

Title	グラフ同型性判定問題に対する幅パラメータ固定アルゴリズムの研究
Author(s)	大館, 陽太
Citation	科学研究費助成事業研究成果報告書: 1-5
Issue Date	2016-06-03
Type	Research Paper
Text version	publisher
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/13677">http://hdl.handle.net/10119/13677</a>
Rights	
Description	若手研究(B), 研究期間: 2013~2015, 課題番号: 25730003, 研究者番号: 80610196, 研究分野: グラフアルゴリズム

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 3 日現在

機関番号：13302

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25730003

研究課題名(和文) グラフ同型性判定問題に対する幅パラメータ固定アルゴリズムの研究

研究課題名(英文) Fixed width parameter algorithms for the graph isomorphism problem

## 研究代表者

大館 陽太 (Otachi, Yota)

北陸先端科学技術大学院大学・情報科学研究科・助教

研究者番号：80610196

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：連結木距離幅が定数のグラフに対する同型性判定問題の固定パラメータ容易性を示した。該当論文では、問題そのものを直接解くのではなく、ある種のメタアルゴリズムを作るという方針をとった。グラフ同型性判定の古典的アルゴリズムとして、Weisfeiler-Lehmanアルゴリズムという手法がある。この論文では、このWeisfeiler-Lehmanを一般化・高速化し、ある種のグラフ幅パラメータが定数の場合に対する固定パラメータ容易性を示した。関連して、入力グラフがある種の禁止構造を持つ場合を研究した。あるグラフを誘導マイナーとして含まないクラスに対する同型性判定問題に対して計算量二分法を与えた。

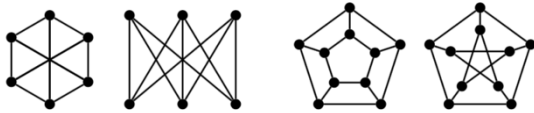
研究成果の概要(英文)：We showed that the graph isomorphism problem is fixed-parameter tractable when parameterized by root-connected tree distance width. To show the result, we modified the classic Weisfeiler-Lehman algorithm so that it works not only for all vertex subsets of size  $k$  but also for restricted family of vertex subsets of size  $k$ . Furthermore, the modified algorithm runs in FPT time with the parameter  $k$ . Then we showed that we can apply the algorithm to the graph isomorphism problem parameterized by several graph width parameters including root-connected tree distance width. We also studied the graph isomorphism problem for graph classes forbidding a single graph as an induced minor. We showed a complexity dichotomy with respect to the forbidden induced minor.

研究分野：グラフアルゴリズム

キーワード：グラフアルゴリズム グラフ同型性判定問題 グラフ幅パラメータ

1. 研究開始当初の背景

本研究では、与えられた二つのグラフが“同じ”であるか否かを判定するグラフ同型性判定問題を扱う。より正確には以下のとおり定式化される: グラフ  $G$  は頂点集合  $V(G)$  と、頂点の非順序対の集合である辺集合  $E(G)$  によって表現される。二つのグラフ  $G$  と  $H$  が同型であるとは、 $V(G)$  から  $V(H)$  への辺関係を保存する全単射が存在することである。例えば下図は、同型なグラフの対 (左側) と非同型なグラフの対 (右側) の例である。



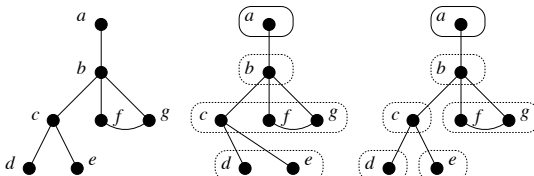
二つの構造が同じかどうか判定するというのは基本的な問題であるが、グラフ同型性判定問題の計算複雑性は、1970年代初頭からの多くの研究者たちの試みにもかかわらず未だ不明である。この問題は「P vs. NP」問題とも深く関係し、完全に解明することは非常に困難であると考えられる。一方、特殊な場合に対して多項式時間アルゴリズムを開発するという試みが広く行われている。例えば、木幅と呼ばれるグラフの複雑度を表すパラメータがある定数  $k$  で抑えられるグラフに対しては、グラフ同型性判定問題が  $O(n^{k+4})$  時間で解けることが 1990 年代初頭には既に知られていた。(ここで、 $n$  はグラフの頂点数。) 一方、この問題が固定パラメータ容易であるか、つまり、ある関数  $f$  と定数  $c$  があって、 $O(f(k) \cdot n^c)$  時間で解けるかというのは重要な未解決問題であった。

2. 研究の目的

本研究ではグラフ同型性判定問題に対する幅パラメータ固定アルゴリズムの開発を行うことを目的とした。未解決である特殊ケースで最も重要なものの一つである、木幅および関連グラフパラメータが制限された場合に対する固定パラメータ容易アルゴリズムの研究を行う。特に具体的な目標として、「木距離幅が固定されたグラフクラスに対する固定パラメータ容易同型性判定アルゴリズムの設計」を目指す。これは木幅に関する未解決問題を部分的に解決するものである。

3. 研究の方法

グラフから頂点をいくつか選び、残りの頂点を選ばれた頂点からの距離によってレベル分けする事を考える。このとき出来る構造を道距離構造と呼ぶ (下図参照)。全レベルのサイズの最大値をこの道距離構造の幅と呼ぶ。



うまく頂点集合を選ぶことで最小化された幅を、そのグラフの道距離幅と呼ぶ。距離構造を作る際に、木状の枝分かれを許すのが木距離構造である。あるレベルがそこから下を見た時に非連結になる場合に枝分かれを許す (上図参照)。定義より木距離幅は道距離幅以下である。木距離幅および道距離幅は、Yamazaki 等によってグラフ同型性判定問題の研究のために導入された。

本研究では、木距離幅に制限を加えた連結木距離幅および更に制限した連結道距離幅を扱う。これらのパラメータは、選ぶ頂点集合を連結グラフを誘導するものに制限したもので、研究代表者によって同型性判定問題の研究のために導入された。

4. 研究成果

主結果として、連結木距離幅が定数のグラフに対する同型性判定問題の固定パラメータ容易性を示した。該当論文 (次項の学会発表 10 番) では、問題そのものを直接解くのではなく、ある種のメタアルゴリズムを作るという方針をとった。グラフ同型性判定の古典的アルゴリズムとして、Weisfeiler-Lehman アルゴリズムという手法がある。この論文では、この Weisfeiler-Lehman を一般化・高速化し、ある種のグラフ幅パラメータが定数の場合に対する固定パラメータ容易性を示した。

関連結果として、入力グラフがある種の禁止構造を持つ場合に対しても研究した。学会発表 5 番では、あるグラフ  $H$  を誘導マイナーとして含まないグラフクラスに対する同型性判定問題を研究し、計算量二分法を与えた。この問題は 1980 年代に Ponomarenko によって研究されていたが、与えられていた結果は部分的なもので、さらに証明には本質的な誤りが含まれていた。我々は、その誤りを指摘・修正し、さらに完全な計算量二分法にするべく結果を拡張した。

雑誌論文 1 では、グラフ同型性判定問題の一般化である部分グラフ同型性判定問題を研究した。結果として、幾何的な交差表現を持つグラフクラスに対して、既知の多項式時間可解の場合を拡張子、さらに、既知の場合よりさらに制限した NP 困難性を示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

1. Matsuo Konagaya, Yota Otachi, Ryuhei Uehara. Polynomial-time algorithms for Subgraph Isomorphism in small graph classes of perfect graphs. Discrete Applied Mathematics (査読有) 199 (2016) 37-45.

2. Masashi Kiyomi, Yoshio Okamoto, Yota Otachi. On the treewidth of toroidal grids. *Discrete Applied Mathematics* (査読有) 198 (2016) 303-306.
  3. Takehiro Ito, Shin-ichi Nakano, Yoshio Okamoto, Yota Otachi, Ryuhei Uehara, Takeaki Uno, Yushi Uno. A polynomial-time approximation scheme for the geometric unique coverage problem on unit squares. *Computational Geometry: Theory and Applications* (査読有) 51 (2016) 25-39.
  4. Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Eli Fox-Epstein, Duc A. Hoang, Takehiro Ito, Hirotaka Ono, Yota Otachi, Ryuhei Uehara, Takeshi Yamada. Linear-time algorithm for sliding tokens on trees. *Theoretical Computer Science* (査読有) 600 (2015) 132-142.
  5. Masayoshi Matsushita, Yota Otachi, Toru Araki. Completely independent spanning trees in (partial) k-trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* (査読有) 35 (2015) 427-437.
  6. Pavel Klavík, Jan Kratochvíl, Yota Otachi, Toshiki Saitoh. Extending partial representations of subclasses of chordal graphs. *Theoretical Computer Science* (査読有) 576 (2015) 85-101.
  7. Kazuyuki Amano, Kyaw May Oo, Yota Otachi, Ryuhei Uehara. Secure sets and defensive alliances in graphs: A faster algorithm and improved bounds. *IEICE Transactions* (査読有) E98-D (2015) 486-489.
  8. Jinhee Chun, Takashi Horiyama, Takehiro Ito, Natsuda Kaothanthong, Hirotaka Ono, Yota Otachi, Takeshi Tokuyama, Ryuhei Uehara, Takeaki Uno. Base-object location problems for base-monotone regions. *Theoretical Computer Science* (査読有) 555 (2014) 71-84.
  9. Meng Li, Yota Otachi, Takeshi Tokuyama. Efficient algorithms for network localization using cores of underlying graphs. *Theoretical Computer Science* (査読有) 553 (2014) 18-26.
  10. Takehiro Ito, Shin-ichi Nakano, Yoshio Okamoto, Yota Otachi, Ryuhei Uehara, Takeaki Uno, Yushi Uno. A 4.31-approximation for the geometric unique coverage problem on unit disks. *Theoretical Computer Science* 544 (査読有) (2014) 14-31.
  11. Yota Otachi, Toshiki Saitoh, Katsuhisa Yamanaka, Shuji Kijima, Yoshio Okamoto, Hirotaka Ono, Yushi Uno, Koichi Yamazaki. Approximating the path-distance-width for AT-free graphs and graphs in related classes. *Discrete Applied Mathematics* (査読有) 168 (2014) 69-77.
  12. Kyohei Kozawa, Yota Otachi, Koichi Yamazaki. Lower bounds for treewidth of product graphs. *Discrete Applied Mathematics* (査読有) 162 (2014) 251-258.
- [学会発表] (計 19 件)
1. Eli Fox-Epstein, Duc A. Hoang, Yota Otachi, Ryuhei Uehara. Sliding token on bipartite permutation graphs. 26th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2015). December 9-11, 2015, 名古屋マリオットアソシアホテル (愛知県名古屋市). *Lecture Notes in Computer Science* 9472 (2015) 237-247.
  2. Erik D. Demaine, Matias Korman, Jason S. Ku, Joseph S.B. Mitchell, Yota Otachi, André van Renssen, Marcel Roeloffzen, Ryuhei Uehara, Yushi Uno. Symmetric assembly puzzles are hard, beyond a few pieces. 18th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCG<sup>2</sup> 2015). September 14-16, 2015, 京都大学 (京都府京都市). *Lecture Notes in Computer Science*, to appear.
  3. Takehiro Ito, Yota Otachi, Toshiki Saitoh, Hisayuki Satoh, Akira Suzuki, Kei Uchizawa, Ryuhei Uehara, Katsuhisa Yamanaka, Xiao Zhou. Competitive diffusion on weighted graphs. 14th International Symposium on Algorithms and Data Structures (WADS 2015). August 5-7, 2015 in Victoria, BC, Canada. *Lecture Notes in Computer Science* 9214 (2015) 422-433.
  4. Katsuhisa Yamanaka, Takashi Horiyama, David Kirkpatrick, Yota Otachi, Toshiki Saitoh, Ryuhei Uehara, Yushi Uno. Swapping colored tokens on graphs. 14th International Symposium on Algorithms and Data Structures (WADS 2015). August 5-7, 2015 in Victoria, BC, Canada. *Lecture Notes in Computer Science* 9214 (2015) 619-628.
  5. Rémy Belmonte, Yota Otachi, Pascal Schweitzer. Induced minor free graphs: Isomorphism and clique-width. 41st International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2015). June 17-19, 2015

- in Munich, Germany. Lecture Notes in Computer Science, to appear.
6. Takehiro Ito, Hirotaka Ono, Yota Otachi. Reconfiguration of cliques in a graph. 12th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation (TAMC 2015). May 18-20, 2015 in Singapore. Lecture Notes in Computer Science 9076 (2015) 212-223.
  7. Akitoshi Kawamura, Sonoko Moriyama, Yota Otachi, János Pach. A lower bound on opaque sets. 31st European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2015). March 15-18, 2015 in Ljubljana, Slovenia.
  8. Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Eli Fox-Epstein, Duc A. Hoang, Takehiro Ito, Hirotaka Ono, Yota Otachi, Ryuhei Uehara, Takeshi Yamada. Polynomial-time algorithm for sliding tokens on trees. 25th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2014). December 15-17, 2014 in Jeonju, Korea. Lecture Notes in Computer Science 8889 (2014) 389-400.
  9. Tetsuo Asano, Taisuke Izumi, Masashi Kiyomi, Matsuo Konagaya, Hirotaka Ono, Yota Otachi, Pascal Schweitzer, Jun Tarui, Ryuhei Uehara. Depth-first search using  $O(n)$  bits. 25th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2014). December 15-17, 2014 in Jeonju, Korea. Lecture Notes in Computer Science 8889 (2014) 553-564.
  10. Yota Otachi, Pascal Schweitzer. Reduction techniques for graph isomorphism in the context of width parameters. 14th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT 2014). July 2-4, 2014 in Copenhagen, Denmark. Lecture Notes in Computer Science 8503 (2014) 368-379.
  11. Pavel Klavík, Jan Kratochvíl, Yota Otachi, Ignaz Rutter, Toshiki Saitoh, Maria Saumell, Tomáš Vyskocil. Extending partial representations of proper and unit interval graphs. 14th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT 2014). July 2-4, 2014 in Copenhagen, Denmark. Lecture Notes in Computer Science 8503 (2014) 253-264.
  12. Yota Otachi. Graph isomorphism problem on the H-subgraph-free graphs (Invited talk). The Japanese-Swiss Workshop on Combinatorics and Computational Geometry. June 4-6, 2014, 東京大学 (東京都文京区).
  13. Steven Chaplick, Pavol Hell, Yota Otachi, Toshiki Saitoh, Ryuhei Uehara. Intersection dimension of bipartite graphs. 11th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation (TAMC 2014). April 11-13, 2014, in Chennai, India. Lecture Notes in Computer Science 8402 (2014) 323-340.
  14. Matsuo Konagaya, Yota Otachi, Ryuhei Uehara. Polynomial-time algorithms for subgraph isomorphism in small graph classes of perfect graphs. 11th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation (TAMC 2014). April 11-13, 2014, in Chennai, India. Lecture Notes in Computer Science 8402 (2014) 216-228.
  15. Yota Otachi, Pascal Schweitzer. Isomorphism on subgraph-closed graph classes: a complexity dichotomy and intermediate graph classes. 24th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2013). December 16-18, 2013 in Hong Kong, China. Lecture Notes in Computer Science 8283 (2013) 111-118.
  16. Martin Balko, Pavel Klavík, Yota Otachi. Bounded representations of interval and proper interval graphs. 24th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2013). December 16-18, 2013 in Hong Kong, China. Lecture Notes in Computer Science 8283 (2013) 535-546.
  17. Akitoshi Kawamura, Sonoko Moriyama, Yota Otachi. On shortest barriers. 16th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCG2 2013). September 17-19, 2013, 東京理科大学 (東京都新宿区).
  18. Masashi Kiyomi, Yoshio Okamoto, Yota Otachi. On the treewidth of toroidal grids. 16th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCG2 2013). September 17-19, 2013, 東京理科大学 (東京都新宿区).
  19. Yota Otachi. On low congestion spanning trees (Invited talk). 8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications. June 4-7, 2013 in Veszprém, Hungary.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]  
ホームページ等  
<http://www.jaist.ac.jp/~otachi/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

大舘 陽太 (OTACHI YOTA)  
北陸先端科学技術大学院大学・情報科学研究科・助教  
研究者番号：80610196

### (2) 研究分担者

研究者番号：

### (3) 連携研究者

研究者番号：