

Title	H ループ整形法を用いた横軸形磁気軸受のロバスト非 干渉制御に関する研究
Author(s)	柳野, 秀樹
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/1290">http://hdl.handle.net/10119/1290</a>
Rights	
Description	Supervisor: 藤田 政之, 情報科学研究科, 修士

# 修士論文

## $H_\infty$ ループ整形法を用いた横軸型磁気軸受の ロバスト非干渉制御に関する研究

指導教官 藤田 政之 助教授

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報システム学専攻

柳野 秀樹

1999年2月15日

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	研究の背景と目的	1
1.2	概要と構成	2
<b>2</b>	<b>準備</b>	<b>4</b>
2.1	システムの干渉度	4
2.2	$H_\infty$ ループ整形法	5
2.2.1	正規既約分解法	5
2.2.2	$H_\infty$ ループ整形法の設計手順	7
2.3	アダマール重み付き $H_\infty$ ループ整形法	9
2.3.1	アダマール重み付き $H_\infty$ フロベニウスシンセシス	9
2.3.2	アダマール重みつき $H_\infty$ ループ整形法の設計手順	12
<b>3</b>	<b>磁気軸受のモデリングと問題設定</b>	<b>15</b>
3.1	磁気軸受のモデリング	15
3.2	問題設定	19
3.2.1	磁気軸受の干渉	19
3.2.2	制御目的	20
<b>4</b>	<b>磁気軸受に対するロバスト非干渉制御</b>	<b>21</b>
4.1	アダマール重み付き $H_\infty$ ループ整形法による制御系設計	21
4.2	制御器の低次元化	26
<b>5</b>	<b>シミュレーションによる検証</b>	<b>34</b>
5.1	外乱応答特性	34
5.2	ロバスト性能の検証	37

5.3 制御性能とロバスト安定性の検証 . . . . .	37
<b>6 結論</b>	<b>43</b>
謝辞	45
参考文献	46
<b>A 磁気軸受のモデルの導出</b>	<b>48</b>
A.1 回転子の運動方程式 . . . . .	48
A.2 電磁石の定式化 . . . . .	53
A.3 状態方程式と出力方程式 . . . . .	55
<b>B <math>H_\infty</math>ループ整形法による制御系設計</b>	<b>56</b>
<b>C 制御器の低次元化</b>	<b>59</b>
C.1 平衡実現とハンケル特異値 . . . . .	59
C.2 平衡打ち切りによる低次元化 . . . . .	59

# 目次

2.1	Block diagram of Loop Shaping Design Procedure . . . . .	8
2.2	Control problem . . . . .	9
3.1	Magnetic bearing . . . . .	15
3.2	Block diagram of magnetic bearing . . . . .	19
4.1	Shaped plant $P_s$ . . . . .	23
4.2	Generalized plant $G$ . . . . .	24
4.3	Controller $K_0, K_{0r}$ . . . . .	28
4.4	Controller $K_{10}, K_{10r}$ . . . . .	29
4.5	Controller $K_{100}, K_{100r}$ . . . . .	29
5.1	Simulation result using $K_{0r}(10000[\text{rpm}])$ . . . . .	35
5.2	Simulation result using $K_{10r}(10000[\text{rpm}])$ . . . . .	35
5.3	Simulation result using $K_{100r}(10000[\text{rpm}])$ . . . . .	36
5.4	Simulation result using $K_{LSDP}(10000[\text{rpm}])$ . . . . .	36
5.5	Simulation result using $K_{0r}(20000[\text{rpm}])$ . . . . .	38
5.6	Simulation result using $K_{10r}(20000[\text{rpm}])$ . . . . .	38
5.7	Simulation result using $K_{100r}(20000[\text{rpm}])$ . . . . .	39
5.8	Simulation result using $K_{LSDP}(20000[\text{rpm}])$ . . . . .	39
5.9	RGA-number of $(I - PK_{0r})^{-1}P$ . . . . .	40
5.10	RGA-number of $(I - PK_{10r})^{-1}P$ . . . . .	41
5.11	RGA-number of $(I - PK_{100r})^{-1}P$ . . . . .	41
5.12	RGA-number of $(I - PK_{LSDP})P$ . . . . .	42
A.1	Model of rotor and axis of stator . . . . .	48
A.2	Axis of rotor . . . . .	49

A.3 Relation of axis of stator and axis of rotor . . . . .	50
--	----

# 表 目 次

3.1	Parameter of magnetic bearing . . . . .	17
3.2	Matrices in state equation of magnetic bearing . . . . .	18
4.1	Transmission poles and zeros of magnetic bearing (10000rpm) . . . . .	22
4.2	Stability margin of Hadamard weighted loop shaping design procedure . . . . .	26
4.3	Hankel singular values of $K_{0h}, K_{10h}, K_{100h}$ . . . . .	27
4.4	Stability margin of reduced order controller . . . . .	30
4.5	Transmission poles and zeros of $K_{0r}$ . . . . .	31
4.6	Transmission poles and zeros of $K_{10r}$ . . . . .	32
4.7	Transmission poles and zeros of $K_{100r}$ . . . . .	33
B.1	Transmission poles and zeros of $K_{LSDP}$ . . . . .	58

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究の背景と目的

古典制御におけるループ整形法は、制御対象に望ましい特性を持たせるために、位相進みや遅れ補償器を用いて制御対象の開ループ伝達関数の周波数応答を整形する手法である。そのため、この手法にはボード線図を用いて視覚的に捉え易いという長所があるが、多変数システムに対しては、ゲイン交差周波数付近における取り扱いが困難であり、制御系の設計が複雑になるという問題があった。そのため、McFarlane と Glover[1] は、古典的なループ整形法と  $H_\infty$  制御問題の解を組み合わせた  $H_\infty$  ループ整形法を提案した。この手法は、高周波数帯と低周波数帯を前置補償器と後置補償器により整形し、安定化補償器を  $H_\infty$  制御理論を用いて設計することでその問題を解決した。 $H_\infty$  ループ整形法には、モデルの不確かさに対してロバストであるという特徴があり、その有効性から様々な研究が行なわれており [2]、実プラントに対しても応用されている [3]。

また、一般に多変数システムは、入出力に相互干渉が生じることが多く制御系の設計が複雑になることから、入出力を 1 対 1 に対応させる非干渉制御が知られている。これに対し、近年、近似非干渉化を達成する手法として Diggelen と Glover[4][5] によりアダマール重み付き  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスが紹介され、さらにアダマール重み付き  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスと  $H_\infty$  ループ整形法を組み合わせたアダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法が Diggelen と Glover[6][7] により提案されている。この手法は、安定化補償器をアダマール重み付き  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスを用いて設計することで、近似非干渉化を達成できるという特徴がある。

本研究では、制御対象として磁気軸受を用いる。磁気軸受は、磁気力によって回転子を完全非接触で支持する軸受であるため、以下に示すようないくつかの優れた特徴をもつ。

- 摩擦・摩耗が極端に少ない
- 超高速回転が可能
- 潤滑油を必要としないため，真空中などの特殊な環境下での使用が可能

そのため，様々な分野への応用が期待されており，天然ガス圧送用パイプラインコンプレッサなどに実用化された例もある [8]，しかし，磁気軸受は本来不安定な系であるために，フィードバック制御が不可欠であり，フィードバック制御により制御系の設計を行なう場合，制御対象の数式モデルが必要になる．その数式モデルには，モデル化が困難なダイナミクスや同定誤差などの影響により，なんらかの不確かさを含むと考えられる．そのため，それらのモデルの不確かさに対しても，安定な制御系を設計しなければならない．藤田ら [3] は，それらのモデルの不確かさに対し， $H_\infty$ ループ整形法を適用することで，良好な結果が得られることを確かめた．

ところが，磁気軸受のダイナミクスを考えると，ジャイロ効果により，回転子の鉛直方向の運動と水平方向の運動に相互干渉があり，回転子が高速回転を行なう場合に問題になることは Mohamed ら [9] により明らかにされている．そのため，磁気軸受を工作機械用のスピンドルなどに応用することを考えた場合，回転子が高速回転を行ない，かつ高精度の制御性能を要求されることから，ジャイロ効果による干渉を非干渉化することが望ましい．しかし，磁気軸受に対する非干渉制御はあまり考えられていないのが現状である．

そこで，本研究では，回転子の鉛直方向の運動と水平方向の運動に相互干渉がある横軸形磁気軸受に対し，アダマール重み付き  $H_\infty$ ループ整形法を適用し，近似非干渉制御を達成する制御系の設計を行なうことを目的とする．また，シミュレーションにより，本手法の有効性の検証を行なう．

## 1.2 概要と構成

本論文の構成はつぎのようになっている．

第2章において，システムの干渉の強さの指標として用いる Relative Gain Array (RGA) 指数を説明し，本研究で用いるアダマール重み付き  $H_\infty$ ループ整形法について述べる．

第3章では，本稿で取り扱う磁気軸受の数式モデルの導出を行なう．また，ここでは磁気軸受にどのような干渉があるかを述べ，ジャイロ効果による回転子の鉛直方向の運動と水平方向の運動の干渉の度合は回転子の回転速度に比例することを示す．そのため，磁気

軸受を工作機械用のスピンドルなどに応用することを考えた場合，回転子が高速回転を行ない，かつ高精度の制御性能を要求されるため，ジャイロ効果による干渉が問題となることを説明する．

第4章では，磁気軸受に対し，アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法を用いた制御系の設計を行なう．ここでアダマール重みは非干渉化の度合とロバスト安定性を調節するパラメータとなるため，その定め方は重要な問題となる．本研究では，アダマール重みの変化が，非干渉化の度合やロバスト安定性に与える影響を検証するため，アダマール重みを変化させ，制御系の設計を行なう．また，アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法には，得られるコントローラの次数が極端に高くなるという問題点があるため，平衡打ち切りにより，コントローラの低次元化を行なう．

第5章では，本手法の有効性を検証するために，第4章で求めたコントローラを用いて次の2つのシミュレーションを行なう．

- 制御目的を達成していることを確認するため，回転子に対し，外乱を加えるシミュレーションを行なう．
- パラメータを変動し，同様のシミュレーションを行なうことで，ロバスト性能について検証を行なう．

また，RGA 指数と安定性マージンにより，アダマール重みが非干渉化の度合やロバスト安定性に与える影響を検証する．そして，従来の設計手法である  $H_\infty$  ループ整形法との比較を非干渉化の観点から行なう．

第6章では本研究の全体的なまとめを行なう．

## 第 2 章

### 準備

この章では，システムの入出力の相互干渉の強さの指標として用いる RGA 指数と，本研究で用いるアダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法を説明する．また，アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法のベースとなっている  $H_\infty$  ループ整形法と，アダマール重み付き  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスについても簡単にまとめておく．

#### 2.1 システムの干渉度

多変数システムにおいて，入出力の相互干渉の強さの指標として，RGA 指数がある [10]．ここでは，その RGA 指数について述べる．まず，ここで必要になる定義を示す．

定義 2.1 アダマール積

$A = [a_{ij}] \in C^{p \times m}$  と  $B = [b_{ij}] \in C^{p \times m}$  のアダマール積  $A \circ B$  は，つぎのように定義される．

$$A \circ B = [a_{ij}b_{ij}] \in C^{p \times m} \quad (2.1)$$

多変数システムの伝達関数  $P(s)$  に対する RGA (Relative Gain Array) は (2.2) 式のように定義される．

$$\text{RGA}(P) = \Lambda(P) := P \circ (P^{-1})^T \quad (2.2)$$

ここで， $\circ$  はアダマール積を表す．

一般に多変数システムは入出力に相互干渉がある．その相互干渉の強さの目安として，RGA 指数がある．多変数システム  $P(s)$  に対する RGA 指数  $r$  は，次式で与えられる．

$$r = \sum_{i,j} |\Gamma_{i,j}| \quad (2.3)$$

ここで， $\Gamma = \Lambda(P) - I$  である．

この RGA 指数は，伝達関数  $P(s)$  の非対角項が大きい，つまり干渉が強いほど大きな値となる．そのため，本研究では，この RGA 指数を干渉の強さを表すパラメータとして用いる．

## 2.2 $H_\infty$ ループ整形法

この節では， $H_\infty$  ループ整形法について述べる．まず， $H_\infty$  ループ整形法で，安定化補償器を求めるために用いる正規既約分解法を紹介し，つぎに  $H_\infty$  ループ整形法についてまとめる．

### 2.2.1 正規既約分解法

まず，ここで必要になるいくつかの定義を示す．

定義 2.2 左既約

$M(s), N(s) \in RH_\infty$  に対し，

$$M(s)V(s) + N(s)W(s) = I \quad (2.4)$$

を満たす  $W(s), V(s) \in RH_\infty$  が存在するとき， $M(s), N(s)$  を左既約という．

定義 2.3 正規化左既約分解

$P(s)$  に対し，以下の条件を満たす  $(M(s), N(s)) \in RH_\infty$  を  $P(s)$  の正規化左既約分解という．

- $P(s) = M(s)^{-1}N(s)$
- $M(s), N(s) \in RH_\infty$  が左既約
- $N(s)N(s)^* + M(s)M(s)^* = I$

制御対象を  $P(s)$  とし，その状態空間表現が次式で与えられるとする．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \quad (2.6)$$

また，本論文では状態空間表現は，(2.7) 式のように書くものとする．

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array} \right] \quad (2.7)$$

$P(s)$  の正規化左既約分解を  $P(s) = M(s)^{-1}N(s)$  で表すものとし，その既約因子  $M(s), N(s)$  のそれぞれの不確かさを  $\Delta_M, \Delta_N$  とする．また，それらの不確かさを含むプラントを  $\tilde{P}$  とする．

$$\tilde{P} = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N) \quad (2.8)$$

$$D_\varepsilon = \{\Delta = (\Delta_N, \Delta_M) | \Delta \in RH_\infty, \|\Delta\|_\infty < \varepsilon\} \quad (2.9)$$

ここで，コントローラ  $K(s)$  が，(2.9) 式を満たす不確かさを含むプラント  $\tilde{P}$  を安定化するための必要十分条件は次式で与えられる．

$$\left\| \left[ \begin{array}{c} K \\ I \end{array} \right] (I - PK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty \leq \varepsilon^{-1} \quad (2.10)$$

ここで， $(M(s), N(s))$  が  $P(s)$  の正規化左既約分解であることから (2.10) 式はつぎのように変形できる．

$$\left\| \left[ \begin{array}{c} K \\ I \end{array} \right] (I - PK)^{-1} \left[ \begin{array}{cc} I & P \end{array} \right] \right\|_\infty \leq \varepsilon^{-1} \quad (2.11)$$

この問題は McFarlane と Glover [1] により研究がなされ，最大安定性マージン  $\varepsilon_{\max}$  の求め方と，(2.11) 式の解法が提案されている．

その解法アルゴリズムを簡単に示す．

$X, Z$  がつぎの2つのリカッチ方程式の正定解であるとする．

$$(A - BS^{-1}D^T C)^T X + X(A - BS^{-1}DTC) - XBS^{-1}B^T X + C^T R^{-1}C = 0 \quad (2.12)$$

$$(A - BS^{-1}D^T C)Z + Z(A - BS^{-1}DTC)^T - ZC^T R^{-1}CZ + BS^{-1}B^T = 0 \quad (2.13)$$

ここで,  $R = DD^T$ ,  $S = I + D^T D$ である.

1. 安定性マージン $\varepsilon$ の最大値 $\varepsilon_{\max}$ を次式より求める.

$$\gamma_{\min} = \varepsilon_{\max}^{-1} = (1 + \lambda_{\max}(XZ)) \quad (2.14)$$

ここで,  $\lambda_{\max}$ は, 最大固有値を表す.

2. 安定性マージン $\varepsilon$ を $\varepsilon^{-1} = \gamma \geq \gamma_{\min}$ と選ぶ. そのとき, (2.11) 式を満たすセントラルコントローラは,

$$K = \left[ \begin{array}{c|c} A + BF + \gamma^2(L^T)^{-1}ZC^T(C + DF) & \gamma^2(L^T)^{-1}ZC^T \\ \hline B^T X & -D^T \end{array} \right] \quad (2.15)$$

で与えられる. ただし,

$$F = -S^{-1}(D^T C + B^T X)$$

$$L = (1 - \gamma^2)I + XZ$$

とする.

## 2.2.2 $H_\infty$ ループ整形法的设计手順

制御対象を  $P(s)$  としたとき,  $H_\infty$ ループ整形法は, 以下のステップから成る [1].

step.1 プラント  $P(s)$  に対し, 前置, 後置補償器  $C_{pre}(s)$ ,  $C_{post}(s)$  により, 開ループ伝達関数の周波数応答を望ましい形に整形する. また, 整形されたプラントを  $P_s(s) = C_{post}(s)P(s)C_{pre}(s)$  とする.

つぎに, 次式で定義される最大安定性マージン $\varepsilon_{\max}$ を計算する.

$$\varepsilon_{\max}^{-1} = \inf_{K \in \mathcal{S}} \left\| \left[ \begin{array}{c} K \\ I \end{array} \right] (I - P_s K)^{-1} \begin{bmatrix} I & P_s \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (2.16)$$

$\varepsilon_{\max}$ が望ましいロバスト性を保証していなければ,  $C_{pre}$ ,  $C_{post}$ を調整する.

step.2  $\gamma \geq \gamma_{\min} = \varepsilon_{\max}$ となる $\gamma$ を選び，正規化既約分解法を用いて，次式を満たす安定化補償器  $K_{\infty}$ を計算する．

$$\left\| \begin{bmatrix} K_{\infty} \\ I \end{bmatrix} (I - P_s K_{\infty})^{-1} [I \ P_s] \right\|_{\infty} \leq \gamma \quad (2.17)$$

図 2.1に (2.17) 式の左辺のブロック線図を示す．ただし，ここで入力を  $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$  とし，出力を  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$  とする．

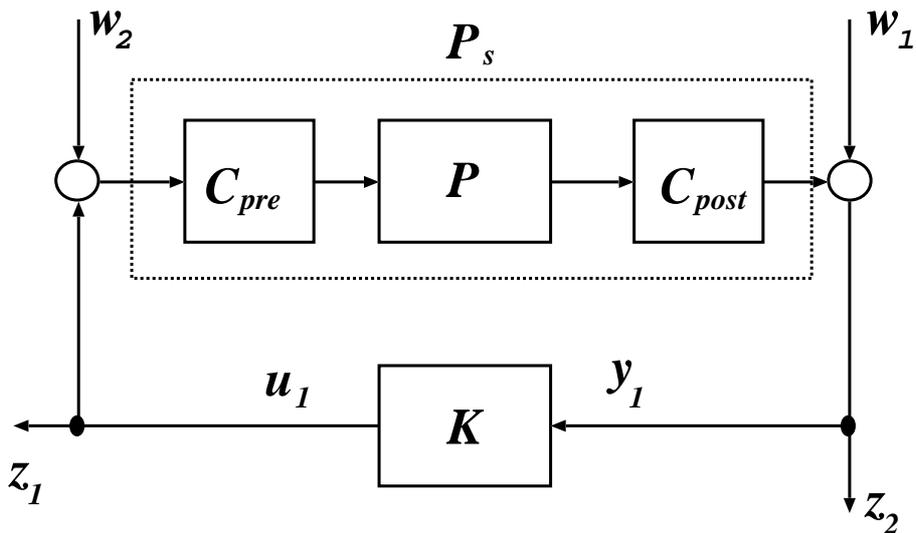


図 2.1: Block diagram of Loop Shaping Design Procedure

step.3 前置，後置補償器  $C_{pre}$ ， $C_{post}$  と  $K_{\infty}$  を結合した  $K = C_{pre} K_{\infty} C_{post}$  を最終的なコントローラとする．

$H_{\infty}$ ループ整形法は，低周波数帯と高周波数帯については前置，後置補償器により開ループ伝達関数の整形を行ない，ゲイン交差周波数付近は，正規既約分解法により安定化補償器を用いて安定化補償器を得る手法である．この手法には，許容されるモデルの不確かさの大きさをあらかじめ明らかにできる，コントローラを得るために繰り返し計算が不要などの特徴がある．

## 2.3 アダマール重み付き $H_\infty$ ループ整形法

この節では，本研究で用いるアダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法について述べる．まず，補償器を求めるために用いるアダマール重み付き  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスを紹介し，つぎに，アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法について述べる．まず，この節で必要になるいくつかの定義を示しておく．

定義 2.4  $H_\infty$  フロベニウスノルム

伝達関数  $G$  の  $H_\infty$  フロベニウスノルム  $\|G\|_{\infty F}$  は以下のように定義される．

$$\begin{aligned} \|G\|_{\infty F} &= \left( \sup_{\omega} \text{trace}(G^*(j\omega)G(j\omega)) \right)^{1/2} \\ &= \sup \left( \sum_i \sigma^2(G(j\omega)) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

ここで， $\sigma$  は特異値を表す．

### 2.3.1 アダマール重み付き $H_\infty$ フロベニウスシンセシス

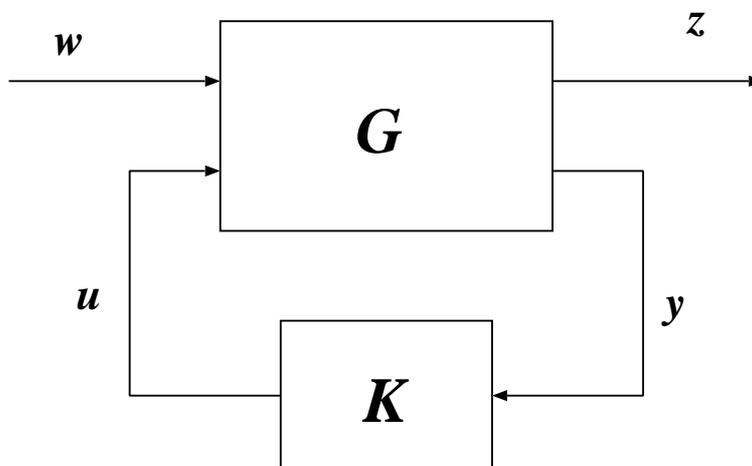


図 2.2: Control problem

図 2.2 に示すシステムを考える．ただし， $G$  は一般化プラントであり， $K$  は  $G$  を安定化するコントローラである．また， $z(t) \in R^{p1}$ ， $y(t) \in R^{p2}$ ， $w(t) \in R^{m1}$ ， $u(t) \in R^{m2}$  とする．このとき，つぎの (2.19) 式を満たすコントローラ  $K$  を見つけることを考える．

$$\|W \circ \mathcal{F}_l(G, K)\|_{\infty F} \leq \gamma \quad (2.19)$$

ここで、 $W$ は正の定数を要素とする重み行列とする。

この問題はアダマール重み付き  $H_\infty$ フロベニウス問題として知られている。この問題の解法は、Diggelen と Glover [4][5] により提案されており、その解法アルゴリズムはアダマール重み付き  $H_\infty$ フロベニウスシンセシスとして知られている。

その  $H_\infty$ フロベニウスシンセシスのアルゴリズムを紹介する。

一般化プラント  $G(s)$  が、つぎのように与えられ、以下に示す仮定 A.1 ~ A.7 を満たすとする。

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (2.20)$$

ここで、 $A \in R^{n \times n}$ とする。

A.1  $(A, B_2)$  が可安定、かつ  $(A, C_2)$  が可検出

A.2  $D_{12}$ が列フルランク、かつ  $D_{21}$ が行フルランク

A.3 任意の $\omega$ に対し、 $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ が列フルランク

A.4 任意の $\omega$ に対し、 $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ が行フルランク

A.5  $\bar{W}(D_{21}^T \otimes D_{12})$ が列フルランク。ただしここで、 $\bar{W} = \text{diag}(\text{vec}W)$

A.6  $F_0$ と  $H_0$ は、それぞれ  $(A + B_2F_0)$ 、 $(A + H_0C_2)$  を安定な行列にする任意の行列であるとする。ここで、任意の $\omega$ に対し、

$$\left[ \begin{array}{ccc} (A + H_0C_2 - j\omega I)^T \otimes I_{p1} & C_2^T \otimes (C_1 + D_{12}F_0) & C_2^T \otimes D_{12} \\ 0 & I_{p2} \otimes (A + B_2F_0 - j\omega I) & I_{p2} \otimes B_2 \\ \bar{W}((B_1 + H_0D_{21})^T \otimes I_{p1}) & \bar{W}(D_{21}^T \otimes (C_1 + D_{12}F_0)) & \bar{W}(D_{21}^T \otimes D_{12}) \end{array} \right] \text{が列フルランク}$$

A.7 任意の $\omega$ に対し、 $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1W_i \\ C_2 & D_{21}W_i \end{bmatrix}$ が行フルランク。ここで、 $i = 1 \sim p1$  であり、また、 $W_i = \text{diag}(W_{i\bullet})$ とする。

ここで、新しい一般化プラント  $\bar{G}$ をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned}
\bar{G} &:= \left[ \begin{array}{c|cc} \bar{A} & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ \hline \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{array} \right] \\
\bar{A} &:= \begin{bmatrix} (A + H_0 C_2) \otimes I_{p1} & C_2^T \otimes (C_1 + D_{12} F_0) \\ 0 & I_{p2} \otimes (A + B_2 F_0) \end{bmatrix} \\
\bar{B}_1 &:= \begin{bmatrix} \text{vec}(C_1) \\ \text{vec}(-H_0) \end{bmatrix}, \bar{B}_2 := \begin{bmatrix} (C_2^T \otimes D_{12}) \\ (I_{p2} \otimes B_2) \end{bmatrix} \\
\bar{C}_1 &:= \bar{W}[(B_1 + H_0 D_{21})^T \otimes I_{p1}, D_{21}^T \otimes (C_1 + D_{12} F_0)] \\
\bar{C}_2 &:= 0, \bar{D}_{11} = \bar{W}(\text{vec}(D_{11})) \\
[\bar{D}_{21} \quad \bar{D}_{22}] &:= [1 \quad 0]
\end{aligned}$$

ここで,  $\otimes$  はクロネッカー積を表し, 関数  $\text{vec}$  は, 任意の行列  $\Upsilon = [\Upsilon_{\bullet 1} \quad \Upsilon_{\bullet 2} \quad \cdots \quad \Upsilon_{\bullet m}] \in C^{p \times m}$  に対し, (2.21) 式により定義される.

$$\text{vec} \Upsilon := \begin{bmatrix} \Upsilon_{\bullet 1} \\ \Upsilon_{\bullet 2} \\ \vdots \\ \Upsilon_{\bullet m} \end{bmatrix} \in C^{pm \times 1} \quad (2.21)$$

ここで関数  $\text{vec}$  の逆関数を  $\text{vec}^{-1}$  とする.

また,  $J$  を以下のように定義する.

$$J := \left[ \begin{array}{c|cc} A + B_2 F_0 + H_0 C_2 & -H_0 B_2 & \\ \hline F_0 & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

ここで, (2.22) 式を満たす  $q \in RH_\infty$  を見つける  $H_\infty$  制御問題を考える.

$$\|\mathcal{F}_l(\bar{G}, q)\|_\infty \leq \gamma \quad (2.22)$$

このとき, アダマール重み付き  $H_\infty$  フロベニウス問題において求めるコントローラ  $K$  は,  $K = \mathcal{F}_l(J, Q)$  により与えられる. ただし,  $q = \text{vec}(Q)$  とする.

この手法の特徴は，アダマール重みの取り方によって，近似非干渉を達成することができるという点である．例えば， $\mathcal{F}_l(G, K)$  を 2 入力 2 出力としたとき，重みを  $W = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$ , ( $\alpha > 1$ ) とし， $H_\infty$ フロベニウスシンセシスを適用することで， $\mathcal{F}_l(G, K)$  の非対角項が抑えられ，近似非干渉を達成することができる．

### 2.3.2 アダマール重みつき $H_\infty$ ループ整形法の設計手順

つぎにアダマール重み付き  $H_\infty$ ループ整形法の設計手順を示す [6][7] ．

**Step.1** 制御対象  $P(s)$  に対し，適当な補償器  $C_{pre}(s)$  と  $C_{post}(s)$  を用いて，開ループ伝達関数の周波数応答を望ましい形に整形する．また，整形されたプラントを  $P_s(s) = C_{post}(s)P(s)C_{pre}(s) \in R^{p \times m}$  とする．また， $P_s(s)$  の正規化左既約分解表現を  $P_s(s) = M_s(s)^{-1}N_s(s)$  とする．

次式で定義される最大安定性マージン  $\varepsilon_F$  を計算する．

$$\varepsilon_F^{-1} = \left\| \left[ \begin{array}{c} K_F \\ I \end{array} \right] (I - P_s K_F)^{-1} \left[ \begin{array}{cc} I & P_s \end{array} \right] \right\|_\infty \quad (2.23)$$

ここで， $K_F$  は次式の解となるコントローラである．

$$\inf_K \left\| \left[ \begin{array}{c} K \\ I \end{array} \right] (I - P_s K)^{-1} \left[ \begin{array}{cc} I & P_s \end{array} \right] \right\|_{\infty F} \quad (2.24)$$

また，この最大安定性マージン  $\varepsilon_F$  の値の下限は，(2.25) 式で与えられる．

$$\varepsilon_F \geq \left( 1 + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\sigma_i^2}{1 - \sigma_i^2} \right)^{-1/2} \quad (2.25)$$

ここで， $\mu = \min(p, m)$  であり， $\sigma_i$  は， $\left[ \begin{array}{cc} N_s & M_s \end{array} \right]$  のハンケル特異値を表しており， $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$  である．

そしてその値をロバスト安定性の目安とする．ただし，(2.25) 式により求めた  $\varepsilon_F$  の下限が望ましい値でない場合には，実際に  $K_F$  を計算し， $\varepsilon_F$  の値を求め，その値をロバスト安定性の目安とし， $\varepsilon_F < 0.1$  となるようであれば，安定性マージンが小さ過ぎるため， $C_{pre}(s)$  と  $C_{post}(s)$  をもう一度選ぶ．

Step.2 図 2.1 に定義されている  $w_1, w_2, z_1, z_2, u_1, y_1$  に、制御目的を達成するように、入出力  $w_3, \dots, w_r, z_3, \dots, z_q, y_2, \dots, y_s, u_2, \dots, u_t$  を加え、一般化プラント  $G$  を決定する。

そして、閉ループ系  $\mathcal{F}_l(G, K)$  について、出力への影響を抑えたい項に適当な重みがかかるように、アダマール重み  $W$  を次式のように決定する。

$$W := \begin{bmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{p^1} \\ \underbrace{\vdots \quad \ddots \quad \vdots}_{p^2} \quad 0 \\ 1 \cdots 1 \\ 0 \quad 0 \end{bmatrix} + W_\alpha \quad (2.26)$$

ここで、 $W_\alpha$  は  $\alpha \geq 0$  のみから成る行列であり、図 2.1 において、 $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in R^{p^1}$ ,

$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in R^{p^2}$  とする。

Step.3 Step.2 で決定した一般化プラント  $G$  と、アダマール重み  $W$  を用いてアダマール重み付き  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスにより、(2.27) 式を満たす安定化補償器  $K_h$  を求める。

$$\|W \circ \mathcal{F}_l(G, K_h)\|_{\infty F} \leq \gamma_m = \varepsilon_m^{-1} \quad (2.27)$$

また、この安定化補償器  $K_h$  により補償される安定性マージン  $\varepsilon$  は、つぎの (2.28) 式で与えられる。

$$\varepsilon = \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - P_s K)^{-1} \begin{bmatrix} I & P_s \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (2.28)$$

Step.4 前置、後置補償器  $C_{pre}, C_{post}$  と  $K_h$  を結合した  $K = C_{pre} K_h C_{post}$  を最終的なコントローラとする。また、得られたコントローラにより目的が達成されるまでこの手順を繰り返す。

アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法は，低周波数帯と高周波数帯については前置，後置補償器により開ループ伝達関数の整形を行ない，安定化補償器をアダマール重み付き  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスにより計算する手法である．この手法は，アダマール重み付き  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスを用いることで，近似非干渉化を達成できるという特徴がある．また，(2.28) 式から分かるように， $H_\infty$  ループ整形法によりロバスト安定性を保証している．

## 第 3 章

# 磁気軸受のモデリングと問題設定

この章では、まず本研究で取り扱う磁気軸受の数式モデルを示す。そして、磁気軸受にどのような干渉があり、どの干渉が問題となるかを述べる。

### 3.1 磁気軸受のモデリング

本研究では、図 3.1 に示す 4 軸制御磁気軸受を考える。

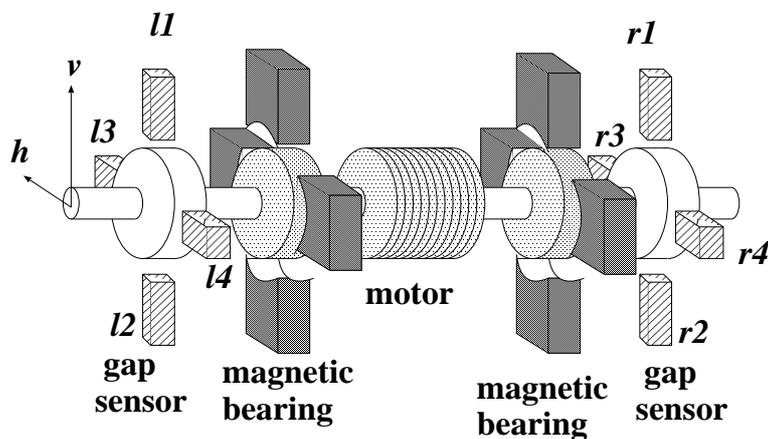


図 3.1: Magnetic bearing

ここで、以下の仮定を置く。

- 回転子は剛体である。

- 制御後の定常状態近傍を扱うものとする．
- 電磁石の吸引力は (コイル電流/ギャップの長さ)<sup>2</sup>に比例する．
- 8 個の電磁石はすべて等しい．
- 電圧，電流の関係式では速度起電力は小さいとし，無視する．

さらに，定常状態近傍で線形化を行なうことで，状態方程式と出力方程式を得る．ここまでの詳細は付録に記した．

また，こうして得られた状態方程式と出力方程式に対し，状態変数の並び替えを行なうことで，つぎの (3.1) 式と (3.2) 式を得る [11][12] ．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{x}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_v & pA_p \\ -pA_p & A_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_v & 0 \\ 0 & B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v \\ u_h \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} y_v \\ y_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_v & 0 \\ 0 & C_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_h \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

ここで，

$$x_v = [g'_{l1} \ g'_{r1} \ \dot{g}'_{l1} \ \dot{g}'_{r1} \ i'_{l1} \ i'_{r1}]^T, \quad u_v = [e'_{l1} \ e'_{r1}]^T,$$

$$x_h = [g'_{l3} \ g'_{r3} \ \dot{g}'_{l3} \ \dot{g}'_{r3} \ i'_{l3} \ i'_{r3}]^T, \quad u_h = [e'_{l3} \ e'_{r3}]^T, \quad y_v = [g'_{l1} \ g'_{r1}]^T, \quad y_h = [g'_{l3} \ g'_{r3}]^T,$$

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ A_1 + A_2A_{4v} & 0 & A_2A_{5v} \\ 0 & 0 & -(R/L)I \end{bmatrix}, \quad A_h = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ A_1 + A_2A_{4h} & 0 & A_2A_{5h} \\ 0 & 0 & -(R/L)I \end{bmatrix},$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_v = B_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1/L)I \end{bmatrix}, \quad C_v = C_h = [I \ 0 \ 0],$$

$$A_1 = \frac{\alpha}{l_l + l_r} \begin{bmatrix} (l_r - l_m)(\frac{1}{m} - \frac{l_l l_m}{J_y}) & (l_l - l_m)(\frac{1}{m} - \frac{l_l l_m}{J_y}) \\ (l_r - l_m)(\frac{1}{m} + \frac{l_r l_m}{J_y}) & (l_l - l_m)(\frac{1}{m} + \frac{l_r l_m}{J_y}) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} - \frac{l_l^2}{J_y} & -\frac{1}{m} + \frac{l_l l_r}{J_y} \\ -\frac{1}{m} + \frac{l_l l_r}{J_y} & -\frac{1}{m} - \frac{l_r^2}{J_y} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = -\frac{J_x}{J_y(l_l + l_r)} \begin{bmatrix} -l_l & l_l \\ l_r & -l_r \end{bmatrix},$$

$$A_{4v} = -2/W \text{diag} [F_{l1} + F_{l2}, F_{r1} + F_{r2}], \quad A_{4h} = -2/W \text{diag} [F_{l3} + F_{l4}, F_{r3} + F_{r4}],$$

$$A_{5v} = 2 \text{diag} \left[ \frac{F_{l1}}{I_{l1}} + \frac{F_{l2}}{I_{l2}}, \frac{F_{r1}}{I_{r1}} + \frac{F_{r2}}{I_{r2}} \right], \quad A_{5h} = 2 \text{diag} \left[ \frac{F_{l3}}{I_{l3}} + \frac{F_{l4}}{I_{l4}}, \frac{F_{r3}}{I_{r3}} + \frac{F_{r4}}{I_{r4}} \right].$$

ここで、 $p$  は回転子の回転角速度であり、 $g'_k$  はギャップ長の定常値からの変位、 $i'_k$  は電磁石電流の定常値からの変位、 $e'_k$  は電磁石電流の定常値からの変位である。ただし  $k = l1, l2, l3, l4, r1, r2, r3, r4$  とする。また、その他のパラメータを表 3.1 に示す。

本研究ではシミュレーションにより本手法の有効性を確認するが、そのシミュレーションの結果の信頼性や、今後この結果を実験により確認することを考え、実際に金沢大学工学部にある磁気軸受のパラメータ [3] を用いてシミュレーションを行なった。その値を表 3.1 に示しておく。また、表 3.1 のパラメータの値を代入した  $A_v, A_h, A_p$  などの数値を表 3.2 に示す。

表 3.1: Parameter of magnetic bearing

Parameter		Value
Mass of the rotor	$m$	$1.39 \times 10^1 [\text{kg}]$
Moment of Inertia about $X$	$J_x$	$1.348 \times 10^{-2} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
Moment of Inertia about $Y$	$J_y$	$2.326 \times 10^{-2} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
Distance between center of mass and left electromagnet	$l_l$	$1.30 \times 10^{-1} [\text{m}]$
Distance between center of mass and right electromagnet	$l_r$	$1.30 \times 10^{-1} [\text{m}]$
Distance between center of mass and motor	$l_m$	$0 [\text{m}]$
Steady attractive Force	$F_{l1}, F_{r1}$	$9.09 \times 10^1 [\text{N}]$
	$F_{l1 \sim l4, r1 \sim r4}$	$2.20 \times 10^1 [\text{N}]$
Steady current	$I_{l1}, I_{r1}$	$6.3 \times 10^{-1} [\text{A}]$
	$I_{l2 \sim l4, r2 \sim r4}$	$3.1 \times 10^{-1} [\text{A}]$
Steady gap	$W$	$5.5 \times 10^{-4} [\text{m}]$
Resistance	$R$	$1.07 \times 10^1 [\Omega]$
Inductance	$L$	$2.85 \times 10^{-1} [\text{H}]$

表 3.2: Matrices in state equation of magnetic bearing

$$\begin{aligned}
 A_v &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5.937 \times 10^4 & -2.933 \times 10^2 & 0 & 0 & -6.225 \times 10^1 & 3.076 \times 10^{-1} \\ -2.933 \times 10^2 & 5.937 \times 10^4 & 0 & 0 & 3.076 \times 10^{-1} & -6.225 \times 10^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.754 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.754 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \\
 A_h &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2.314 \times 10^4 & -1.143 \times 10^2 & 0 & 0 & -4.105 \times 10^1 & 2.028 \times 10^{-1} \\ -1.143 \times 10^2 & 2.314 \times 10^4 & 0 & 0 & 2.028 \times 10^{-1} & -4.105 \times 10^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.754 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.754 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \\
 A_p &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.034 \times 10^{-2} & 3.034 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.034 \times 10^{-2} & -3.034 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$B_v = B_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3.509 & 0 \\ 0 & 3.509 \end{bmatrix}, C_v = C_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 3.2 問題設定

### 3.2.1 磁気軸受の干渉

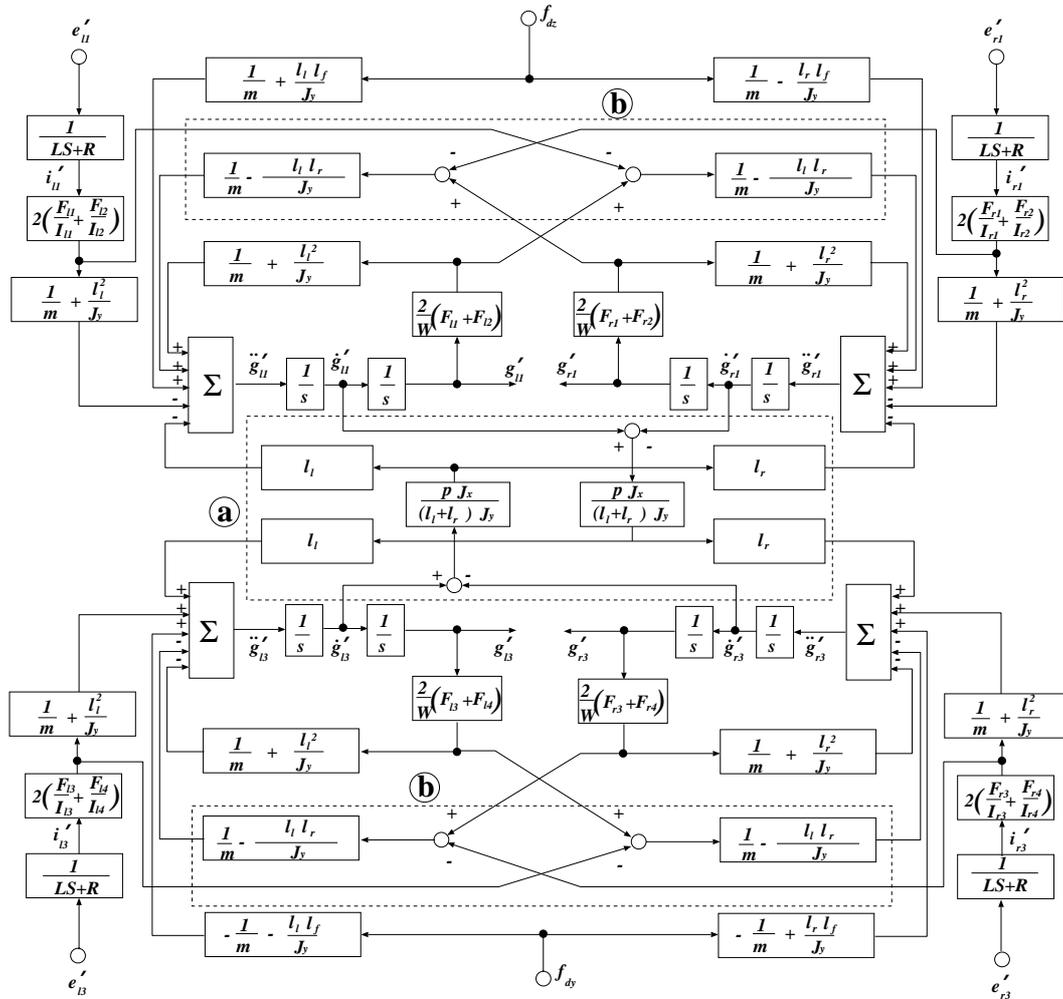


図 3.2: Block diagram of magnetic bearing

(3.1) 式と (3.2) 式をもとにブロック線図を書くと，図 3.2 となる．ただしここで  $f_{dy}$  ,  $f_{dz}$  は回転子に加わる外乱を表している．図 3.2 において，磁気軸受の干渉を表しているのは，破線①で囲んだ部分と破線②で囲んだ部分である．

破線①で囲んだ部分は，回転子の右側の運動と左側の運動の干渉を表している．しかし， $J_y = ml_l r$  であるとき，回転子の右側の運動と左側の運動の干渉はなくなる．このため，破線②で囲まれている干渉については，磁気軸受を  $J_y = ml_l r$  をなるように作成する

ことで干渉を抑えることが可能である。

また、破線①で囲まれた干渉は、ジャイロ効果による回転子の鉛直方向と水平方向の運動の干渉を表している。その干渉の度合は $\frac{pJ_x}{(l_l+l_r)J_y}$ に比例して強くなることがわかる。これより、回転子が回転運動を行っていない場合 ( $p = 0$ ) には鉛直方向の運動と水平方向の運動には干渉がない。また、干渉は $J_x/(l_l+l_r)J_y$ にも比例するため、ずんぐり型よりも細長い形の方が干渉の度合は小さくなることがわかる。これより、破線①で囲まれている鉛直方向の運動と水平方向の運動干渉は、回転子の回転角速度と、 $J_x/(l_l+l_r)J_y$ に比例しているため、スペースなどの理由から、回転子がずんぐり型である場合や、回転子が高速で回転運動を行なっている場合に回転子の鉛直方向の運動と水平方向の運動の干渉が大きくなることがわかる。

そのため、磁気軸受を工作機械用のスピンドルなどに応用することを考えた場合、回転子が高速で回転を行ない、かつ高精度の制御性能が要求されることから、ジャイロ効果による回転子の鉛直方向の運動と水平方向の運動の干渉が問題となる。

### 3.2.2 制御目的

磁気軸受の回転子の運動には、鉛直方向と水平方向の運動の干渉と、右側と左側の運動の干渉がある。しかし、上述したように、図 3.2より、回転子の右側と左側の運動の干渉は、 $J_y = ml_l l_r$ となるように作成することで、干渉をなくすることができる。そこで、ここではジャイロ効果による回転子の水平方向の運動と鉛直方向の運動の干渉について考える。

磁気軸受を回転子が高速で回転運動を行ない、かつ高精度の制御性能を要求される工作機械用スピンドルなどに応用することを考える。このとき、回転子には工具が付けられ、工具と工作物とが接触するため、回転子には大きな外乱が加わることが考えられる。そこで、本研究では回転子が高速で回転運動を行なっている場合に、回転子に加わる外乱に対し、回転子の鉛直方向の運動と水平方向の運動の干渉を抑えることを制御目的とする。

## 第 4 章

# 磁気軸受に対するロバスト非干渉制御

この章では，横軸形磁気軸受に対し，アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法により制御系の設計を行なう．

### 4.1 アダマール重み付き $H_\infty$ ループ整形法による制御系設計

ノミナルプラントとして， $p = 1047.2$  つまり，回転子が  $10000[\text{rpm}]$  で回転運動を行なっているものを選ぶ．このノミナルプラントの極と零点を表 4.1 に示す．

ここで，回転子に加わる外乱に対し，回転子の鉛直方向の運動と水平方向の運動の干渉を抑えるように制御系の設計を行なう．

Step.1 ここでは，以下の基準により，前置，後置補償器を用いて開ループ伝達関数の整形を行なった．

- ノミナルプラント  $P(s)$  に対し，まず全体に開ループ伝達関数のゲインが  $0\text{dB}$  近くになるように定数倍する．
- 外乱除去や，良好な定常特性を得るために，低周波数帯でのゲインを大きくする．
- 雑音の影響を抑えるためと，高周波数帯で良好なロバスト性を得るために，高周波数帯でのゲインを小さくする．
- 良好な安定性を得るために，ゲイン交差周波数付近のゲインが  $-20\text{dB/dec}$  となるようにする．

ここでは，以下の前置補償器  $C_{pre}$  と，後置補償器  $C_{post}$  を用いる．

表 4.1: Transmission poles and zeros of magnetic bearing (10000rpm)

Poles	Zeros
$-2.4305 \times 10^2$	$2.5355 \times 10^9 + j2.5930 \times 10^9$
$-2.3045 \times 10^2$	$-2.5355 \times 10^9 + j2.5930 \times 10^9$
$-1.6161 \times 10^2$	$-2.5355 \times 10^9 - j2.5930 \times 10^9$
$-1.5173 \times 10^2$	$2.5355 \times 10^9 - j2.5930 \times 10^9$
$-3.7544 \times 10^1$	$-1.2148 \times 10^{10} - j5.0441 \times 10$
$-3.7544 \times 10^1$	$1.2148 \times 10^{10} - j3.6442 \times 10$
$-3.7544 \times 10^1$	
$-3.7544 \times 10^1$	
$1.5173 \times 10^2$	
$1.6161 \times 10^2$	
$2.3044 \times 10^2$	
$2.4305 \times 10^2$	

$$C_{pre}(s) = \begin{bmatrix} c_{pre1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{pre1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{pre2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{pre2} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$C_{post}(s) = 10000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$c_{pre1}(s) = \frac{1800\{1 + s/(2\pi \cdot 12)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 30)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 50)\}}{\{1 + s/(2\pi \cdot 0.01)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 700)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 1200)\}} \quad (4.3)$$

$$c_{pre2}(s) = \frac{1200\{1 + s/(2\pi \cdot 10)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 17)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 40)\}}{\{1 + s/(2\pi \cdot 0.01)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 700)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 1200)\}} \quad (4.4)$$

これにより整形されたプラントを  $P_s = C_{post}PC_{pre}$  とする．また， $P_s$  の正規化左既約分解表現を  $P_s = M_s^{-1}N_s$  とする．

このときの整形されたプラント  $P_s$  の特異値の周波数応答を図 4.1 に示す．ここで，

磁気軸受は4入力4出力であるので，特異値は4つある．

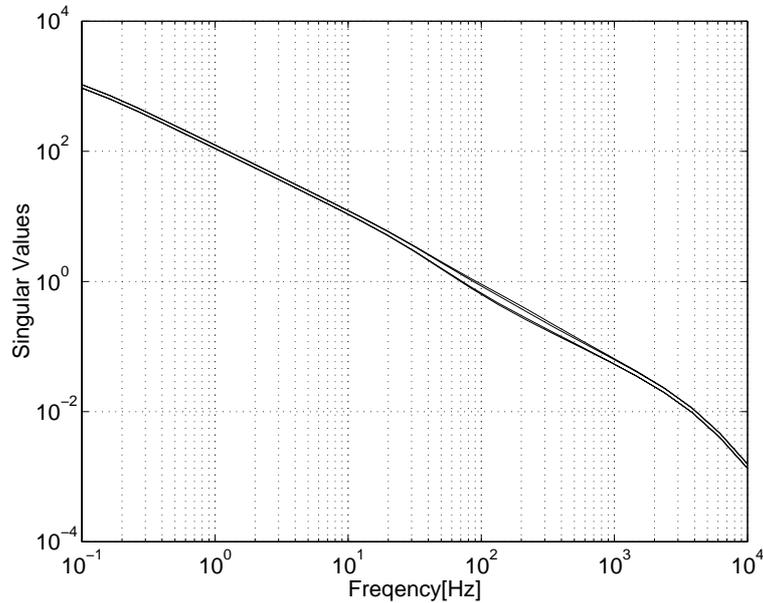


図 4.1: Shaped plant  $P_s$

つぎに，最大安定性マージン $\varepsilon_F$ の下限を (2.25) 式を用いて計算すると，

$$\begin{aligned} \varepsilon_F &\geq \left( 1 + \frac{0.9889^2}{1 - 0.9889^2} + \frac{0.9886^2}{1 - 0.9886^2} + \frac{0.9714^2}{1 - 0.9714^2} + \frac{0.9706^2}{1 - 0.9706^2} \right)^{-1/2} \\ &= 0.907 \end{aligned} \quad (4.5)$$

となった．0.907 では値が小さすぎるので，(2.24) 式を満たす  $K_F$  を計算し， $\varepsilon_F$  の値を計算すると， $\varepsilon_F = 0.1408$  となった．

Step.2 ここでの制御目的は，回転子に加わる外乱に対し，回転子の鉛直方向と水平方向の運動の干渉を抑えることである．そのため，ここでは，回転子に加わる外乱を入力として持つ一般化プラント  $G$  を決定する．

まず，新しい入出力を加えていない図 4.2 を考える．ここで， $y$  は磁気軸受の出力であり， $u$  を磁気軸受の入力とする．このとき， $d_1$  は，センサの誤差などを表し， $d_2$  は，回転子にかかる外乱などを表しており， $y_1$  は磁気軸受の出力を表している．そのため，ここでは，この図 4.2 を一般化プラント  $G$  として用いる．

$G$  に対する入力は  $[d_1 \ d_2 \ u_1]^T$  であり，出力は  $[u_1 \ y_1 \ y_1]^T$  である．ただし， $d_1$ ， $d_2$  や

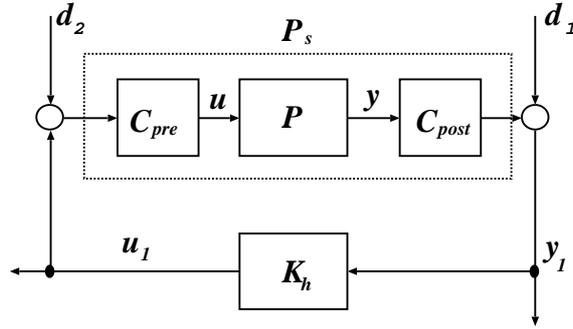


図 4.2: Generalized plant  $G$

$y_1$  は，実際の磁気軸受に対する入出力ではなく，整形されたプラント  $P_s(s)$  の入出力である．そのため，前置補償器，後置補償器は対角であること条件とする．

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ I & P_s & P_s \\ I & P_s & P_s \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

また，安定化補償器を  $K_h$  としたとき， $\mathcal{F}_l(G, K_h)$  は次式のようになる．

$$\mathcal{F}_l(G, K_h) = \begin{bmatrix} K_h(I - P_s K_h)^{-1} & K_h(I - P_s K_h)^{-1} P_s \\ (I - P_s K_h)^{-1} & (I - P_s K_h)^{-1} P_s \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

ここで，外乱  $d_2$  からプラントの出力  $y_1$  までの伝達関数は (4.7) 式の右下の項  $(I - P_s K_h)^{-1} P_s$  となる．そこで，アダマール重み  $W$  は，磁気軸受に対する重み  $W$  は外乱  $d_2$  からプラントの出力  $y_1$  までの鉛直方向と水平方向の運動の干渉を抑えるように，以下のように定める．

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$W_{\alpha 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

(4.9) 式の  $W_{\alpha 1}$  より，外乱  $d_2$  からプラントの出力  $y_1$  までの回転子の鉛直方向の運動と水平方向の運動の干渉が抑えられることが期待できる．

(4.9) 式において， $\alpha$  は，ロバスト安定性と制御性能のトレードオフを調節するパラメータとなる．そこで，ここでは  $\alpha$  の値を変動することで，ロバスト安定性と制御性能がどのように変化するかを確認するため， $\alpha = 0, 10, 100$  についてそれぞれ制御系の設計を行なった．

**Step.3**  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスにより，(4.10) 式を満たす安定化補償器を計算した．ここで， $\alpha = 0, 10, 100$  について得られた安定化補償器をそれぞれ  $K_{0h}$ ， $K_{10h}$ ， $K_{100h}$  とする．

$$\|W \circ \mathcal{F}_i(G, K_{ih})\|_{\infty F} \leq \gamma_{im} \quad (4.10)$$

ここで， $i = 0, 10, 100$  である．

また，(2.28) 式により安定性マージンを計算した．その値を表 4.2 に示す．

表 4.2 より， $\alpha$  の値を大きくすると安定性マージンの値は小さくなることが確認できる．しかし，ここでは， $\alpha$  の値を大きくしても，安定性マージンの劣化はわずかであった．

表 4.2: Stability margin of Hadamard weighted loop shaping design procedure

$\alpha$	stability margin
0	0.1408
10	0.1387
100	0.1352

ここで安定化補償器  $K_{ih}(i = 0, 10, 100)$  を求める  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスには，得られるコントローラの次数が極端に高くなるという問題点がある．ここで得られた  $K_{ih}(i = 0, 10, 100)$  も，1176 次となり非常に高次となった．

Step.4 最終的なコントローラは次式より得られた．

$$K_i = C_{pre} K_{ih} C_{post} \quad (4.11)$$

ここで， $i = 0, 10, 100$  とする．

(4.7) 式と (4.8) 式より，外乱  $d_2$  から出力  $y$  までの鉛直方向と水平方向の運動の干渉が，変数  $\alpha$  により抑えられることが期待できる．しかし，ここで  $K_{ih}(i = 0, 10, 100)$  が 1176 次であるため，ここで得られるコントローラ  $K_i(i = 0, 10, 100)$  は 1188 次となった．

## 4.2 制御器の低次元化

アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法で，安定化補償器を求めるために用いるアダマール重み付き  $H_\infty$  フロベニウスシンセシスには，得られるコントローラの次数が極端に大きくなるという問題がある．そのため，アダマール  $H_\infty$  ループ整形法で得られるコントローラの次数は極端に大きくなってしまふ．また，本研究で求めた，磁気軸受に対するコントローラ  $K_0, K_{10}, K_{100}$  の次数も 1188 次となった．コントローラの次数は，計算量や分かりやすさなど，いくつかの理由から，低いほうが好ましい．そのため，制御器を低次元化するいくつかの手法が提案されている [10][13][14][15]．また，実際にこのアダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法を磁気軸受に適用する場合には，コントローラを，実装可能な程度の次数に低次元化する必要がある．具体的には，現在の計算機の性能などの理由から，少なくとも 40 次以下の次数にする必要がある．本研究では，安定化補償器として求めた

$K_{ih}(i = 0, 10, 100)$  に対し, ハンケル特異値, 安定性マージンなどを目安にし平衡打ち切りを適用することで低次元化を行なった. ここで用いた  $K_{0h}, K_{10h}, K_{100h}$  のハンケル特異値を表 4.3 に示す. ただし, それぞれにハンケル特異値は 1176 個あるため, スペースの都合上 30 番目までのハンケル特異値のみを記している.

表 4.3: Hankel singular values of  $K_{0h}, K_{10h}, K_{100h}$

	$K_{0h}$	$K_{10h}$	$K_{100h}$
1	3.4226	3.5149	3.6003
2	3.3562	3.4251	3.3867
3	3.2090	3.3028	3.3853
4	3.1379	3.1966	3.1651
5	1.7702	1.8723	1.9547
6	1.7379	1.7634	1.7519
7	1.6047	1.7099	1.7406
8	1.5691	1.5945	1.5818
9	$3.0525 \times 10^{-1}$	$3.4463 \times 10^{-1}$	$3.4641 \times 10^{-1}$
10	$2.9791 \times 10^{-1}$	$3.2078 \times 10^{-1}$	$3.2011 \times 10^{-1}$
11	$1.6195 \times 10^{-1}$	$2.1455 \times 10^{-1}$	$1.8711 \times 10^{-1}$
12	$1.5537 \times 10^{-1}$	$1.6110 \times 10^{-1}$	$1.6487 \times 10^{-1}$
13	$1.0886 \times 10^{-1}$	$1.2445 \times 10^{-1}$	$1.3015 \times 10^{-1}$
14	$1.0630 \times 10^{-1}$	$1.1445 \times 10^{-1}$	$1.1276 \times 10^{-1}$
15	$5.5152 \times 10^{-2}$	$7.6530 \times 10^{-2}$	$6.4690 \times 10^{-2}$
16	$5.1991 \times 10^{-2}$	$5.6348 \times 10^{-2}$	$5.8954 \times 10^{-2}$
17	$1.5595 \times 10^{-2}$	$2.8797 \times 10^{-2}$	$5.0177 \times 10^{-2}$
18	$1.5203 \times 10^{-2}$	$2.6748 \times 10^{-2}$	$4.3174 \times 10^{-2}$
19	$1.4405 \times 10^{-2}$	$1.8930 \times 10^{-2}$	$2.2221 \times 10^{-2}$
20	$7.6829 \times 10^{-3}$	$1.8242 \times 10^{-2}$	$1.8072 \times 10^{-2}$
21	$6.4731 \times 10^{-3}$	$1.4341 \times 10^{-2}$	$1.1106 \times 10^{-2}$
22	$5.1899 \times 10^{-3}$	$9.8863 \times 10^{-3}$	$8.5357 \times 10^{-3}$
23	$4.8294 \times 10^{-3}$	$6.5103 \times 10^{-3}$	$6.7070 \times 10^{-3}$
24	$4.7661 \times 10^{-3}$	$6.1541 \times 10^{-3}$	$6.3779 \times 10^{-3}$
25	$4.5233 \times 10^{-4}$	$4.7637 \times 10^{-3}$	$5.6632 \times 10^{-3}$
26	$1.3026 \times 10^{-4}$	$4.5332 \times 10^{-3}$	$3.7709 \times 10^{-3}$
27	$2.2798 \times 10^{-5}$	$8.2883 \times 10^{-4}$	$2.4179 \times 10^{-3}$
28	$1.0045 \times 10^{-5}$	$5.2324 \times 10^{-4}$	$2.3877 \times 10^{-3}$
29	$9.0771 \times 10^{-6}$	$4.0068 \times 10^{-4}$	$1.0825 \times 10^{-3}$
30	$3.2091 \times 10^{-6}$	$2.2982 \times 10^{-4}$	$8.1564 \times 10^{-4}$

ハンケル特異値はそのハンケル特異値に対応する状態変数がシステムの入出力に与える影響の強さを表しているため, 状態変数を打ち切る場合の目安となる. そこでまず, 表 4.3 のハンケル特異値を目安に状態変数の打ち切りを行なう. そうして低次元化された安定化補償器を用いて安定性マージンを計算し, 安定性マージンが大きく劣化していれば,

もう一度状態変数の打ち切りをやり直した。

それにより，安定化補償器  $K_{0h}$  ,  $K_{10h}$  ,  $K_{100h}$  を 24 次まで低次元化を行ない，コントローラ  $K_0$  ,  $K_{10}$  ,  $K_{100}$  は 36 次となった．この低次元化されたコントローラをそれぞれ  $K_{0r}$  ,  $K_{10r}$  ,  $K_{100r}$  とする．

ここで，それぞれのコントローラの特異値の周波数応答を図 4.3 から図 4.5 に示す．また，低次元化する前の完全次数のコントローラについても重ねてプロットした．それぞれ，実線が，低次元化を行なったコントローラの応答であり，破線が完全次数のコントローラの周波数応答である．

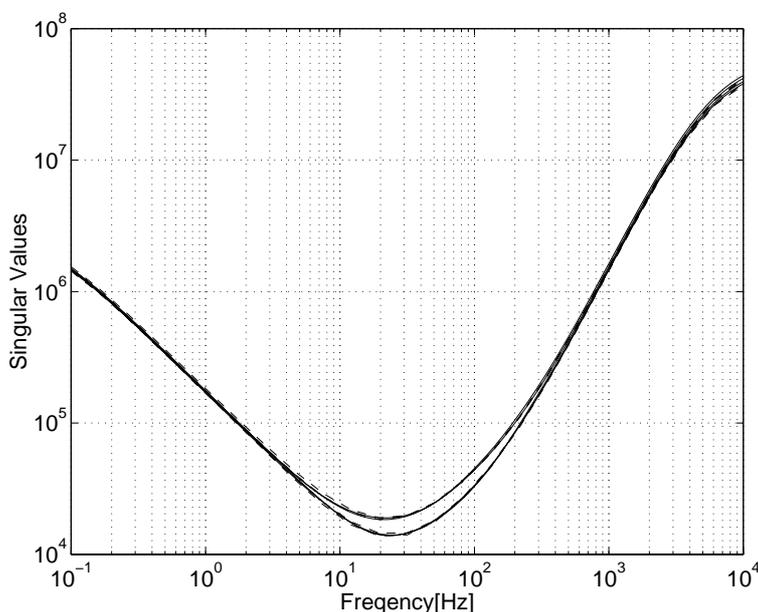


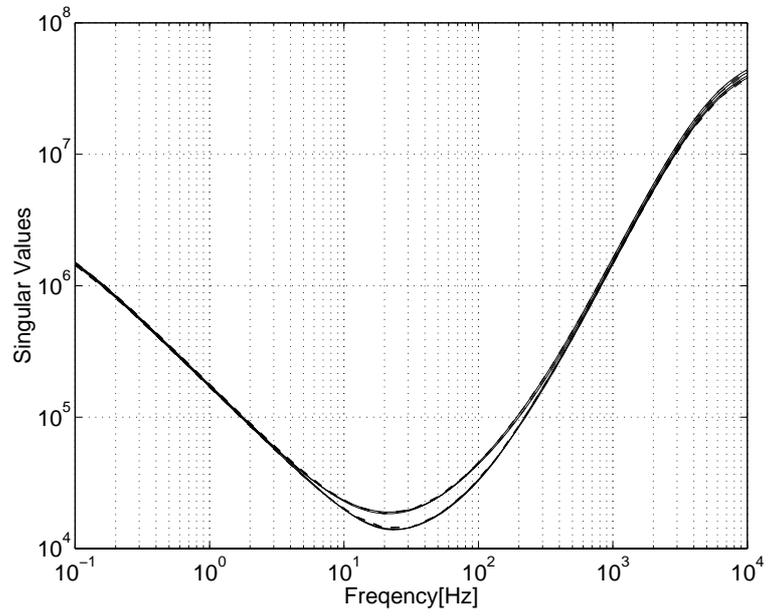
図 4.3: Controller  $K_0$ ,  $K_{0r}$

これより，低次元化を行なっても，周波数応答の変化はほとんどないことが分かる．

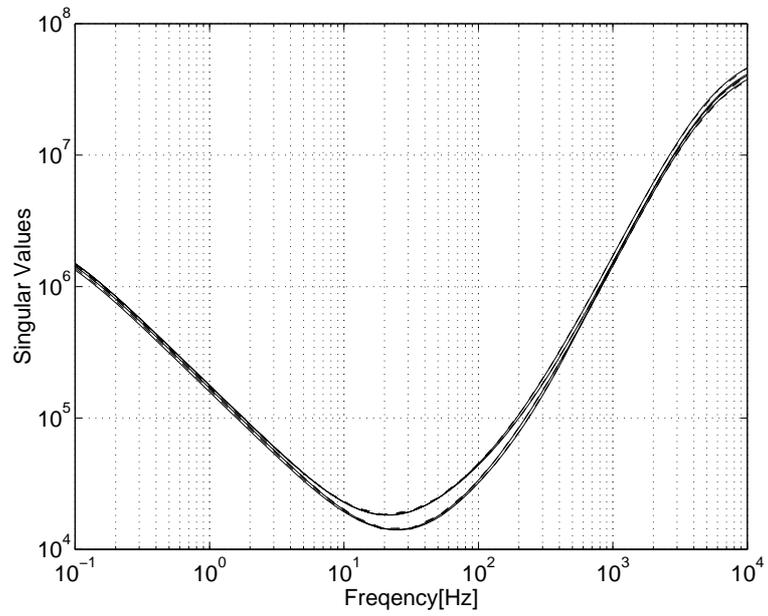
また，低次元化されたコントローラの安定性マージンの値を表 4.4 に示す．

表 4.2 と表 4.4 より，低次元化を行なっても，安定性マージンはほとんど劣化していないことが分かる．

また，ここで得られたコントローラ  $K_{0r}$  ,  $K_{10r}$  ,  $K_{100r}$  の極と零点をそれぞれ表 4.5 , 表 4.6 , 表 4.7 に示す．



⊠ 4.4: Controller  $K_{10}, K_{10r}$



⊠ 4.5: Controller  $K_{100}, K_{100r}$

表 4.4: Stability margin of reduced order controller

	stability margin
$K_{0r}$	0.1408
$K_{10r}$	0.1387
$K_{100r}$	0.1339

表 4.5: Transmission poles and zeros of  $K_{0r}$

Poles	Zeros
$-7.5398 \times 10^3$	$-7.3387 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-7.5387 \times 10^3$
$-6.2831 \times 10^{-2}$	$-7.4974 \times 10^3$
$-7.5398 \times 10^3$	$-7.5405 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-4.4711 \times 10^3$
$-6.2831 \times 10^{-2}$	$-4.3987 \times 10^3$
$-7.5398 \times 10^3$	$-4.3980 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-4.4139 \times 10^3$
$-6.2831 \times 10^{-2}$	$-3.1416 \times 10^2$
$-7.5398 \times 10^3$	$-3.1416 \times 10^2$
$-4.3982 \times 10^3$	$-2.3044 \times 10^2$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-1.3819 \times 10^2$
$-5.4298 \times 10^4$	$-2.5134 \times 10^2$
$-5.4294 \times 10^4$	$-1.8850 \times 10^2$
$-5.4295 \times 10^4$	$-1.8850 \times 10^2$
$-5.4297 \times 10^4$	$-1.3326 \times 10^1$
$-6.1445 \times 10^3 + j4.7286 \times 10^1$	$-1.6089 \times 10^1 + j2.2654 \times 10^0$
$-6.1445 \times 10^3 - j4.7286 \times 10^1$	$-1.6089 \times 10^1 - j2.2654 \times 10^0$
$-6.7643 \times 10^3$	$-1.8100 \times 10^1$
$-6.9799 \times 10^3$	$-3.4299 \times 10^1$
$-6.4271 \times 10^3$	$-3.4351 \times 10^1 + j1.1334748 \times 10^0$
$-5.8519 \times 10^3$	$-3.4351 \times 10^1 - j1.1334748 \times 10^0$
$-5.2625 \times 10^3$	$-4.8150 \times 10^1$
$-5.1509 \times 10^3$	$-2.5133 \times 10^2$
$-3.0307 \times 10^2$	$-2.5133 \times 10^2$
$-2.0491 \times 10^2$	$-5.6798 \times 10^1$
$-3.0190 \times 10^2$	$-1.0681 \times 10^2$
$-1.9608 \times 10^2 + j1.8014 \times 10^1$	$-1.0681 \times 10^2$
$-1.9608 \times 10^2 - j1.8014 \times 10^1$	$-6.2832 \times 10^1$
$-1.7796 \times 10^2$	$-6.2832 \times 10^1$
$-5.8217 \times 10^1 + j2.6581 \times 10^1$	$-7.5398 \times 10^1$
$-5.8217 \times 10^1 - j2.6581 \times 10^1$	$-7.5398 \times 10^1$
$-8.9870 \times 10^1$	
$-7.2870 \times 10^1$	
$-6.9608 \times 10^1$	
$-7.3281 \times 10^1$	

表 4.6: Transmission poles and zeros of  $K_{10r}$

Poles	Zeros
$-7.5398 \times 10^3$	$-7.5283 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-7.8551 \times 10^3$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-7.4837 \times 10^3$
$-7.5398 \times 10^3$	$-7.5665 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-4.2385 \times 10^3$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-4.4179 \times 10^3$
$-7.5398 \times 10^3$	$-4.4027 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-4.3598 \times 10^3$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-1.0898 \times 10^2 + j1.4591 \times 10^2$
$-7.5398 \times 10^3$	$-1.0898 \times 10^2 - j1.4591 \times 10^2$
$-4.3982 \times 10^3$	$-2.1017 \times 10^2$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-3.1416 \times 10^2$
$-1.5980 \times 10^5$	$-3.1416 \times 10^2$
$-1.5980 \times 10^5$	$-1.4780 \times 10^2$
$-1.5980 \times 10^5$	$-2.5133 \times 10^2$
$-1.5980 \times 10^5$	$-1.8850 \times 10^2 + j8.7796 \times 10^{-9}$
$-7.5156 \times 10^3$	$-1.8850 \times 10^2 - j8.7796 \times 10^{-9}$
$-6.1295 \times 10^3 + j1.9139 \times 10^2$	$-2.5133 \times 10^2$
$-6.1295 \times 10^3 - j1.9139 \times 10^2$	$-1.2983 \times 10^1$
$-4.8206 \times 10^3$	$-1.1464 \times 10^1$
$-7.1599 \times 10^3$	$-2.2622 \times 10^1 + j4.3226 \times 10^0$
$-6.5702 \times 10^3$	$-2.2622 \times 10^1 - j4.3226 \times 10^0$
$-5.7142 \times 10^3$	$-3.6014 \times 10^1$
$-4.9846 \times 10^3$	$-1.8401 \times 10^1 + j9.4344 \times 10^0$
$-1.1410 \times 10^2 + j1.5972 \times 10^2$	$-1.8401 \times 10^1 - j9.4344 \times 10^0$
$-1.1410 \times 10^2 - j1.5972 \times 10^2$	$-4.7803 \times 10^1$
$-3.0236 \times 10^2$	$-1.0681 \times 10^2$
$-9.5484 \times 10^1 + j4.5083 \times 10^1$	$-1.0681 \times 10^2$
$-9.5484 \times 10^1 - j4.5083 \times 10^1$	$-7.5398 \times 10^1$
$-2.9063 \times 10^2$	$-7.5398 \times 10^1$
$-1.5591 \times 10^2$	$-6.2832 \times 10^1$
$-4.4358 \times 10^1$	$-6.2832 \times 10^1$
$-7.7673 \times 10^1$	
$-1.7167 \times 10^2$	
$-1.7039 \times 10^2$	
$-3.5120 \times 10^1$	

表 4.7: Transmission poles and zeros of  $K_{100r}$

Poles	Zeros
$-7.5398 \times 10^3$	$-7.5152 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-7.7354 \times 10^3$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-5.0068 \times 10^3 + j1.1849 \times 10^3$
$-7.5398 \times 10^3$	$-5.0068 \times 10^3 - j1.1849 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-4.4144 \times 10^3$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-4.2900 \times 10^3$
$-7.5398 \times 10^3$	$-2.4695 \times 10^3 + j1.7763 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-2.4691 \times 10^3 - j1.7763 \times 10^3$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-5.5401 \times 10^2$
$-7.5398 \times 10^3$	$-3.8246 \times 10^2 + j3.6964 \times 10^2$
$-4.3982 \times 10^3$	$-3.8246 \times 10^2 - j3.6964 \times 10^2$
$-6.2832e \times 10^{-2}$	$-3.1416 \times 10^2$
$-2.5370 \times 10^5$	$-3.1416 \times 10^2$
$-2.5379 \times 10^5$	$-1.2599 \times 10^2$
$-2.5377 \times 10^5$	$-2.5133 \times 10^2$
$-2.5379 \times 10^5$	$-2.5133 \times 10^2$
$-6.9681 \times 10^3$	$-1.8850 \times 10^2$
$-2.5931 \times 10^3 + j1.7884 \times 10^3$	$-1.8850 \times 10^2$
$-2.5931 \times 10^3 - j1.7884 \times 10^3$	$-1.3721 \times 10^1$
$-5.4409 \times 10^3$	$-1.4457 \times 10^1 + j1.0157$
$-6.5971 \times 10^3$	$-1.4457 \times 10^1 - j1.0157$
$-5.1178 \times 10^3 + j1.5450 \times 10^3$	$-5.9615 \times 10^1$
$-5.1178 \times 10^3 - j1.5450 \times 10^3$	$-1.8948 \times 10^1$
$-5.6804 \times 10^3$	$-3.3859 \times 10^1$
$-4.0686 \times 10^2 + j3.9519 \times 10^2$	$-3.2544 \times 10^1$
$-4.0686 \times 10^2 - j3.9519 \times 10^2$	$-3.1738 \times 10^1$
$-5.6812 \times 10^2$	$-1.0681 \times 10^2$
$-2.4478 \times 10^2 + j5.3939 \times 10^1$	$-1.0681 \times 10^2$
$-2.4478 \times 10^2 - j5.3939 \times 10^1$	$-7.5398 \times 10^1$
$-7.4280 \times 10^1 + j4.3437 \times 10^1$	$-6.2832 \times 10^1$
$-7.4280 \times 10^1 - j4.3437 \times 10^1$	$-6.2832 \times 10^1$
$-7.1249 \times 10^1$	$-7.5398 \times 10^1$
$-2.4076 \times 10^2$	
$-6.9806 \times 10^1$	
$-1.6016 \times 10^2$	
$-5.4368 \times 10^1$	

## 第 5 章

# シミュレーションによる検証

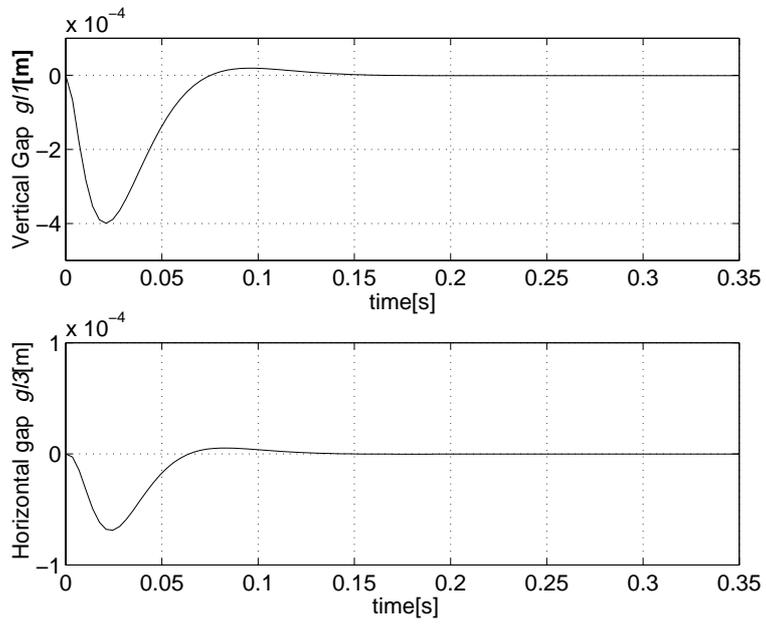
本手法の有効性を検証するためのシミュレーションを行なった。この章では、そのシミュレーション結果について述べ、制御性能やロバスト安定性の解析や、他の手法との比較を行なっていく。

### 5.1 外乱応答特性

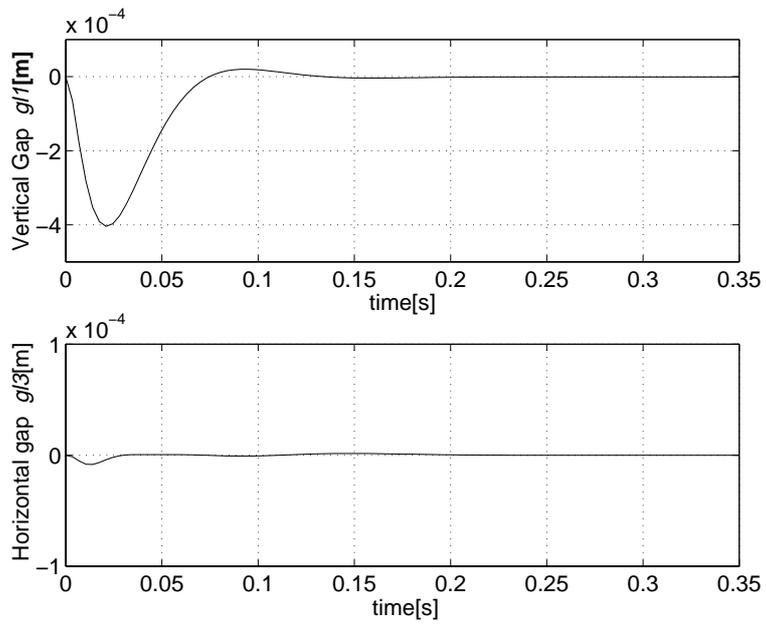
本研究の制御目的は、回転子に加わる外乱に対し、回転子の鉛直方向の運動と水平方向の運動の干渉を抑えることであった。そこで、前章で得たコントローラ  $K_{0r}$ 、 $K_{10r}$ 、 $K_{100r}$  を用い、磁気軸受回転子の左側、鉛直方向下向きに 100[N] のステップ状の外乱を与えるシミュレーションを行なった。ただし、回転子の回転角速度を  $p = 1047.2(10000[\text{rpm}])$  としている。そのときの制御結果を図 5.1 から図 5.3 に示す。

つぎに、従来手法との比較として、磁気軸受に適用された報告のある、 $H_\infty$  ループ整形法を横軸形磁気軸受に適用した。このときの、制御系の設計は、文献 [3] を参考にしており、その詳細は付録に示している。また、ここで得たコントローラを  $K_{LSDP}$  とする。この  $K_{LSDP}$  を用いて、同様のシミュレーションを行なった。このときの制御結果を図 5.4 に示す。

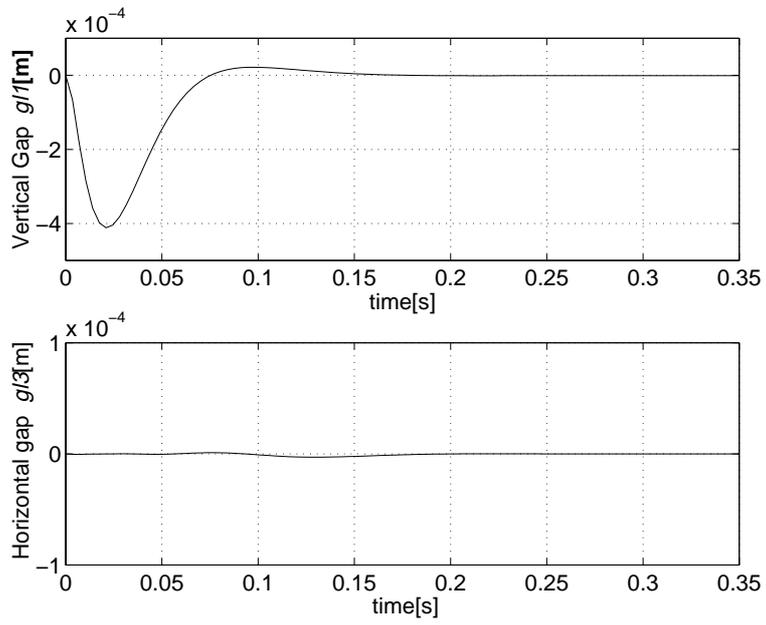
図 5.1 から図 5.4 より、 $K_{0r}$ 、 $K_{10r}$ 、 $K_{100r}$ 、 $K_{LSDP}$  いずれのコントローラを用いても、100[N] という大きな外乱に対し、回転子は安定に浮上していることが分かる。まず、図 5.1、図 5.2、図 5.3 の比較を行なう。これらの図から、 $\alpha$  の値を変動しても、鉛直方向の運動に関してはほとんど変化がないことが分かる。また、水平方向の運動に関する比較を行なうと、 $K_{0r}$  を用いた場合に最も外乱の影響が現れており、 $\alpha$  の値を大きくした  $K_{10r}$ 、 $K_{100r}$  を用いることで、外乱の影響が抑えられていくことが分かる。特に  $K_{100r}$  を用いた場



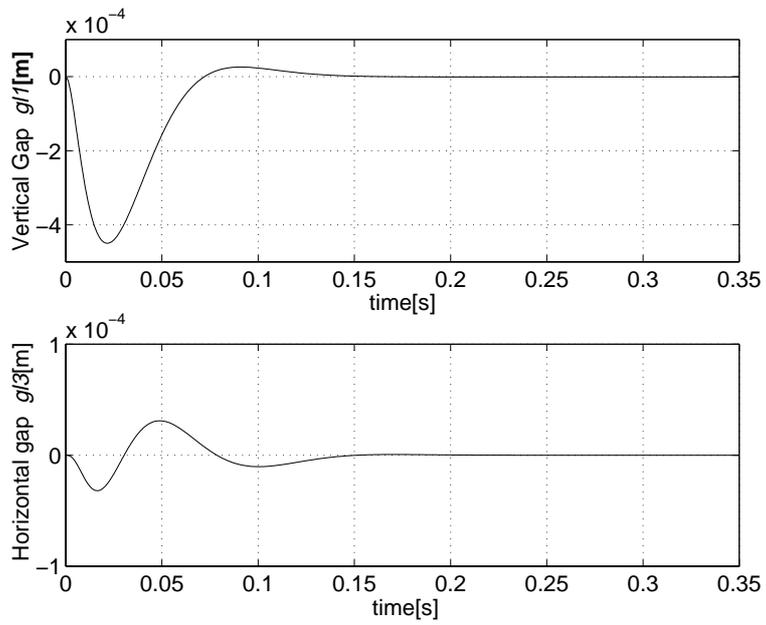
☒ 5.1: Simulation result using  $K_{or}(10000[\text{rpm}])$



☒ 5.2: Simulation result using  $K_{10r}(10000[\text{rpm}])$



☒ 5.3: Simulation result using  $K_{100r}(10000[\text{rpm}])$



☒ 5.4: Simulation result using  $K_{LSDP}(10000[\text{rpm}])$

合にはほとんど外乱の影響が現れていないことが確認できる．このことから， $\alpha$ の値を大きくすることで，制御目的としている近似非干渉化が達成されることがわかる．

つぎに， $K_{LSDP}$ による制御結果との比較を行なう．図 5.1から図 5.4より，鉛直方向の運動に関しては，アダマール重み付き  $H_\infty$ ループ整形法を用いた場合とほとんど差がないことが分かる．また， $K_{10r}$ や  $K_{100r}$ と比べると，水平方向の運動に対する影響はあまり抑えられていないことが分かる．このことから，非干渉化を考える場合，アダマール重み付き  $H_\infty$ ループ整形法によるアプローチが有効となることが確認できる．

## 5.2 ロバスト性能の検証

前節において，ノミナルプラントに対してはアダマール重みを大きくとることで近似非干渉化が達成されることを確認した．ここでは，制御対象のパラメータを変動した場合の制御性能を比較する．

パラメータの変動として，回転子の回転角速度  $p$  の値を 1047.2 から 2094.4 へと変動させた．回転子の鉛直方向と水平方向の運動の干渉の度合は，2章で示したように回転子の回転角速度  $p$  に比例する．そのため，このパラメータの変動により干渉の度合は強くなる．ここで，磁気軸受回転子の左側，鉛直方向下向きに 100[N] のステップ状の外乱を与えるシミュレーションを行なった．そのときの制御結果を図 5.5から図 5.8に示す．

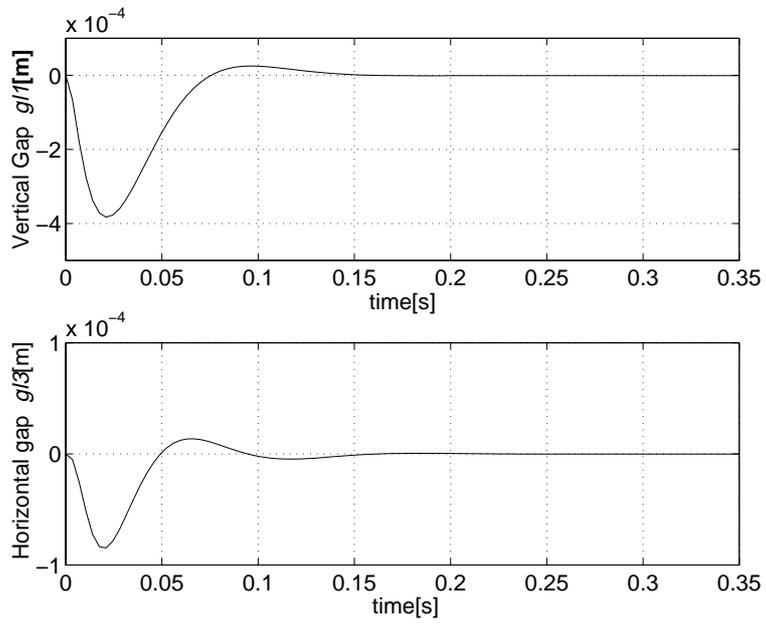
図 5.5から図 5.8より，パラメータを変動した場合でも  $K_{0r}$ ， $K_{10r}$ ， $K_{100r}$ ， $K_{LSDP}$ いずれのコントローラも回転子を安定に浮上させていることが確認できる．また，干渉の度合が強くなるようにパラメータを変動したため，いずれの場合でも水平方向の運動に対する外乱の影響は大きくなっている．しかし，鉛直方向の運動に関してはパラメータを変動する前とほとんど差がないことが分かる．

水平方向の運動を比較してみると，図 5.8より図 5.6，図 5.7のほうが外乱の影響が抑えられており，良好な制御結果となっている．

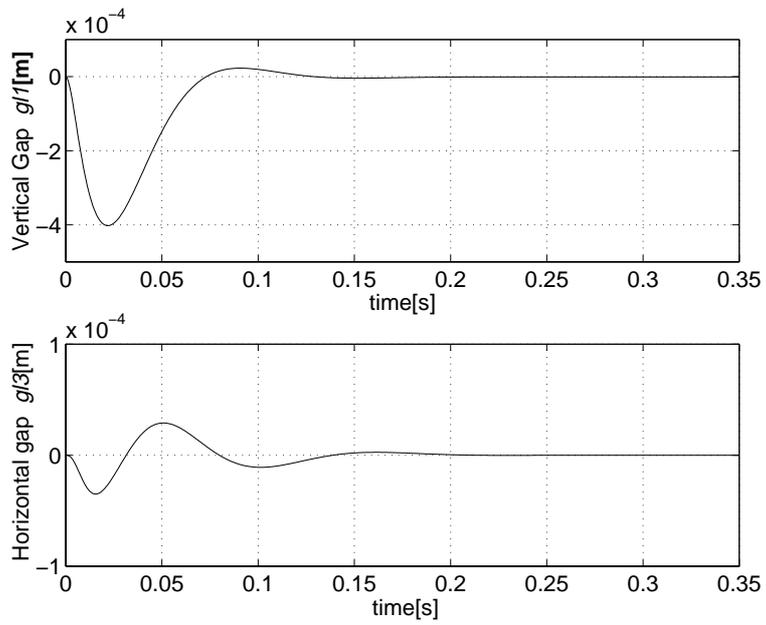
これより，制御対象のパラメータに誤差や変動がある場合でも，干渉は抑えられており，アダマール重み付き  $H_\infty$ ループ整形法によるアプローチが有効となることが確認できる．

## 5.3 制御性能とロバスト安定性の検証

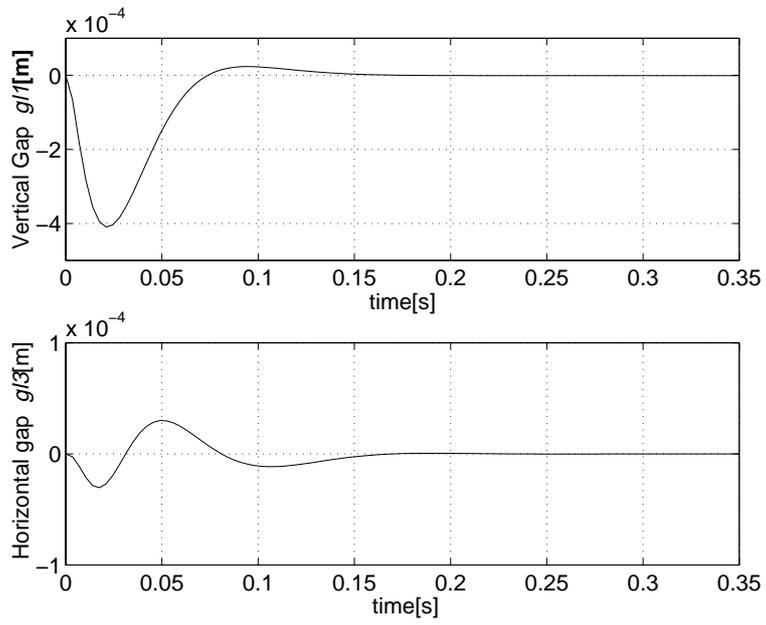
ここでは，非干渉化の度合やロバスト安定性について別の方向から比較を行なう．非干渉化の度合については，システムの干渉の強さを表す RGA 指数，ロバスト安定性については安定性マージンにより比較を行なう．回転子に加わる外乱から，出力を表す伝達



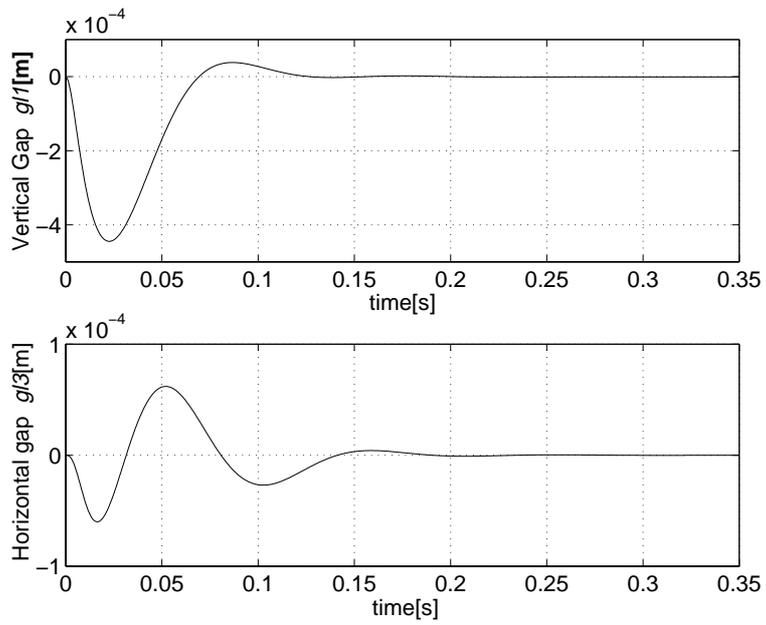
☒ 5.5: Simulation result using  $K_{or}(20000[\text{rpm}])$



☒ 5.6: Simulation result using  $K_{10r}(20000[\text{rpm}])$



☒ 5.7: Simulation result using  $K_{100r}(20000[\text{rpm}])$



☒ 5.8: Simulation result using  $K_{LSDP}(20000[\text{rpm}])$

関数  $(I - PK_i)^{-1}P$  ( $i = 0, 10, 100$ ) の RGA 指数を図 5.9 から図 5.11 に示す．また， $(I - PK_{LSDP})P$  の RGA 指数を図 5.12 に示す．

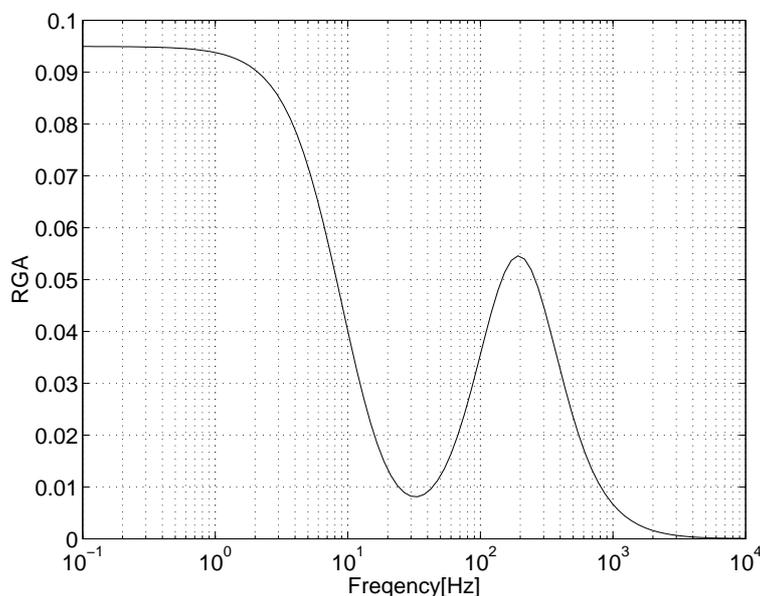
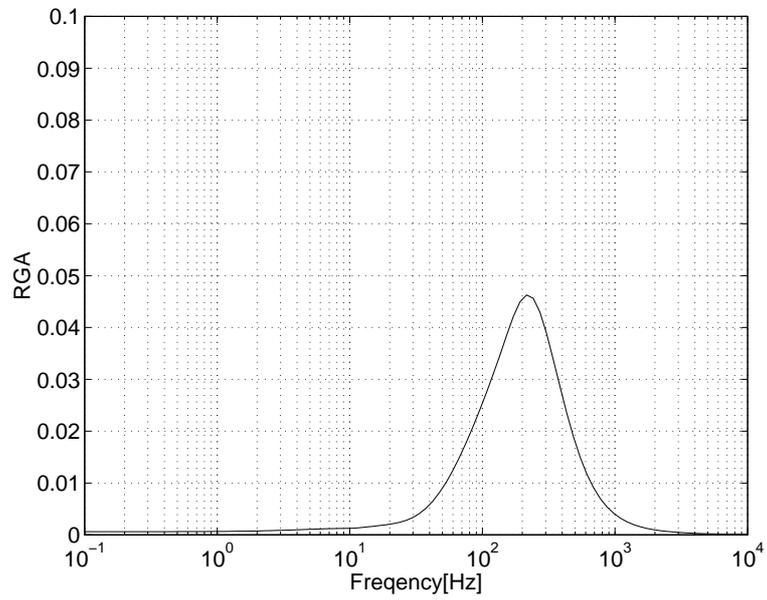


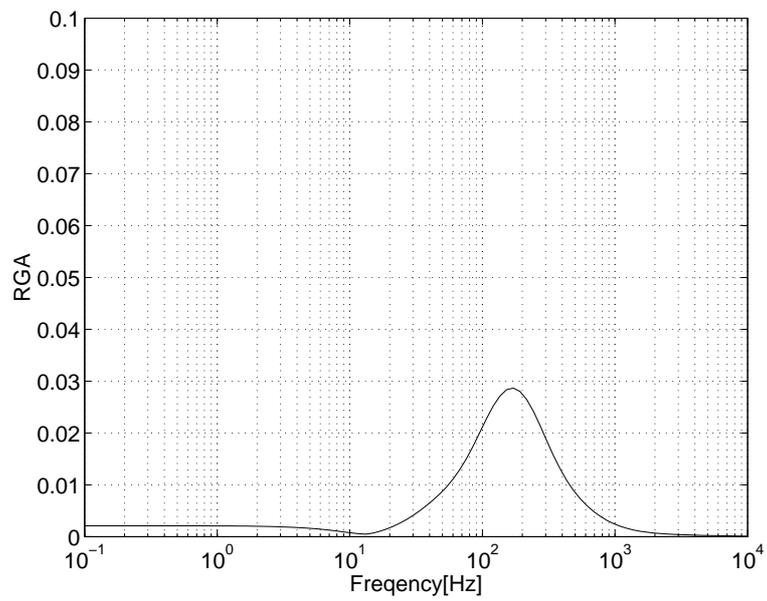
図 5.9: RGA-number of  $(I - PK_{0r})^{-1}P$

まず，RGA 指数による比較を行なう．図 5.9 から図 5.11 より， $\alpha$  の値に大きくなることで RGA 指数が小さくなっていることがわかる．これより，アダマール重みを大きくとることで，干渉が抑えられ，近似非干渉化が達成されることが確認できる．しかし，図 5.9 から， $K_{0r}$  を用いている場合には，低周波数帯で RGA 指数が高いことが分かる．また，図 5.12 を見てみると，RGA 指数は図 5.10，図 5.11 より高くなっていることが分かる．このことから，アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法を用いることで， $H_\infty$  ループ整形法より干渉が抑えられることが確認できる．ただし，図 5.11 では低周波数帯で RGA 指数がわずかだが大きくなっている．これはコントローラを低次元化したためである．今回は低次元化する場合にハンケル特異値と安定性マージンを目安としたが，低次元化する場合には，RGA 指数など，非干渉化の度合も目安にしておく必要がある．また，図 5.9 と図 5.12 を比較すると， $10^2$  [Hz] 付近での RGA 指数にはあまり差がないが，低周波数帯でなぜか図 5.9 の方が高くなっている．この原因を究明する必要がある．

つぎに，安定性マージンによる比較を行なう．表 4.2 と表 4.4 から安定性マージンは， $\alpha$  の値が大きくなると小さくなっていくことが確認できる．これより， $\alpha$  を大きくとると，ロバスト安定性が劣化することが分かる．これより，アダマール重み  $W$  の変数  $\alpha$  は，ロ



☒ 5.10: RGA-number of  $(I - PK_{10r})^{-1}P$



☒ 5.11: RGA-number of  $(I - PK_{100r})^{-1}P$

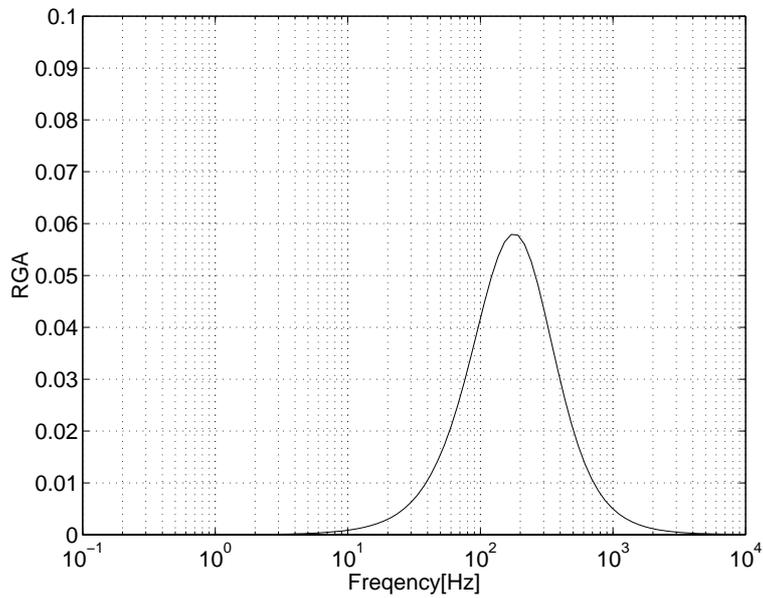


図 5.12: RGA-number of  $(I - PK_{LSDP})P$

バスタ安定性と制御性能のトレードオフを調節するパラメータとなることが確認できる。また、 $K_{LSDP}$ を用いた場合の安定性マージンは0.1414であった。表 4.2と表 4.4の安定性マージンと比較すると、 $K_{LSDP}$ を用いた場合のロバスト安定性が最も大きく、良好なロバスト安定性を持つことが分かる。このことから、アダマール重み付き  $H_\infty$ ループ整形法はロバスト安定性を劣化させることが分かる。しかし、ここでは  $K_{100r}$ を用いても安定性マージンは0.1340であり、大幅なロバスト安定性の劣化は見られなかった。

以上のことから、アダマール重み付き  $H_\infty$ ループ整形法を磁気軸受に適用した場合、ロバスト安定性が多少劣化するが近似非干渉化を達成できることが明らかになった。また、そのロバスト安定性と非干渉化の度合をのトレードオフを、 $\alpha$ により調節できることが明らかになった。

## 第 6 章

### 結論

本研究では，回転子の鉛直方向の運動と水平方向の運動に干渉がある横軸形磁気軸受に対し，アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法を適用し，近似非干渉制御を達成する制御系の設計を行なった．

また，本手法の有効性を確認するために 2 つのシミュレーションを行なった．一つ目は，制御目的とした近似非干渉化が達成できていることを確認するため，回転子にステップ状の外乱を与えシミュレーションを行なった．二つ目は，ロバスト性能を検証するため，回転子の回転速度を 10000[rpm] から 20000[rpm] へ変動しシミュレーションを行なった．また，RGA 指数や安定性マージンを比較することで，非干渉化の度合やロバスト安定性について検証を行なった．さらに，従来までの設計手法である  $H_\infty$  ループ整形法との比較を行なった．

これらの結果から，アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法を磁気軸受に適用することで，アダマール重みを大きくとると回転子の水平方向の運動と鉛直方向の運動の干渉が抑えられ，近似非干渉化が達成されることが分かった．しかし，アダマール重みを大きくとると，安定性マージンが小さくなり，ロバスト安定性が劣化するという欠点もある．そのため，制御系の設計を行なう際には，非干渉化の度合とロバスト安定性のトレードオフを考えてアダマール重みを決定する必要がある．

アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法を用いて磁気軸受に対する制御系設計を行なうと，コントローラの次数が極端に大きくなるという問題が生じた．ここで考えたシステムに対して得られたコントローラは 1188 次と非常に高次となった．実際の磁気軸受にこの手法を適用することを考えた場合，コントローラを実装可能な次数にしなければならない．そのため，平衡打ち切りにより，コントローラを実装可能な次数である 36 次まで低次元化した．しかしながら，コントローラの低次元化を行なうことにより，低周波数帯

で RGA 指数がわずかだが高くなっていくことが分かった．そのため，アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法により得られたコントローラには，非干渉化特性を損なわない低次元化の手法が必要となる．また，本研究ではシミュレーションによる検証のみを行っており，実験による検証が必要である．

近年，Papageorgiou ら [2] により，入出力に大きな相互干渉を持つ多変数システムに対し，前置補償器と後置補償器の非対角項をを適当に選ぶことで，システムの相互干渉を抑える研究がなされている．この手法と，アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法との非干渉制御に関する比較を行なうことは，非常に興味深い課題である．

# 謝辞

本研究を行なうに当たり，主テーマ指導教官として御指導していただいた藤田政之 助教授に心から感謝の意を表します．また，御指導，御助言をいただきました本講座の望山洋助手，金沢大学の滑川 徹助手に心から感謝致します．

そして，日頃から熱心に御指導していただきました，博士後期課程の鈴木 亮一氏，平田 研二氏，田中 奈津夫氏，丸山 章氏に心からお礼申し上げます．並びに，同講座の博士前期課程全員に，感謝致します．

## 参考文献

- [1] D. C. McFarlane, K. Glover : A Loop Shaping Design Procedure Using  $H_\infty$  Synthesis, *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 37, no. 6, pp. 759-769, 1992.
- [2] G. Papageorgiou, K. Glover : A Systematic Procedure for Designing Non-Diagonal Weights to Facilitate  $H_\infty$  Loop Shaping, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, California USA, pp. 2127-2132, 1997.
- [3] M. Fujita, K. Hatake, F. Matsumura : Loop Shaping Based Robust Control of a Magnetic Bearing, *IEEE Control Systems*, pp. 57-65, 1993.
- [4] F. van Diggelen, K. Glover : Element-by-element weighted  $\mathcal{H}_\infty$ -Frobenius and  $\mathcal{H}_2$  norm problems, *Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control*, Brighton, England, pp. 923-924, 1991.
- [5] F. van Diggelen, K. Glover : State-space solution to Hadamard weighted  $\mathcal{H}_\infty$  and  $\mathcal{H}_2$  control problems, *Int. J. Control*, vol. 59, no. 2, pp. 349-357, 1992.
- [6] F. van Diggelen, K. Glover : A Hadamard Weighted Loop Shaping Design Procedure for Robust Decoupling, *Automatica*, vol. 30, no. 5, pp. 831-845, 1994.
- [7] F. van Diggelen, K. Glover : A Hadamard Weighted Loop Shaping Design Procedure, *Proc. 31st IEEE Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, pp. 2193-2198, 1992.
- [8] 社団法人 電気学会 編: 磁気浮上と磁気軸受, コロナ社, 1993.
- [9] A. M. Mohamed, and F. P. Emad : Conical Magnetic Bearings with Radial and Thrust Control, *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 37, no. 4, pp. 1859-1868, 1992.

- [10] Skogestad, S. and I. Postlethwaite : Multivariable Feedback Control, JOHN WILEY & SONS, 1996.
- [11] F. Matsumura, H. Kobayashi, and Y. Akiyama : Fundamental equation of horizontal shaft magnetic bearing and its control system design, *Trans. IEE of Japan*, vol. 101-C, no. 6, pp. 137-144, 1981(in Japanese); also *Electrical Engineering in Japan*, vol. 101, no. 3, p. 123-130, 1981(in English).
- [12] 松村 : 吸引制御横軸形磁気軸受の基本方程式, 電気学会全大, pp1004-1005, 1982.
- [13] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover : Robust and Optimal Control, Prntice-Hall, Inc, 1996.
- [14] K. Glover : All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L_\infty$ -error bounds,*Int. J. Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, 1984.
- [15] K. Glover , Dabid J. N. , Y. S. Hung : A Structured Approximation Problem with Applications to Frequency Weighted Model Reduction, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 4, pp. 447-465, 1992.

# 第 A 章

## 磁気軸受のモデルの導出

ここでは、本研究で取り扱う横軸形磁気軸受のモデリングを行なう。まず、回転子の運動方程式を導出し、つぎに、電磁石の定式化を行ない、横軸形磁気軸受の状態方程式、出力方程式を導出する [11][12]。

### A.1 回転子の運動方程式

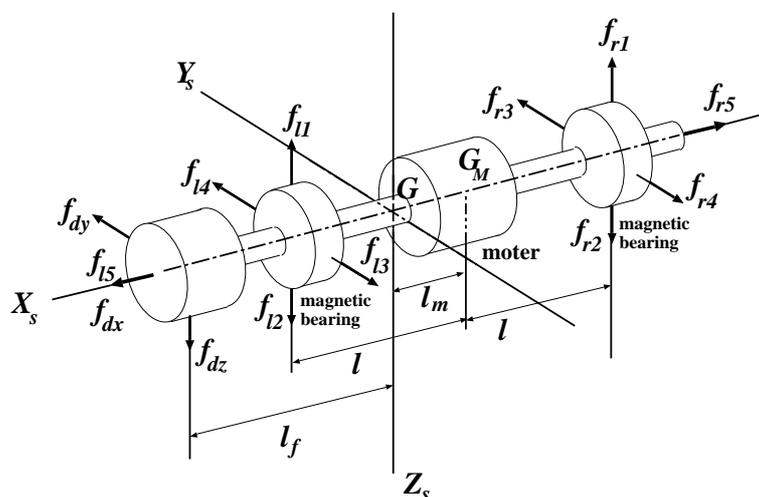


図 A.1: Model of rotor and axis of stator

図 A.1に示すように重心を  $G_M$  とする回転子の両端に磁気軸受を持ち、その片側に、なんらかの負荷質量が取り付けられているような回転子を考える。ここで、負荷質量が取り付けられ回転子の重心は  $G$  に移動しているものとする。

ここで，回転子には，固定子の電磁石から  $f_{r1\sim r5}$  ,  $f_{11\sim 15}$  の吸引力が働く．また，電動機トルク  $T_m$  , クーロン摩擦  $T_0$  , 制動摩擦トルク  $\rho p$  (ここで  $p$  は回転子の回転角速度) が加わるとし，また，負荷に対し， $f_{dx}$  ,  $f_{dy}$  ,  $f_{dz}$  の力が加わるとする．また，図 A.1において， $G$  は負荷の取り付いた回転子の重心であり， $X_s, Y_s, Z_s$  は固定子の座標とする．固定子の座標の原点  $O$  は，平衡状態時の  $G$  であるとする．また， $l_m$  は電動機回転子の重心と  $G$  の距離， $l$  は回転子の重心  $G_M$  から左右の電磁石吸引点までの距離を表すとする．また，ここで，重心  $G$  から左側の電磁石吸引点までの距離  $l_l = l - l_m$  と，重心  $G$  から右側の電磁石吸引点までの距離  $l_r = l + l_m$  を定義しておく．

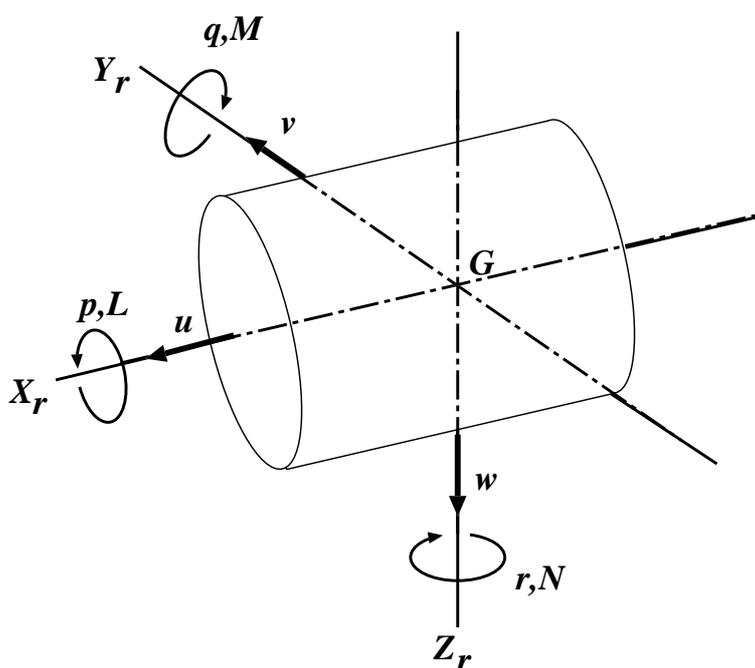


図 A.2: Axis of rotor

ここで，固定子は空間に固定されているものとし，回転子の座標を図 A.2に示す  $X_r, Y_r, Z_r$  に定める．また， $X_r$  軸， $Y_r$  軸， $Z_r$  軸方向の速度成分をそれぞれ  $u, v, w$  とし，各軸回りの回転角速度をそれぞれ  $p, q, r$  とする．回転子にかかる  $X_r$  軸， $Y_r$  軸， $Z_r$  軸方向の外力をそれぞれ  $X, Y, Z$  とし，また，外力が重心回りにつくるモーメントの成分を  $L, M, N$  とする．

ここで，固定子に固定した座標  $X_s, Y_s, Z_s$  と回転子に固定した座標  $X_r, Y_r, Z_r$  には，図 A.3に示す関係がある．回転子の重心  $G$  は，原点  $O$  より， $(x_s, y_s, z_s)$  だけ移動した位置にあり， $X_r$  軸は  $X_s$  軸から，はじめ水平面に  $\psi$  だけ回転し，鉛直面に  $\theta$  だけ回転している

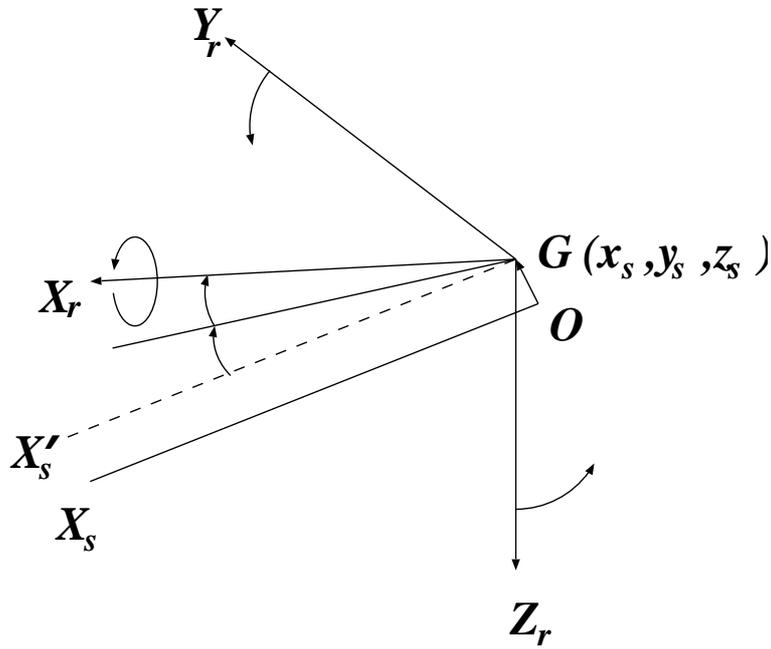


図 A.3: Relation of axis of stator and axis of rotor

とする．また， $X_r$ 軸回りに， $\phi$ の回転を行なうとする．

ただし，ここで，回転子にはつぎの仮定をおく．

- 回転子は剛体である．
- 回転子は回転軸  $X_r$ 軸に対し，回転対称である．

磁気軸受において，ある程度制御が有効に行なわれたとすると， $\psi, \theta$ は微小角であると考えることができ， $u, v, w, p, q, r$ について，以下の式が成り立つ．

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \\ \dot{z}_s \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

ここで，平衡点の近傍では， $u, v, w, q, r$ は微小量であると考えることができ，回転子の運動に対し，以下の6つの式が成り立つ．

$$m\dot{u} = X \quad (\text{A.3})$$

$$m(\dot{v} - pw) = Y \quad (\text{A.4})$$

$$m(\dot{w} - pv) = Z \quad (\text{A.5})$$

$$J_x \dot{p} = L \quad (\text{A.6})$$

$$J_y \dot{q} + (J_x J_y) pr = M \quad (\text{A.7})$$

$$J_y \dot{r} - (J_x - J_y) pq = N \quad (\text{A.8})$$

ここで,  $J_x$  は  $X_r$  軸回りの慣性能率であり,  $J_y$  は  $Y_r$  軸 ( $Z_r$  軸) 回りの慣性能率である. また, (A.3) 式と (A.6) 式より, スラスト方向と回転子の回転角速度については独立に考えることができるので, ここでは省略し, かつ  $x_s = 0$ ,  $u = 0$ ,  $p$  は一定と仮定しておく. このとき, 回転子にはつぎの力とトルクが働く.

$X_s$  軸に働く力

$$f_{l5} - f_{r5} + f_{dx} - \beta x_s$$

$Y_s$  軸に働く力

$$f_{l3} - f_{l4} + f_{r3} - f_{r4} + f_{dy} - \alpha(y_s - l_m \psi)$$

$Z_s$  軸に働く力

$$f_{l2} - f_{l1} + f_{r2} - f_{r2} + f_{dz} + \alpha(z_s + l_m \theta) + mg$$

$X_s$  軸に働くトルク

$$T_m - T_0 - \rho p$$

$Y_s$  軸に働くトルク

$$(f_{l1} - f_{l2})l_l - (f_{r1} - f_{r2})l_r - f_{dz}l_f + \alpha(z_s + l_m \theta)l_m$$

$Z_s$  軸に働くトルク

$$(f_{l3} - f_{l4})l_l - (f_{r3} - f_{r4})l_r + f_{dy}l_f - \alpha(y_s - l_m \psi)l_m$$

ここで  $\alpha$  は電動機回転子が半径方向に偏心したときの不平衡吸引力の係数であり,  $\beta$  は軸方向へ偏心したときの復元力の係数とする. ここで, (A.1) 式と (A.2) 式と同様にし, 以下の関係が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{l5} - f_{r5} + f_{dx} - \beta x_s \\ f_{l3} - f_{l4} + f_{r3} - f_{r4} + f_{dy} - \alpha(y_s - l_m \psi) \\ f_{l2} - f_{l1} + f_{r2} - f_{r1} + f_{dz} + \alpha(z_s + l_m \theta) + mg \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_m - T_0 - \rho p \\ (f_{l1} - f_{l2})l_l - (f_{r1} - f_{r2})l_r - f_{dz}l_f + \alpha(z_s + l_m \theta)l_m \\ (f_{l3} - f_{l4})l_l - (f_{r3} - f_{r4})l_r + f_{dy}l_f - \alpha(y_s - l_m \psi)l_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

これらを用いて，重心の動きと回転軸の揺れに関する以下の式を導くことができる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_s \\ \ddot{z}_s \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{m} \begin{bmatrix} y_s \\ z_s \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_{l3} - f_{l4} + f_{r3} - f_{r4} \\ f_{l2} - f_{l1} + f_{r2} - f_{r1} + mg \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_{dy} \\ f_{dz} \end{bmatrix} + \frac{\alpha l_m}{m} \begin{bmatrix} -\psi \\ \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{pJ_x}{J_y} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \frac{1}{J_y} \begin{bmatrix} (f_{l1} - f_{l2})l_l - (f_{r1} - f_{r2})l_r \\ (f_{l3} - f_{l4})l_l - (f_{r3} - f_{r4})l_r \end{bmatrix} + \frac{l_f}{J_y} \begin{bmatrix} -f_{dz} \\ f_{dy} \end{bmatrix} + \frac{\alpha l_m}{J_y} \begin{bmatrix} z_s \\ -y_s \end{bmatrix} + \frac{\alpha l_m^2}{J_y} \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

また，(A.11) 式と (A.12) 式は，次式のようにまとめることができる．

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \mathbf{f} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{f}_d \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

ここで,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} y_s \\ z_s \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{l1} - f_{l2} - \frac{l_r}{l_r+l_l}mg \\ f_{r1} - f_{r2} - \frac{l_r}{l_r+l_l}mg \\ f_{l3} - f_{l4} \\ f_{r3} - f_{r4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} f_{dy} \\ f_{dz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g'_{l1} \\ g'_{r1} \\ g'_{l3} \\ g'_{r3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \alpha/m & 0 & 0 & -\alpha l_m/m \\ 0 & \alpha/m & \alpha l_m/m & 0 \\ 0 & \alpha l_m/J_y & \alpha l_m^2/J_y & 0 \\ -\alpha l_m/J_y & 0 & 0 & \alpha l_m^2/J_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -pJ_x/J_y \\ 0 & 0 & pJ_x/J_y & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/m & 1/m \\ -1/m & -1/m & 0 & 0 \\ l_l/J_y & -l_r/J_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_l/J_y & -l_r/J_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \\ 0 & -l_f/J_y \\ l_f/J_y & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -l_l & 0 \\ 0 & 1 & l_r & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -l_l \\ -1 & 0 & 0 & l_r \end{bmatrix}$$

## A.2 電磁石の定式化

電磁石コイルの電圧を制御入力とするため,ここでは以下に示す仮定をおき,電磁石を定式化する.

- 電磁石の吸引力は(コイル電流/ギャップの長さ)<sup>2</sup>に比例する.
- 8個の電磁石はすべて等しい.
- 電圧,電流の関係式では速度起電力は小さいとし,無視する.
- 平衡点近傍における微小変化を取り扱う.

また,電流,ギャップ長,吸引力の定常分を  $I_j, W, F_j$  とする.このとき,

$$i_j = I_j + i'_j, \quad g_j = W + g'_j, \quad f_j = F_j + f'_j \quad (\text{A.15})$$

ここで,  $j = l_1, l_2, l_3, l_4, r_1, r_2, r_3, r_4$  とする.

また, 仮定よりインダクタンスを一定  $L$  とし, 抵抗を  $R$  とすると, 次式のコイル電圧とコイル電流の関係を得る.

$$e_j = L \left( \frac{di_j}{dt} \right) + Ri_j \quad (\text{A.16})$$

また, コイル電圧の変化分とコイル電流の変化分をつぎのような与え方をするとする.

$$e'_{l_2} = -e'_{l_1}, e'_{l_4} = -e'_{l_3}, e'_{r_2} = -e'_{r_1}, e'_{r_4} = -e'_{r_3} \quad (\text{A.17})$$

$$i'_{l_2} = -i'_{l_1}, i'_{l_4} = -i'_{l_3}, i'_{r_2} = -i'_{r_1}, i'_{r_4} = -i'_{r_3} \quad (\text{A.18})$$

(A.16) 式を行列形式で書くと,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i} = -\frac{R}{L} I \mathbf{i} + \frac{1}{L} I \mathbf{e} \quad (\text{A.19})$$

ただしここで,

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i'_{l_1} & i'_{r_1} & i'_{l_3} & i'_{r_3} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e'_{l_1} & e'_{r_1} & e'_{l_3} & e'_{r_3} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.21})$$

また, 仮定より, 電流, ギャップ長, 吸引力の間には, つぎの関係があるとする.

$$f_j = k \left( \frac{i_j}{g_j} \right)^2 \quad (\text{A.22})$$

この式を平衡点近傍での微小変化を考え, 線形化すると, 次式となる.

$$f'_j = 2F_j \left( \frac{i'_j}{I_j} - \frac{g'_j}{W} \right) \quad (\text{A.23})$$

これらより, 電磁石の吸引力について, 次式を得る.

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_3 \mathbf{i} \quad (\text{A.24})$$

ここで,

$$\mathbf{C}_2 = -\frac{2}{W} \text{diag} \left[ F_{l_1} + F_{l_2} \quad F_{r_1} + F_{r_2} \quad F_{l_3} + F_{l_4} \quad F_{r_3} + F_{r_4} \right],$$

$$\mathbf{C}_3 = 2 \text{diag} \left[ \left( \frac{F_{l_1}}{I_{l_1}} + \frac{F_{l_2}}{I_{l_2}} \right) \quad \left( \frac{F_{r_1}}{I_{r_1}} + \frac{F_{r_2}}{I_{r_2}} \right) \quad \left( \frac{F_{l_3}}{I_{l_3}} + \frac{F_{l_4}}{I_{l_4}} \right) \quad \left( \frac{F_{r_3}}{I_{r_3}} + \frac{F_{r_4}}{I_{r_4}} \right) \right]$$

### A.3 状態方程式と出力方程式

(A.13) 式, (A.14) 式, (A.24) 式をまとめると, つぎの状態方程式と出力方程式を得る.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ z \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_3 \\ 0 & 0 & -(R/L)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ z \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L}I \end{bmatrix} \mathbf{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{f}_d \quad (\text{A.25})$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ z \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

ここで, 新しい状態変数として, ギャップ  $g$  を用い,  $\mathbf{x} = [g^T \ \dot{g}^T \ \mathbf{i}^T]^T$  ととる. これより, つぎの状態方程式, 出力方程式を得る.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1) \mathbf{C}_1^{-1} & \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_1^{-1} & \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1^{-1} \\ 0 & 0 & -(R/L)I \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L}I \end{bmatrix} \mathbf{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{f}_d \quad (\text{A.27})$$

$$y = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{A.28})$$

本研究では, この状態方程式と出力方程式の状態変数の並び変えを行ない, 磁気軸受のモデルとして用いる.

## 第 B 章

### $H_\infty$ ループ整形法による制御系設計

この章では、磁気軸受に対する  $H_\infty$ ループ整形法による制御系の設計に用いた前置き補償器などを紹介する。ここでは、回転子が回転運動を行っていない場合には、水平方向の運動と鉛直方向の運動には干渉がないことを利用して、 $p = 0$  の場合をノミナルプラントとし、鉛直方向、水平方向に対し、それぞれ制御系の設計を行なった。その際に用いた前置補償器、後置補償器などを以下に示す。

鉛直方向

$$C_{prev}(s) = \frac{1800\{1 + s/(2\pi \cdot 12)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 30)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 50)\}}{\{1 + s/(2\pi \cdot 0.01)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 700)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 1200)\}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$C_{postv}(s) = 10000 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\varepsilon_{\max v} = 0.1483 \quad (\text{B.3})$$

$$\gamma_v = 7.0796 \quad (\text{B.4})$$

水平方向

$$C_{preh}(s) = \frac{1200\{1 + s/(2\pi \cdot 10)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 17)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 40)\}}{\{1 + s/(2\pi \cdot 0.01)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 700)\}\{1 + s/(2\pi \cdot 1200)\}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$C_{posth}(s) = 10000 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\varepsilon_{\max h} = 0.2374 \quad (\text{B.7})$$

$$\gamma_h = 4.4222 \quad (\text{B.8})$$

このようにして得られた水平方向に対するコントローラを  $K_v$  とし、鉛直方向に対するコントローラを  $K_h$  とする。最終的なコントローラは  $K_{LSDP} = \begin{bmatrix} K_v & 0 \\ 0 & K_h \end{bmatrix}$  とする。この  $K_{LSDP}$  を用いた場合の安定性マージンを  $\varepsilon_{LSDP}$  とする。

$$\varepsilon_{LSDP} = \left\| \begin{bmatrix} K_{LSDP} \\ I \end{bmatrix} (I - P_s K_{LSDP})^{-1} \begin{bmatrix} I & P_s \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (\text{B.9})$$

(B.9) 式より計算すると、 $\varepsilon_{LSDP} = 0.1414$  となった。また、このコントローラ  $K_{LSDP}$  の極と零点を表 B.1 に示す。

表 B.1: Transmission poles and zeros of  $K_{LSDP}$

Poles	Zeros
$-7.5398 \times 10^3$	$-7.5398 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-7.5398 \times 10^3$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-4.3983 \times 10^3$
$-7.5398 \times 10^3$	$-4.3983 \times 10^3$
$-4.3982 \times 10^3$	$-7.5398 \times 10^3$
$-6.2831 \times 10^{-2}$	$-7.5398 \times 10^3$
$-8.3003 \times 10^3$	$-4.3982 \times 10^3$
$-8.2847 \times 10^3$	$-4.3982 \times 10^3$
$-4.6937 \times 10^3 + j1.9466 \times 10^3$	$-1.5264 \times 10^2$
$-4.6937 \times 10^3 - j1.9466 \times 10^3$	$-1.5189 \times 10^2$
$-4.6633 \times 10^3 + j1.9499 \times 10^3$	$-2.5133 \times 10^2$
$-4.6633 \times 10^3 - j1.9499 \times 10^3$	$-2.5133 \times 10^2$
$-2.9993 \times 10^2$	$-1.0681 \times 10^2$
$-2.9938 \times 10^2$	$-1.0681 \times 10^2$
$-1.9522 \times 10^2$	$-1.9754 \times 10^1$
$-1.9500 \times 10^2$	$-1.9775 \times 10^1$
$-7.3496 \times 10^1$	$-2.4306 \times 10^2$
$-7.3490 \times 10^1$	$-2.4426 \times 10^2$
$-7.5398 \times 10^3$	$-6.2832 \times 10^1$
$-4.3982 \times 10^3$	$-6.2832 \times 10^1$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-3.2516 \times 10^1$
$-7.5398 \times 10^3$	$-3.2530 \times 10^1$
$-4.3982 \times 10^3$	$-1.2507 \times 10^1$
$-6.2832 \times 10^{-2}$	$-1.2501 \times 10^1$
$-7.8663 \times 10^3$	$-3.1416 \times 10^2$
$-7.8560 \times 10^3$	$-3.1416 \times 10^2$
$-4.0444 \times 10^3 + j1.4671 \times 10^3$	$-3.4585 \times 10^1$
$-4.0444 \times 10^3 - j1.4671 \times 10^3$	$-3.4590 \times 10^1$
$-4.0029 \times 10^3 + j1.4464 \times 10^3$	$-1.8850 \times 10^2$
$-4.0029 \times 10^3 - j1.4464 \times 10^3$	$-1.8850 \times 10^2$
$-2.2876 \times 10^2$	$-7.5398 \times 10^1$
$-2.2829 \times 10^2$	$-7.5398 \times 10^1$
$-1.0960 \times 10^2$	
$-1.0954 \times 10^2$	
$-6.1691 \times 10^1$	
$-6.1685 \times 10^1$	

## 第 C 章

# 制御器の低次元化

ここでは、制御器の低次元化を行なうために、本研究で用いた手法を紹介する。

### C.1 平衡実現とハンケル特異値

漸近安定な伝達関数  $G(s)$  の最小実現を  $(A, B, C, D)$  とし、可制御グラミアン  $P$  と可観測グラミアン  $Q$  を次式で定義する。

$$P = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (C.1)$$

$$Q = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (C.2)$$

ここで、 $A \in R^{n \times n}$  とし、 $P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \Sigma$  であるとき、 $(A, B, C, D)$  を伝達関数  $G(s)$  の平衡実現という。ただし、ここで  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$  とする。

また、ここで  $\sigma_i$  は状態変数の  $x_i$  がシステムの入出力に関係している強さを表し、ハンケル特異値と呼ばれる。また、このハンケル特異値が大きい状態変数ほどシステムの入出力に与える影響が大きくなる。

このハンケル特異値の性質をもちいて、低次元化を行なう。

### C.2 平衡打ち切りによる低次元化

$(A, B, C, D)$  をシステム  $G(s)$  の平衡実現とし、可制御グラミアンを  $P$ 、可観測グラミアンを  $Q$  とする。また、 $P = Q = \Sigma$  とする。

ここで、これらを以下のように分割する。

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \ C_2] \quad (\text{C.3})$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

ただし,ここで $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ ,  $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_n)$ であり,  $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$  ( $i = 1 \sim n-1$ ) とする.

このとき,  $(A_{11}, B_1, C_1, D)$  を低次元化されたモデルとし, それ以外の状態変数を打ち切る手法が平衡打ち切りによる低次元化として知られている.

また, 低次元化されたモデルを $\tilde{G}(s)$ としたとき,  $\|G(s) - \tilde{G}(s)\|_\infty$  には, (C.5) 式に示す上限がある. そのため, ハンケル特異値は状態変数を打ち切る目安として用いることができる.

$$\|G(s) - \tilde{G}(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{k+1} + \sigma_{k+2} + \dots + \sigma_n) \quad (\text{C.5})$$

本研究では, アダマール重み付き  $H_\infty$  ループ整形法によりえられたコントローラに対し, この平衡打ち切りにより低次元化を行なった.