

Title	線形論理における古典的証明と直観主義的証明の関係 についての研究
Author(s)	伊藤, 成孝
Citation	
Issue Date	2015-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/12628">http://hdl.handle.net/10119/12628</a>
Rights	
Description	Supervisor : 石原 哉, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

線形論理における古典的証明と  
直観主義的証明の関係についての研究

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報科学専攻

伊藤 成孝

2015年3月

# 修士論文

## 線形論理における古典的証明と 直観主義的証明の関係についての研究

指導教員 石原 哉教授

審査委員主査 石原 哉教授  
審査委員 緒方 和博教授  
審査委員 寺内 多智弘教授

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報科学専攻

1210009 伊藤 成孝

提出年月: 2015 年 2 月

## 概要

本稿では、線形論理における古典的証明と直観主義的証明にどれくらいの差があるのかを調査する。特に、結合子がならばに関する  $\rightarrow$  だけからなる論理と直観主義と、その論理に定数  $0$  を加えた論理に対する、古典的証明と直観主義的証明の関係を調査する。形式体系には帰納的証明構造を用いて、グラフ的なつながりを論理式間に与え、そのつながりに関して特徴付けを行う。

# 目次

<b>第1章</b>	<b>はじめに</b>	<b>1</b>
1.1	古典論理と直観主義論理	1
1.2	先行研究	1
1.3	研究目的	2
<b>第2章</b>	<b>線形論理</b>	<b>3</b>
2.1	線形論理とは	3
2.2	線形論理におけるシークエント計算	4
2.2.1	論理式	4
2.2.2	古典線形論理	6
2.2.3	直観主義線形論理	8
2.2.4	様々な線形論理	8
2.3	構文論に関する結果	9
2.3.1	証明可能なシークエント	9
2.3.2	可逆性	10
2.3.3	カット除去	12
2.4	様々な形式体系	18
2.4.1	片側シークエント計算	18
2.4.2	線形論理における自然演繹	19
2.4.3	線形論理におけるヒルベルト流	19
<b>第3章</b>	<b>証明構造</b>	<b>22</b>
3.1	乗法線形論理に関する証明構造	22
3.1.1	証明構造	22
3.1.2	帰納的証明構造	24
3.2	プルーフネットと帰納的証明構造	25
3.3	$\rightarrow$ 結合子に関する帰納的証明構造	37
3.3.1	シークエント計算との対応関係	39
3.3.2	帰納的証明構造に関する概念	39

3.3.3	可逆性 . . . . .	41
<b>第 4 章</b>	<b>線形論理における古典論理と直観主義論理の関係</b>	<b>44</b>
4.1	→ 結合子だけからなる線形論理での関係 . . . . .	44
4.2	MIZLL に関する関係 . . . . .	46
4.2.1	帰納的証明構造を用いたアプローチ . . . . .	46
<b>第 5 章</b>	<b>結論</b>	<b>61</b>

# 第1章 はじめに

## 1.1 古典論理と直観主義論理

古典論理とは、最もよく使われる論理である。これは研究に関してだけでなく、日常生活に関してにも言うことができる。例えば、高校生で習う論理、デジタル回路やブール値などに用いられるのも古典論理である。古典論理の特徴として、排中律 ( $A \vee \neg A$ ) や二重否定の除去律 ( $\neg\neg A \rightarrow A$ ) が成り立つこと、ド・モルガンの法則 ( $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ ) など) が成り立つことが挙げられる。また、真理値表のように二値で表現できるのも特徴である。このように、我々の最も身近な論理が古典論理である。

しかし、論理は古典論理だけではない。直観主義論理という古典論理より弱い論理がある。論理が弱いとは、成り立つ論理式が少ないことを意味する。例えば、先ほどの排中律や二重否定の除去律は直観主義論理では成り立たない。

直観主義論理とは、ブラウワーによる直観主義的な考え方を弟子のハイティングが形式化したことで生まれた論理である。ブラウワーは、数学的対象は数学者の精神の産物であり、ある性質をもつ数学的対象が存在するということを示すにも、構成的な手続きに従ってそのような対象が存在することを示さなければならぬと考えた。これがブラウワーの直観主義的な考え方であり、この考え方を形式化したものが直観主義論理である。直観主義に基づく数学などは構成的数学と呼ばれ、様々な研究がなされている。また、直観主義論理に関する有名な定理として、カリー・Howard 同型対応が知られている。これは、直観主義論理の証明とプログラムの間には対応関係があるという定理である。この定理からも分かるように、直観主義論理の研究は情報科学の観点からも見ても重要である。

## 1.2 先行研究

直観主義論理は古典論理より弱い論理であると述べた。つまり、それらの論理の間には差がある。では、どれくらいの差があるのだろうか、直観主義論理にどのような仮定を加えることで古典論理と証明能力が同じになるのだろうか。よく知

られた結果として、論理式に存在する全ての変数に対する排中律または、二重否定の除去律を追加すれば古典論理と証明能力が同じになるという結果 [3] がある。しかし、公理のように何も加えなくても直観主義論理で成り立つ論理式も存在する。よって、次に浮かび上がる疑問は、どのような変数に対する排中律や二重否定の除去律を追加すれば十分なのかということである。これに対して、論理式だけを見て必要な集合を定める結果が石原 [5, 6] によって与えられた。

### 1.3 研究目的

本研究では線形論理に対して、この問題に取り組む。線形論理とは、構造規則を制限した部分構造論理の1つである。全ての資源(仮定)は証明の中で必ず1度だけ使われるという考え方を持つ論理である。線形論理にも先ほどの論理と同様に、古典線形論理と直観主義線形論理がある。本研究の目的としては、古典線形論理と直観主義論理の差はどれくらいあるのかを解析することである。また、先行研究のように論理式だけで定めるのではなく、証明図を解析して必要な集合を定めている。

## 第2章 線形論理

### 2.1 線形論理とは

線形論理は1987年にジャン＝イヴ・ジラルドによって提唱された部分構造論理である [4]。部分構造論理とは、構造規則を制限した論理のことである。線形論理では、弱化 (weakening) 規則と縮約 (contraction) 規則を認めていない。それによって、線形論理では仮定が資源のように扱われ、証明の中で必ず一度だけ使用されなければならない。そのため、仮定について何をいくつ使うのかということを明確に表現することに適した論理である。先ほどの論理と線形論理の違いを直観的に理解するために、買い物を題材にした有名な例がある。

論理式  $A, B, C$  をそれぞれ「100円を支払う」、「コーヒーが1本買える」、「お茶が1本買える」ことを意味するものとする。さらに、「100円でコーヒーが1本買える」と「100円でお茶を1本買える」ことを仮定する。つまり、 $A \Rightarrow B$  と  $A \Rightarrow C$  を仮定する。線形論理のかつを  $\star$  を用いて表現するとすれば、以下のような証明図が得られる。

$$\frac{\overline{A \Rightarrow B} \quad \overline{A \Rightarrow C}}{A, A \Rightarrow B \star C} R\star$$

$A, A \Rightarrow B \star C$  は、2つの100円を支払うことでコーヒーとお茶が買えることを意味している。同様に、通常の論理で考えると、 $A, A \Rightarrow B \wedge C$  の証明図だけでなく、次のような証明図も得ることができる。

$$\frac{\overline{A \Rightarrow B} \quad \overline{A \Rightarrow C}}{A \Rightarrow B \wedge C} R\wedge$$

これは100円でお茶とコーヒーが買えることを意味している。この例のように、仮定を自由に用いることを許す論理について考えると、日常生活の考え方と違いが生まれてしまう。逆に、数学のように仮定を自由に用いた方が都合がよい場合は、線形論理の考え方は不便に感じられる。

## 2.2 線形論理におけるシークエント計算

ここでは、線形論理に対する形式体系を与える。有名な形式体系として、自然演繹やヒルベルト流、シークエント計算がある。最初の2つは公理と規則の紹介に留め、本稿では主にシークエント計算を用いて議論する。

シークエント計算は、式 (sequent)  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  を用いて計算する形式体系である。ここで、 $\Gamma, \Delta$  は論理式の列を表す。この式の直感的な意味は、 $\Gamma$  中の全ての論理式を仮定すれば、 $\Delta$  中に証明可能な論理式が存在するというものである。つまり、 $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$  と表すこともできる。

### 2.2.1 論理式

初めに、線形論理で使用する言語から定義する。先ほどから使用している論理式などの言葉もここで正確に定義する。さらに、シークエント計算の定義に必要な基本的な概念も定義する。

線形論理の言語は以下のものからなる。

1. 論理結合子  $\wedge, \vee, \star, +, \multimap, !, ?$
2. 量化記号  $\forall, \exists$
3. 対象変数  $x, y, z, \dots$
4. 対象定数  $c, d, \dots$
5. 関数記号  $f, g, \dots$
6. 述語記号  $P, Q, \dots$
7. 補助記号  $(, ), , (コンマ)$

項と論理式は以下のように定義される。

定義 (項).  $t, s, \dots$  を項とする。

1. 対象変数と対象定数は項である。
2.  $f$  が  $m$  変数の関数記号で、 $t_1, \dots, t_m$  が項ならば、 $f(t_1, \dots, t_m)$  も項である。

定義 (論理式).  $A, B, C, \dots$  を論理式とする。

1.  $P$  が  $n$  変数の述語記号で、 $t_1, \dots, t_m$  が項ならば、 $P(t_1, \dots, t_m)$  は論理式である。この形の論理式を原子論理式 (*atomic formula*) と呼ぶ。
2.  $A, B$  が論理式ならば、 $(A \circ B)$  も論理式である。ただし、 $\circ \in \{\wedge, \vee, \star, +, \neg\}$
3.  $A$  が論理式で、 $x$  が対象変数ならば、 $(\forall x.A)$  と  $(\exists x.A)$  も論理式である。
4.  $A$  が論理式ならば、 $(!A)$  と  $(?A)$  も論理式である。

以下の条件の元で混乱が生じないならば括弧を省略してもよい。

- $\forall, \exists, !, ?$  は  $\wedge, \vee, \star, +, \neg$  より結合が強い。
- $\wedge, \vee, \star, +$  は  $\neg$  より結合が強い。
- $\wedge, \vee, \star, +$  は左結合で、 $\neg$  は右結合である。

例.

$$\begin{aligned} ((A \star B) \neg C) &= A \star B \neg C \\ ((A + B) \wedge C) &= A + B \wedge C \\ (A \vee (B \star C)) &= A \vee (B \star C) \\ (A \neg (B \neg C)) &= A \neg B \neg C \end{aligned}$$

定義 (自由変数).  $A$  に出現する変数の集合を  $V(A)$  とする。このとき、論理式  $A$  の自由変数  $FV(A)$  は以下のように定義される。

1.  $A$  が原子論理式ならば、 $FV(A) = V(A)$  である。
2.  $\circ \in \{\wedge, \vee, \star, +, \neg\}$  とすると、 $FV(A \circ B) = FV(A) \cup FV(B)$  である。
3.  $FV(\forall x.A) = FV(\exists x.A) = FV(A) \setminus \{x\}$  である。
4.  $FV(!A) = FV(?A) = FV(A)$  である。

定義 (束縛変数). また、論理式  $A$  の束縛変数  $BV(A)$  は以下のように定義される。

1.  $A$  が原子論理式ならば、 $BV(A) = \emptyset$  である。
2.  $\circ \in \{\wedge, \vee, \star, +, \neg\}$  とすると、 $BV(A \circ B) = BV(A) \cup BV(B)$  である。
3.  $BV(\forall x.A) = BV(\exists x.A) = BV(A) \cup \{x\}$  である。
4.  $BV(!A) = BV(?A) = BV(A)$  である。

これらを用いて項の代入を定義をする。

定義 (項の代入).  $x$  を変数、 $t$  を項とする。

1.  $s$  を項とするとき、 $s$  に出現する  $x$  を  $t$  で置き換えることを  $s[x/t]$  と表す。
2.  $A$  が原子論理式  $P(s_1, \dots, s_m)$  ならば、 $A[x/t] = P(s_1[x/t], \dots, s_m[x/t])$  である。
3.  $\circ \in \{\wedge, \vee, \star, +, \rightarrow\}$  とすると、 $(A \circ B)[x/t] = A[x/t] \circ B[x/t]$  である。
4.  $\circ \in \{\forall, \exists\}$  とすると、 $\text{oy}.A$  に関する代入は以下である。

$$(\text{oy}.A)[x/t] = \begin{cases} \text{oy}.A & x \notin FV(\text{oy}.A) \text{ のとき} \\ \text{oy}.A[x/t] & x \in FV(\text{oy}.A) \text{ かつ } y \notin t \text{ のとき} \\ \text{oz}.(A[y/z])[x/t] & x \in FV(\text{oy}.A) \text{ かつ } y \in t \text{ のとき } (z \notin V(A) \cup V(t)) \end{cases}$$

5.  $\circ \in \{!, ?\}$  とすると、 $(\circ A)[x/t] = \circ(A[x/t])$  である。

## 2.2.2 古典線形論理

初めに、古典線形論理におけるシークエント計算を定義する。シークエント計算は、1つの公理とそれぞれの結合子に関する推論規則からなる。さらに、推論規則はL規則とR規則からなる。名前の通り、L規則は $\Rightarrow$ の左側に関する規則で、R規則は右側に関する規則である。また、式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ から規則によって式 $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ が導出されることを、以下のように表す。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'} \text{ 規則}$$

また、規則が適用されたときに新たに出現した論理式を主論理式 (principal formula) と呼ぶ。古典線形論理のシークエント計算は表2.1で定義される。ここで、 $\perp, \top, 0, 1$  は定数である。ここからは $\Gamma, \Delta, \dots$  を論理式の多重集合とする。例えば、古典線形論理のシークエント計算を用いて以下のものが得られる。

$$\frac{\frac{\overline{p \Rightarrow p} \text{ Ax}}{p \Rightarrow 0, p} \text{ R0}}{\Rightarrow p \rightarrow 0, p} \text{ R} \rightarrow \quad \frac{\overline{0 \Rightarrow} \text{ L0}}{(p \rightarrow 0) \rightarrow 0 \Rightarrow p} \text{ L} \rightarrow \quad \frac{\overline{p \Rightarrow p} \text{ Ax} \quad \overline{p \Rightarrow p} \text{ Ax}}{p, p \Rightarrow p \star p} \text{ R} \star$$

表 2.1: 古典線形論理に対するシークエント計算  
公理とカット規則

$\frac{}{p \Rightarrow p} \text{Ax}$	$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$
乗法と加法結合子に関する規則	
$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \text{L}\wedge$	$\frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \text{L}\wedge$
$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \star B \Rightarrow \Delta} \text{L}\star$	$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} \text{R}\wedge$
$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} \text{L}\vee$	$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \star B, \Delta, \Delta'} \text{R}\star$
$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A + B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{L}+$	$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} \text{R}\vee$
$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{L}\multimap$	$\frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} \text{R}\vee$
L $\top$ 規則は無し	$\frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A + B, \Delta} \text{R}+$
$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, 1 \Rightarrow \Delta} \text{L}1$	$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta} \text{R}\multimap$
$\frac{}{\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta} \text{L}\perp$	$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta} \text{R}\top$
$\frac{}{0 \Rightarrow} \text{L}0$	$\frac{}{\Rightarrow 1} \text{R}1$
量化結合子に関する規則 ( $y \notin FV(\Gamma) \cup FV(\Delta)$ )	R $\perp$ 規則は無し
$\frac{\Gamma, A[x/t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x.A \Rightarrow \Delta} \text{L}\forall$	$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, 0} \text{R}0$
$\frac{\Gamma, A[x/y] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x.A \Rightarrow \Delta} \text{L}\exists$	$\frac{\Gamma \Rightarrow A[x/y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.A, \Delta} \text{R}\forall$
	$\frac{\Gamma \Rightarrow A[x/t], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.A, \Delta} \text{R}\exists$
指数結合子に関する規則	
$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \text{W}!$	$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \text{L}!$
$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta} \text{W}?$	$\frac{! \Gamma, A \Rightarrow ? \Delta}{! \Gamma, ?A \Rightarrow ? \Delta} \text{L}?$
	$\frac{! \Gamma \Rightarrow A, ? \Delta}{! \Gamma \Rightarrow !A, ? \Delta} \text{R}!$
	$\frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \text{C}!$
	$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta} \text{R}?$
	$\frac{\Gamma \Rightarrow ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta} \text{C}?$
$\sim A := A \multimap 0$	

これらのような公理と規則によって式を導出する図を証明図と呼ぶ。また、一番下に出現した式を終式と呼ぶ。正式な定義は以下で与えられる。

定義 (証明図と終式).

1. 公理は証明図である。その証明図の終式は公理自身である。
2.  $P_1$  は  $S_1$  を終式とする証明図とする。  
このとき、 $\frac{S_1}{S}$  が規則の1つであれば、 $\frac{P_1}{S}$  も証明図である。その終式は  $S$  である。
3.  $P_1, P_2$  はそれぞれ  $S_1, S_2$  を終式とする証明図とする。  
このとき、 $\frac{S_1 \ S_2}{S}$  が規則の1つであれば、 $\frac{P_1 \ P_2}{S}$  も証明図である。その終式は  $S$  である。

式  $S$  を終式とする証明図が存在するとき  $S$  はで証明可能であるという。また、古典線形論理において式  $S$  が証明可能であるとき、 $CLL \vdash S$  と書く。先ほどの例より、 $CLL \vdash (p \multimap 0) \multimap 0 \Rightarrow p$  である。

### 2.2.3 直観主義線形論理

次に、直観主義線形論理におけるシークエント計算を定義する。線形論理に限らず、直観主義論理のシークエント計算は古典論理のシークエント計算から得ることができる。直観主義論理においては、式が  $\Rightarrow$  の右側が高々1つの論理式に制限される。したがって、シークエント計算の公理と規則も  $\Rightarrow$  の右側が高々1つの論理式に制限された形になる。つまり、表 2.1 の  $\Rightarrow$  の右側を高々1つの論理式に制限したものが、直観主義線形論理のシークエント計算である。例えば、 $\multimap$  結合子に関する規則は以下のようなになる。 $\Delta$  は高々1つの論理式である。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma', B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \Rightarrow \Delta} \text{L} \multimap \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B} \text{L} \multimap$$

式の制限により、直観主義線形論理では結合子  $+$  と  $?$  に関する規則を除外する。そして、 $S$  が直観主義線形論理で証明可能であるとき、 $ILL \vdash S$  と書く。

### 2.2.4 様々な線形論理

線形論理には多くの論理結合子があった。それらは以下のように4つのグループに分けられる。

乗法結合子 (multiplicative operators)	$\star, +, \multimap, 0, 1$
加法結合子 (additive operators)	$\wedge, \vee, \top, \perp$
量化結合子 (quantifiers)	$\forall, \exists$
指数結合子 (exponentials)	$!, ?$

これらのグループ分けを元に、線形論理には以下のような部分論理がある。

$MLL$	乗法結合子についての規則からなる論理
$MELL$	乗法結合子と指数結合子についての規則からなる論理
$LL_0$	乗法結合子と加法結合子についての規則からなる論理
$LL_q$	指数結合子を除いた規則からなる論理
$LL_e$	量化結合子を除いた規則からなる論理

例えば、古典線形論理を乗法結合子だけに制限した論理を  $MCLL$  と表記する。したがって、 $MCLL \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$  と表記した場合、古典線形論理を乗法結合子だけに制限した論理で  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  が証明可能であることを意味する。

## 2.3 構文論に関する結果

ここでは2.2で定義したシークエント計算を用いて、線形論理の構文論に関するよく知られた結果を紹介する。

### 2.3.1 証明可能なシークエント

定理.  $CLL \vdash A \Rightarrow A$  かつ  $ILL \vdash A \Rightarrow A$ 。

証明.  $A$  の複雑さに関する帰納法で示すことができる。

定理.  $CLL \vdash A \Leftrightarrow \sim\sim A$ 。

( $CLL \vdash A \Rightarrow \sim\sim A$  かつ  $CLL \vdash \sim\sim A \Rightarrow A$  の略記である。)

証明. 以下のような2つの証明図が得られるため、 $CLL \vdash A \Leftrightarrow \sim\sim A$  が成り立つ。

$$\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow A} \quad \overline{0 \Rightarrow 0}}{A, \sim A \Rightarrow 0} L \multimap}{A \Rightarrow \sim\sim A} R \multimap \qquad \frac{\frac{\overline{A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow A, 0} R 0}{\frac{\Rightarrow \sim A, A}{\sim\sim A \Rightarrow A} R \multimap} L 0$$

□

定理 (ド・モルガンの法則). 線形論理におけるド・モルガンの法則は以下の同値関係である。

1.  $CLL \vdash A \star B \Leftrightarrow \sim (\sim A + \sim B)$
2.  $CLL \vdash 1 \Leftrightarrow \sim 0$
3.  $CLL \vdash A \wedge B \Leftrightarrow \sim (\sim A \vee \sim B)$
4.  $CLL \vdash \top \Leftrightarrow \sim \perp$
5.  $CLL \vdash \forall x.A \Leftrightarrow \sim (\exists x. \sim A)$
6.  $CLL \vdash !A \Leftrightarrow \sim ? \sim A$

証明. 以下のような2つの証明図が得られるため、 $CLL \vdash A \star B \Leftrightarrow \sim (\sim A + \sim B)$  が成り立つ。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\overline{A \Rightarrow A} \quad \overline{0 \Rightarrow}}{A, \sim A \Rightarrow} \text{L}0 \quad \frac{\overline{B \Rightarrow B} \quad \overline{0 \Rightarrow}}{B, \sim B \Rightarrow} \text{L}0}{\frac{A, B, \sim A + \sim B \Rightarrow}{A \star B, \sim A + \sim B \Rightarrow} \text{L}+} \text{L} \neg \\
 \frac{\frac{A \star B, \sim A + \sim B \Rightarrow}{A \star B, \sim A + \sim B \Rightarrow 0} \text{R}0}{A \star B \Rightarrow \sim (\sim A + \sim B)} \text{R} \neg \\
 \frac{\frac{\overline{A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow A, 0} \text{R}0 \quad \frac{\overline{B \Rightarrow B}}{B \Rightarrow B, 0} \text{R}0}{\frac{\Rightarrow \sim A, A}{\Rightarrow \sim A, \sim B, A \star B} \text{R} \star} \text{R} \neg \quad \frac{\overline{0 \Rightarrow}}{\Rightarrow \sim B, B} \text{R} \neg \\
 \frac{\frac{\Rightarrow \sim A, \sim B, A \star B}{\Rightarrow \sim A + \sim B, A \star B} \text{R}+ \quad \overline{0 \Rightarrow} \text{L}0}{\sim (\sim A + \sim B) \Rightarrow A \star B} \text{L} \neg
 \end{array}$$

□

他の同値関係に関しても同様に証明図を得ることができる。

### 2.3.2 可逆性

定義 (サイズ (measure)). 証明図  $D$  に対して、証明図のサイズ  $d(D)$  を以下のように定義する。

- $D$  が R1, L0 規則または公理のみならば、 $d(D) = 0$  である。

- $D$ が $D'$ から $L\wedge, R\vee, L\vee, R\exists$ または指数結合子に関する規則のどれかによって導出されたとき、 $d(D) = d(D') + 1$ である。
- $D$ が $D'$ と $D''$ から $R\star, L+, L\rightarrow, \text{Cut}$ のどれかによって導出されたとき、 $d(D) = \max(d(D'), d(D'')) + 1$ である。
- $D$ が $D'$ から $R+, R\rightarrow, R0, R\forall, L\star, L1, L\exists$ のどれかによって導出されたとき、 $d(D) = d(D')$ である。
- $D$ が $D'$ と $D''$ から $R\wedge$ または $L\vee$ によって導出されたとき、 $d(D) = \max(d(D'), d(D''))$ である。

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $d(D) \leq n$ である $D$ によって導出可能ならば、 $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く。

定理 (可逆性 (inversion lemma)). 古典線形論理で以下の同値関係が成り立つ。

1.  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta$  iff  $\vdash_n \Gamma, A \Rightarrow B, \Delta$
2.  $\vdash_n \Gamma, A \star B \Rightarrow \Delta$  iff  $\vdash_n \Gamma, A, B \Rightarrow \Delta$
3.  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow A + B, \Delta$  iff  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow A, B, \Delta$
4.  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow 0, \Delta$  iff  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$
5.  $\vdash_n \Gamma, 1 \Rightarrow \Delta$  iff  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$
6.  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta$  iff  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow A, \Delta$  かつ  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow B, \Delta$
7.  $\vdash_n \Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta$  iff  $\vdash_n \Gamma, A \Rightarrow \Delta$  かつ  $\vdash_n \Gamma, B \Rightarrow \Delta$
8.  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \forall x.A, \Delta$  iff  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow A[x/y], \Delta$  ( $y \notin FV(\Gamma \cup \Delta \cup \{\forall x.A\})$ )
9.  $\vdash_n \Gamma, \exists x.A \Rightarrow \Delta$  iff  $\vdash_n \Gamma \Rightarrow A[x/y], \Delta$  ( $y \notin FV(\Gamma \cup \Delta \cup \{\exists x.A\})$ )

$\Rightarrow$ の右側を高々1つの論理式に制限すれば、直観主義線形論理においても同様のことが成り立つ。

証明 ( $CLL \vdash_n \Gamma, A \star B \Rightarrow \Delta$  iff  $CLL \vdash_n \Gamma, A, B \Rightarrow \Delta$ ). ここで用いるシークエント計算は、分かりやすくするためにサイズを明記した形で書く。

( $\leftarrow$ )

シークエント計算の規則とサイズの定義から自明である。

( $\rightarrow$ )

証明図の高さに関する帰納法で示す。

基底段階 (base case)

- 公理または $R1$ または $L0$ のとき  
 $\Gamma, A \star B \Rightarrow \Delta$ の形にならないので、何も証明すべきことはない。

帰納段階 (induction step)

- 最後に  $L\wedge$  が適用されたとき

$$\frac{\vdash_{n-1} \Gamma, C_i, A \star B \Rightarrow \Delta}{\vdash_n \Gamma, C_0 \wedge C_1, A \star B \Rightarrow \Delta} L\wedge \quad (i \in \{0, 1\})$$

このように導出されたとすると、以下ように得ることができる。

$$\frac{\frac{\vdash_{n-1} \Gamma, C_i, A \star B \Rightarrow \Delta}{\vdash_{n-1} \Gamma, C_i, A, B \Rightarrow \Delta} I.H.}{\vdash_n \Gamma, C_0 \wedge C_1, A, B \Rightarrow \Delta} L\wedge \quad (i \in \{0, 1\})$$

- 最後に  $R\wedge$  が適用されたとき

$$\frac{\vdash_n \Gamma, A \star B \Rightarrow C_0, \Delta \quad \vdash_n \Gamma' \Rightarrow C_1, \Delta'}{\vdash_{\max(n,m)} \Gamma, \Gamma', A \star B \Delta \Rightarrow C_0 \vee C_1, \Delta'} R\wedge$$

このように導出されたとすると、以下のように得ることができる。

$$\frac{\frac{\vdash_n \Gamma, A \star B \Rightarrow C_0, \Delta}{\vdash_n \Gamma, A, B \Rightarrow C_0, \Delta} I.H. \quad \vdash_n \Gamma' \Rightarrow C_1, \Delta'}{\vdash_{\max(n,m)} \Gamma, \Gamma', A, B \Rightarrow C_0 \vee C_1, \Delta, \Delta'} R\wedge$$

同様の方法で他の論理式についても示すことができる。

□

他の同値関係に対しても同様に証明できる。

### 2.3.3 カット除去

カット規則に関する重要な定理を示す。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

上記の  $A$  と  $\sim A$  をカット論理式 (cut formula) と呼ぶ。カットの階数 (cut of rank) とは、カット論理式の複雑さである。証明図のカット階級 (cutrank of deduction) とは、証明図の中に現れる最大のカットの階数である。カットの階層 (level of cut) とは、そのカット規則までの証明図の高さである。

定理 (カット除去 (cut elimination)).  $CLL \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$  または  $ILL \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$  ならば、カット規則を使わない証明図が得られる。

証明 (古典線形論理に関するカット除去). 証明図のカット階級またはカットの階層を下げることで帰納的に示す。

基底段階

- 2つのカット論理式が主論理式するとき

- カット論理式が原子論式するとき

$$\frac{\frac{\overline{p \Rightarrow p} \text{ Ax}}{p \Rightarrow p} \text{ Ax} \quad \frac{\overline{p \Rightarrow p} \text{ Ax}}{p \Rightarrow p} \text{ Ax}}{p \Rightarrow p} \text{ Cut}$$

このとき、以下のようなカット規則がない証明図に置き換えられる。

$$\overline{p \Rightarrow p} \text{ Ax}$$

- カット論理式が1するとき

$$\frac{\frac{\overline{\Rightarrow 1} \text{ R1}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ R1} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{1, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ L1}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Cut}$$

このとき、以下のようなカット規則がない証明図に置き換えられる。

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

- カット論理式が0するとき

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, 0} \text{ R0} \quad \frac{\overline{0 \Rightarrow}}{0 \Rightarrow} \text{ L0}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Cut}$$

このとき、以下のようなカット規則がない証明図に置き換えられる。

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

帰納段階

- 少なくともどちらかのカット論理式が主論理式ではないとき

- 2つの式から導出されたとき

$$\frac{\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', A} \text{規則} \quad A, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''} \text{Cut}$$

このとき、以下のようにカットの階層を下げるができる。

$$\frac{\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \quad A, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{\Gamma_1, \Gamma'' \Rightarrow \Delta_1, \Delta''} \text{Cut} \quad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''} \text{規則}$$

- 1つの式から導出されたとき

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', A} \text{規則} \quad A, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{\Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta', \Delta''} \text{Cut}$$

このとき、以下のようにカットの階層を下げるができる。

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta''} \text{Cut}}{\Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta', \Delta''} \text{規則}$$

- 2つのカット論理式が主論理式の時

- カット論理式が  $A \wedge B$  のとき

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta', A \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta', B}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', A \wedge B} R\wedge \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\wedge}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

このとき、以下のように証明図のカット階級を下げるができる。

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta', A \quad A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

- カット論理式が  $A \star B$  のとき

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', A \star B} R\star \quad \frac{A, B, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{A \star B, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''} L\star}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''} \text{Cut}$$

このとき、以下のように証明図のカット階級を下げるができる。

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, B, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{\Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut} \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta', B}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''} \text{Cut}$$

- カット論理式が  $A \vee B$  のとき

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \text{R}\vee \quad \frac{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \quad B, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A \vee B, \Gamma' \Rightarrow \Delta'} \text{L}\vee}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

このとき、以下のように証明図のカット階級を下げるができる。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

- カット論理式が  $A + B$  のとき

$$\frac{\frac{\Gamma'' \Rightarrow \Delta'', A, B}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta'', A + B} \text{R}+ \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A + B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{L}+}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''} \text{Cut}$$

このとき、以下のように証明図のカット階級を下げるができる。

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma'' \Rightarrow \Delta'', A, B \quad A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'', B} \text{Cut} \quad B, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''} \text{Cut}}$$

- カット論理式が  $A \multimap B$  のとき

$$\frac{\frac{A, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'', B}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta'', A \multimap B} \text{R}\multimap \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A \multimap B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{L}\multimap}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''} \text{Cut}$$

このとき、以下のように証明図のカット階級を下げるができる。

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'', B}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta'', B} \text{Cut} \quad B, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''} \text{Cut}$$

- カット論理式が  $\forall x.A$  のとき

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x.A} \text{R}\forall \quad \frac{A[x/y], \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\forall x.A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'} \text{L}\forall}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

このとき、以下のように証明図のカット階級を下げるができる。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/y] \quad A[x/y], \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

- カット 論理式が  $\exists x.A$  のとき

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x.A} \text{R}\exists \quad \frac{A[x/y], \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\exists x.A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'} \text{L}\exists}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

このとき、以下のように証明図のカット 階級を下げるができる。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/y] \quad A[x/y], \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

- カット 論理式が  $!A$  のとき  
 $\Rightarrow$  の左側の  $!A$  の導出によって以下のように分けられる。

- \* W! 規則によって導出されたとき

$$\frac{\frac{! \Gamma \Rightarrow ?\Delta, A}{! \Gamma \Rightarrow ?\Delta, !A} \text{R}! \quad \frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}{!A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'} \text{W}!}{! \Gamma, \Gamma' \Rightarrow ?\Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

このとき、L! と R? の規則を複数回適用して、以下のように証明図を得ることができる。

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\vdots} \frac{\vdots}{! \Gamma, \Gamma' \Rightarrow ?\Delta, \Delta'}$$

- \* L! 規則によって導出されたとき

$$\frac{\frac{! \Gamma \Rightarrow ?\Delta, A}{! \Gamma \Rightarrow ?\Delta, !A} \text{R}! \quad \frac{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{!A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'} \text{L}!}{! \Gamma, \Gamma' \Rightarrow ?\Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

このとき、以下のように証明図のカット 階級を下げることができる。

$$\frac{! \Gamma \Rightarrow ?\Delta, A \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

- \* C! 規則によって導出されたとき

$$\frac{\frac{! \Gamma \Rightarrow ?\Delta, A}{! \Gamma \Rightarrow ?\Delta, !A} \text{R}! \quad \frac{!A, !A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{!A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'} \text{C}!}{! \Gamma, \Gamma' \Rightarrow ?\Delta, \Delta'} \text{Cut}$$

このとき、以下のようにカットの階層を下げるができる。

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow ?\Delta, !A}{! \Gamma \Rightarrow ?\Delta, !A} \quad \frac{! \Gamma \Rightarrow ?\Delta, !A \quad !A, !A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{!A, !\Gamma, \Gamma' \Rightarrow ?\Delta, \Delta'} \text{Cut}}{! \Gamma, !\Gamma, \Gamma' \Rightarrow ?\Delta, ?\Delta, \Delta'} \text{Cut}}{\vdots} \text{Cut}$$

$$\frac{\vdots}{! \Gamma, \Gamma' \Rightarrow ?\Delta, \Delta'}$$

- カット 論理式が ?A のとき

⇒ の右側の ?A の導出によって以下のように分けられる。

\* W? 規則によって導出されたとき

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A} \text{W?} \quad \frac{A, !\Gamma' \Rightarrow ?\Delta'}{?A, !\Gamma' \Rightarrow ?\Delta'} \text{L?}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'} \text{Cut}}$$

このとき、L! と R? の規則を複数回適用して、以下のように証明図を得ることができる。

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdots}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}$$

\* R? 規則によって導出されたとき

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A} \text{R?} \quad \frac{A, !\Gamma' \Rightarrow ?\Delta'}{?A, !\Gamma' \Rightarrow ?\Delta'} \text{L?}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'} \text{Cut}}$$

このとき、以下のように証明図のカット階級を下げるができる。

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, !\Gamma' \Rightarrow ?\Delta'}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'} \text{Cut}}$$

\* C? 規則によって導出されたとき

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A, ?A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A} \text{C?} \quad \frac{A, !\Gamma' \Rightarrow ?\Delta'}{?A, !\Gamma' \Rightarrow ?\Delta'} \text{L?}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'} \text{Cut}}$$

このとき、以下のようにカットの階層を下げるができる。

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A, ?A \quad ?A, !\Gamma' \Rightarrow ?\Delta'}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta', ?A} \text{Cut}}{\Gamma, !\Gamma', !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta', ?\Delta'} \text{Cut}}{\vdots} \text{Cut}}$$

$$\frac{\vdots}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}$$

□

このカット除去定理より、カット規則の無い線形論理においても、カット規則をような考え方をういてよい。つまり、 $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ と $A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ がカット規則のない線形論理で得られたとする。このとき、その論理では、 $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$ も得られる。

## 2.4 様々な形式体系

これまでに、シークエント計算を定義して様々な結果を示してきた。ここでは、シークエント計算以外のよく知られた形式体系を紹介する。

### 2.4.1 片側シークエント計算

片側シークエント計算とは、その名の通りシークエント計算を片側だけにした形式体系である。公理を $\Rightarrow p, \sim p$ とすることで片側だけの形式体系を実現している。そのため、古典線形論理に関する形式体系だけを考える。また、片側しか使用しないので、 $\Rightarrow$ も落としていく。定義は表2.2である。

表 2.2: 古典線形論理に対するシークエント計算  
公理とカット規則

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{p, \sim p} \text{Ax} \qquad \frac{\Gamma, A \quad \Delta, \sim A}{\Gamma, \Delta} \text{Cut} \\
 \\
 \text{結合子の規則} \\
 \frac{\Gamma, A \quad \Gamma, B}{\Gamma, A \wedge B} \wedge \quad \frac{\Gamma, A \quad \Delta, B}{\Gamma, \Delta, A \star B} \star \quad \frac{\Gamma, A}{\Gamma, A \vee B} \vee \quad \frac{\Gamma, B}{\Gamma, A \vee B} \vee \\
 \frac{\Gamma, A, B}{\Gamma, A + B} + \quad \frac{}{\Gamma, \top} \top \quad \frac{}{\bar{1}} 1 \quad \frac{\Gamma}{\bar{0}} 0 \\
 \\
 \text{量化結合子に関する規則} \\
 \frac{\Gamma, A[x/y]}{\Gamma, \forall x.A} \forall \quad \frac{\Gamma, A[x/t]}{\Gamma, \exists x.A} \exists \\
 \\
 \text{指数結合子に関する規則} \\
 \frac{? \Gamma, A}{? \Gamma, !A} ! \quad \frac{\Gamma}{\Gamma, ?A} W \quad \frac{\Gamma, A}{\Gamma, ?A} ? \quad \frac{\Gamma, ?A, ?A}{\Gamma, ?A} C
 \end{array}$$

## 2.4.2 線形論理における自然演繹

次に、自然演繹を紹介する。自然演繹は、数学で行う推論により近い形式体系であるとも言われる。この体系の規則は、大きく分けて導入規則Iと除去規則Eに分けられる。また、シーケント計算のように式を制限するのではなく、古典論理のみ認める規則によって違いが生まれる。

先に定義に必要な概念を定義する。

定義. 論理式  $A$  に出現する変数  $x$  に対して、 $t$  が自由であるとは以下のように定義される。

- $A$  が原子論理式であるとき  
論理式  $A$  に出現する変数  $x$  に対して、 $t$  は自由である。
- $A \equiv B \circ C$  ( $\circ \in \{\wedge, \vee, \star, +, -\circ\}$ ) であるとき  
 $B$  に出現する  $x$  に対して  $t$  が自由で、 $C$  に出現する  $x$  に対して  $t$  が自由でならば、 $A$  に出現する  $x$  に対して  $t$  は自由である。
- $A \equiv \forall y.B$  であるとき  
 $x = y$  または、 $y \notin FV(t)$  かつ  $B$  に出現する  $x$  に対して  $t$  が自由ならば、 $A$  に出現する  $x$  に対して  $t$  は自由である。ただし、 $x \neq y$  である。
- $A \equiv \circ B$  ( $\circ \in \{!, ?\}$ ) であるとき  
 $B$  に出現する  $x$  に対して  $t$  が自由ならば、 $A$  に出現する  $x$  に対して  $t$  は自由である。

自然演繹の定義は表 2.3 である。

## 2.4.3 線形論理におけるヒルベルト流

最後に、ヒルベルト流と呼ばれる形式体系を紹介する。先ほどまでの形式体系は、1つの公理と多くの規則から構成されていた。それに対して、ヒルベルト流は多くの公理と少しの規則から構成される。ヒルベルト流の定義は表 2.4 である。

表 2.3: 線形論理における自然演繹

$$\begin{array}{c}
 \overline{p \vdash p} \text{ Ax} \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B} \wedge \text{I} \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \star B} \star \text{I} \\
 \frac{\Gamma \vdash A_i}{\Gamma \vdash A_0 \vee A_1} \vee \text{I}_i \quad (i \in \{0, 1\}) \\
 \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B} \multimap \text{I} \\
 \overline{\vdash 1} \text{ II} \\
 \frac{\Gamma \vdash A[x/y]}{\Gamma \vdash \forall x.A} \forall \text{I} \\
 \frac{\Gamma \vdash A[x/t]}{\Gamma \vdash \exists x.A} \exists \text{I} \\
 \frac{\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash !A} !\text{I}}{\Gamma \vdash !A \quad \Delta, A \vdash C} !\text{E} \\
 \frac{\Gamma, A \multimap 0 \vdash 0}{\Gamma \vdash A} 0\text{E} \quad (\text{古典線形論理のみ}) \\
 \frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A[x/t]} \forall \text{E} \\
 \frac{\Gamma \vdash \exists x.A \quad \Delta, A[x/y] \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C} \exists \text{E} \\
 \frac{\Gamma \vdash !A \quad \Delta \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C} !\text{E}^w \\
 \frac{\Gamma \vdash !A \quad \Delta, !A, !A \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C} !\text{E}^c
 \end{array}$$

$t, y$  は  $x$  に対して自由で、 $y \notin FV(A)$  である。

古典線形論理での  $\vdash$  と  $?$  は、ド・モルガンの法則によって定義される。 $(\sim A := A \multimap 0)$

表 2.4: 古典線形論理に対するヒルベルト流  
公理とカット規則

- (1)  $A \multimap A$
- (2)  $(A \multimap B) \multimap ((B \multimap C) \multimap (A \multimap C))$
- (3)  $(A \multimap (B \multimap C)) \multimap (B \multimap (A \multimap C))$
- (4)  $((A \multimap 0) \multimap 0) \multimap A$  (古典線形論理のみ)
- (5)  $A \multimap (B \multimap A \star B)$
- (6)  $(A \multimap (B \multimap C)) \multimap (A \star B \multimap C)$
- (7)  $1$
- (8)  $1 \multimap (A \multimap A)$
- (9)  $A \wedge B \multimap A, A \wedge B \multimap B$
- (10)  $(A \multimap B) \wedge (A \multimap C) \multimap (A \multimap B \wedge C)$
- (11)  $A \multimap A \vee B, B \multimap A \vee B$
- (12)  $(A \multimap C) \vee (B \multimap C) \multimap (A \vee B \multimap C)$
- (13)  $A \multimap \top$
- (14)  $\perp \multimap A$
- (15)  $\forall x.A \multimap A[x/t]$
- (16)  $A[x/y] \multimap \exists x.A$

規則

- $\multimap$ -Rule  $A, A \multimap B \Rightarrow B$
- $\wedge$ -Rule  $A, B \Rightarrow A \wedge B$
- $\forall$ -Rule  $B \multimap A \Rightarrow B \multimap \forall x.A$  ( $x \notin FV(B)$ )
- $\exists$ -Rule  $A \multimap B \Rightarrow \exists x.A \multimap B$  ( $x \notin FV(B)$ )

指数結合子に関する公理

- (17)  $B \multimap (!A \multimap B)$
- (18)  $(!A \multimap (!A \multimap B)) \multimap (!A \multimap !B)$
- (19)  $!(A \multimap B) \multimap (!A \multimap !B)$
- (20)  $!A \multimap A$
- (21)  $!A \multimap !!A$

指数結合子に関する規則

- !-Rule  $A \Rightarrow !A$

## 第3章 証明構造

第2章では、3つの証明体系を定義した。ここでは、帰納的証明構造やプルーフネットと呼ばれる、グラフの形をした形式体系を定義する。これは線形論理で使われる形式体系である。特に断りがない限り、この章では古典線形論理について言及する。

### 3.1 乗法線形論理に関する証明構造

ここでは乗法結合子に限定した片側シークエント計算について考える。したがって、ルールは以下のものだけからなる。

$$\frac{\overline{p, \sim p} \text{ Ax}}{\Gamma, A \quad \Delta, B} \star \quad \frac{\overline{1} \text{ 1}}{\Gamma, A + B} + \quad \frac{\frac{\Gamma}{\Gamma, 0} \text{ 0}}{\Gamma, A \quad \Delta, \sim A} \text{ Cut}$$

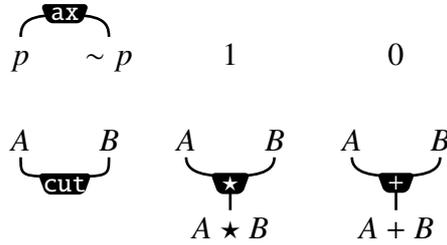
ここで以下の2つの証明図を見る。

$$\frac{\frac{\overline{p, \sim p} \text{ Ax} \quad \overline{q, \sim q} \text{ Ax}}{p \star q, \sim p, \sim q} \star \quad \overline{r, \sim r} \text{ Ax}}{(p \star q) \star r, \sim p, \sim q, \sim r} \star}{(p \star q) \star r, \sim p + \sim q, \sim r} + \quad \frac{\frac{\overline{p, \sim p} \text{ Ax} \quad \overline{q, \sim q} \text{ Ax}}{p \star q, \sim p, \sim q} \star}{p \star q, \sim p + \sim q} + \quad \overline{r, \sim r} \text{ Ax}}{(p \star q) \star r, \sim p + \sim q, \sim r} \star$$

これらの違いは規則の適用順序にしか無い。このような違いしか無い証明図に関して、プルーフネットでは同じグラフを得ることができる。また、証明図を見てわかるようにシークエント計算では何度も同じ論理式を記述しているが、プルーフネットではこのような冗長な記述を避けることもできる。

#### 3.1.1 証明構造

初めに、証明構造を定義する。証明構造は論理式によってラベル付けされたラベル付き無向グラフである。証明構造は以下の6つの構成要素からなる。



正確な定義は以下で与えられる。

定義 (証明構造 (proof structure)).

*formula* を論理式の集合とする。証明構造  $\alpha$  は、3 つ組  $(V_\alpha, E_\alpha, L_\alpha)$  からなる無向グラフである。  $V_\alpha$  は節点の集合、  $E_\alpha$  は辺の集合、  $L_\alpha : V_\alpha \rightarrow \text{formula}$  はラベルに対する関数の集合である。また、証明構造の定義と同時に、終節点 (*terminal node*)  $TN$  の定義も行う。ここで、  $\alpha, \beta, \dots$  は証明構造を表し、  $x^A$  は節点  $x$  が  $A$  でラベル付けされていることを表す。

公理  $\alpha = (\{x_1, x_2\}, \{\{x_1, x_2\}\}, \{(x_1, p), (x_2, \sim p)\})$  は証明構造である。このとき、  $TN(\alpha) = \{x_1, x_2\}$  である。

1 規則  $\alpha = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 1)\})$  は証明構造である。このとき、  $TN(\alpha) = \{x\}$  である。

0 規則  $\alpha = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 0)\})$  は証明構造である。このとき、  $TN(\alpha) = \{x\}$  である。

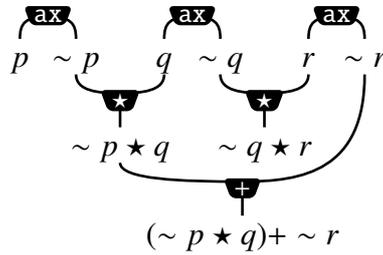
結合規則  $\alpha, \beta$  が証明構造で、  $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$  ならば、  $(V_\alpha \cup V_\beta, E_\alpha \cup E_\beta, L_\alpha \cup L_\beta)$  も証明構造である。このときの終節点は、  $TN(\alpha) \cup TN(\beta)$  である。

カット規則  $\alpha$  が証明構造で、  $x_1^A, x_2^{\sim A} \in TN(\alpha)$  ならば、  $(V_\alpha, E_\alpha \cup \{\{x_1, x_2\}\}, L_\alpha)$  も証明構造である。このときの終節点は、  $TN(\alpha) \setminus \{x_1, x_2\}$  である。

★規則  $\alpha$  が証明構造で、  $x^A, y^B \in TN(\alpha)$  かつ  $z \notin V_\alpha$  ならば、  $(V_\alpha \cup \{z\}, E_\alpha \cup \{\{x, z\}, \{y, z\}\}, L_\alpha \cup \{(z, A \star B)\})$  も証明構造である。このときの終節点は、  $(TN(\alpha) \cup \{z\}) \setminus \{x, y\}$  である。

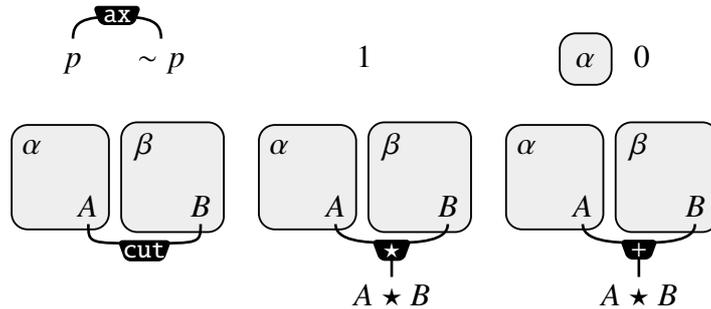
+規則  $\alpha$  が証明構造で、  $x^A, y^B \in TN(\alpha)$  かつ  $z \notin V_\alpha$  ならば、  $(V_\alpha \cup \{z\}, E_\alpha \cup \{\{x, z\}, \{y, z\}\}, L_\alpha \cup \{(z, A + B)\})$  も証明構造である。このときの終節点は、  $(TN(\alpha) \cup \{z\}) \setminus \{x, y\}$  である。

以下のグラフが証明構造の例である。



### 3.1.2 帰納的証明構造

先ほど定義した証明構造の一部である帰納的証明構造を定義する。帰納的証明構造はシーケント計算に対応している。帰納的証明構造は以下の要素から構成される。ここからは  $\alpha, \beta, \dots$  は証明構造または帰納的証明構造を表し、文脈によって使い分ける。



正確な定義は以下で与えられる。

定義 (帰納的証明構造 (inductive proof structure)).

帰納的証明構造  $\alpha$  は、3 つ組  $(V_\alpha, E_\alpha, L_\alpha)$  からなる無向グラフである。ここでも同時に終節点  $TN$  を定義する。

公理  $\alpha = (\{x_1, x_2\}, \{\{x_1, x_2\}\}, \{(x_1, p), (x_2, \sim p)\})$  は帰納的証明構造である。このとき、 $TN(\alpha) = \{x_1, x_2\}$  である。

1 規則  $\alpha = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 1)\})$  は帰納的証明構造である。このとき、 $TN(\alpha) = \{x\}$  である。

0 規則  $z \notin V_\alpha$  である  $\alpha$  が帰納的証明構造でならば、 $\alpha' = (V_\alpha \cup \{z\}, E_\alpha, L_\alpha \cup \{(z, 0)\})$  も帰納的証明構造である。このとき、 $TN(\alpha') = TN(\alpha) \cup \{z\}$  である。

カット規則  $\alpha, \beta$  が帰納的証明構造で、 $x^A \in V_\alpha$  かつ  $y^{\sim A} \in V_\beta$ 、 $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$  ならば、 $(V_\alpha \cup V_\beta, (E_\alpha \cup E_\beta) \cup \{(x, y)\}, L_\alpha \cup L_\beta)$  も帰納的証明構造である。このときの終節点は、 $(TN(\alpha) \cup TN(\beta)) \setminus \{x, y\}$  である。

★規則  $\alpha, \beta$  が帰納的証明構造で、 $x^A \in V_\alpha$  かつ  $y^B \in V_\beta$ 、 $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$  ならば、 $(V_\alpha \cup V_\beta \cup \{z\}, E_\alpha \cup E_\beta \cup \{(x, z), (y, z)\}, L_\alpha \cup L_\beta \cup \{(z, A \star B)\})$  も帰納的証明構造である。ただし、 $z \notin V_\alpha \cup V_\beta$  である。このときの終節点は、 $(TN(\alpha) \cup TN(\beta) \cup \{z\}) \setminus \{x, y\}$  である。

+ 規則  $\alpha$  が帰納的証明構造で、 $x^A, y^B \in V_\alpha$  かつ  $z \notin V_\alpha$  ならば、 $(V_\alpha \cup \{z\}, E_\alpha \cup \{(x, z), (y, z)\}, L_\alpha \cup \{(z, A + B)\})$  も帰納的証明構造である。このときの終節点は、 $(TN(\alpha) \cup \{z\}) \setminus \{x, y\}$  である。

この帰納的証明構造はシークエント計算と対応が取れる。

定理. 以下は同値である。

1.  $MCLL \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

2.  $TN(\alpha) = \{x^A \in V_\alpha \mid A \in \Gamma \cup \Delta\}$  である帰納的証明構造  $\alpha$  が存在する。

証明.

1  $\rightarrow$  2 シークエント計算の構成に関する帰納法で簡単に示すことができる。

2  $\rightarrow$  1 帰納的証明構造の構成に関する帰納法で簡単に示すことができる。

□

## 3.2 プルーフネットと帰納的証明構造

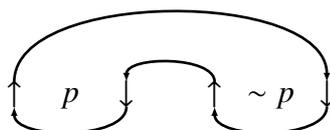
今度はグラフ的な特徴に着目して、どのような証明構造が帰納的証明構造であるかを見る。ここらからは0と1、カット規則を落として、★と+の結合子だけに制限した論理について考える。

定義 (道標 (travel instructions for trip)).

証明構造  $\alpha$  に対して、道標  $\alpha_t = (V_{\alpha_t}, A_{\alpha_t})$  を定義する。  $V_{\alpha_t}$  は節点の集合、  $A_{\alpha_t}$  は弧の集合である。証明構造の節点  $x$  は  $x \uparrow$  と  $x \downarrow$  に分けられ、辺も 2 本の有向辺に分けられる。

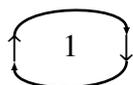
公理  $\alpha = (\{x_1, x_2\}, \{\{x_1 x_2\}\}, \{(x_1, p), (x_2, \sim p)\})$  のとき、

$\alpha_t = (\{x_1 \uparrow, x_1 \downarrow, x_2 \uparrow, x_2 \downarrow, \{(x_1 \uparrow, x_2 \downarrow), (x_2 \downarrow, x_2 \uparrow), (x_2 \uparrow, x_1 \downarrow), (x_1 \downarrow, x_1 \uparrow)\}\})$  である。グラフは以下のようなになる。



1 規則  $\alpha = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 1)\})$  のとき、

$\alpha_t = (\{x \uparrow, x \downarrow, \{(x \uparrow, x \downarrow), (x \downarrow, x \uparrow)\}\})$  である。グラフは以下のようなになる。



0 規則  $\alpha = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 0)\})$  のとき、

$\alpha_t = (\{x \uparrow, x \downarrow, \{(x \uparrow, x \downarrow), (x \downarrow, x \uparrow)\}\})$  である。グラフは以下のようなになる。



結合規則  $\beta, \gamma$  から結合規則によって、 $\alpha$  が導出されたとする。

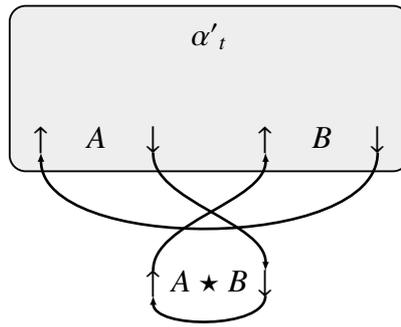
このとき、 $\alpha$  の道標  $\alpha_t$  は  $(V_{\beta_t} \cup V_{\gamma_t}, A_{\beta_t} \cup A_{\gamma_t})$  である。

★規則  $TN(\alpha') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{x^A, y^B\}$  である  $\alpha'$  に ★規則を適用して、 $TN(\alpha') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{z^{A \star B}\}$  である  $\alpha$  が導出されたとする。このとき、 $\alpha$  の道標  $\alpha_t$  は以下のどちらかである。

- 左

$$\alpha_t = (V_{\alpha_t} \cup \{z \uparrow, z \downarrow\}, (A_{\alpha_t} \cup \{(x \downarrow, z \downarrow), (z \uparrow, y \uparrow), (y \downarrow, x \uparrow), (z \downarrow, z \uparrow)\}) \setminus \{(x \downarrow, x \uparrow), (y \downarrow, y \uparrow)\})$$

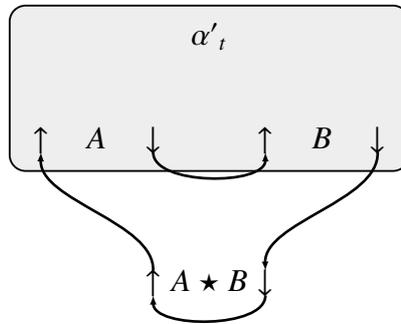
グラフは以下のようなになる。



- 右

$$\alpha_t = (V_{\alpha'_t} \cup \{z \uparrow, z \downarrow\}, (A_{\alpha'_t} \cup \{(x \downarrow, y \uparrow), (y \downarrow, z \downarrow), (z \uparrow, x \uparrow), (z \downarrow, z \uparrow)\}) \setminus \{(x \downarrow, x \uparrow), (y \downarrow, y \uparrow)\})$$

グラフは以下ようになる。

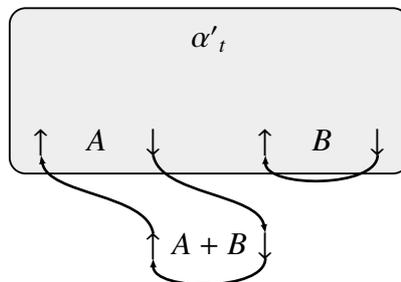


+規則  $TN(\alpha') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{x^A, y^B\}$  である  $\alpha'$  に +規則を適用して、 $TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{z^{A+B}\}$  である  $\alpha$  が導出されたとする。このとき、 $\alpha$  の道標  $\alpha_t$  は以下のどちらかである。

- 左

$$\alpha_t = (V_{\alpha'_t} \cup \{z \uparrow, z \downarrow\}, (A_{\alpha'_t} \cup \{(z \uparrow, x \uparrow), (x \downarrow, z \downarrow), (z \downarrow, z \uparrow)\}) \setminus \{(x \downarrow, x \uparrow)\})$$

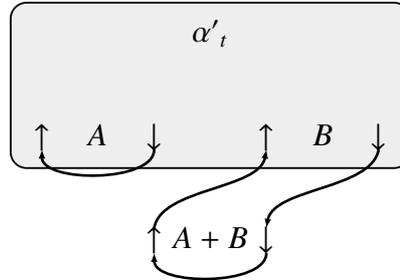
グラフは以下ようになる。



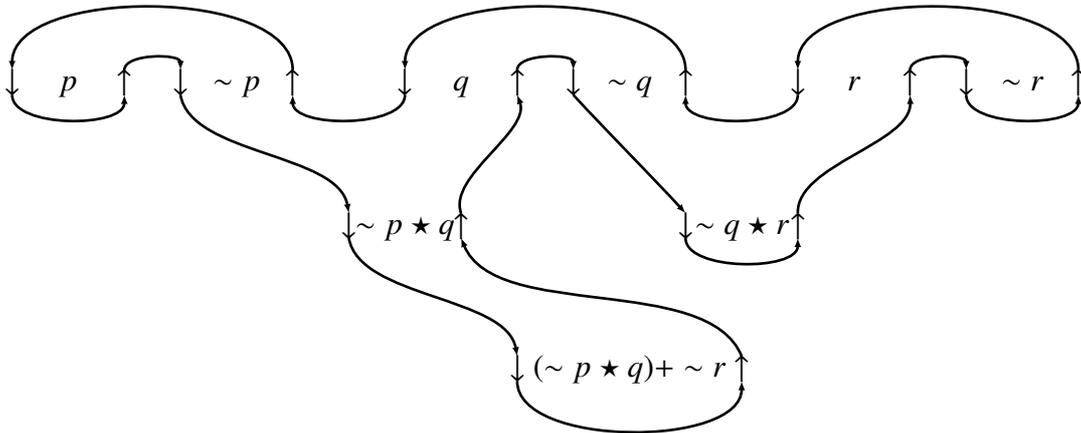
• 右

$$\alpha_t = (V_{\alpha'_t} \cup \{z \uparrow, z \downarrow\}, (A_{\alpha'_t} \cup \{(z \uparrow, y \uparrow), (y \downarrow, z \downarrow), (z \downarrow, z \uparrow)\}) \setminus \{(y \downarrow, y \uparrow)\})$$

グラフは以下のようなになる。



以下のグラフは、先ほどの証明構造の例に対する道標の1つである。



定義.  $I_i, I_j \in \{\uparrow, \downarrow\}$  とする。このとき、 $AI_i$  から  $BI_j$  への旅路 (trip) とは、 $AI_i$  から  $BI_j$  への道である。また、 $AI_i$  から  $BI_j$  への旅路の長さとは、旅路の途中で通った辺の数である。 $n$  個の節点を持つ証明構造に対して、ある道標の旅路の長さが  $2n$  であるとき、この旅路は長旅 (longtrip) であるという。そして、プルーフネットとは、証明構造の任意の道標における旅路が長旅である証明構造のことである。

定理. 以下の2つの条件は等しい。

1. 証明構造が帰納的証明構造である。
2. 証明構造の全ての旅路が長旅である。

証明.  $1 \rightarrow 2$  は帰納的証明構造に関する帰納法で簡単に示すことができる。 □

これから  $2 \rightarrow 1$  を示す。初めに、長旅の条件を変える。

+ に関する辺のスイッチングとは、以下のどちらかのように置き換えたものである。



正確な定義は次の通りである。

定義 (スイッチング).

証明構造  $\alpha$  に対して、スイッチング  $\sigma = (V_\sigma, E_\sigma, L_\sigma)$  を定義する。  $V_\sigma$  は節点の集合、  $E_\sigma$  は辺の集合、  $L_\sigma : V_\sigma \rightarrow \text{formula}$  はラベルに対する関数の集合である。

公理  $\alpha = (\{x_1, x_2\}, \{\{x_1 x_2\}\}, \{(x_1, p), (x_2, \sim p)\})$  のとき、  $\sigma = \alpha$  である。

1 規則  $\alpha = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 1)\})$  のとき、  $\sigma = \alpha$  である。

0 規則  $\alpha = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 0)\})$  のとき、  $\sigma = \alpha$  である。

結合規則  $\beta, \gamma$  から結合規則によって、  $\alpha$  が導出されたとする。

このとき、  $\beta, \gamma$  それぞれのスイッチングを  $\sigma_\beta, \sigma_\gamma$  とすると、  $\sigma$  は以下である。

$$\sigma = (V_\alpha, E_{\sigma_\beta} \cup E_{\sigma_\gamma}, L_\alpha)$$

★ 規則  $TN(\alpha') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{x^A, y^B\}$  である  $\alpha'$  に ★ 規則を適用して、  $TN(\alpha') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{z^{A \star B}\}$  である  $\alpha$  が導出されたとする。このとき、  $\alpha'$  のスイッチングを  $\sigma'$  とすると、  $\sigma$  は以下である。

$$\sigma = (V_\alpha, E_{\sigma'} \cup \{(x, z), (y, z)\}, L_\alpha)$$

+ 規則  $TN(\alpha') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{x^A, y^B\}$  である  $\alpha'$  に ★ 規則を適用して、  $TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{z^{A+B}\}$  である  $\alpha$  が導出されたとする。このとき、  $\alpha'$  のスイッチングを  $\sigma'$  とすると、  $\sigma$  は以下のどちらかである。

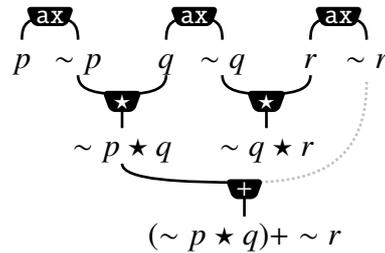
- 左

$$\sigma = (V_\alpha, E_{\sigma'} \cup \{(x, z)\}, L_\alpha)$$

- 右

$$\sigma = (V_\alpha, E_{\sigma'} \cup \{(y, z)\}, L_\alpha)$$

$\alpha$ を証明構造とする。このとき、2 節点  $x, y \in V_\alpha$  に対して道があるスイッチングが存在するとき、 $x \sim y$ と書く。逆に全てのスイッチングで2 点間に道が存在しないとき、 $x \not\sim y$ と書く。以下が証明構造のスイッチングの例である。



次に、スイッチングに対する道標を定義する。証明構造に対する定義とは + 規則に関して違いがある。

定義 (道標).

スイッチング  $\sigma$  に対して、道標  $\sigma_t = (V_{\sigma_t}, A_{\sigma_t})$  を定義する。 $V_{\sigma_t}$  は節点の集合、 $A_{\sigma_t}$  は弧の集合である。

公理  $\sigma = (\{x_1, x_2\}, \{\{x_1 x_2\}\}, \{(x_1, p), (x_2, \sim p)\})$  のとき、

$\sigma_t = (\{x_1 \uparrow, x_1 \downarrow, x_2 \uparrow, x_2 \downarrow, \{(x_1 \uparrow, x_2 \downarrow), (x_2 \downarrow, x_2 \uparrow), (x_2 \uparrow, x_1 \downarrow), (x_1 \downarrow, x_1 \uparrow)\}\})$  である。

1 規則  $\sigma = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 1)\})$  のとき、

$\sigma_t = (\{x \uparrow, x \downarrow, \{(x \uparrow, x \downarrow), (x \downarrow, x \uparrow)\}\})$  である。

0 規則  $\sigma = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 0)\})$  のとき、

$\sigma_t = (\{x \uparrow, x \downarrow, \{(x \uparrow, x \downarrow), (x \downarrow, x \uparrow)\}\})$  である。

結合規則  $\varrho, \rho$  から結合規則によって、 $\sigma$  が導出されたとする。

このとき、 $\sigma$  の道標  $\sigma_t$  は以下である。

$$(V_{\varrho_t} \cup V_{\rho_t}, A_{\varrho_t} \cup A_{\rho_t})$$

★規則  $TN(\sigma') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{x^A, y^B\}$  である  $\sigma'$  に ★規則を適用して、 $TN(\sigma) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{z^{A+B}\}$  である  $\sigma$  が導出されたとする。このとき、 $\sigma$  の道標  $\sigma_t$  は以下のどちらかである。

- 左

$$\sigma_t = (V_{\sigma_t} \cup \{z \uparrow, z \downarrow\}, (A_{\sigma_t} \cup \{(x \downarrow, z \downarrow), (z \uparrow, y \uparrow), (y \downarrow, x \uparrow), (z \downarrow, z \uparrow)\}) \setminus \{(x \downarrow, x \uparrow), (y \downarrow, y \uparrow)\})$$

- 右

$$\sigma_t = (V_{\sigma_t} \cup \{z \uparrow, z \downarrow\}, (A_{\sigma_t} \cup \{(x \downarrow, y \uparrow), (y \downarrow, z \downarrow), (z \uparrow, x \uparrow), (z \downarrow, z \uparrow)\}) \setminus \{(x \downarrow, x \uparrow), (y \downarrow, y \uparrow)\})$$

左+規則  $TN(\sigma') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{x^A, y^B\}$  である  $\sigma'$  に左+規則を適用して、 $TN(\sigma) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{z^{A+B}\}$  である  $\sigma$  が導出されたとする。このとき、 $\sigma$  の道標  $\sigma_t$  は以下である。

$$\sigma_t = (V_{\sigma_t} \cup \{z \uparrow, z \downarrow\}, (A_{\sigma_t} \cup \{(z \uparrow, x \uparrow), (x \downarrow, z \downarrow), (z \downarrow, z \uparrow)\}) \setminus \{(x \downarrow, x \uparrow)\})$$

右+規則  $TN(\sigma') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{x^A, y^B\}$  である  $\sigma'$  に右+規則を適用して、 $TN(\sigma) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{z^{A+B}\}$  である  $\sigma$  が導出されたとする。このとき、 $\sigma$  の道標  $\sigma_t$  は以下である。

$$\sigma_t = (V_{\sigma_t} \cup \{z \uparrow, z \downarrow\}, (A_{\sigma_t} \cup \{(z \uparrow, y \uparrow), (y \downarrow, z \downarrow), (z \downarrow, z \uparrow)\}) \setminus \{(y \downarrow, y \uparrow)\})$$

スイッチングを用いて証明構造の全ての旅路が長旅であるという条件と同値な条件を示す。

定義. 道が  $v_1, \dots, v_i, \dots, v_j$  ( $v_1 = v_j \neq v_i$ ) であるとき、閉路という。グラフが循環的 (*cyclic*) であるとは、閉路が存在するときである。逆に閉路が存在しないとき、グラフは非循環的 (*acyclic*) であるという。さらに、任意の2つの節点の間に道があるグラフを連結グラフと呼ぶ。

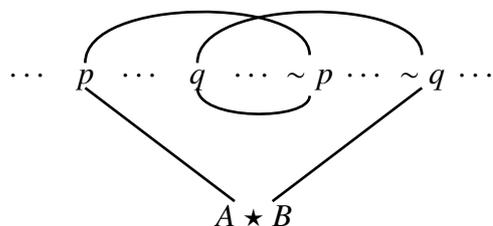
補題. 以下の2つの条件は等しい。

1. 証明構造の全ての旅路が長旅である。
2. 証明構造の任意のスイッチングに対して、非循環的かつ連結グラフである。

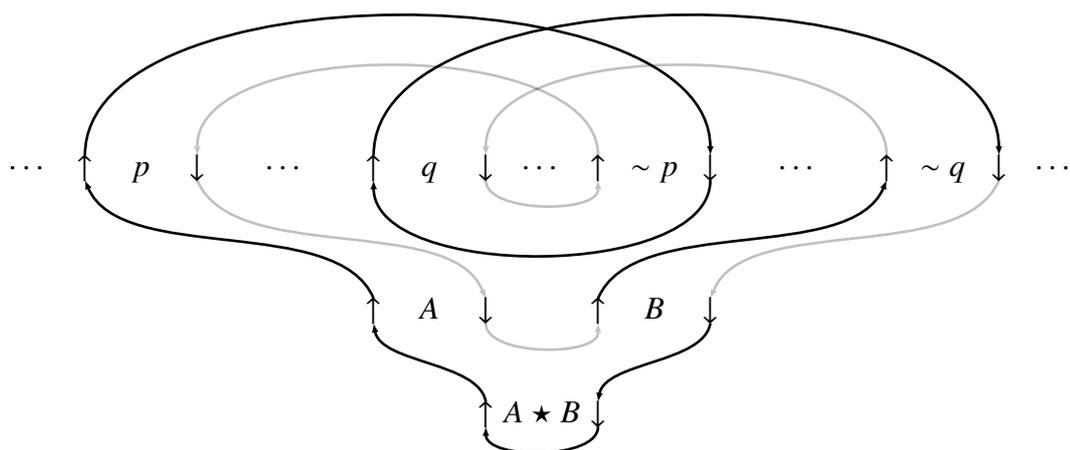
証明.

- 1 → 2

ある証明構造が長旅である旅路を持つとき、連結グラフである。次にグラフが非循環的であることを示す。証明構造のスイッチングが循環的であるとすると、以下のような証明構造を考えることができる。



これらの道標について考えると、以下のような道標が得られる。



実線に着目すると、明らかに長旅でない旅路があることが分かる。これは証明構造の全ての旅が長旅であるという仮定と矛盾するので、証明構造が長旅ならば非循環的である。

- 2 → 1

証明構造の構成に関する帰納法で示すことができる。

□

補題 (+ 除去).  $z^{A+B} \in TN(\alpha)$  かつ  $\{x^A, z\}, \{y^B, z\} \in E_\alpha$  を満たす  $\alpha$  がプルーフネットならば、 $(V_\alpha \setminus \{z\}, E_\alpha \setminus \{\{x, z\}, \{y, z\}\}, L_\alpha \setminus \{(z, A+B)\})$  もプルーフネットである。

証明. + 結合子に関するスイッチングの定義から、プルーフネットからその + 結合子の終節点に関する部分を取り除いても、その証明構造のスイッチングは非循環的かつ連結グラフである。したがって、それもまたプルーフネットである。  $\square$

次に、 $A \star B$  でラベル付けされた終節点の除去に関する補題を示す。そのためには様々な補題が必要であるので、それらから示す。

定義.  $x, y, z \in V_\alpha$  を満たす、 $\sigma$  の道標  $\sigma_t$  において、 $xI_i$  から  $yI_j$  までの旅路の途中で  $zI_k$  を通るとき、 $zI_k \in [xI_i, yI_j]_\sigma$  と書く。ただし、 $I_i, I_j, I_k \in \{\uparrow, \downarrow\}$  とする。

定義 (帝国 (empire)).  $x \in V_\alpha$  である  $\alpha$  を証明構造、 $\alpha$  のスイッチングの集合を  $S(\alpha)$  とする。任意のスイッチング  $\sigma \in S(\alpha)$  に対して、 $x \downarrow \in [x \uparrow, x \uparrow]_\sigma$  である  $x$  の帝国  $e(x)$  は以下の条件を満たす3つ組  $(V_{e(x)}, E_{e(x)}, L_{e(x)})$  からなるグラフである。

- $V_{e(x)} = \{y \in V_\alpha \mid \forall \sigma \in S(\alpha). (y \uparrow, y \downarrow \in [x \uparrow, x \downarrow]_\sigma)\}$
- $E_{e(x)} = \{\{y_1, y_2\} \in E_\alpha \mid y_1, y_2 \in V_{e(x)}\}$
- $L_{e(x)} = \{(y, A) \in L_\alpha \mid y \in V_{e(x)}\}$

定理 (旅路定理 (trip theorem)).  $\alpha$  を証明構造、 $S(\alpha)$  を  $\alpha$  のスイッチングの集合とする。このとき、任意の  $x \in V_{e(x)}$  に対して、 $x \in \{y \in V_\alpha \mid y \uparrow, y \downarrow \in [x \uparrow, x \downarrow]_\sigma\}$  を満たすスイッチング  $\sigma \in S(\alpha)$  が存在する。

証明. 証明構造の帰納法で示す。

基底段階

- 公理のとき  $x_1^p, x_2^{\sim p}$  とする。
  - $x \equiv x_1$  のとき  
 $V_{e(x_1)} = \{x_1, x_2\}$  で、 $\sigma_t$  において旅路  $x_1 \uparrow, x_2 \downarrow, x_2 \uparrow, x_1 \downarrow$  である  $\sigma$  が存在する。
  - $x \equiv x_2$  のとき  
 $V_{e(x_2)} = \{x_1, x_2\}$  で、 $\sigma_t$  において旅路  $x_2 \uparrow, x_1 \downarrow, x_1 \uparrow, x_2 \downarrow$  である  $\sigma$  が存在する。

帰納段階

- 最後に結合規則で導出されたとき  
証明構造 $\beta, \gamma$ に結合規則を適用して、証明構造 $\alpha$ が構成されたとする。 $x \in V_\beta$ とすると、任意の $y \in V_\gamma$ に対して $x \notin V_{e(y)}$ である。よって、帰納法の仮定より、求めるスイッチングが存在することが分かる。 $y \in V_\gamma$ に対しても同様の議論ができる。
- 最後に $\star$ 規則で導出されたとき  
証明構造 $\beta$ に $\star$ 規則が適用して、証明構造 $\alpha$ が構成されたとする。新たに追加された節点を $x_3^{A\star B}$ とし、 $\{x_1^A, x_3\}, \{x_2^B, x_3\} \in E_\alpha$ とする。仮定より、 $\alpha$ の任意のスイッチングの道標において、 $x \uparrow, \dots, x \downarrow, \dots, x \uparrow$ なので、 $\beta$ において $V_{e(x_1)} \cap V_{e(x_2)} = \emptyset$ である。 $S(e(x_1)), S(e(x_2))$ をそれぞれ $e(x_1), e(x_2)$ のスイッチングの集合、 $x \in V_\alpha$ とする。
  - $x_1 \in V_{e(x)}$ のとき  
 $x_1 \in V_{e(x)}$ より、 $x_3 \in V_{e(x)}$ である。さらに $x_2 \in V_{e(x)}$ なので、任意の $y \in V_{e(x_2)}$ に対して、 $y \in V_{e(x)}$ である。したがって、 $\tau_t$ において旅路 $x \uparrow, \dots, x_1 \downarrow, x_3 \downarrow, x_3 \uparrow, x_2 \uparrow, \dots, x_2 \downarrow, x_1 \uparrow, \dots, x \downarrow$ を持つ $\tau \in S(\alpha)$ が存在すればよい。帰納法の仮定より、任意の $x' \in V_{e(x)}$ に対して、 $x' \in \{y \in V_\beta \mid y \uparrow, y \downarrow \in [x \uparrow, x \downarrow]_{\sigma'}\}$ を満たすスイッチング $\sigma' \in S(e(x_1))$ が存在する。すなわち、 $\sigma_t$ において $V_{e(x)}$ の全ての要素を含む旅路 $x \uparrow, \dots, x_1 \downarrow, x_1 \uparrow, \dots, x \downarrow$ が存在する。同様に、帰納法の仮定より、任意の $y' \in V_{e(x_2)}$ に対して、 $y' \in \{y \in V_\beta \mid y \uparrow, y \downarrow \in [x_2 \uparrow, x_2 \downarrow]_{\sigma'}\}$ を満たすスイッチング $\sigma' \in S(e(x_2))$ が存在する。すなわち、 $\sigma'_t$ において $V_{e(x_2)}$ の全ての要素を含む旅路 $x_2 \uparrow, \dots, x_2 \downarrow$ が存在する。故に、 $\sigma, \sigma'$ を保ち、 $x_3$ の $\star$ に関する辺に対して、左 $\star$ 規則を選択するように $\tau$ を取ればよい。
  - $x_2 \in e(x)$ のとき  
上と同様の議論から示すことができる。
  - $x_1, x_2 \notin e(x)$ のとき  
新たに追加された辺とは関係がなく、帰納法の仮定から求める旅路が得られる。
- 最後に $+$ 規則で導出されたとき  
証明構造 $\beta$ に $+$ 規則が適用されて、証明構造 $\alpha$ が構成されたとする。新たに追加された節点を $x_3^{A+B}$ とし、 $\{x_1^A, x_3\}, \{x_2^B, x_3\} \in E_\alpha$ とする。 $S(\beta)$ は $\beta$ のスイッチングの集合、 $x \in V_\alpha$ とする。
  - $x_1 \in V_{e(x)}$ かつ $x_2 \notin V_{e(x)}$ のとき

$x_2 \notin V_{e(x)}$  より、 $x_3 \notin V_{e(x)}$  である。したがって、 $\tau_t$  において旅路  $x \uparrow, \dots, x_1 \downarrow, x_1 \uparrow, \dots, x \downarrow$  を持つ  $\tau \in S(\alpha)$  が存在するればよい。帰納法の仮定より、任意の  $x' \in V_{e(x)}$  に対して、 $x' \in \{y \in V_\alpha \mid y \uparrow, y \downarrow \in [x \uparrow, x \downarrow]_\sigma\}$  を満たすスイッチング  $\sigma \in S(\beta)$  が存在する。すなわち、 $\sigma_t$  において  $V_e(x)$  の全ての要素を含む旅路  $x \uparrow, \dots, x_1 \downarrow, x_1 \uparrow, \dots, x \downarrow$  が存在する。故に、 $\sigma$  を保ち、 $x_3$  の + に関する辺に対して、右 + 規則を選択するように  $\tau$  を取ればよい。

- $x_1 \notin V_{e(x)}$  かつ  $x_2 \in V_{e(x)}$  のとき  
上と同様の議論から示すことができる。
- $x_1, x_2 \in V_{e(x)}$  のとき  
 $x_1, x_2 \in V_{e(x)}$  より、 $x_3 \in V_{e(x)}$  である。したがって、 $\tau_t$  において旅路  $x \uparrow, \dots, x_1 \downarrow, x_3 \downarrow, x_3 \uparrow, x_1 \uparrow, \dots, x_2 \downarrow, x_2 \uparrow, \dots, x \downarrow$  を持つ  $\tau \in S(\alpha)$  が存在するればよい。帰納法の仮定より、任意の  $x' \in V_{e(x)}$  に対して、 $x' \in \{y \in V_\beta \mid y \uparrow, y \downarrow \in [x \uparrow, x \downarrow]_\sigma\}$  を満たすスイッチング  $\sigma \in S(\beta)$  が存在する。すなわち、 $\sigma_t$  において  $V_e(x)$  の全ての要素を含む旅路  $x \uparrow, \dots, x_1 \downarrow, x_1 \uparrow, \dots, x_2 \downarrow, x_2 \uparrow, \dots, x \downarrow$  が存在する。故に、 $\sigma$  を保ち、 $x_3$  の + に関する辺に対して、左 + 規則を選択するように  $\tau$  を取ればよい。帰納法の仮定より、 $\sigma_t$  において  $x \uparrow, \dots, x_2 \downarrow, x_2 \uparrow, \dots, x_1 \downarrow, x_1 \uparrow, \dots, x \downarrow$  が得られた場合も同様の議論で求める旅路が得られる。
- $x_1, x_2 \notin V_{e(x)}$  のとき  
新たに追加された辺とは関係がなく、帰納法の仮定から求める旅路が得られる。

□

**補題.**  $x_3^{B \star C} \in V_\alpha$  かつ  $\{x_1^B, x_3\}, \{x_2^C, x_3\} \in E_\alpha$  を満たす  $\alpha$  をプルーフネットとする。任意のスイッチング  $\sigma \in S(\alpha)$  において、 $y \in TN(\alpha)$  が  $\sigma_t$  において旅路  $x_3 \downarrow, \dots, y \downarrow, \dots, y \uparrow, \dots, x_3 \uparrow$  を満たすならば、 $e(x_1) \cup e(x_2) \subseteq e(y)$  である。

**証明.**  $\alpha$  がプルーフネットであることと帝国の定義から、 $e(x_1), e(x_2) \subseteq e(x_3)$  である。また、仮定より  $e(x_3) \subseteq e(y)$  である。よって、 $e(x_1) \cup e(x_2) \subseteq e(y)$  である。 □

次に、証明構造  $\alpha$  を 2 つに分けることを保証する定理を示す。先ほどの + 除去の補題の ★ 結合子に関する定理である。

**定理 (分裂定理 (splitting theorem)).** 終節点に ★ 結合子の論理式でラベル付けされた節点が少なくとも 1 つ存在し、+ 結合子の論理式でラベル付けされた節点がな

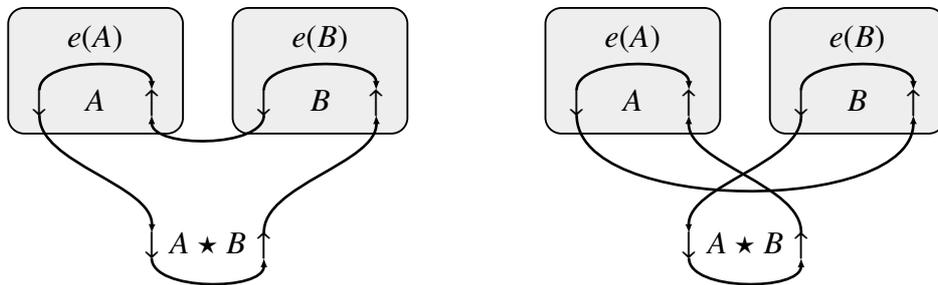
いプルーフネット  $\alpha$  を考える。このとき、以下の条件を満たす  $x_1^A, x_2^B, x_3^{A \star B} \in V_\alpha$  が存在する。ただし、 $x_3 \in TN(\alpha)$  かつ  $\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\} \in E_\alpha$  である。

- $V_\alpha = V_{e(x_1)} \cup V_{e(x_2)} \cup \{x_3\}$
- $E_\alpha = E_{e(x_1)} \cup E_{e(x_2)} \cup \{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$
- $L_\alpha = L_{e(x_1)} \cup L_{e(x_2)} \cup \{(x_3, A \star B)\}$

このとき、 $x_3$  を分裂可能節点や  $\alpha$  を分裂可能という。また、このような  $x_3$  を持つとき  $\alpha$  は分割可能であるという。

証明.  $\{x_1^A, x_3^{A \star B}\}, \{x_2^B, x_3\} \in E_\alpha$  を満たすプルーフネット  $\alpha$  において、 $e(x_1) \cup e(x_2)$  が  $\subseteq$  に関して最大となるものを選択する。初めに、 $x_3 \in TN(\alpha)$  であることを示す。 $x_3 \notin TN(\alpha)$  と仮定すると、 $x_3 \downarrow, \dots, y \downarrow, \dots, y \uparrow, \dots, x_3 \uparrow$  を満たす  $y \in TN(\alpha)$  が存在する。このとき、先ほどの補題より  $e(x_1) \cup e(x_2) \subseteq e(y)$  なので、 $e(x_1) \cup e(x_2)$  が  $\subseteq$  に関して最大であることに矛盾する。したがって、 $x_3 \in TN(\alpha)$  である。

次に3つの条件を満たすことを示す。旅路定理より、 $z \in V_{e(x_1)}$  ならば  $z \in \{y \in V_\alpha \mid y \uparrow, y \downarrow \in [x \uparrow, x \downarrow]_\sigma\}$  かつ  $z \in V_{e(x_2)}$  ならば  $z \in \{y \in V_\alpha \mid y \uparrow, y \downarrow \in [x \uparrow, x \downarrow]_\sigma\}$  を満たす  $\alpha$  のスイッチング  $\sigma$  を取ることができる。また  $\alpha$  がプルーフネットであることから、 $\sigma$  を以下のような簡潔なグラフで表すことができる。



この2つのグラフから明らかに3つの条件を満たしていることが分かる。 □

最後に、プルーフネットが帰納的証明構造であることを示す。

定理. プルーフネットは帰納的証明構造である。

証明. プルーフネットの節点の個数に関する帰納法で示す。

基底段階

- 節点が0個のプルーフネットは存在しない。

帰納段階

任意のプルーフネットを  $\alpha$  とする。

- $x^{A+B} \in TN(\alpha)$  であるとき  
 $\alpha$  に + 除去の補題を適用して、プルーフネットが手に入る。それに帰納法の仮定を用いて、それが帰納的証明構造であることが分かる。その帰納的証明構造の + 規則を適用すると、 $\alpha$  は帰納的証明構造であることが分かる。
- $x^{A+B} \notin TN(\alpha)$  であるとき  
 $x$  に対して分裂定理を適用することで、 $V_\beta \cap V_\gamma = \emptyset$  である2つのプルーフネット  $\beta$  と  $\gamma$  が手に入る。これらに帰納法の仮定を適用すると、 $\beta$  と  $\gamma$  は帰納的証明構造であることが分かる。これら2つに対して帰納的証明構造の  $\star$  規則が適用でき、 $\alpha$  は帰納的証明構造であることが分かる。

□

### 3.3 $\rightarrow$ 結合子に関する帰納的証明構造

$\rightarrow$  結合子と定数0からなる線形論理を *MIZLL* とする。この論理に対して帰納的証明構造を定義する。つまり、 $\star$  と + 結合子を  $\rightarrow$  結合子に変えた帰納的証明構造を定義する。先ほどの節では片側シークエント計算で考えたが、ここでは最初に定義したシークエント計算について考える。さらに、都合により単純に結合子を置き換えたものではない。

定義 (帰納的証明構造).

$formula_* = \{A_* \mid A \in formula, * \in \{L, R\}\}$  とする。帰納的証明構造  $\alpha$  は、3つ組  $(V_\alpha, E_\alpha, L_\alpha)$  からなる無向グラフである。ここで、 $V_\alpha$  は節点の集合、 $E_\alpha$  は辺の集合、 $L_\alpha : V_\alpha \rightarrow formula_*$  はラベルに対する関数の集合である。同時に終節点  $TN$  を定義する。

公理  $\alpha = (\{x_1, x_2\}, \{\{x_1 x_2\}\}, \{(x_1, p_L), (x_2, p_R)\})$  は帰納的証明構造である。このとき、 $TN(\alpha) = \{x_1, x_2\}$  である。

L0 規則  $\alpha = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 0_L)\})$  は帰納的証明構造である。このとき、 $TN(\alpha) = \{x\}$  である。

R0 規則  $z \notin V_\alpha$  である  $\alpha$  が帰納的証明構造ならば、 $\alpha' = (V_\alpha \cup \{z\}, E_\alpha, L_\alpha \cup \{(z, 0_R)\})$  も帰納的証明構造である。このとき、 $TN(\alpha') = TN(\alpha) \cup \{z\}$  である。

L  $\rightarrow$  規則  $\alpha, \beta$  が帰納的証明構造で、 $x^{AR} \in TN(\alpha)$  かつ  $y^{BL} \in TN(\beta)$ 、 $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$  ならば、 $(V_\alpha \cup V_\beta \cup \{z\}, E_\alpha \cup E_\beta \cup \{\{x, z\}, \{y, z\}\}, L_\alpha \cup L_\beta \cup \{(z, (A \rightarrow B)_L)\})$  も帰納的証明構造である。ただし、 $z \notin V_\alpha \cup V_\beta$  とする。このときの終節点は、 $(TN(\alpha) \cup TN(\beta) \cup \{z\}) \setminus \{x, y\}$  である。

R  $\rightarrow$  規則  $\alpha$  が帰納的証明構造で、 $x^{AL}, y^{BR} \in TN(\alpha)$  かつ  $z \notin V_\alpha$  ならば、 $(V_\alpha \cup \{z\}, E_\alpha \cup \{\{x, z\}, \{y, z\}\}, L_\alpha \cup \{(z, (A \rightarrow B)_R)\})$  も帰納的証明構造である。このときの終節点は、 $(TN(\alpha) \cup \{z\}) \setminus \{x, y\}$  である。

ここでは直観主義線形論理に関する帰納的証明構造も定義する。古典線形論理に関する帰納的証明構造との違いは R0 規則にだけ現れる。その違いのために、終節点  $TN(\alpha)$  に関して以下の表記を導入する。

- $TN_L(\alpha) = \{x^{AL} \in TN(\alpha) \mid A_L \in formula_*\}$
- $TN_R(\alpha) = \{x^{AR} \in TN(\alpha) \mid A_R \in formula_*\}$

定義 (直観主義線形論理の帰納的証明構造).

帰納的証明構造  $\alpha$  は、3 つ組  $(V_\alpha, E_\alpha, L_\alpha)$  からなる無向グラフである。ここで、 $V_\alpha$  は節点の集合、 $E_\alpha$  は辺の集合、 $L_\alpha : V_\alpha \rightarrow formula_*$  はラベルに対する関数の集合である。同時に終節点  $TN$  を定義する。

公理  $\alpha = (\{x_1, x_2\}, \{\{x_1 x_2\}\}, \{(x_1, p_L), (x_2, p_R)\})$  は帰納的証明構造である。このとき、 $TN(\alpha) = \{x_1, x_2\}$  である。

L0 規則  $\alpha = (\{x\}, \emptyset, \{(x, 0_L)\})$  は帰納的証明構造である。このとき、 $TN(\alpha) = \{x\}$  である。

R0 規則  $z \notin V_\alpha$  である  $\alpha$  が帰納的証明構造で、 $TN_R(\alpha) = \emptyset$  ならば、 $\alpha' = (V_\alpha \cup \{z\}, E_\alpha, L_\alpha \cup \{(z, 0_R)\})$  も帰納的証明構造である。このとき、 $TN(\alpha') = TN(\alpha) \cup \{z\}$  である。

L  $\rightarrow$  規則  $\alpha, \beta$  が帰納的証明構造で、 $x^{AR} \in TN(\alpha)$  かつ  $y^{BL} \in TN(\beta)$  かつ  $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$  ならば、 $(V_\alpha \cup V_\beta \cup \{z\}, E_\alpha \cup E_\beta \cup \{\{x, z\}, \{y, z\}\}, L_\alpha \cup L_\beta \cup \{(z, (A \rightarrow B)_L)\})$  も帰納的証明構造である。ただし、 $z \notin V_\alpha \cup V_\beta$  とする。このときの終節点は、 $(TN(\alpha) \cup TN(\beta) \cup \{z\}) \setminus \{x, y\}$  である。

R  $\rightarrow$  規則  $\alpha$  が帰納的証明構造で、 $x^{AL}, y^{BR} \in TN(\alpha)$  かつ  $z \notin V_\alpha$  ならば、 $(V_\alpha \cup \{z\}, E_\alpha \cup \{\{x, z\}, \{y, z\}\}, L_\alpha \cup \{(z, (A \rightarrow B)_R)\})$  も帰納的証明構造である。このときの終節点は、 $(TN(\alpha) \cup \{z\}) \setminus \{x, y\}$  である。

これからは古典線形論理の帰納的証明構造を  $\text{IPSc}$ 、直観主義論理の帰納的証明構造を  $\text{IPSi}$  と呼ぶ。

### 3.3.1 シークエント 計算との対応関係

定理. 以下の2 つは同値である。

1.  $\text{MIZCLL} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$
2.  $TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \Delta_R$  である  $\text{IPSc}$   $\alpha$  が存在する。  
ただし、 $\Gamma_L = \{x^{A_L} \in TN(\alpha) \mid A \in \Gamma\}$  かつ  $\Delta_L = \{x^{A_R} \in TN(\alpha) \mid A \in \Delta\}$  である。

証明.

- $1 \rightarrow 2$   
 $\text{MIZCLL}$  の構成に関する帰納法で示すことができる。
- $2 \rightarrow 1$   
 $\text{IPSc}$  の構成に関する帰納法で示すことができる。

□

同様に、直観主義論理に対しても対応関係が成り立つ。

定理. 以下の2 つは同値である。

1.  $\text{MIZILL} \vdash \Gamma \Rightarrow A$
2.  $TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \{x^{A_R}\}$  である  $\text{IPSi}$   $\alpha$  が存在する。  
ただし、 $\Gamma_L = \{x^{B_L} \in TN_L(\alpha) \mid B \in \Gamma\}$  である。

### 3.3.2 帰納的証明構造に関する概念

論理式に対して定義や補題として与えられているものを、この帰納的証明構造で用いるために節点に対して定義する。

定義 (部分節点).

$x^A \in V_\alpha$  の部分節点  $\text{sub}(x)$  は以下のように定義される。

- $\text{sub}(x^{p_L}) = \text{sub}(x^{p_R}) = \{x\}$

- $sub(x^{0L}) = sub(x^{0R}) = \emptyset$
- $sub(x^{(B \circ C)L}) = sub(x^{(B \circ C)R}) = sub(y) \cup sub(z) \cup \{x\}$

ただし、 $\{y, x\}, \{z, x\} \in E_\alpha$  である。

定義 (狭義の擬正節点 (pseudo strictly positive vertex)).

$x^A \in V_\alpha$  の狭義の擬正節点  $sub^{++}(x)$  は以下のように定義される。

- $sub^{++}(x^{pL}) = sub^{++}(x^{pR}) = \{x\}$
- $sub^{++}(x^{0L}) = sub^{++}(x^{0R}) = \emptyset$
- $sub^{++}(x^{(B \circ C)L}) = sub^{++}(y^{CL}) \cup \{x\}$
- $sub^{++}(x^{(B \circ C)R}) = sub^{++}(y^{CR}) \cup \{x\}$

ただし、 $\{y, x\} \in E_\alpha$  である。

定義 (狭義の擬負節点 (pseudo strictly negative vertex)).  $x^A \in V_\alpha$  の狭義の擬負節点  $sub^{--}(x)$  は以下のように定義される。

- $sub^{--}(x^{pL}) = sub^{--}(x^{pR}) = \{x\}$
- $sub^{--}(x^{0L}) = sub^{--}(x^{0R}) = \emptyset$
- $sub^{--}(x^{(B \circ C)L}) = sub^{--}(y^{BL}) \cup \{x\}$
- $sub^{--}(x^{(B \circ C)R}) = sub^{--}(y^{BR}) \cup \{x\}$

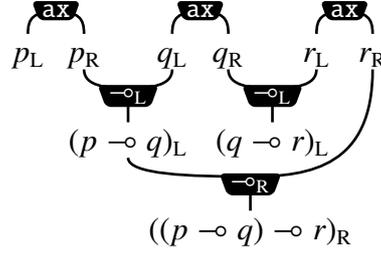
ただし、 $\{y, x\} \in E_\alpha$  である。

定義 (退去節点と進入節点).

$x \in V_\alpha$  の退去節点  $LE(x)$  と進入節点  $EN(x)$  は以下のように定義される。

- $LE(x) = \max(\{y \mid x \in sub^{++}(y)\})$
- $EN(x) = \min(\{y \mid LE(x) \in sub^{--}(y)\})$

ここでこれまでの概念に対して例を挙げる。



$$\begin{aligned}
 sub^{++}(((p \multimap q) \multimap r)_R) &= \{((p \multimap q) \multimap r)_R, r_R\} \\
 sub^{--}(((p \multimap q) \multimap r)_R) &= \{((p \multimap q) \multimap r)_R, (p \multimap q)_L, p_R\} \\
 LE(r_R) &= ((p \multimap q) \multimap r)_R \\
 EN(r_R) &= ((p \multimap q) \multimap r)_R
 \end{aligned}$$

### 3.3.3 可逆性

ここでは、帰納的証明構造に関する可逆性を示す。+ 除去の補題と類似した補題である。

補題 (可逆性).

- R0 に関する可逆性  
 $TN(\alpha) = \{\Gamma_L, \Delta_R, x^{0R}\}$  である  $\alpha$  が帰納的証明構造ならば、 $TN(\alpha') = \{\Gamma_L, \Delta_R\}$  である帰納的証明構造  $\alpha'$  が存在する。
- R  $\multimap$  に関する可逆性  
 $TN(\alpha) = \{\Gamma_L, \Delta_R, z^{(A \multimap B)_R}\}$  である  $\alpha$  が帰納的証明構造ならば、 $TN(\alpha') = \{\Gamma_L, \Delta_R, x^{A_L}, y^{B_R}\}$  である帰納的証明構造  $\alpha'$  が存在する。ただし、 $\{x, z\}, \{y, z\} \in E_\alpha$  である。

証明 (R0 に関する可逆性).

帰納的証明構造の構成に関する帰納法で示す。

基底段階

- 公理または L0 規則で導出されたとき  
 これらの場合は  $x^{0R}$  を含まない。

帰納段階

- 最後に R0 規則で導出されたとき  
 帰納的証明構造  $\beta$  から R0 規則によって  $\alpha$  が導出されたとする。

- 最後の規則によって  $x^{0R}$  が導出されたとき  
帰納的証明構造の定義より、 $\beta$  は帰納的証明構造であり、求める  $\alpha'$  である。
- 最後の規則によって  $x^{0R}$  以外が導出されたとき  
 $\beta$  に帰納法の仮定して、 $\beta'$  が取れる。よって、 $\beta'$  に R0 規則を適用することで、求める帰納的証明構造  $\alpha'$  が存在することが分かる。
- 最後に L  $\rightarrow$  規則で導出されたとき  
帰納的証明構造  $\beta$  と  $\gamma$  から L  $\rightarrow$  規則によって  $\alpha$  が導出されたとする。  $x^{0R} \in V_\beta$  とし、 $\beta$  に帰納法の仮定を適用したものを  $\beta'$  とする。このとき、以下のように  $\alpha$  を再構成できる。

$$\frac{\beta' \quad \gamma \quad \text{L } \rightarrow}{\frac{\alpha'}{\alpha} \quad \text{R0}}$$

したがって、求める帰納的証明構造  $\alpha'$  が存在することが分かる。また、 $x \in V_\gamma$  に対しても同様の議論ができる。

- 最後に R  $\rightarrow$  規則で導出されたとき  
帰納的証明構造  $\beta$  から R  $\rightarrow$  規則によって  $\alpha$  が導出されたとする。  $\beta$  に帰納法の仮定を適用したものを  $\beta'$  とする。このとき、以下のように  $\alpha$  を再構成できる。

$$\frac{\beta' \quad \text{R } \rightarrow}{\frac{\alpha'}{\alpha} \quad \text{R0}}$$

したがって、求める帰納的証明構造  $\alpha'$  が存在することが分かる。

□

証明 (R  $\rightarrow$  に関する可逆性).

帰納的証明構造の構成に関する帰納法で示す。

基底段階

- 公理または L0 によって導出されたとき  
これらの場合は  $\not\vdash^{(A \rightarrow B)R}$  を含まない。

帰納段階

- 最後に R0 によって導出されたとき  
帰納的証明構造  $\beta$  から R0 規則によって  $\alpha$  が導出されたとする。  $\beta$  に帰納法

の仮定を適用したものを  $\beta'$  とする。このとき、以下のように  $\alpha$  を再構成できる。

$$\frac{\beta'}{\alpha} \text{R} \rightarrow$$

したがって、求める帰納的証明構造  $\alpha'$  が存在することが分かる。

- 最後に  $\text{L} \rightarrow$  によって導出されたとき  
 帰納的証明構造  $\beta$  と  $\gamma$  から  $\text{L} \rightarrow$  規則によって  $\alpha$  が導出されたとする。  $z^{(A \rightarrow B)\text{R}} \in V_\beta$  とし、 $\beta$  に帰納法の仮定を適用したものを  $\beta'$  とする。このとき、以下のように  $\alpha$  を再構成できる。

$$\frac{\beta' \quad \gamma}{\alpha} \text{L} \rightarrow$$

したがって、求める帰納的証明構造  $\alpha'$  が存在することが分かる。また、 $z \in \gamma$  に対しても同様の議論ができる。

- 最後に  $\text{R} \rightarrow$  によって導出されたとき  
 帰納的証明構造  $\beta$  から  $\text{R} \rightarrow$  規則によって  $\alpha$  が導出されたとする。
  - 最後の規則によって  $z^{(A \rightarrow B)\text{R}}$  が導出されたとき  
 帰納的証明構造の定義より、 $\beta$  は帰納的証明構造であり、求める  $\alpha'$  が存在する。
  - 最後の規則によって  $z^{(A \rightarrow B)\text{R}}$  以外が導出されたとき  
 $\beta$  に帰納法の仮定して、 $\beta'$  が取れる。よって、 $\beta'$  に  $\text{R} \rightarrow$  規則をすることで、求める帰納的証明構造  $\alpha'$  が存在することが分かる。

□

## 第4章 線形論理における古典論理と直観主義論理の関係

### 4.1 $\multimap$ 結合子だけからなる線形論理での関係

初めに、 $\multimap$ の結合子だけを持つ線形論理について考える。つまり、シークエント計算は以下の公理と規則だけからなる。

$$\frac{}{p \Rightarrow p} \text{Ax} \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{L} \multimap \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta} \text{R} \multimap$$

この線形論理で  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  が証明可能であるとき、 $MILL \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$  とする。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理. 以下の2条件は同値である。

1.  $MICLL \vdash \Gamma \Rightarrow A$
2.  $MIILL \vdash \Gamma \Rightarrow A$

この証明には以下の補題が必要である。

補題.  $MICLL \not\vdash \Gamma \Rightarrow$

証明.  $MICLL$  の構成に関する帰納法で示す。

基底段階

- 公理  
この補題は成り立つ。

帰納段階

- 最後に  $\text{L} \multimap$  規則で導出されたとき  
 $MICLL \vdash \Gamma \Rightarrow$  ならば以下の場合が考えられる。

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow B \quad \Gamma_2, C \Rightarrow}{\Gamma_1, \Gamma_2, B \multimap C \Rightarrow} \text{L} \multimap$$

しかし、帰納法の仮定より  $MICLL \not\vdash \Gamma', C \Rightarrow$  である。したがって、 $MICLL \not\vdash \Gamma \Rightarrow$  が成立する。

- 最後に  $R \multimap$  規則で導出されたとき  
明らかに  $MICLL \vdash \Gamma \Rightarrow$  である。

□

この補題を用いて先ほどの定理を証明する。

証明.

- $1 \rightarrow 2$   
 $MICLL$  の構成に関する帰納法で示す。  
基底段階

- $MICLL \vdash p \Rightarrow p$  のとき  
定義から  $MIILL \vdash p \Rightarrow p$  である。

帰納段階

- 最後に  $L \multimap$  規則で導出されたとき  
 $MICLL \vdash \Gamma_1, \Gamma_2, B \multimap C \Rightarrow A$  ならば以下の場合が考えられる。

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow B \quad \Gamma_2, C \Rightarrow A}{\Gamma_1, \Gamma_2, B \multimap C \Rightarrow A} L \multimap \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow B, A \quad \Gamma_2, C \Rightarrow}{\Gamma_1, \Gamma_2, B \multimap C \Rightarrow A} L \multimap$$

先ほどの補題より、右側の場合が起こらない。したがって、左側の場合のみを考える。帰納法の仮定より、 $MIILL \vdash \Gamma_1 \Rightarrow B$  かつ  $MIILL \vdash \Gamma_2 \Rightarrow A$  である。よって、 $MIILL \vdash \Gamma_1, \Gamma_2, B \multimap C \Rightarrow A$  である。

- 最後に  $R \multimap$  規則で導出されたとき  
 $MICLL \vdash \Gamma \Rightarrow B \multimap C$  ならば、以下の証明図が考えられる。

$$\frac{\Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow B \multimap C} R \multimap$$

帰納法の仮定より  $MIILL \vdash \Gamma, B \Rightarrow C$  なので、 $MIILL \vdash \Gamma \Rightarrow B \multimap C$  である。

- $2 \rightarrow 1$   
シーケント計算の定義から自明である。

□

## 4.2 MIZLLに関する関係

次に、先ほどの論理に定数0を追加した線形論理について考える。つまり、シーケント計算は以下の公理と規則だけからなる。

$$\frac{}{p \Rightarrow p} \text{Ax} \quad \frac{}{0 \Rightarrow p} \text{L0} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, 0} \text{R0}$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{L}\multimap \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta} \text{R}\multimap$$

先ほどの論理では古典的な論理と直観主義的な論理は証明能力が同じであったが、定数0を加えることで古典的な論理の方が多くの論理式を証明できるようになる。

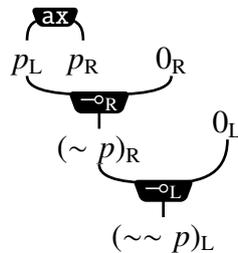
先行研究 [5, 6] では、終式だけを見て *DNE* やそれに代わる集合を定めていた。しかし、線形論理では弱化規則と縮約規則が認められていないので、同様に考えるのは難しい。したがって、終式だけでなく証明図を解析して *DNE* を定める。公理として現れた  $\Rightarrow$  の右側の  $p$  が  $\Rightarrow$  の左側に移るまでの証明図の挙動を調べる。つまり、以下のような証明図の点の部分に着目する。

$$\frac{\frac{\frac{}{p \Rightarrow p} \text{Ax}}{\vdots}}{\Gamma' \Rightarrow P, \Delta'} \quad \frac{}{\Gamma', Q \Rightarrow \Delta'}}{\Gamma, \Gamma', P \multimap Q \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

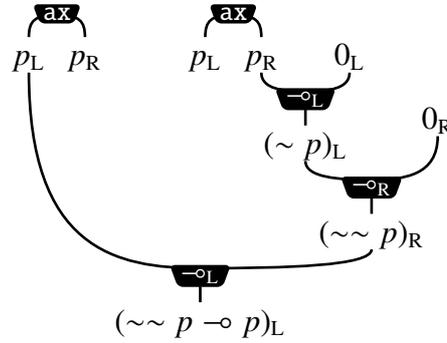
### 4.2.1 帰納的証明構造を用いたアプローチ

シーケント計算の証明図ではなく、前章で定義した帰納的証明構造を用いて解析する。つまり、*IPSc* と *IPSi* について解析する。帰納的証明構造の利点として以下の2つ挙げられる。

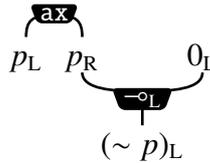
1つ目は、グラフ的な特徴付けができることである。*MIZCLL*  $\vdash \sim \sim p \Rightarrow p$  に対応する帰納的証明構造は以下である。







2.  $TN(\alpha_i) = \{x_1^{pL}, z_2^{(\sim p)L}\}$  の存在  
以下の IPSi が存在する。



- L0 規則で導出されたとき  
 $TN(\alpha) = \{x_1^{0L}\}$  である IPSc  $\alpha$  が存在したとする。このとき、 $TN(\alpha_i) = \{x_1^{0L}\}$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在を示す。これは IPSi の定義より明らかに存在する。

帰納段階

- 最後に R0 規則で導出されたとき  
 $TN(\alpha') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{y_A^{AR}\}$  である IPSc  $\alpha'$  に R0 規則を適用して、 $TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{y_A^{AR}, y_0^{0R}\}$  である IPSc  $\alpha$  を構成したとする。このとき、3つの IPSi の存在を示す。

1.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{y_A^{AR}, z_0^{(\sim 0)L}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  
 $\alpha'$  に R  $\rightarrow$  に関する可逆性を適用して、 $TN(\beta) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup \Delta_R \cup \{y_a^{aR}\}$  である IPSc  $\beta$  が取れる。これに帰納法の仮定を適用して、 $TN(\beta_i) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)L}\} \cup DNE_\beta$  である IPSc  $\beta_i$  が取れる。よって、以下の手順で IPSi  $\alpha'_i$  が取れる。

$$\frac{\frac{\beta_i}{\beta_{i_1}} \text{R0 } (\{x_0\}, \emptyset, \{(x_0, 0_L)\})}{\beta_{i_2}} \text{L } \rightarrow \frac{(\{x_{a1}, x_{a2}\}, \{(x_{a1}, x_{a2})\}, \{(x_{a1}, a_L), (x_{a2}, a_R)\})}{\beta_{i_3}} \text{L } \rightarrow \frac{\vdots}{\alpha'_i}$$

$$\begin{aligned} TN(\beta_{i_1}) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}, y_0^{0_R}\} \cup DNE_\beta \\ TN(\beta_{i_2}) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}, z_0^{(\sim 0)_L}\} \cup DNE_\beta \\ TN(\beta_{i_3}) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{y_a^{a_R}, z_0^{(\sim 0)_L}\} \cup DNE_\beta \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\} \\ TN(\alpha'_i) &= \Gamma_L (\sim \Delta)_L \cup \{y_A^{A_R}, z_0^{(\sim 0)_L}\} \cup DNE_\beta \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\} \end{aligned}$$

最後に、 $DNE_\alpha = DNE_\beta \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\}$  なので、 $\alpha_i = \alpha'_i$  である。

2.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)_L}, y_0^{0_R}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  
 $\alpha'$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\alpha'_i) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)_L}\} \cup DNE_{\alpha'}$  である IPSc  $\alpha'_i$  が取れる。これに R0 規則を適用して、求める IPSi  $\alpha_i$  が取れる。
3.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L, \{z_A^{(\sim A)_L}, z_0^{(\sim 0)_L}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  
(2) より、 $TN(\alpha'_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L, \{z_A^{(\sim A)_L}, y_0^{0_R}\} \cup DNE_{\alpha'}$  である IPSi  $\alpha'_i$  が取れる。これと  $TN(\beta_i) = \{x_1^{0_L}\}$  である IPSi  $\beta_i$  に対して、L  $\rightarrow$  規則を適用することで求める IPSi  $\alpha_i$  が取れる。

- 最後に L  $\rightarrow$  規則で導出されたとき

$TN(\alpha_1) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{y_{A1}^{A_R}, x_1^{B_R}\}$  である IPSc  $\alpha_1$  と、 $TN(\alpha_2) = \Gamma'_L \cup \Delta'_R \cup \{y_{A2}^{A'_R}, x_2^{C_L}\}$  である IPSc  $\alpha_2$  に L  $\rightarrow$  規則を適用して、 $TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup \Delta_R \cup \Delta'_R \cup \{y_{A1}^{A_R}, y_{A2}^{A'_R}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\}$  である IPSc  $\alpha$  を構成したとする。このとき、3 つの IPSi の存在を示す。

1.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{y_{A1}^{A_R}, z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  
 $\alpha_1$  に R  $\rightarrow$  に関する可逆性を適用して、 $TN(\alpha'_1) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup \Delta_R \cup \{y_a^{a_R}, x_1^{B_R}\}$  である IPSc  $\alpha'_1$  が取れる。 $\alpha'_1$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\beta_i) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}, x_1^{B_R}\} \cup DNE_{\alpha'_1}$  である IPSi  $\beta_i$  が取れる。同様に  $\alpha_2$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\gamma_i) = \Gamma'_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_2^{C_L}\} \cup DNE_{\alpha_2}$  である IPSi  $\gamma_i$  が取れる。したがって、以下のように IPSi  $\alpha'_i$  が構成できる。

$$\frac{\beta_i \quad \gamma_i}{\alpha_i''} \text{ L } \rightarrow$$

$$\vdots$$

$$\alpha_i'$$

$$TN(\alpha_i'') = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}, z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\} \\ \cup DNE_{\alpha_1'} \cup DNE_{\alpha_2}$$

$$TN(\alpha_i') = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{y_{A1}^{A_R}, z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\} \\ \cup DNE_{\alpha_1'} \cup DNE_{\alpha_2} \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\}$$

最後に、 $DNE_\alpha = DNE_{\alpha_1'} \cup DNE_{\alpha_2} \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\}$ なので、 $\alpha_i = \alpha_i'$ である。

2.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{z_{A1}^{(\sim A)_L}, y_{A2}^{A'_R}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\} \cup DNE_\alpha$   
である IPSi  $\alpha_i$  の存在

$\alpha_1$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\beta_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_{A1}^{(\sim A)_L}, x_1^{B_R}\} \cup DNE_{\alpha_1}$  である IPSi  $\beta_i$  が取れる。同様に  $\alpha_2$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\gamma_i) = \Gamma'_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{y_{A2}^{A'_R}, x_2^{C_L}\} \cup DNE_{\alpha_2}$  である IPSi  $\gamma_i$  が取れる。よって、以下のように  $\alpha_i'$  を構成できる。

$$\frac{\beta_i \quad \gamma_i}{\alpha_i'} \text{ L } \rightarrow$$

最後に、 $DNE_\alpha = DNE_{\alpha_1} \cup DNE_{\alpha_2}$  なので、 $\alpha_i = \alpha_i'$  である。

3.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{z_{A1}^{(\sim A)_R}, y_{A2}^{(\sim A')_L}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\} \cup DNE_\alpha$   
である IPSi  $\alpha_i$  の存在

$TN(\beta_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_{A1}^{(\sim A)_L}, x_1^{B_R}\} \cup DNE_{\alpha_1}$  である IPSi  $\beta_i$  が取れる。同様に  $\alpha_2$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\gamma_i) = \Gamma'_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_2^{C_L}\} \cup DNE_{\alpha_2}$  である IPSi  $\gamma_i$  が取れる。よって、以下のように  $\alpha_i'$  を構成できる。

$$\frac{\beta_i \quad \gamma_i}{\alpha_i''} \text{ L } \rightarrow$$

$$\frac{\alpha_i''}{\alpha_i'} \text{ R0}$$

最後に、 $DNE_\alpha = DNE_{\alpha_1} \cup DNE_{\alpha_2}$  なので、 $\alpha_i = \alpha_i'$  である。

- 最後に R  $\rightarrow$  規則で導出されたとき

$TN(\alpha') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{y_A^{A_R}, x_1^{B_L}, x_2^{C_R}\}$  である IPSc  $\alpha'$  に R0 規則を適用して、 $TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{y_A^{A_R}, x_3^{(B \rightarrow C)_R}\}$  である IPSc  $\alpha$  を構成したとする。このとき、3 つの IPSi の存在を示す。

1.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{y_A^{AR}, z_3^{(\sim(B \rightarrow C))L}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  $\alpha'_i$  に  $R \rightarrow$  に関する可逆性を適用して、 $TN(\beta) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup \Delta_R \cup \{y_a^{AR}, x_1^{BL}, x_2^{CR}\}$  である IPSc  $\beta$  が取れる。 $\beta$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\beta_i) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)L}, x_1^{BL}, x_2^{CR}\} \cup DNE_\beta$  である  $\beta_i$  が取れたとする。このとき、以下のように求める  $\alpha_i$  構成できる。

$$\frac{\frac{\beta_i}{\beta_{i1}} R \rightarrow (\{x_0\}, \emptyset, \{(x_0, 0_L)\})}{\beta_{i2}} L \rightarrow (\{x_{a1}, x_{a2}\}, \{(x_{a1}, x_{a2})\}, \{(x_{a1}, a_L), (x_{a2}, a_R)\}) L \rightarrow \frac{\alpha'_i}{\alpha_i}$$

$$\begin{aligned} TN(\beta_{i1}) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)L}, x_3^{(B \rightarrow C)R}\} \cup DNE_\beta \\ TN(\beta_{i2}) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)L}, z_3^{(\sim(B \rightarrow C))L}\} \cup DNE_\beta \\ TN(\alpha'_i) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{y_a^{AR}, z_3^{(\sim(B \rightarrow C))L}\} \cup DNE_\beta \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)L}\} \\ DNE_\alpha &= DNE_\beta \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)L}\} \text{ なので、 } \alpha_i = \alpha'_i \text{ である。} \end{aligned}$$

2.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)L}, x_3^{(B \rightarrow C)R}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  $\alpha'_i$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\alpha'_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)L}, x_1^{BL}, x_2^{CR}\} \cup DNE_{\alpha'}$  である IPSi  $\alpha'_i$  が取れる。よって、これに  $R \rightarrow$  規則を適用して、求める  $\alpha_i$  が取れる。
3.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)L}, z_3^{(\sim(B \rightarrow C))L}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  $\alpha'_i$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\alpha'_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)L}, x_1^{BL}, x_2^{CR}\} \cup DNE_{\alpha'}$  である IPSi  $\alpha'_i$  が取れる。よって、以下のように求める  $\alpha_i$  構成できる。

$$\frac{\alpha'_i}{\alpha_i} \beta L \rightarrow$$

ここで、 $TN(\beta) = \{y_0^{0L}, z_0^R\}$  である。

□

したがって、 $\Delta$  を高々1つの節点とすれば、以下の定理が得られる。

**定理.**  $TN_R(\alpha)$  が高々1つの節点からなる IPSc  $\alpha$  が存在するならば、 $TN(\alpha_i) = TN(\alpha) \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  が存在する。ただし、 $DNE = \{x^{(\sim \sim p \rightarrow p)L} | (x_2, p_R) \in L_\alpha\}$  である。ここで、 $x_2 \mapsto x \notin V_\alpha$  は単射である。

次に、分裂定理のような補題を示す。分裂定理のように具体的に分裂可能な節点

を見つけるのではなく、分裂可能な節点が存在することを示す。  
IPSc  $\alpha$  に対して以下のような集合を定義する。

$$G_\alpha = \{x \in V_\alpha \mid \forall y, z \in V_\alpha. (x \smile y \wedge x \smile z \rightarrow y \smile z)\}$$

また、 $V(\alpha)$  を原子論理式でラベル付された節点の集合、 $P_\alpha(A_1, A_2)$  を  $\alpha$  における  $A_1, A_2$  間の道の集合とする。

補題 ( $L \multimap$  に関する可逆性).  $TN_R(\alpha) = \{x \in TN(\alpha) \mid x \in G_\alpha \vee x \in V(\alpha)\}$  である  $\alpha$  を IPSc とする。任意の節点  $z^{(A_1 \multimap A_2)_R} \in V_\alpha$  に対して、 $A_1, A_2$  間の全ての道に含まれない  $y^{(B_1 \multimap B_2)_L} \in TN_L(\alpha)$  が存在するならば、 $\alpha$  を分裂可能な節点が存在する。

証明. IPSc の構成に関する帰納法で示す。

基底段階

- 公理で導出されたとき  
条件を満たす  $y \in TN_L(\alpha)$  が存在しない。
- L0 規則で導出されたとき  
公理と同じ理由から補題は成り立つ。

帰納段階

- 最後に R0 規則で導出されたとき  
IPSc  $\alpha'$  に R0 規則を適用して  $\alpha$  が導出されたとする。IPSc の定義より、 $TN_R(\alpha') = \{x \in TN(\alpha') \mid x \in G_{\alpha'} \vee x \in V(\alpha')\}$  かつ  $y \in TN_L(\alpha')$  である。よって、帰納法の仮定より  $\alpha'$  を分裂可能な節点が存在する。 $\beta$  と  $\gamma$  に分裂したとすると、以下のように  $\alpha$  を再構成できる。

$$\frac{\frac{\beta}{\beta'} \text{ R0} \quad \gamma}{\alpha} \text{ L } \multimap$$

したがって、 $\alpha$  を分裂可能な節点が存在する。

- 最後に  $L \multimap$  で導出されたとき  
IPSc の定義より、 $\alpha$  を分裂可能な節点は存在する。
- 最後に  $R \multimap$  で導出されたとき  
 $\alpha$  が以下のように構成されたとする。

$$\frac{\alpha'}{\alpha} \text{ R } \multimap \quad \begin{aligned} TN(\alpha') &= \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{z_1^{C_L}, z_2^{D_R}\} \\ TN(\alpha) &= \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{z^{(C \multimap D)_R}\} \end{aligned}$$

$TN_R(\alpha)$ が条件を満たすとすると、 $z \in G_\alpha$ である。よって、 $z_2 \in G_{\alpha'}$ または $z_2 \in V(\alpha')$ である。また、条件を満たす $y \in TN_L(\alpha)$ が存在するとき、 $y \in TN_L(\alpha')$ かつ $\alpha'$ でも条件を満たす。よって、 $\alpha'$ に対して帰納法の仮定が適用できる。 $w$ を分裂可能な節点とすると、以下のように $\alpha$ を再構成できる。

- $w \notin P_\alpha(z_1, z_2)$  のとき  
以下のように $\alpha'$ が分裂されたとする。

$$\frac{\beta \quad \gamma}{\alpha'} L \rightarrow$$

$z_1, z_2 \in TN(\beta)$ とすると、以下のように $\alpha$ を再構成できる。

$$\frac{\frac{\beta}{\beta'} R \rightarrow \quad \gamma}{\alpha} L \rightarrow$$

- $w \in P_\alpha(z_1, z_2)$  のとき  
以下のように $\alpha'$ が分裂されたとする。

$$\frac{\beta \quad \gamma}{\alpha'} L \rightarrow$$

$y \in TN_L(\beta)$ とすると、 $\rightarrow R$ に関する可逆性を適用することなく $\beta$ でさらに帰納法の仮定を適用できる。これを繰り返すことで、 $w' \notin P_\alpha(z_1, z_2)$ である節点でIPScが分裂される。

$$\frac{\beta_n \quad \gamma_n}{\beta_1} L \rightarrow$$

$$\frac{\vdots}{\beta_1} \frac{\gamma_1}{\beta} L \rightarrow \quad \gamma L \rightarrow$$

$$\frac{\beta_n}{\alpha'} \frac{\gamma}{\alpha'} L \rightarrow$$

したがって、 $w'$ に関する $L \rightarrow$ 規則を最後に適用するように $\alpha$ を再構成すれば良い。

$$\frac{\gamma_n \quad \gamma_{n-1}}{\beta_n} L \rightarrow$$

$$\frac{\vdots}{\beta_n} \frac{\gamma}{\gamma'} R \rightarrow$$

$$\frac{\beta_n}{\alpha} \frac{\gamma''}{\alpha} L \rightarrow$$

ここで、 $L \rightarrow$ に関する可逆性しか使用していないので、明らかに $\gamma''$ で $z^{(C \rightarrow D)_R}$ を構成できる。

□

ここで、少しこの補題について言及する。 $G_\alpha$ を以下とする。

$$G_\alpha = \{x \in V_\alpha \mid \forall y^{A_L}, z^{B_L} \in V_\alpha. (x \sim y \wedge x \sim z \rightarrow y \sim z)\}$$

このとき、 $L \rightarrow$  規則に関する可逆性は成り立つ。証明のポイントとしては、最後に  $R \rightarrow$  で導出されたときの最後の議論である。この場合、 $R0$  または  $L \rightarrow$  規則に関する可逆性しか使用していないので、 $G_\alpha$  を変更しても成立する。

この補題を用いて  $DNE$  をより小さな集合にする。以下の定理では  $\Gamma_L$  の中に出現する原子論理式でラベル付された節点に対して制限を加えている。

定理.  $TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \Delta_R$  である  $IPSc \alpha$  が存在するならば、 $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{y^{A_R}\} \cup DNE_\alpha$  である  $IPSi \alpha_i$  が存在する。ただし、 $\Delta_R = \Delta'_R \cup \{y\}$  で、 $DNE_\alpha$  は以下である。

$$DNE_\alpha = \left\{ z^{(\sim p \rightarrow p)_L} \left( \begin{array}{l} (x_2, p_R) \in L_\alpha, \\ x_2 \notin \Delta'_R, \\ \left( \begin{array}{l} LE(x_2) \neq EN(x_2) \vee \\ \forall x_0^{0_R} \in V_\alpha. (LE(x_2) \not\sim x_0) \vee \\ EN(x_2) \in G_\alpha \end{array} \right) \end{array} \right) \right\}$$

ここで、 $x_2 \mapsto z \notin V_\alpha$  は単射である。

証明.

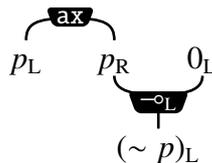
$IPSc$  の構成に関する帰納法で示す。

基底段階

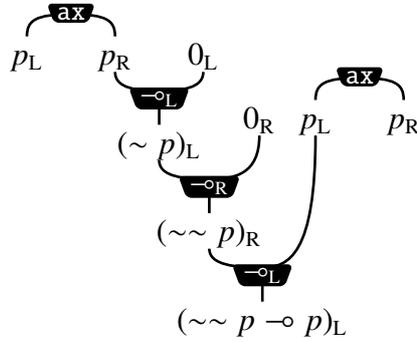
- 公理で導出されたとき

$TN(\alpha) = \{x_1^{p_L}, x_2^{p_R}\}$  である  $\alpha$  が  $IPSc$  とする。このとき、以下の2つの  $IPSi$  の存在を示す。

- $TN(\alpha_i) = \{x_1^{p_L}, x_3^{(\sim p)_L}\}$  である  $IPSi \alpha_i$  の存在  
以下の  $IPSi$  が取れる。



- $TN(\alpha_i) = \{x_1^{pL}, x_2^{pR}, y^{(\sim\sim p \rightarrow p)_L}\}$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  
以下の IPSi が取れる。



- L0 で導出されたとき

$TN(\alpha_i) = \{y^{0L}\}$  である IPSi  $\alpha_i$  が存在することを示す。これは IPSi の L0 規則から存在することが分かる。

#### 帰納段階

- 最後に R0 規則で導出されたとき

$TN(\alpha') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{y_A^{AR}\}$  である IPSc  $\alpha'$  に R0 規則を適用して、 $TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{y_A^{AR}, y_0^{0R}\}$  である IPSc  $\alpha$  を構成したとする。このとき、3つの IPSi の存在を示す。

1.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{y_A^{AR}, z_0^{(\sim 0)_L}\} \cup DNE_{\alpha}$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  
 $\alpha'$  に  $R \rightarrow$  に関する可逆性を適用して、 $TN(\beta) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup \Delta_R \cup \{y_a^{aR}\}$  である IPSc  $\beta$  が取れる。これに帰納法の仮定を適用して、 $TN(\beta_i) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}\} \cup DNE_{\beta}$  である IPSc  $\beta_i$  が取れる。よって、以下の手順で IPSi  $\alpha'_i$  が取れる。

$$\frac{\frac{\beta_i}{\beta_{i1}} \text{ R0 } (\{x_0\}, \emptyset, \{(x_0, 0_L)\})}{\beta_{i2}} \text{ L } \rightarrow \frac{(\{x_{a1}, x_{a2}\}, \{\{x_{a1}, x_{a2}\}\}, \{(x_{a1}, a_L), (x_{a2}, a_R)\})}{\beta_{i3}} \text{ L } \rightarrow \frac{\vdots}{\alpha'_i}$$

$$\begin{aligned}
TN(\beta_{i_1}) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}, y_0^{0R}\} \cup DNE_\beta \\
TN(\beta_{i_2}) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}, z_0^{(\sim 0)_L}\} \cup DNE_\beta \\
TN(\beta_{i_3}) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{y_{a'}^{aR}, z_0^{(\sim 0)_L}\} \cup DNE_\beta \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\} \\
TN(\alpha'_i) &= \Gamma_L (\sim \Delta)_L \cup \{y_A^{AR}, z_0^{(\sim 0)_L}\} \cup DNE_\beta \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\}
\end{aligned}$$

最後に、 $DNE = DNE_\beta \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\}$ なので、 $\alpha_i = \alpha'_i$ である。

2.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)_L}, y_0^{0R}\} \cup DNE_\alpha$ である IPSi  $\alpha_i$  の存在  
 $\alpha'$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\alpha'_i) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)_L}\} \cup DNE_{\alpha'}$  である IPSc  $\alpha'_i$  が取れる。これに R0 規則を適用して、求める IPSi  $\alpha_i$  が取れる。
3.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L, \{z_A^{(\sim A)_L}, z_0^{(\sim 0)_L}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  
(2) より、 $TN(\alpha'_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L, \{z_A^{(\sim A)_L}, y_0^{0R}\} \cup DNE_{\alpha'}$  である IPSi  $\alpha'_i$  が取れる。これと  $TN(\beta_i) = \{x_1^{0L}\}$  である IPSi  $\beta_i$  に対して、L  $\rightarrow$  規則を適用することで求める IPSi  $\alpha_i$  が取れる。

●最後に L  $\rightarrow$  規則で導出されたとき

$TN(\alpha_1) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{y_{A1}^{AR} \cup x_1^{BR}\}$  である IPSc  $\alpha_1$  と、 $TN(\alpha_2) = \Gamma'_L \cup \Delta'_R \cup \{y_{A2}^{A'R}, x_2^{C_L}\}$  である IPSc  $\alpha_2$  に L  $\rightarrow$  規則を適用して、 $TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup \Delta_R \cup \Delta'_R \cup \{y_{A1}^{AR}, y_{A2}^{A'R}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\}$  である IPSc  $\alpha$  を構成したとする。このとき、3 つの IPSi の存在を示す。

1.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{y_{A1}^{AR}, z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\} \cup DNE$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在

$EN(y^{pR}) = x_3$  とすると、 $LE(y) = x_1$  である。

- $\neg(\forall x_0^{0R} \in V_\alpha. (EN(y) \not\vdash x_0) \wedge LE(y) \in G_\alpha)$  または  $(x_3, (0 \rightarrow C)_L) \in L_\alpha$  のとき

$\alpha_1$  に R  $\rightarrow$  に関する可逆性を適用して、 $TN(\alpha_1') = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup \Delta_R \cup \{y_a^{aR}, x_1^{BR}\}$  である IPSc  $\alpha_1'$  が取れる。 $\alpha_1'$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\beta_i) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}, x_1^{BR}\} \cup DNE_{\alpha_1'}$  である IPSi  $\beta_i$  が取れる。同様に  $\alpha_2$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\gamma_i) = \Gamma'_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_2^{C_L}\} \cup DNE_{\alpha_2}$  である IPSi  $\gamma_i$  が取れる。したがって、以下のように IPSi  $\alpha_i'$  が構成できる。

$$\begin{array}{c}
\frac{\beta_i \quad \gamma_i}{\alpha_i''} \text{ L } \rightarrow \\
\vdots \\
\alpha_i'
\end{array}$$

$$TN(\alpha_i'') = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}, z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\} \\ \cup DNE_{\alpha_1'} \cup DNE_{\alpha_2}$$

$$TN(\alpha_i') = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{y_{A1}^{A_R}, z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\} \\ \cup DNE_{\alpha_1'} \cup DNE_{\alpha_2} \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\}$$

最後に、 $DNE_\alpha = DNE_{\alpha_1'} \cup DNE_{\alpha_2} \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\}$ なので、 $\alpha_i = \alpha_i'$ である。

-  $\forall x_0^{0_R} \in V_\alpha. (EN(y) \not\vdash x_0) \wedge LE(y) \in G_\alpha$  のとき

(a)  $(y_{A1}, 0_R) \in L_\alpha$  のとき

$\alpha$  に R0 規則に関する可逆性を適用して、 $\beta$  が取れたとする。これに帰納法の仮定を適用して、 $TN(\beta_i) = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_3^{(B \rightarrow C)_L}\} \cup DNE_\beta$  である IPSi  $\beta_i$  が取れる。

よって、これに R0 規則を適用することで目的の IPSi が取れる。

(b)  $(y_{A1}, 0_R) \notin L_\alpha$  かつ  $(x_3, (0 \rightarrow C)_L) \notin L_\alpha$  のとき

\*  $x_0 \in sub(x_1)$

$\alpha$  において  $x_0 \not\vdash x_1$  なので、 $\alpha_1$  でも  $x_0 \not\vdash x_1$  である。 $x_0 \in sub(x_1)$  ならば  $x_0 \sim x_1$  である。これは矛盾するので、この場合は存在しない。

\*  $x_0$  が  $\Delta_R$  の要素の部分節点のとき

$x_1$  を残したまま、 $\alpha_1$  で R0 または R  $\rightarrow$  規則に関する可逆性が適用できる。 $\alpha_1$  に R 規則に関する可逆性を適用して、 $\beta$  が取れたとする。このとき、以下のように  $\alpha$  を構成できる。

$$\frac{\beta \quad \frac{\alpha_2}{\beta'} \quad L \rightarrow}{\alpha} R$$

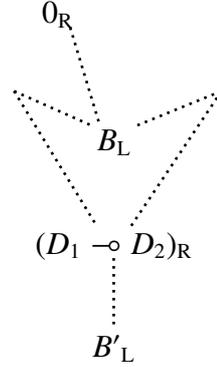
後は R 規則に対応した規則が最後に適用されたときのように  $\alpha_i$  を取ればよい。

\*  $x_0$  が  $\Gamma_L$  の要素の部分節点のとき

$G'_{\alpha_1} = \{x \in G_{\alpha_1} | x \not\vdash x_0\}$  とする。 $\alpha$  に R0 規則に関する可逆性を適用して、 $TN_R(\beta) \subseteq G'_{\alpha_1} \cup V(\alpha_1)$  である IPSc  $\beta$  を取る。このとき、任意の節点  $v_d^{(D_1 \rightarrow D_2)_R} \in V_\beta$  に対して、 $D_1, D_2$  間の全ての道に含まれず、 $v \sim x_0$  である  $v \in TN_L(\beta)$  が存在することを示す。

$x_0 \in sub(v_1)$  とする。 $v_1$  が条件を満たすときは  $v = v_1$  とすればよい。 $v_1 \in P_\beta(v_{d1}^{D_1}, v_{d2}^{D_2})$  である  $v_d^{(D_1 \rightarrow D_2)_R} \in V_\beta$  が存在す

ると、この節点  $v_d$  を部分節点に持つような  $v_2 \in V_\beta$  が存在する。なぜならば、 $v_d$  のような節点は  $R \rightarrow$  に関する可逆性を適用して、 $TN_R(\beta)$  から取り除いているからである。よって、 $v_1$  を  $v_2$  として同様の議論を繰り返すことで、求める節点  $v$  が取れる。グラフで表現すると以下のようなになる。



よって、補題より  $\beta$  を分裂可能な節点が存在する。

$$\frac{\gamma_1 \quad \gamma_2}{\beta} L \multimap$$

$$\vdots$$

$$\frac{\quad}{\alpha_1}$$

$x_1 \in V_{\gamma_1}$  とすると、IPScにおいて以下のように  $\alpha$  が再構成できる。

$$\frac{\gamma_1 \quad \alpha_2}{\gamma'} L \multimap$$

$$\frac{\quad \gamma_2}{\gamma''} L \multimap$$

$$\vdots$$

$$\frac{\quad}{\alpha}$$

したがって、 $\alpha$  の直前の IPSc に対して帰納法の仮定を適用することで、求める  $\alpha_i$  が取れる。

2.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{y_{A1}^{(\sim A)_L}, y_{A2}^{A'_R}, x_3^{(B \multimap C)_L}\} \cup DNE_\alpha$   
 である IPSc  $\alpha_i$  の存在  
 1 と同様の議論から存在が分かる。
3.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup \Gamma'_L \cup (\sim \Delta)_L \cup (\sim \Delta')_L \cup \{z_{A1}^{(\sim A)_L}, z_{A2}^{(\sim A')_L}, x_3^{(B \multimap C)_L}\} \cup DNE_\alpha$   
 である IPSc  $\alpha_i$  の存在  
 これも 1 と同様の議論から存在が分かる。

- 最後に  $R \rightarrow$  規則で導出されたとき

$TN(\alpha') = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{y_A^{A_R}, x_1^{B_L}, x_2^{C_R}\}$  である IPSc  $\alpha'$  に  $R0$  規則を適用して、

$TN(\alpha) = \Gamma_L \cup \Delta_R \cup \{y_A^{AR}, x_3^{(B \rightarrow C)_R}\}$  である IPSi  $\alpha$  を構成したとする。このとき、3つの IPSi の存在を示す。

1.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)_L}, x_3^{(B \rightarrow C)_R}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  $\alpha'$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\alpha'_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)_L}, x_1^{BL}, x_2^{CR}\} \cup DNE_{\alpha'}$  である IPSi  $\alpha'_i$  が取れる。よって、これに  $R \rightarrow$  規則を適用することで、求める  $\alpha_i$  が取れる。
2.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{y_A^{AR}, x_3^{(\sim(B \rightarrow C))_L}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  $\alpha'$  に  $R \rightarrow$  に関する可逆性を適用して、 $TN(\beta) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup \Delta_R \cup \{y_a^{aR}, x_1^{BL}, x_2^{CR}\}$  である IPSi  $\beta$  が取れる。 $\beta$  に帰納法の仮定を適用して、 $TN(\beta_i) = \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{y_a^{(\sim a)_L}, x_1^{BL}, x_2^{CR}\} \cup DNE_\beta$  である  $\beta_i$  が取れる。このとき、以下のように求める  $\alpha_i$  構成できる。

$$\frac{\frac{\beta_i}{\beta_{i1}} R \rightarrow (\{x_0\}, \emptyset, \{(x_0, 0_L)\})}{\beta_{i2}} L \rightarrow (\{x_{a1}, x_{a2}\}, \{\{x_{a1}, x_{a2}\}\}, \{(x_{a1}, a_L), (x_{a2}, a_R)\}) L \rightarrow \frac{\alpha'_i}{\alpha_i}$$

$$\begin{aligned} TN(\beta_{i1}) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}, x_3^{(B \rightarrow C)_R}\} \cup DNE_\beta \\ TN(\beta_{i2}) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_a^{(\sim a)_L}, z_3^{(\sim(B \rightarrow C))_L}\} \cup DNE_\beta \\ TN(\alpha'_i) &= \Gamma_L \cup \Gamma_{AL} \cup (\sim \Delta)_L \cup \{y_a^{aR}, z_3^{(\sim(B \rightarrow C))_L}\} \cup DNE_\beta \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\} \\ DNE_\alpha &= DNE_\beta \cup \{x^{(\sim \sim a \rightarrow a)_L}\} \text{ である。} \end{aligned}$$

3.  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)_L}, z_3^{(\sim(B \rightarrow C))_L}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  の存在  $TN(\alpha_i) = \Gamma_L \cup (\sim \Delta)_L \cup \{z_A^{(\sim A)_L}, z_3^{(B \rightarrow C)_R}\} \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  は存在するので、これと  $(\{x_0\}, \emptyset, \{(x_0, 0_L)\})$  に対して  $L \rightarrow$  規則を適用することで、求める  $\alpha_i$  が取れる。

□

したがって、 $\Delta$  を高々1つの節点とすれば、以下の定理が得られる。

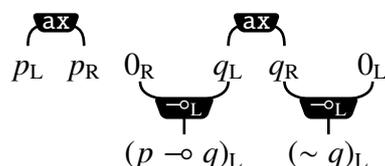
定理.  $TN_R(\alpha)$  が高々1つの節点からなる IPSi  $\alpha$  が存在するならば、 $TN(\alpha_i) = TN(\alpha) \cup DNE_\alpha$  である IPSi  $\alpha_i$  が存在する。ただし、 $DNE_\alpha$  は以下の集合である。

$$DNE_\alpha = \left\{ z^{(\sim \sim p \rightarrow p)_L} \left| \begin{array}{l} (x, p_R) \in L_\alpha, \\ LE(x) \neq EN(x) \vee \\ \forall y^{0_R} \in V_\alpha, (LE(x) \not\prec y) \vee \\ EN(x) \in G_\alpha \end{array} \right. \right\}$$

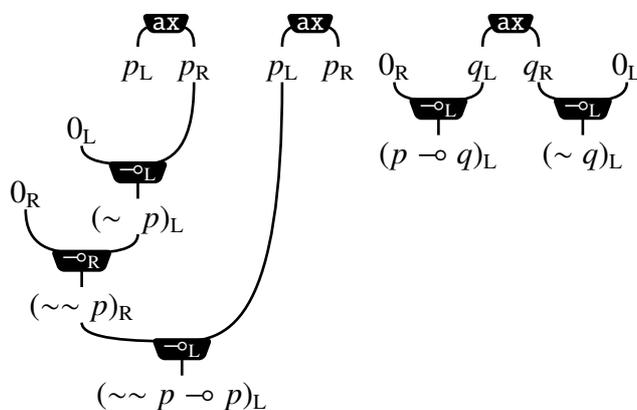
ここで、 $x \mapsto z \notin V_\alpha$  は単射である。

## 第5章 結論

$\Gamma \Rightarrow A$  の  $\Gamma$  に現れる原子論理式と、 $A$  の狭義の正論理式以外の原子論理式に関する二重否定除去則の必要性を言及することができた。しかし、それらに関して極小な  $DNE$  は取れていない。例えば、以下のような  $IPSc$  を考える。



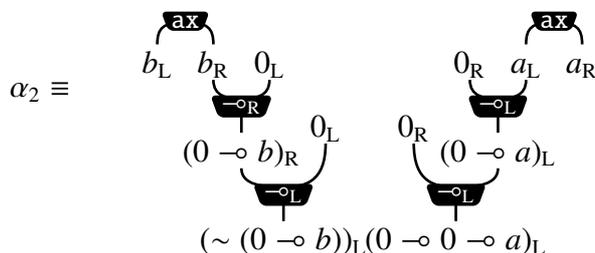
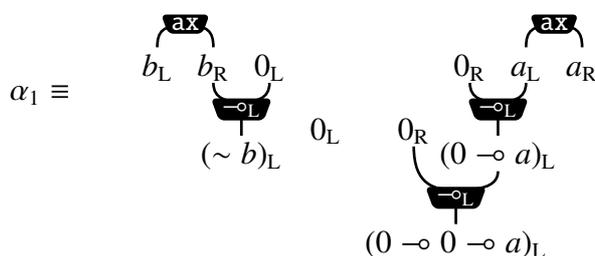
このとき、以下のような  $IPSi$  が取れる。



つまり、 $IPSc$  の任意のスイッチングにおいて  $q_R$  と  $0_R$  にはつながりがあるが、 $(\sim q \rightarrow q)_L$  でラベル付された節点は  $DNE$  の要素として不要である。しかし、この場合は予想できる。厳密性なく話すと、 $LE(x_q^{q_R}) \neq EN(x_q) \wedge LE(x_q) = x_q$  を満たす  $(\sim q \rightarrow q)_L$  でラベル付された節点は、 $DNE$  の要素として不要である。直感的には、公理で導出した後すぐに  $R \rightarrow$  規則を導出すれば、その変数に対する二重否定

除去則も不要であるだろうということである。正確な証明と共に、この条件を私達の結果と合わせた時に問題が起こらないかも確認しなくてはならない。

次に、 $\Gamma \Rightarrow A$ において  $A$  の狭義な正論理式  $a$ としたとき、どのような場合は  $\sim\sim a \multimap a$ を仮定に加えなくてよいかについて触れる。 $\Gamma \Rightarrow A$ に  $R \multimap$ 規則に関する可逆性を適用して、 $\Gamma' \Rightarrow a$ が得られたとする。このとき、 $a$ がこの証明図に存在してから  $L \multimap$ 規則だけで  $\Gamma' \Rightarrow a$ を構成できる証明図が存在しなくてはならない。しかし、最後のグラフだけを見てこのようなことが言えるかという、それはつながりだけからは言えない。以下の2つの IPScが例として挙げられる。



この2つの IPScにおいて、 $a_R$ でラベル付けされた節点に関するつながりに違いは無い。しかし、 $\alpha_1$ は IPSiであるが、 $\alpha_2$ を IPSiにしようとする  $(\sim\sim a \multimap a)_L$ でラベル付けされた終節点が必要になる。

直観主義線形論理の仮定に加えれば古典論理線形論理と証明と能力が同じになるような DNE の極小な集合を探す上で、 $L \multimap$ 規則に関する可逆性は非常に重要であることが分かる。

# 謝辞

この研究を遂行するにあたり、終始暖かく見守り、ご指導を頂いた石原哉教授に深く感謝いたします。根本多佳子助教にはセミナーを初め、初歩的な質問からご丁寧に指導して頂いたき、大変お世話になりました。河井達治氏と吉村和人氏のお二人にも研究室セミナーでの助言を始め、大変お世話になりました。新井規広氏には、研究室の同期として輪行や研究室以外でもお世話になりました。他研究室でありながらセミナーに参加させて頂き、佐野勝彦助教、東条研究室の皆様にも感謝を申し上げます。改めて石原研究室の皆様には、心から感謝を申し上げます。

## 参考文献

- [1] 小野 寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 297, 1994.
- [2] D. van Dalen, *Logic and structure*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3rd edition, 215, 1994.
- [3] K. Fujita,  *$\mu$ -head form proofs with at most two formulas in the succedent*, Transactions of Information Processing Society of Japan, 38, 6, 1073-1082, 1997.
- [4] J.-Y. Girard, *Linear logic*, Theoretical Computer Science, 50, 1-102, 1987.
- [5] H. Ishihara, *Classical propositional logic and decidability of variables in intuitionistic propositional logic*, logical Methods in Computer Science, 10, 3, 2014.
- [6] H. Ishihara and H. Schwichtenberg, *Embedding classical in minimal implicative logic*, pre-print.
- [7] A. S. Troelstra, *Lectures on Linear Logic*, Center for the Study of Language and Information, 210, 1992.
- [8] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, *Basic Proof Theory*, Cambridge University Press, 432, 1996.