w}_{s,k}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \right\} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma \partial t}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma^2}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i^2 \\ \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \sigma \partial t}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \sigma^2}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i^2 \end{bmatrix} \quad (5.67) \end{aligned}$$

また, 次の関係がある.

$$\ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, 0, 0, t) + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma^2}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial \sigma \partial t}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i = \ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, \dot{\sigma}_i, 0, t) \quad (5.68)$$

$$\ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, 0, 0, t) + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \sigma^2}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i^2 + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \sigma \partial t}(\hat{\sigma}_i, t) \dot{\sigma}_i = \ddot{\theta}_r(\hat{\sigma}_i, \dot{\sigma}_i, 0, t) \quad (5.69)$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} \left\{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{2,k}(\boldsymbol{\theta}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r) \right\} \quad (5.70)$$

$$+ \sum_{k=1}^i \left\{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{k-1}) \times \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{1,k}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref}) \right\} \quad (5.71)$$

$$= \sum_{k=1}^i \left\{ \left(\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{ref}) \right]_{\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{r,i}=\mathbf{0}} + \left[\boldsymbol{\omega}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref}) \times \right] \left[\boldsymbol{\omega}_k(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \right] \right) \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{l}_k \right\} \quad (5.72)$$

$$= -\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{ref})|_{\boldsymbol{\theta}_{ref,i}=\mathbf{0}} \quad (5.73)$$

そして、 $\ddot{\mathbf{q}}_{ref,i}$ の再帰的表現は次のようになる。

$$\ddot{\mathbf{q}}_{ref,i} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{ref,i} \\ \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_{ref,i} \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$= \mathbf{J}_{ii}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{c}}(\hat{\sigma}_i, \dot{\hat{\sigma}}_i, \dot{\hat{\sigma}}_{ref,i}, 0, t) - \ddot{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{ref}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{ref})|_{\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{ref,i}=\mathbf{0}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r(\hat{\sigma}_i, \dot{\hat{\sigma}}_i, 0, t) \end{bmatrix} - \Lambda_i \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i \right\} \quad (5.75)$$

5.4 まとめ

目標の実形状として与える時変の空間曲線に超多自由度マニピュレータの実形状を追従させる実形状トラッキング制御則を2つ上げた。1つはID-based 実形状トラッキング制御則で、もう1つはLyapunov-based 実形状トラッキング制御則である。これらの制御則を導く際に、レギュレーション制御則の導出と同様に、目標の実形状に対応する曲線パラメータの推定を取り入れた。またこれらの制御則の再帰的表現を与えた。

第 6 章

おわりに

本研究において、超多自由度マニピュレータの形に着眼し、超多自由度マニピュレータの巨視的に見た形（形状）と区別して、リンクの向きまでも考慮した形、超多自由度マニピュレータの実形状の制御の解析を行なった。

本論文では、超多自由度マニピュレータに一つの関節に 3 つの自由度を持たせた制御対象を扱った。これはリンクの向きがリンクの位置に依存することを防ぎ、さらにリンクの向きを陽に制御するためである。超多自由度マニピュレータは 1 つの関節に主軸と副軸、補軸を持つ。主軸と副軸に加えるトルクで主にリンクの位置制御に、補軸に加えるトルクでリンクの向きを制御を行なうことが可能となる。また、制御目標を与えるのに、拡張空間曲線を使用した。通常の空間曲線はリンク座標系の情報を表現できず、つまり、超多自由度マニピュレータのリンクの向きを表現できず、また、そのマニピュレータの作業環境の情報が、例えば障害物回避作業における障害物の表面など、欠如していた。本稿では、Chirikjian らが示した拡張 Frenet-Serret の公式を用いて曲線の長さ方向のねじれのパラメータを加えることで、通常の曲線に組み込み、これを拡張空間曲線と呼んでこれを扱った。

次に、この曲線と超多自由度マニピュレータの実形状の一致を定義した。これは、リンクの位置が曲線上にあり、また、同時に関節の補軸の回転量が曲線の長さ方向のねじれの量と一致するときとした。そして、超多自由度マニピュレータの実形状とその目標実形状を表したパラメトリックな空間曲線との誤差が定義でき、その誤差角度空間とマニピュレータの関節角度空間の写像を表わす実形状ヤコビアンを示した。この実形状ヤコビアンの特異点はマニピュレータの構造に関する部分と曲線に関する部分に分けられる。これ

は、形状ヤコビアンの特異点と同じであり、リンクの向きの制御が特異点の変化に結びつかないことを示している。この理由として、誤差を定義するときにリンクの向きに関するパラメータ、つまり、曲線の長さ方向のねじれの量であるが、これがどこを基準に測られた量であるか表しておらず、一意性を示していないためである。

実形状の制御則を導く際に、目標実形状に関する曲線パラメータ推定を行なう。このアイデアを使うことで、非線形連立方程式を解かなければならない実形状逆問題の解を求めずに、制御目標を達成できる。これを用いて、あらかじめ時不変な空間曲線を与えられたマニピュレータの実形状に一致させる1つの実形状レギュレーション制御則と時変な空間曲線であたえられた実形状に一致させる2つの実形状トラッキング制御則を導いた。

実形状レギュレーション制御則は、あるスカラー関数がリアプノフ関数に成ることから、Lasalle の定理から導かれる。また実形状トラッキング制御則は、一つは ID-based 法に基づいて導き、もう一つは Lyapunov-based 法に基づいて導出した。すべてにおいて局所的漸近安定を保証する制御則である。そして、これらの制御則を物理的に意味が分かり易く、また、コンピュータ上で実装し易い再帰的表現を与えた。そして実形状レギュレーション制御則においては、実際に 3D グラフィックシミュレーションでその制御則の有効性を確認した。

以下に実形状制御における課題を上げる。この本論文における実形状制御について論証は目標実形状を表す拡張空間曲線を与えることを前提に進められている。つまり、作業を与えられてからどのように目標として与える拡張空間曲線を与えるかについては示していない。また、本論文で示した制御則は局所的にしか安定性が保証されず、またその領域が示されていない。漸近安定性も保証されるが、その収束の速さについては何も分からない。以上のことが課題として上げられる。

参考文献

- [1] H. Mochiyama: *Shape Control of Manipulators with Hyper Degrees of Freedom*, Doctoral Dissertation, School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology, 1998.
- [2] G.S.Chirikjian: *Theory and Applications of Hyper-Redundant Robotic Mechanisms*, Ph.D thesis, Dept.of Applied Mechanics, California Institute of Technology, June, 1992.
- [3] Richard M.Murray, Zexiang Li, S.Shankar Sastry: *A Mathematical Introduction to ROBOT MANIPULATION*,CRC Press LLC, 1994.
- [4] K. Salisbury: *Whole Arm Manipulation*,Proc. the 4th Int. Sym. on Robotics Research, 183/189, 1987.
- [5] C.Canudas de Wit,B.Siciliano and G.Bastin Eds: *Theory of Robot Control*, Springer, 1996
- [6] 有本卓: ロボットの力学と制御,朝倉書店, 1990
- [7] 砂田利一: 曲面の幾何, 岩波書店, 1996
- [8] 砂田利一: 幾何入門1, 岩波書店, 1996

謝辞

本研究において、暖かく御指導して下さいました藤田政之助教授に謝意を申し上げます。様々な御助言や御指摘を下さった藤田研究室の皆様には大変感謝しております。この紙面を借りてお礼を申し上げます。最後に望山洋助手にはこの研究を通して至る所でお世話になりました。深く感謝申し上げます。