

Title	シルエットパズルの凸配置の個数の研究
Author(s)	岩井, 仁志
Citation	
Issue Date	2016-12
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/13839
Rights	
Description	Supervisor: 上原 隆平, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

シルエットパズルの凸配置の個数の研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

岩井仁志

2016年12月

修士論文

シルエットパズルの凸配置の個数の研究

指導教官 上原 隆平

審査委員主査 上原 隆平
審査委員 平石 邦彦
審査委員 池田 心

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

1410010 岩井仁志

提出年月: 2016 年 11 月

概要

シルエットパズルとは、与えられた複数の多角形を平面上で重なりなく合わせて、目的の多角形を作るパズルである。伝統的なパズル「タングラム」で作ることのできる凸多角形が13種類であることが1940年代にWangとHsiungによって示された。また、日本古来のパズル「清少納言知恵の板」で作れる凸多角形は16種類であることが近年Fox-Epsteinらによって示されている。これらのパズルは、全てのピースを16個の合同な直角二等辺三角形に分割できるという共通の性質をもつ。よく似た2つのパズルの間に形成できる図形の種類の差があり、表現力の差とも言い換えることができる。シルエットパズルの表現力を調査するにあたって、本研究では形成できる凸多角形の数に着目した。

シルエットパズルによって形成可能な凸多角形の数についての既存研究は複数存在する。タングラムと清少納言知恵の板に共通する、ピースの形に関する性質をもつシルエットパズル群について、各ピース数ごとに形成可能な凸多角形の最大数が解析されている。ピース数が6以上の場合については厳密な値が知られているが、ピース数が5以下の場合についてわかっているのは、下界のみである。本研究での目的の一つはピース数が5以下の場合に形成可能な凸多角形の最大数を確定することである。また、堀山らの先行研究では、黄金比を用いた別のシルエットパズルによって形成可能な多角形を、全探索するアルゴリズムを用いることで解析している。本研究ではこのアルゴリズムを用いることで、残りの2ピースから5ピースまでの場合を明らかにした。

タングラムや清少納言知恵の板との共通の性質を持つシルエットパズルの一つに、ラッキーパズルというパズルがある。21個の凸配置が知られているが、それだけであるという証明はされていない。本研究の第二の目的はラッキーパズルの凸配置の個数の確定である。堀山らの先行研究では、開発したアルゴリズムを使ってラッキーパズルの探索を行ったが、プログラムを2週間実行しても探索が終わらなかったと報告されている。本研究では堀山らのアルゴリズムの一部をラッキーパズル向きに変更・高速化し、ラッキーパズルの探索を試みた。まずタングラムと清少納言知恵の板を探索し、探索プログラムの実行時のピースの接着順序を変えて探索時間を計測し、速くなる法則を探した。その法則をもとにラッキーパズルも探索したが、これは2週間経っても終わらなかったため、理論的な証明によるアプローチを行った。

ラッキーパズルによって形成可能な凸多角形の数が高々47個であることがいえる。そのうち14個はラッキーパズルのピースの形状から形成不可能であることが容易に示せる。残った12個については場合分けによって形成不可能を証明した。

本研究では、タングラムと清少納言知恵の板を拡張したシルエットパズル群について、ピース数が2から5の場合の凸配置の最大数を確定し、ラッキーパズルによって形成可能な凸多角形の数も21個であることも確定した。

目次

第1章	はじめに	1
1.1	シルエットパズル	1
1.2	拡張タングラム	3
1.3	研究の目的	3
1.4	本論文の構成	5
第2章	既存研究	6
2.1	7ピースのシルエットパズルの凸配置に関する研究	6
2.1.1	タングラムの凸配置の研究	6
2.1.2	清少納言知恵の板の凸配置	7
2.2	各ピースが凸ポリアボロであるシルエットパズルの凸配置	7
2.3	七金三パズルの凸配置	11
2.3.1	七金三パズルとその性質	11
2.3.2	堀山らのアルゴリズム	11
2.3.3	堀山らのアルゴリズムの適用結果	13
第3章	計算機を用いた探索	15
3.1	探索の高速化	15
3.2	実験	15
3.2.1	実験：ピースの接着順序と探索時間の関係性	17
3.2.2	実験：拡張タングラムの2から5ピースの場合に作れる凸多角形の最大数の探索	19
第4章	ラッキーパズルの凸配置の総数	22
4.1	40タイルの凸多角形47種類	22
4.2	敷き詰め可能な凸多角形21種類	22
4.3	敷き詰め不可能な凸多角形26種類	24
4.3.1	P_1 が入らない場合: $S_1, S_2, S_3, S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}, S_{25}, S_{26}$	24
4.3.2	P_2 が入らない場合: S_4, S_5, S_6, S_7, S_8	26
4.3.3	その他の場合	26
第5章	おわりに	56

第1章 はじめに

1.1 シルエットパズル

シルエットパズルとは、多角形のピースが複数個与えられ、それら全てを平面上で重ならないように配置して多角形を形成し、与えられた目標の多角形と一致させることが目的のパズルである。ピースを配置するときは、回転と反転は許されている。

図 1.1 に示したピース群を用いるものはタングラムと呼ばれ、現在では世界で最も有名なシルエットパズルと言える。2004 年に出版された文献 [4] によると、タングラムに関する記述が見られる本の中で最も古いのは、1813 年に中国で出版された本である。タングラムをはじめとした有名なシルエットパズルの問題として与えられる図形には、人物、動物、文字などを模したものが数多く存在し、さまざまな形を表現できることがわかる。

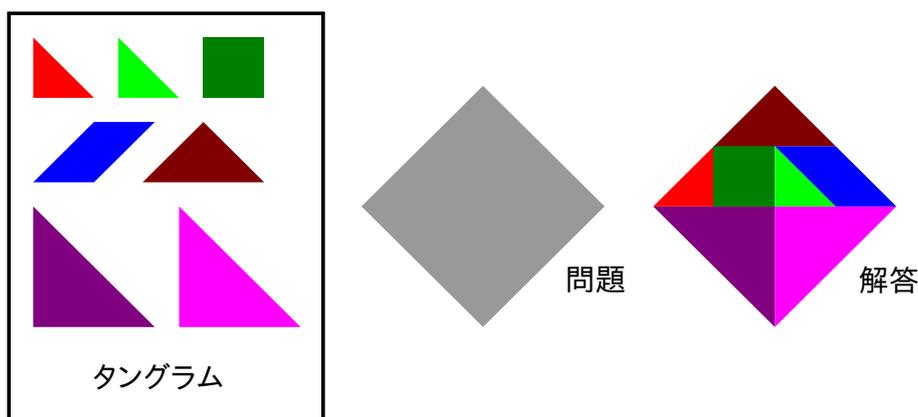


図 1.1: タングラムの問題と解答例

また、日本には「清少納言知恵の板」という、タングラムによく似たパズルが江戸時代から存在する。文献 [4] によると、このパズルについての記述で最も古いものは、1742 年に日本で出版された、パズルに関する本である。清少納言知恵の板の問題の一つに「釘貫」という配置があり (図 1.3), この形をタングラムで実現するのは不可能である。(面積が最大の 2 つの三角形のピース配置は一意に決まる。次に正方形のピース, 最小の 2 つの三角形のピース, と順に配置が決まり, 残ったスペースを残ったピースで埋めるのは不可能だとわかる。)

以上のことから、タングラムと清少納言知恵の板というよく似た 2 つのシルエットパズルの間に形成できる図形の種類の差があり、これは表現力の差とも言い換えることがで

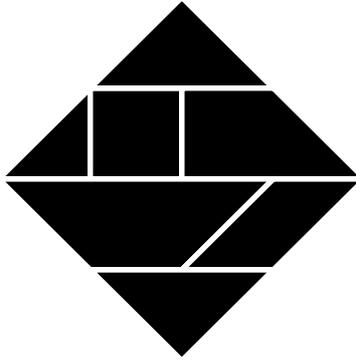


図 1.2: 清少納言知恵の板の正方形配置

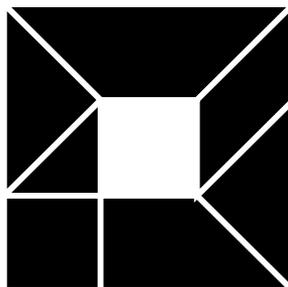


図 1.3: 清少納言知恵の板の「釘貫」配置

きる。

シルエットパズルの表現力を計る指標として、形成可能な図形の数に着目したい。しかし、ピースの細かなずれなどを含む、全ての形成可能な図形を対象にしては、その数は無限大となり、指標としては不適切である。例を挙げれば、複数のピースで形成した図形において、あるピースを少しずつずらしていくことで、凸でない図形を連続的に無限に生成できる。一方で、凸多角形の数には有限である。なぜならば、形成された凸多角形の全ての辺の長さは1つ以上の構成ピースの辺の長さの和で表現でき、全ての角の大きさは1つ以上の構成ピースの角度の和で表現できるため、とりうる辺の長さや角度が有限になるためである。さらに、タングラムや清少納言知恵の板などいくつかのシルエットパズルの凸配置については、先行研究が存在する [2][3]。これらの理由から、本研究ではシルエットパズルの表現力の指標として、全てのピースを使って形成可能な凸多角形の配置の数を採用した。

1.2 拡張タングラム

本研究で扱うシルエットパズルのピースは全て凸なポリアボロである。ポリアボロとは、合同な直角二等辺三角形を、同じ長さの辺同士を平面上で重ねるようにしてできた図形の総称である。

タングラムと清少納言知恵の板は、いずれもピースを合同な16個の直角二等辺三角形に分割できる(図1.4, 図1.5)。以後、その直角二等辺三角形を「タイル」と呼び、辺の長さは1, 1, $\sqrt{2}$ とする。タングラムと清少納言知恵の板は、以下の共通点がある。

- 7つのピースを用いる
- ピースは全てポリアボロである
- 全てのピースはタイルに分割でき、タイルの総数は16個である
- $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の正方形配置を形成できる

研究 [2] では、タングラムや清少納言知恵の板を一般化した、16個のタイルで構成されているシルエットパズルに着目し、そのピース数と凸配置の最大数について論じられている。本稿では以後、タイル数が16で全てのピースが凸ポリアボロであるという性質を満たすシルエットパズルを、「拡張タングラム」と呼ぶ。

1.3 研究の目的

本研究では、拡張タングラムのピース数が2から5それぞれの場合における凸配置の最大数を先行研究 [3] による手法を適用することで確定することを目的とする。また、その過程で先行研究 [3] において完了しなかった、有名なシルエットパズルの一つである「ラッキーパズル(図1.6)」の凸配置の探索の完了も試みた。

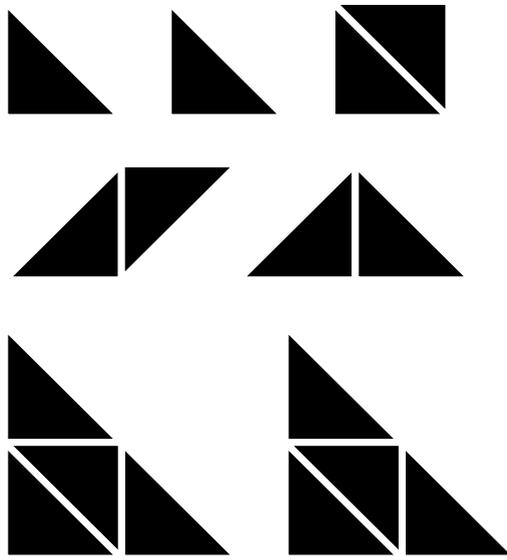


図 1.4: タングラムのピース

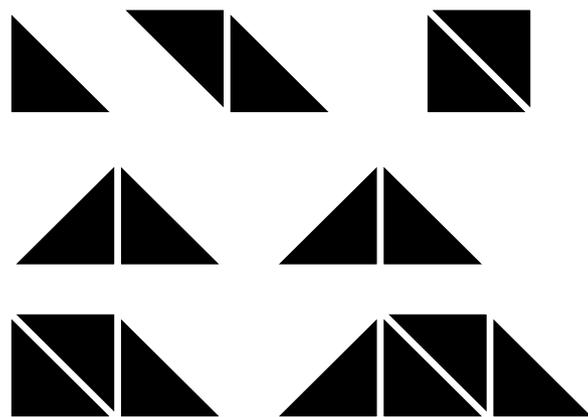


図 1.5: 清少納言知恵の板のピース

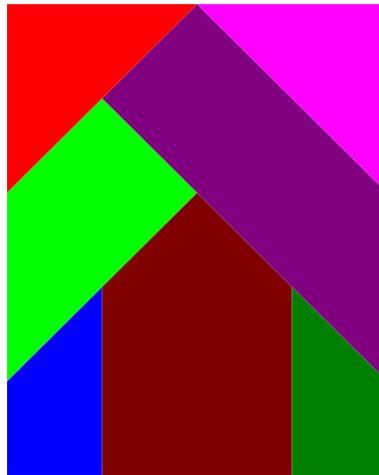


図 1.6: ラッキーパズル

1.4 本論文の構成

本論文では，第2章において本研究の重要な先行研究について解説する．第3章では本研究で扱う問題を提示し，解決するために行った実験を示す．第4章では第3章の実験では解決出来なかった問題を理論的なアプローチで解決した方法を解説する．最後に，第5章にて本研究のまとめを述べる．

第2章 既存研究

2.1 7ピースのシルエットパズルの凸配置に関する研究

2.1.1 タングラムの凸配置の研究

Wang と Hsiung によって，タングラムから形成される凸多角形の種類は13種であることが求められている [5]．その証明の概略は以下のとおりである．

タングラムの全てのピースは，合計16個の合同な直角二等辺三角形からなるポリアポロである．(図1.4)．16個の合同な直角二等辺三角形の辺同士を重ねるように接着することで形成される凸多角形は図2.1の20個であり [5]，タングラムによって形成できる凸多角形はその部分集合である．この事実を利用し，20種類の凸多角形の中で，形成可能な多角形はその例を示し(図2.2)，形成不可能な多角形についてはピースの大きさなどからその理由を示すことで証明されている．

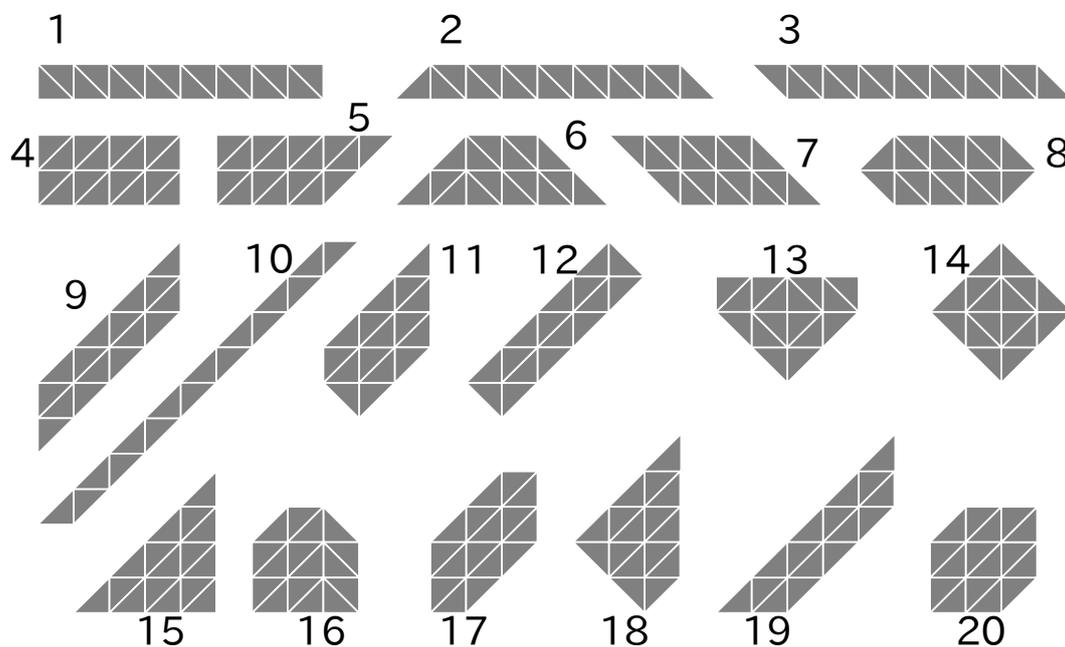


図 2.1: 16 タイルで形成可能な凸多角形 20 種

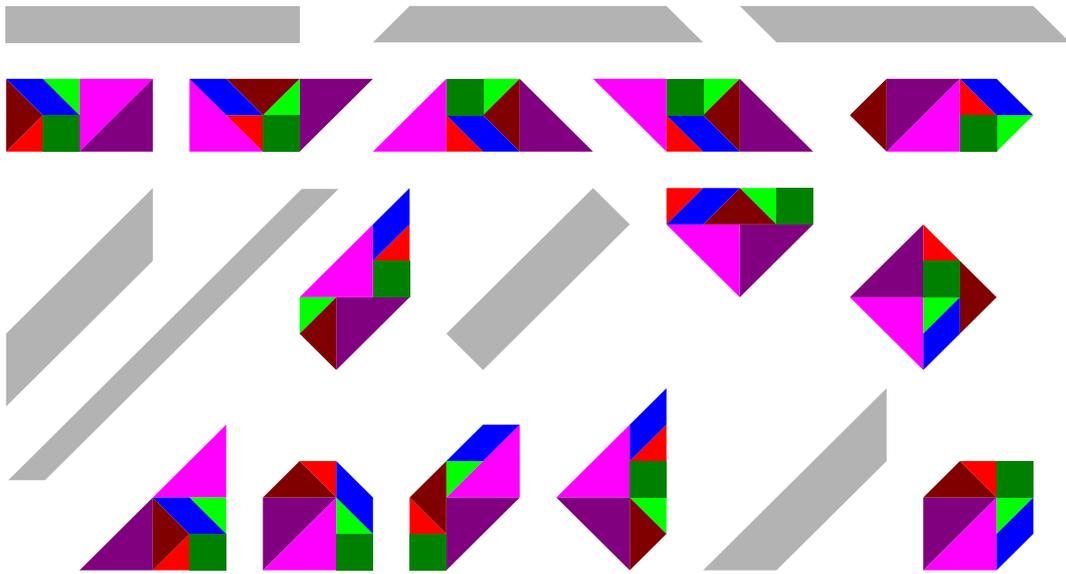


図 2.2: タングラムによって形成可能な凸多角形

2.1.2 清少納言知恵の板の凸配置

清少納言知恵の板は 16 種類の凸配置 (図 2.3) を持つことが Fox-Epstein らによって示された [2]. その導出法は 2.1.1 節で述べたタングラムと同様で, 16 タイルを用いて形成可能な 20 個の凸配置のうち 4 つは, タイル 4 つ分の大きさの等脚台形のピースの存在から明らかに形成不可能であることがわかり, その他の凸配置は具体的な形成方法を提示した.

2.2 各ピースが凸ポリアボロであるシルエットパズルの凸配置

タングラムや清少納言知恵の板は拡張タングラムのピース数 7 における特別な場合である. ピース数が 7 の拡張タングラムによって形成可能な凸配置の最大数は 19 で, それを実現するピースの組み合わせは 4 通りであることが証明された [2].

また, 研究 [2] では, 10 ピースでは 20 個の凸配置を形成できず, 11 ピースで 20 個の凸配置を形成できることが示されている.

さらに, 武永によって, ピース数が 6 の場合の凸配置の最大数は 17 であることが場合分けによって示された [2](付録参照). 研究 [2] で示されたピース数と凸配置の最大数は, 表 2.1 の通りである.

その後, 渋谷はピース数が 2 から 5 の場合に形成可能な凸多角形の種類の数の下界 (表 2.2) を二分探索法を用いて調査した [7]. それぞれの場合のピースの形は図 2.4, 図 2.5, 図 2.6, 図 2.7, 図 2.8 のとおりである.

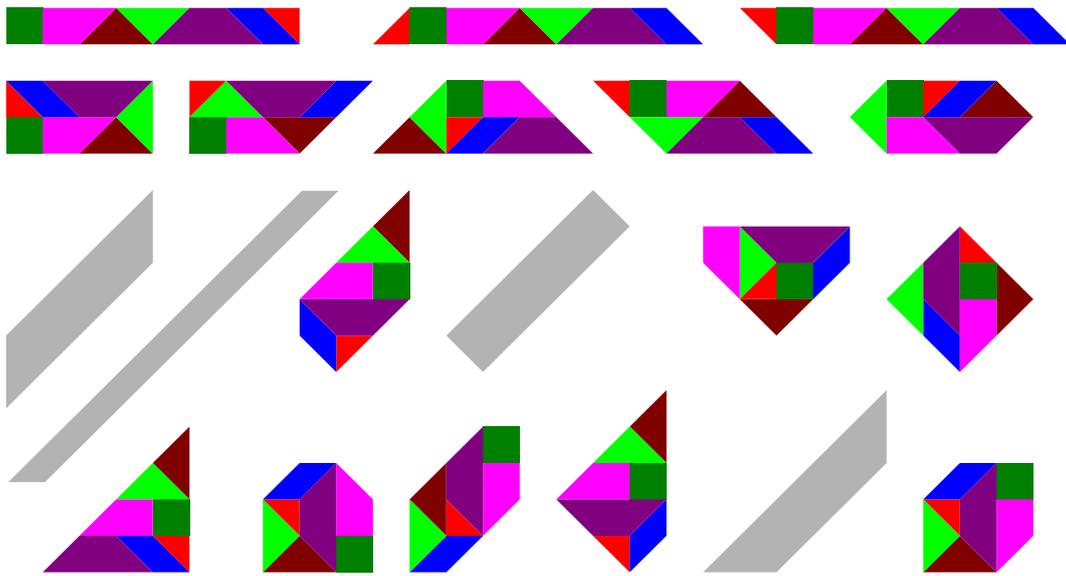


図 2.3: 清少納言知恵の板によって形成可能な凸多角形

表 2.1: ピース数と形成可能な凸配置の最大数との関係

ピース数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
凸配置数	1	?	?	?	?	17	19	19	19	19	20	20	20	20	20	20

表 2.2: 渋谷が示した凸配置数の下界

ピース数	2	3	4	5
凸配置数の下界	5	8	12	15

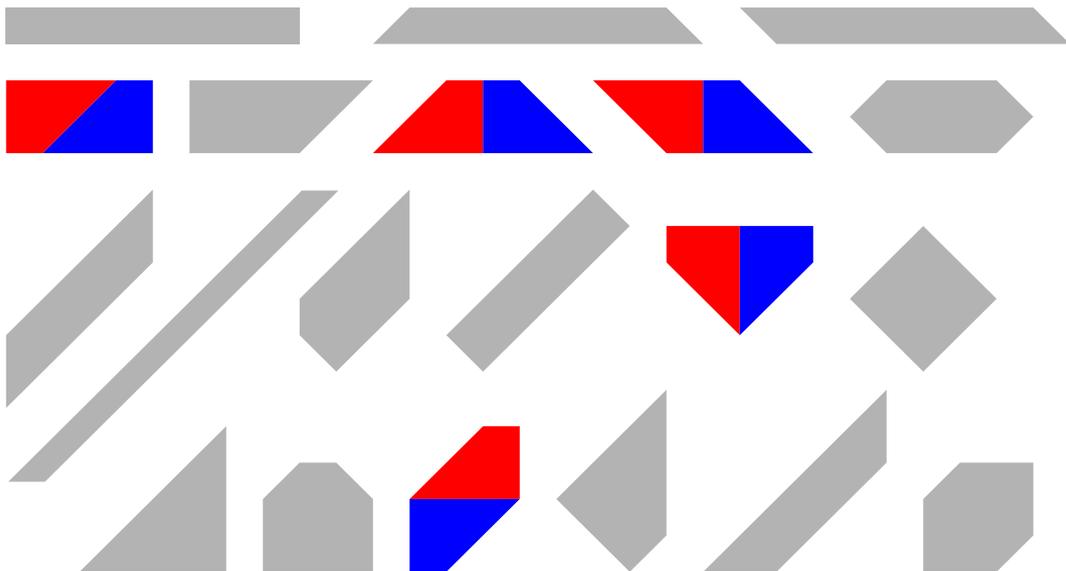


図 2.4: 2 ピースで 5 種類形成可能な組み合わせ

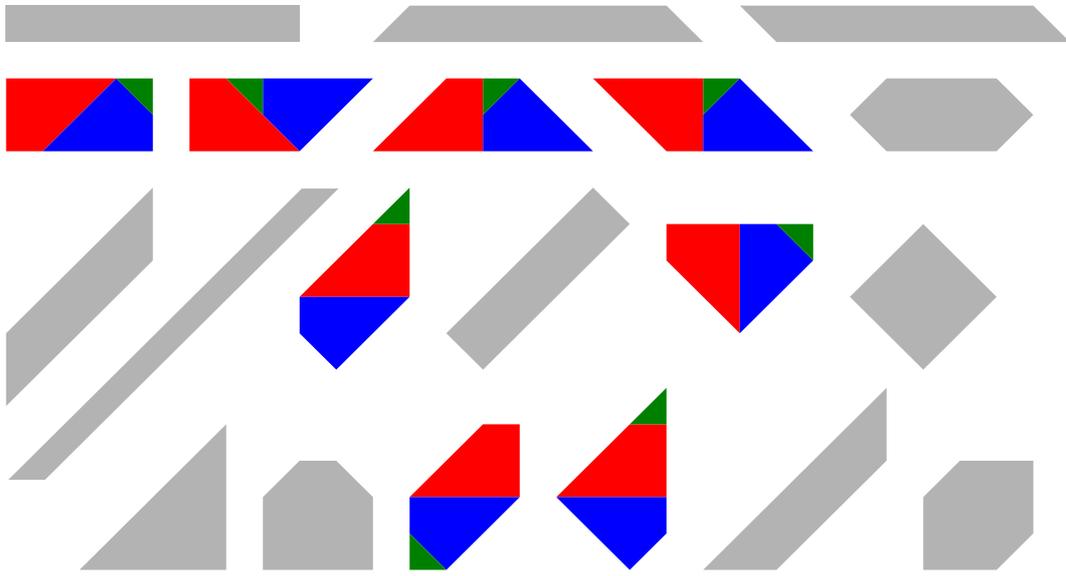


図 2.5: 3ピースで8種類形成可能な組み合わせ

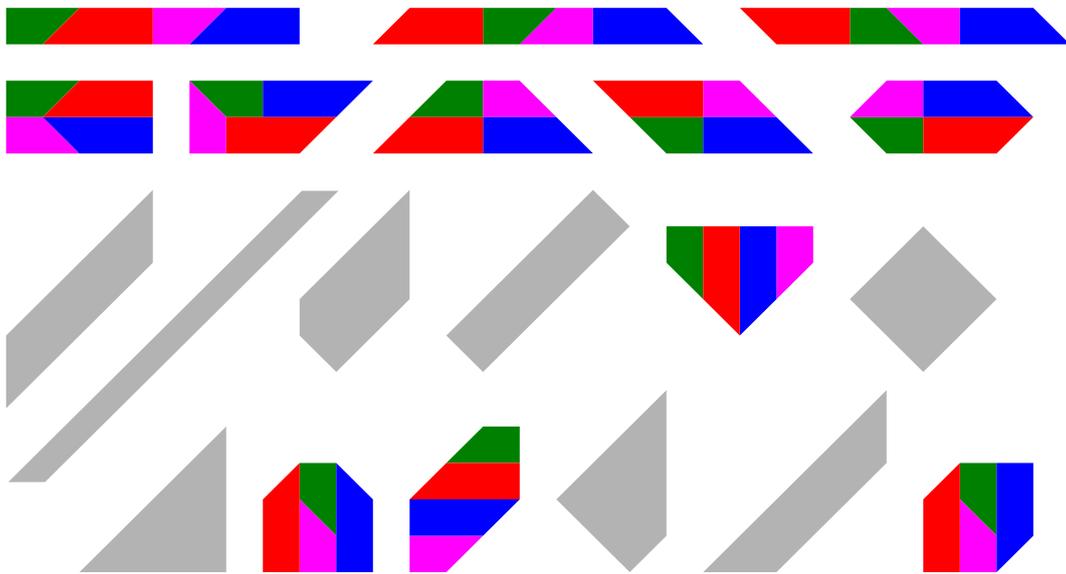


図 2.6: 4ピースで12種類形成可能な組み合わせ

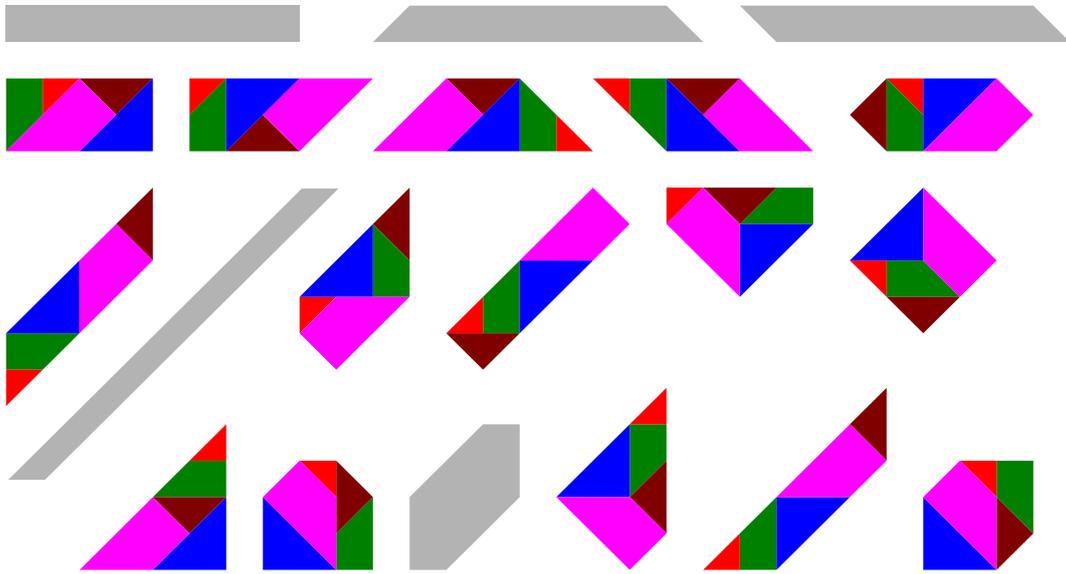


図 2.7: 5 ピースで 15 種類形成可能な組み合わせ (その 1)

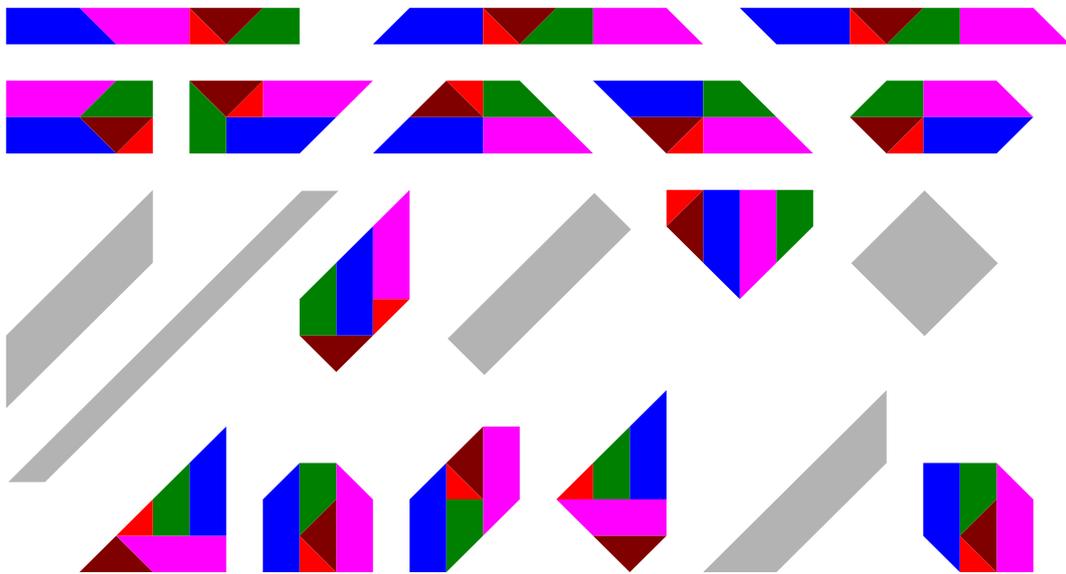


図 2.8: 5 ピースで 15 種類形成可能な組み合わせ (その 2)

2.3 七金三パズルの凸配置

堀山らによって、「七金三パズル (図 2.9)」というシルエットパズルの凸配置の個数の研究がなされた [3].

2.3.1 七金三パズルとその性質

近年, 細矢によって, 「七金三パズル」 (図 2.9) という黄金三角形を元にしたシルエットパズルが考案された. このパズルは, タングラムや清少納言知恵の板のように 7 ピースで構成され, ピースは黄金三角形 (図 2.10) を元に作られている. 図 2.11 の黒い点は 1 個あたり 18° を表しており, すべての角は $18k^\circ$ ($k = 1, 2, \dots, 19$) と表すことができる. 辺については最短の辺長を 1 とし, 他の長さを ϕ , ϕ^2 , ϕ^3 , α と表せる. ϕ は黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$ と呼ばれる値であり, $1 + \phi = \phi^2$ を満たす. この性質を使って, $\phi^2 = 1 + \phi$, $\phi^3 = 1 + 2\phi$ という結果が得られる. そして, α の値は $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ である. このことから, 七金三パズルの辺の長さは 1, ϕ , α の線型結合で表現できることがわかる.

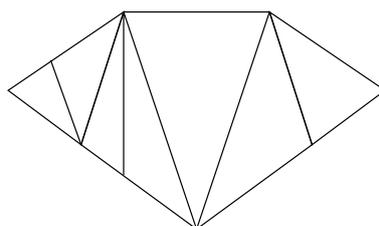


図 2.9: 七金三パズル

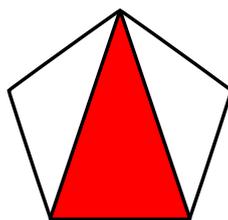


図 2.10: 正五角形の中に現れる黄金三角形

2.3.2 堀山らのアルゴリズム

多角形を表現するデータ構造

n 個の頂点をもつ多角形 P について, その頂点を半時計回りに $(p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ とおく. 以後, P は七金三パズルのピースから形成される多角形とする. P は 2 つの連結リスト

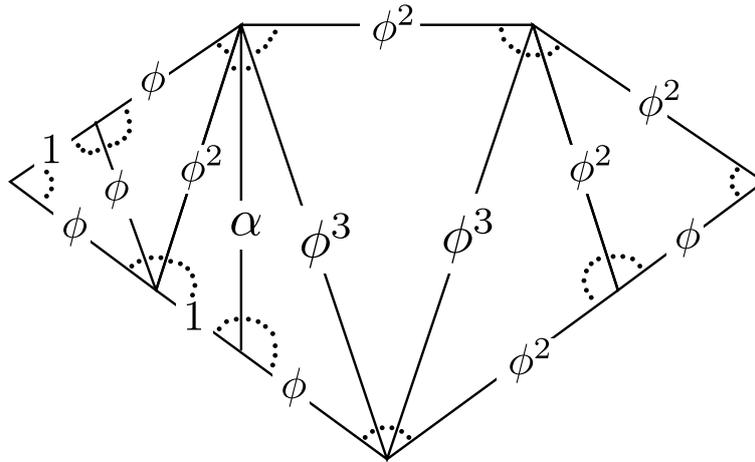


図 2.11: 七金三パズルの各辺の比率

$(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ と $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$ で表現される. l_i は辺 $e_i = (p_i, p_{i+1})$ の長さを表し d_i は頂点 p_i の内角の角度を表す. ここでは d_i はある正の整数 k について $(18 \times k)^\circ$ という値をとるので, d_i は k の値を記憶しておけばよい. さらに, l_i は 3 つ組の数字 $(l_{i,0}, l_{i,1}, l_{i,2})$ を使って $l_i = l_{i,0} + l_{i,1} \times \phi + l_{i,2} \times \alpha$ と表現できる. 黄金比の性質より, P のすべての l_i を 3 つの正の整数 $l_{i,0}, l_{i,1}, l_{i,2}$ で表現でき, これらの正の整数は一意に決まる.

探索して得られた多角形 P を保存するとき, 合同な図形の重複を避けるため, P の表現に標準形を定義して, 標準形に変換して保存する. P のある頂点 p_0 を固定すると, 整数列 $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}, l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ が得られる (l_i は実際には整数の 3 つ組である). P の全ての頂点についてこの整数列を計算し, P を反転して得られた図形に対しても同様の計算を行う. こうして得られた全ての整数列の中で辞書順最小のものを標準形として, これを保存する.

多角形の接着操作

以下では, 2 つの多角形 P と Q について, 「 P と Q の辺同士の接着」を以下のように定義する. ここで, 多角形の頂点数 n を用いて, すべての添字に対して $\text{mod } n$ の計算を施す. P を反時計周りに n 個の頂点 p_0, p_1, \dots, p_{n-1} をもつ多角形とし, そして, Q は m 個の頂点 q_0, q_1, \dots, q_{m-1} をもつ多角形とする. また, l_i を辺 (p_i, p_{i+1}) の長さとし, l'_j を辺 (q_j, q_{j+1}) の長さとする. そして P のパス $(p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+k})$ と Q のパス $(q_j, q_{j+1}, \dots, q_{j+k})$ について辺同士の接着を行うことができるとは, すべての $0 \leq h \leq k$ について, (1) $l_{i+h} = l'_{j+k-h-1}$, (2) すべての頂点の組 p_{i+h} と q_{j+k-h} の内角の和が 360° と等しく, (3) 頂点の組 p_i と q_{j+k} の内角の和が 360° より小さく, (4) 頂点の組 p_{i+k} と q_j の内角の和が 360° より小さいことが成り立つことである. 図 2.12 は P のパス (p_5, p_6, p_7) と Q のパス (q_1, q_2, q_3) の辺同士の接着の例である.

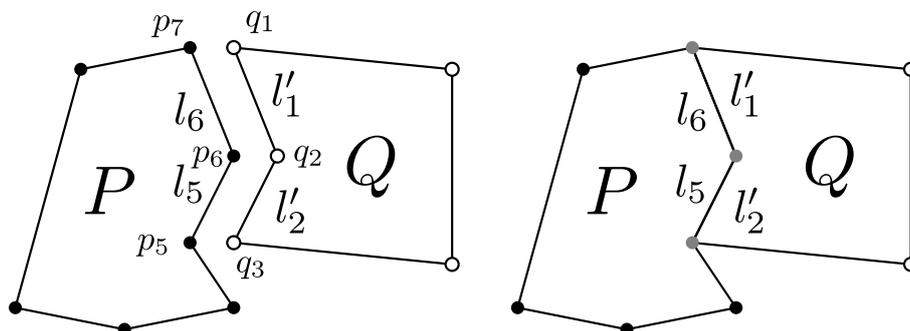


図 2.12: 辺同士の接着の例

アルゴリズムの詳細

まず、対象のシルエットパズルのピースを使って形成できる多角形の集合 S をピースのみを追加して初期化し、 S_0 とする。次に S_0 に、ピース同士で形成可能な多角形を追加する。まず、 S から P と P' を選ぶ。このとき、選んだ2つの多角形には共通する構成ピースが存在しないようにする。次に P と P' に対して可能な全ての接着を行って P'' を生成し、 S に加える。これを P の鏡像と P' でも行う。具体的な手順の詳細は次の通りである。

Step 1: すべての i と j について、 e_i を P から、 e_j を P' から選ぶ。

Step 2: もし $l_i \neq l_j$ ならば接着は行わず、Step1に戻る。 $l_i = l_j$ ならば e_i と e_j を接着することで新たな多角形 P'' を形成する。

Step 3: 角度が 360° になっている角を取り除くように、角と辺のリストを書き換える。もし、 360° になっている角を共有する2辺の長さが異なる場合は、接着失敗とみなし、 P'' を棄却する。

Step 4: 角度が 180° になっている角を取り除くように、角と辺のリストを書き換える。

Step 5: この時点で 360° より大きい角が残っている場合 P'' を棄却して Step 1 へ戻る。

Step 6: P'' が既に見つかっていない多角形ならば S に追加し、Step 1 へ戻る。

2.3.3 堀山らのアルゴリズムの適用結果

堀山らは、以下の環境で実験を行った。

CPU Intel Core i7-3770K (3.50GHz)

メモリサイズ 32 GB

七金三パズルの7ピースの部分集合によって形成された凸多角形を563個得ることができ、そのうち全てのピースを使ってできた凸多角形の数は62個であることが、[3]によって示された。計算時間は675秒であった。

また、[3]では、2.3.2節のアルゴリズムをタングラム、清少納言知恵の板、ラッキーパズルの3つに適用し、凸配置を探索した。その結果、タングラムの探索には65秒、清少納言知恵の板の探索には40,920秒を要した。しかし、ラッキーパズル(図1.6)については、2週間以上プログラムを動作させても探索が完了しなかった。

第3章 計算機を用いた探索

3.1 探索の高速化

本研究では、堀山らの研究 [3] にて使用されたアルゴリズムにおけるデータ構造を本研究で扱う図形の性質に合わせて適用し、列挙した多角形を記憶する手順を高速化した。

本研究で扱う図形 P の角度はすべて 45° の倍数であり、辺の長さはすべて 1 もしくは $\sqrt{2}$ の倍数である。よって、 d_i はある正の整数 $k (k = 1, 2, \dots, 7)$ について $(45 \times k)^\circ$ という値をとるので、 d_i は k の値を記憶しておけばよい。さらに、 l_i は 2 つ組の数字 $(l_{i,0}, l_{i,1})$ を使って表現できる。 $l_{i,0}$ を、 l_i が整数の場合に 0、 $\sqrt{2}$ の倍数の場合に 1 となるようなフラグとする。また、 $l_{i,1}$ を 1 または $\sqrt{2}$ の係数とすると、 $l_i = (l_{i,0} \times \sqrt{2} + (1 - l_{i,0}) \times 1) \times l_{i,1}$ と表わせる。 P のすべての l_i を 2 つの正の整数 $l_{i,0}, l_{i,1}$ で表現でき、これらの正の整数は一意に決まる。

堀山らの研究 [3] では、形成された多角形を重複なく保存するため、角と辺の情報である $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}, l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ という文字列の中で辞書順最小になるものを標準形として選択して記憶しており、その計算には $O(n^2)$ の時間を使っている。

一方、本研究では、ピースによって形成される図形が全てポリアポロであるという性質を利用し、列挙した図形をビットマップデータとして保存する (図 3.1)。はじめに、形成した多角形を辺と角の情報から等間隔のグリッド上に配置する。次に、多角形に外接する長方形の大きさを求める。最後に、求めた長方形の各マス目の情報を数字に変換し、左上からラスタースキャンをして次元の数列を得る。外接する長方形の大きさと、ビットマップデータを次元化した数列によって、元の図形を復元することができる。しかし、この手法では一つのポリアポロを 90° 単位の回転と左右反転することで最大 8 通りの図形が生まれる (図 3.2)。これらを同一の図形として扱うために、8 通りの中で外枠が縦長になる 4 通りの中で、得られる数列が辞書順最小のものを標準形として採用し、保存する (外枠が正方形の場合は、8 通りの数列を辞書順で比較する)。この方法で標準形を求めるとき、数列の長さは $O(n)$ であり、比較する数列の候補数が 4 もしくは 8 と定数であるため、標準形の決定に要する時間は $O(n)$ である。

3.2 実験

本研究では、先行研究 [3] のアルゴリズムに 3.1 節で示した高速化を施し、各シルエットパズルの探索を行った。

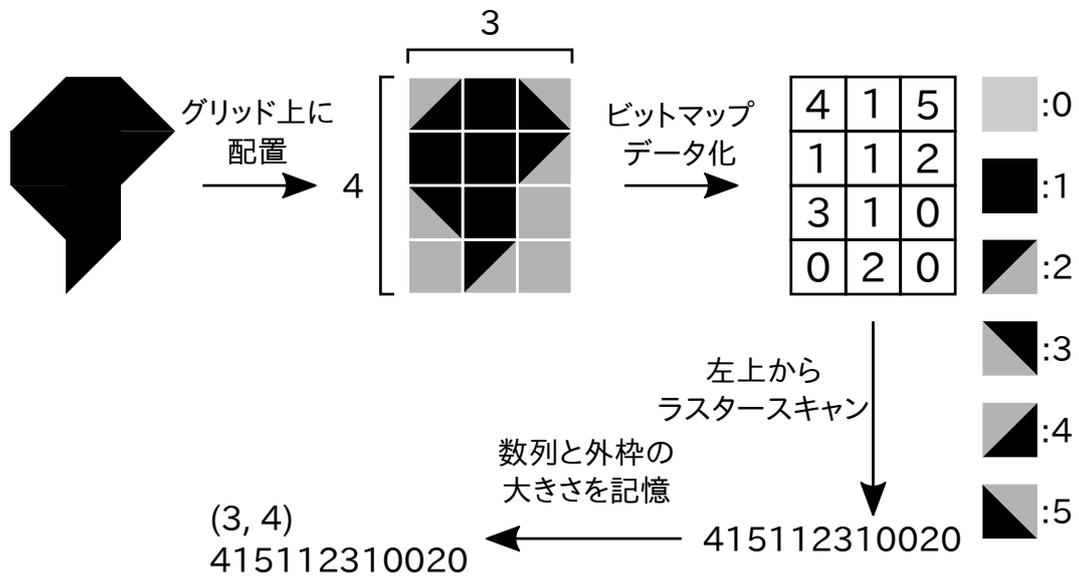


図 3.1: 本研究での識別コード生成方法

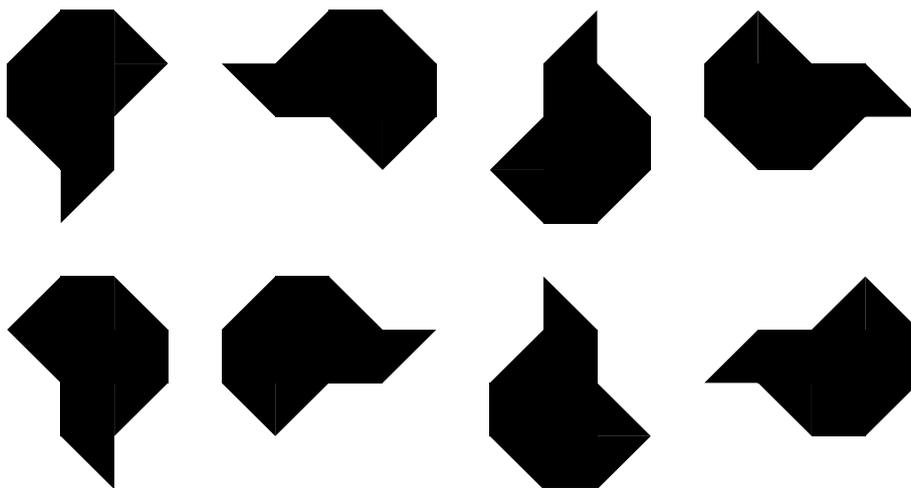


図 3.2: 多角形の回転と反転

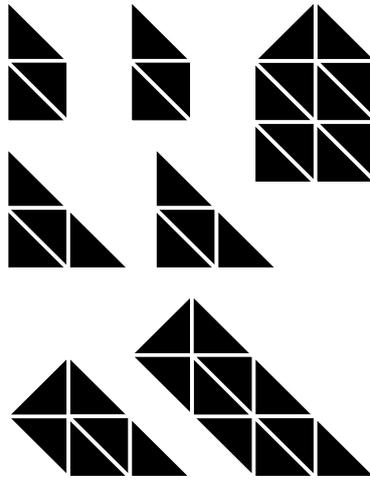


図 3.3: ラッキーパズルのピース

本実験において、プログラムの実行には並列計算機のSGI UV3000[CPU Intel Xeon E7-8837, 共有メモリ 12TB, ノードメモリ 256GB]を利用した。3.2.1節の実験におけるタングラムと清少納言知恵の板の探索プログラムは、ソフトウェアパイプラインによる最適化を行うオプションを付与してコンパイルを行った。3.2.1節の実験のラッキーパズルの探索プログラムと、3.2.2節の実験では、探索に長い時間を要することが予想できたため、上記の最適化に加えループの交換やデータプリフェッチを行うオプションと、自動並列化オプションを付与してコンパイルを行った。使用リソースは両実験ともに12個のCPUコアと256GBのメモリである。

3.2.1 実験：ピースの接着順序と探索時間の関係性

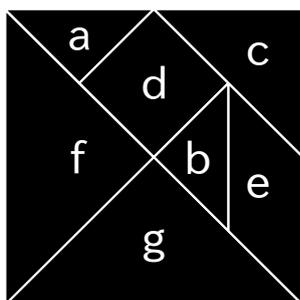
本実験の目的は、ラッキーパズル(図1.6)の凸配置の探索時間を短縮する手がかりを得るため、タングラムと清少納言知恵の板の探索時間が短くなるようなピースの接着順序の法則を発見することである。

ラッキーパズルは、全てのピースが凸なポリアボロであり、合計40個のタイルに分割できる(図3.3)。このパズルの凸配置は21種発見されているが[8][1][6]、全種類を列挙したことは証明されていない。先行研究[3]の中でラッキーパズルの探索には多大な時間を要することがわかっているため、探索を高速化する必要がある。タングラム、清少納言知恵の板、ラッキーパズルは、ともにピースが全て凸なポリアボロであり、ピース数が7であるという性質をもつ。このことから、タングラムと清少納言知恵の板の探索で得た高速化に関する知見が、ラッキーパズルの探索にも応用できると予想した。

タングラムと清少納言知恵の板の探索

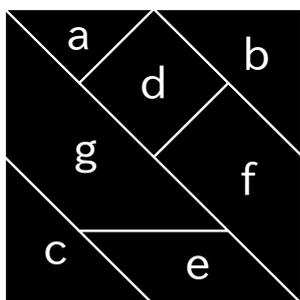
タングラムと清少納言知恵の板について、ピースのタイル数と頂点数に着目して接着順序を変えて探索を行い、探索時間を計測した。本実験の目的は、探索時間が比較的短くなるような接着順序の法則を得ることであるため、全ての順序を網羅してはならず、頂点数と面積が同じ場合の順序は無作為である。

実験の結果は図 3.4 と図 3.5 の通りである。タングラムにおいて、探索時間が最も短かったピースの順序は fgcabde で、これは「頂点数の昇順、頂点数が同じ場合はタイル数の降順」という条件である。一方、探索時間が最も長かったピースの順序は deabcfg で、これは「頂点数の降順、頂点数が同じ場合はタイル数の昇順」という条件である。また、清少納言知恵の板において、探索時間が最も短かったピースの順序は bcagfde で、これは「頂点数の昇順、頂点数が同じ場合は面積の降順」という条件である。一方、探索時間が最も長かったピースの順序は defgabc で、これは「頂点数の降順、頂点数が同じ場合はタイル数の昇順」という条件である。



接着順序	時間 (s)
abcdefg	19.533
abdecfg	20.023
fgcdeab	18.257
fgdecab	18.430
abcfgde	18.830
fgcabde	17.668
deabcfg	20.285
defgcab	19.712

図 3.4: タングラムのピース接着順序と探索時間



接着順序	時間 (s)
abcdefg	11263
adebcfg	12160
gfbcdea	12109
gfdebca	11321
bcagfde	10841
defgabc	13126
gfdebca	12627

図 3.5: 清少納言知恵の板のピース接着順序と探索時間

タングラムと清少納言知恵の板の実験から、ピースの接着順序の条件を「頂点数の昇順、頂点数が同じ場合はタイル数の降順」とすると探索時間が短くなり、一方で、「頂点

数の降順，頂点数が同じ場合はタイル数の昇順」とすると長くなるという共通する傾向が見つかった。

タングラムと清少納言知恵の板について，本実験で得られた凸配置の数，全ての多角形配置の数，探索時間は表 3.1 の通りである．形成できる多角形の数，清少納言知恵の板はタングラムの約 18 倍である一方で，探索終了に要した時間は清少納言知恵の板はタングラムの約 620 倍である．

表 3.1: タングラムと清少納言知恵の板の探索結果

	凸配置	全多角形配置	探索時間 (s)
タングラム	13	12411	17.668
清少納言知恵の板	16	224597	10841

タングラムと清少納言知恵の板を比較すると，凸配置の数が 13 から 16 に増えただけで，探索時間が 620 倍に膨れ上がっていることがわかる．ラッキーパズルの凸配置は少なくとも 21 種確認されており，このことからラッキーパズルの探索時間は清少納言知恵の板に比べ，非常に長くなることが予想できる．

ラッキーパズルの探索

3.2.1 節の結果をもとに，ラッキーパズルを「頂点数の昇順，頂点数が同じ場合はタイル数の降順」というピースの接着順序で探索を行ったものの，270 時間以上経っても探索を完了させることができなかった．

3.2.2 実験：拡張タングラムの 2 から 5 ピースの場合に作れる凸多角形の最大数の探索

本実験の目的は，拡張タングラムにおける，ピース数が 2 から 5 の場合の凸配置の最大数を明らかにすることである．タイル数が 1 から 15 の凸なポリアポロから，タイルの総数が 16 になる任意の拡張タングラムについて形成可能な凸配置を全探索することで，ピース数が 2 から 5 の場合の凸配置の最大数を明らかにする．これによって，最大数の凸配置を実現可能なピースの組み合わせも明らかになる．

しかし，ピース数が 4 と 5 の場合，本研究のプログラムによる探索は不完全である．本研究のプログラムのアルゴリズムでは，同じ長さの辺のみを接着する．この方法では形成できない凸配置は，4 ピースの場合 11 通り (図 3.6)，5 ピースの場合全 89 通り (図 3.7) 存在する．このようなケースは全て手作業で列挙し，探索プログラムによって得られた凸配置に合算した．

本実験の探索プログラムと，プログラムで探索できなかった図形を合わせて得られた結果は表 3.2 の通りである．本実験で得られた 2 から 5 ピースの凸配置の最大数は，渋谷が

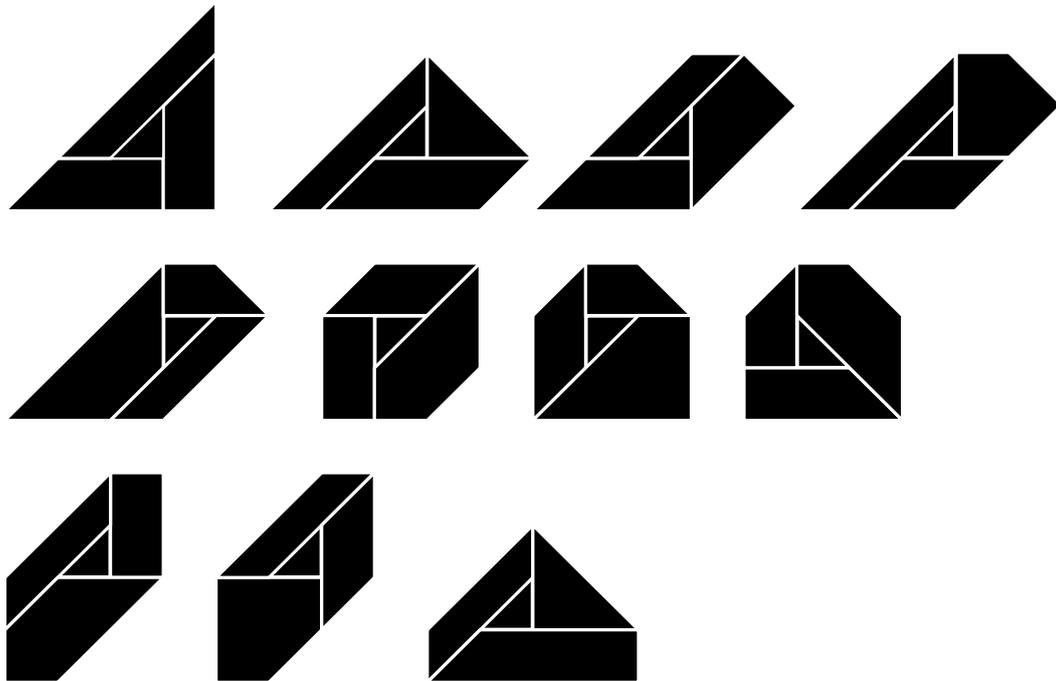


図 3.6: 本アルゴリズムで形成不可能な 4 ピースの凸配置

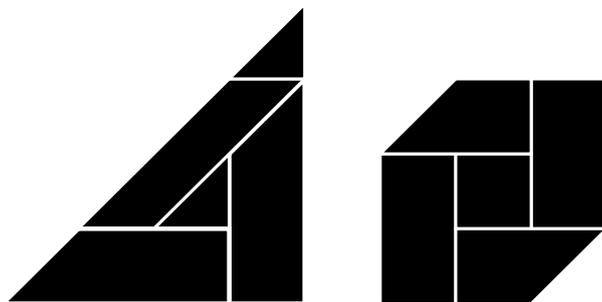


図 3.7: 本アルゴリズムで形成不可能な 5 ピースの凸配置の例

発見した下界 (表:2.2) と一致し, それぞれのピースの組み合わせも, 渋谷が下界を調査する際に発見したもの (図 2.4, 図 2.5, 図 2.6, 図 2.7, 図 2.8) と同一である.

表 3.2: 2 から 5 ピースの凸配置数の最大値

ピース数	2	3	4	5
凸配置数	5	8	12	15
ピース構成の種類	1	1	1	2

第4章 ラッキーパズルの凸配置の総数

本章ではラッキーパズルの凸配置の総数が21であることを示す。前述の通り、ラッキーパズルは「タイル」(辺長1, 1, $\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形)40枚からなる(図4.1)。

はじめに、40タイルでできる凸多角形は47種類であることを示す。次に、既に敷き詰め可能であると知られていた21種類[8, 1, 6]以外は、敷き詰め不可能であるという事を示す。

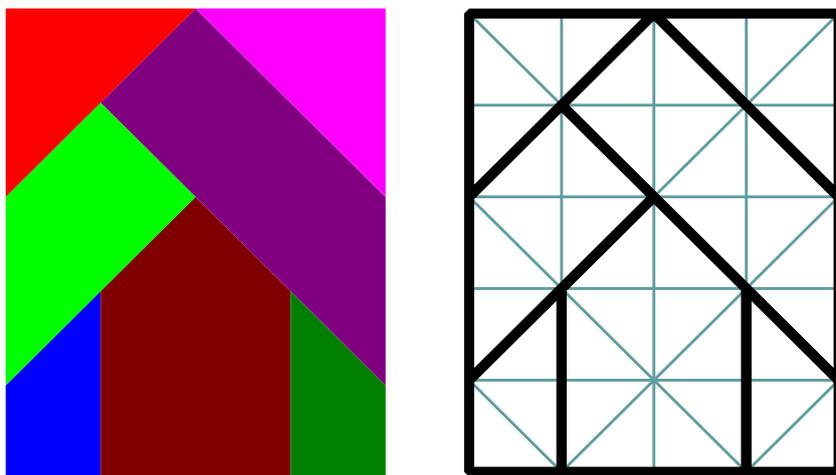


図 4.1: ラッキーパズルは40タイルで構成されている

4.1 40タイルの凸多角形47種類

一般に、複数枚のタイルからなる凸多角形は、 45° の倍数の角度からなる辺しか持たない。このことから、40タイルからなる凸多角形47種類は容易に列挙できる(図4.2)。この結果は、Fox-Epsteinら[2]による計算機実験によっても確認されている。

4.2 敷き詰め可能な凸多角形21種類

図4.2の上4行、解が示されている21種類について、敷き詰め可能であることは、既に知られていた[8, 1, 6]。しかし、これで全てであるかについては、これまで明確な証明が与えられていなかった。

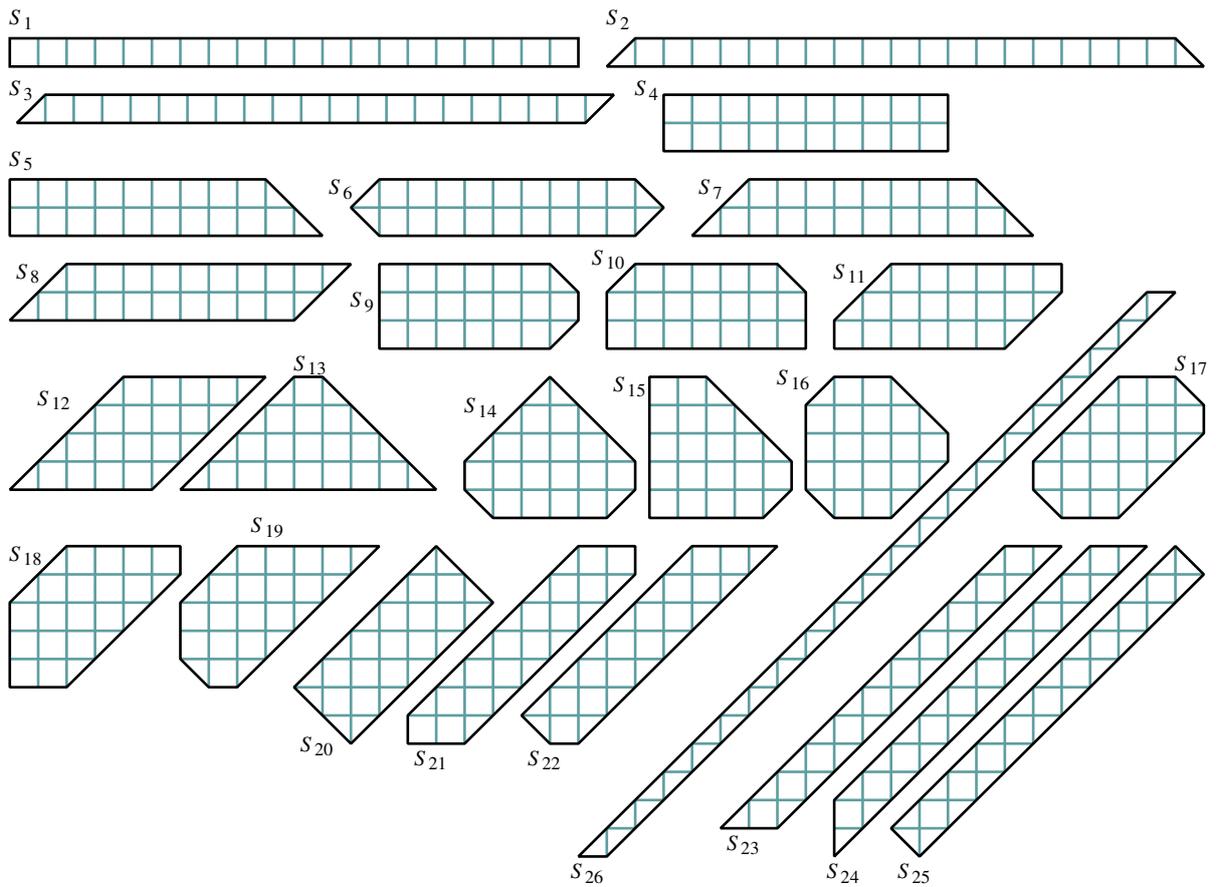
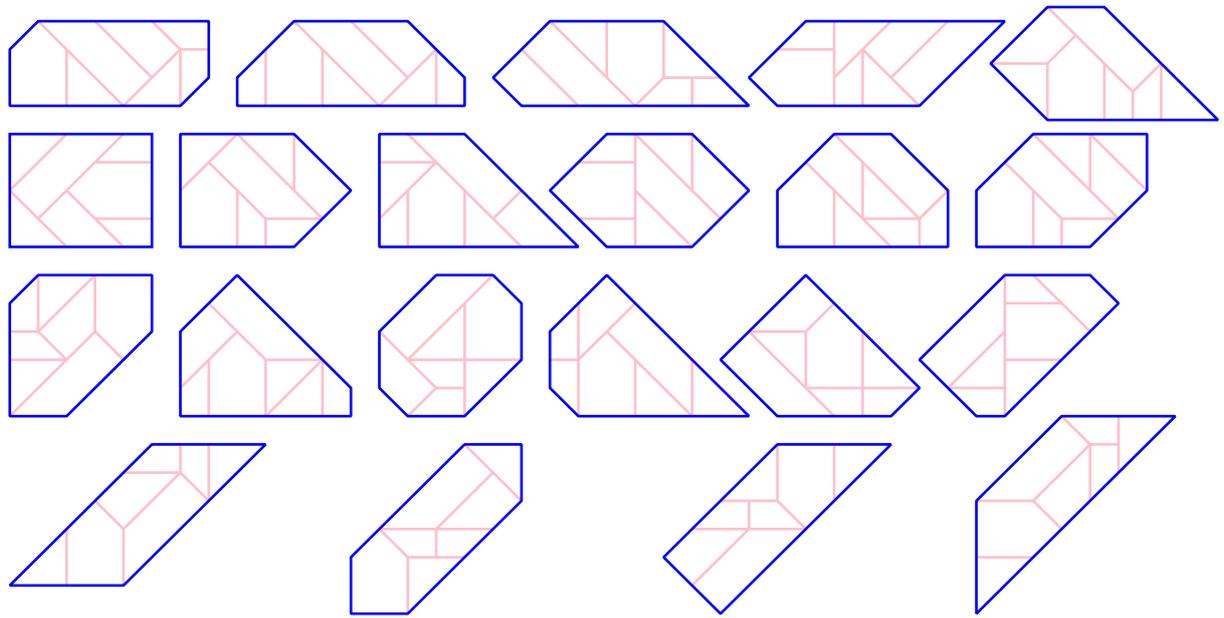


図 4.2: 40 タイルからなる凸多角形 47 種類

4.3 敷き詰め不可能な凸多角形 26 種類

ここでは、前節での問に対して、「残り 26 種類は敷き詰め不可能である」と証明する。この 26 種類に図 4.2 の通り、 S_1 から S_{26} までの名前を付ける。また、ラッキーパズルの各ピースに図 4.3 の通り名前を付ける。 $(P_4$ と P_5 は 2 枚ずつあることに注意.)

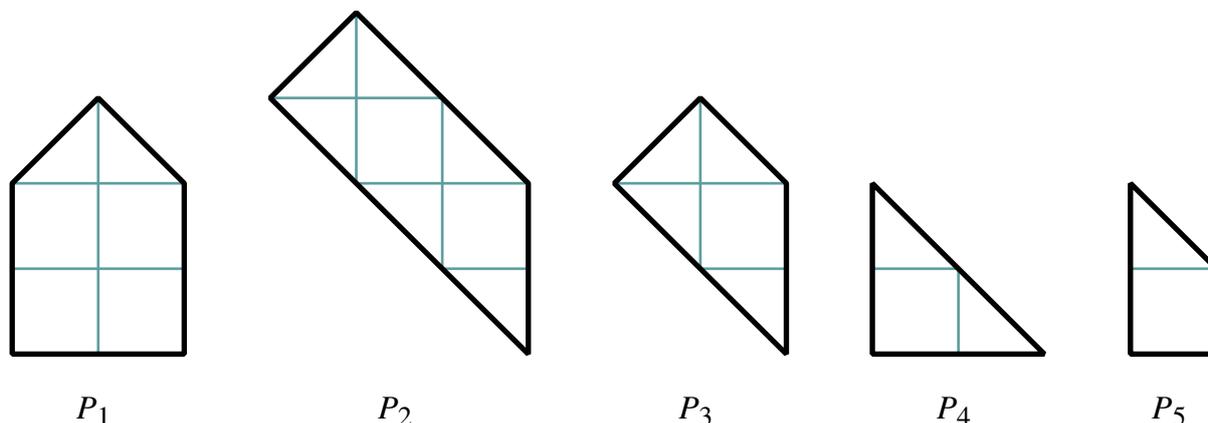


図 4.3: ラッキーパズル各ピースの名前

P を、タイルを複数枚敷き詰めてできる凸多角形とする。この P を、通常直角二等辺三角形タイルと、それを 2 枚貼り合わせた 1×1 正方形タイルを用いて、はみ出さないように被覆することを考える。もし、なるべく多くの正方形タイルを使おうとすると、その被覆の仕方は一意に決定される。このような被覆を P の最適被覆と呼ぶことにする。(図 4.3 や、図 4.2 の一部は、最適被覆の例となっている.)

最適被覆と敷き詰めが持つ以下の性質は、今後の議論で有用となる。

補題 4.3.1. S および P_1, \dots, P_k のそれぞれを、タイルを複数枚敷き詰めてできる凸多角形とする。また、 P_1, \dots, P_k によって S を敷き詰め可能であるとする。このとき任意の P_1, \dots, P_k による S の敷き詰めにおいて、各 P_i の最適被覆の正方形タイルは、 S の最適被覆におけるある正方形タイルに一致するように敷かれている。

この後の証明は以下の通り行う。

1. P_1 が入らないものを排除。(9 種類排除できる)
2. P_2 が入らないものを排除。(5 種類排除できる)
3. 残りの 12 種類について、個々に考察し不可能性を示す。

4.3.1 P_1 が入らない場合: $S_1, S_2, S_3, S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}, S_{25}, S_{26}$

最も入れづらいピース P_1 が入らないことで不可能性が示せるケースを調べる (図 4.4)。 $S_1, S_2, S_3, S_{23}, S_{24}, S_{25}, S_{26}$ の 7 個については、どのように P_1 を回転させても入れるこ

とができないことが容易に確認できる．一方， S_{21} と S_{22} には， P_1 をうまく（例えば 45° ）回転させることで入れることができる．不可能性の証明には，補題 4.3.1 が必要となる．

補題 4.3.1 より， P_1 の最適被覆に含まれる 2×2 正方形は，敷き詰め対象の多角形の最適被覆に含まれる 2×2 正方形と一致するように置かれる必要がある．しかし， S_{21} と S_{22} の最適被覆には 2×2 正方形は含まれないため，これは不可能である．以上より， $S_1, S_2, S_3, S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}, S_{25}, S_{26}$ は敷き詰め不可能であることが分かった．

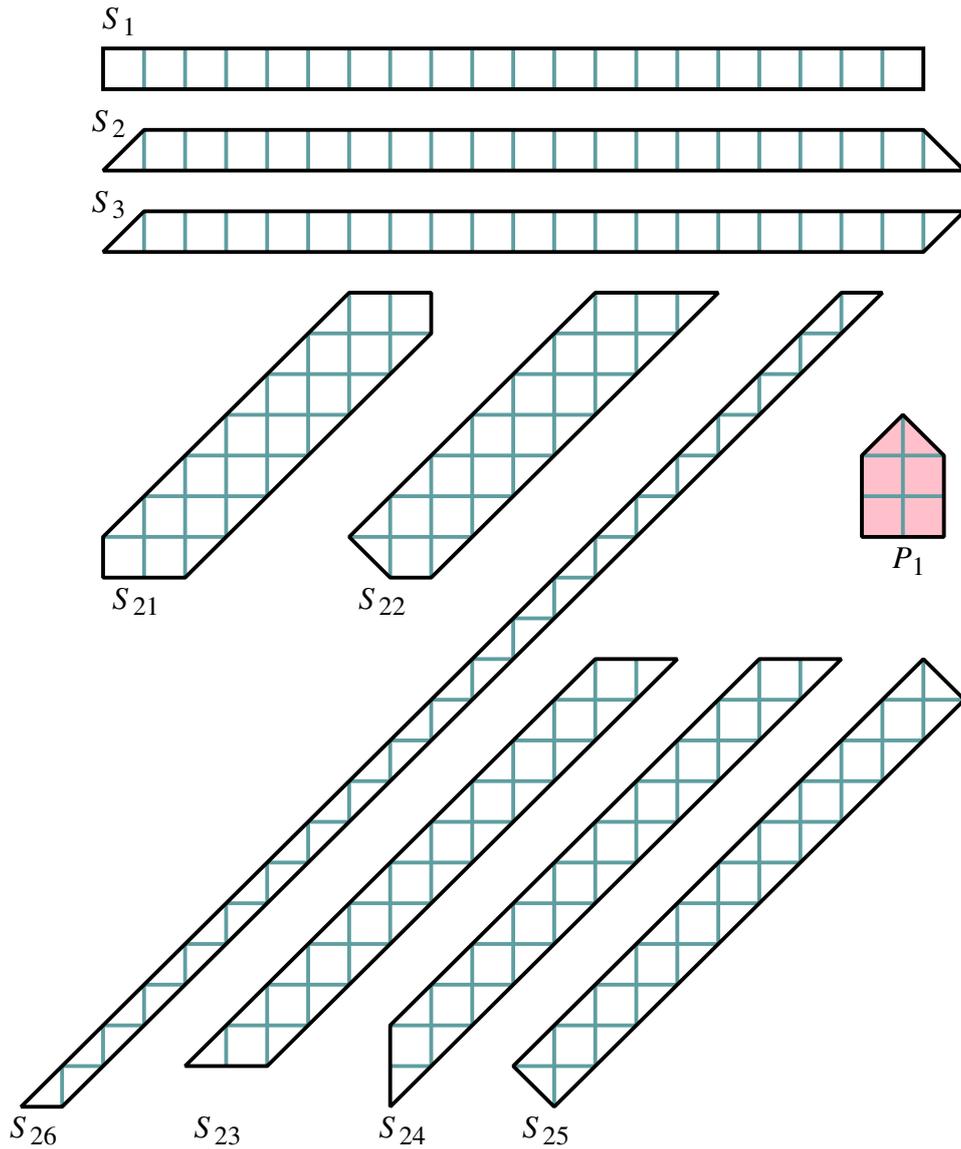


図 4.4: P_1 が入らない凸多角形

4.3.2 P_2 が入らない場合: S_4, S_5, S_6, S_7, S_8

補題 4.3.1 を使い, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 には P_2 が入らないことを示す (図 4.5).

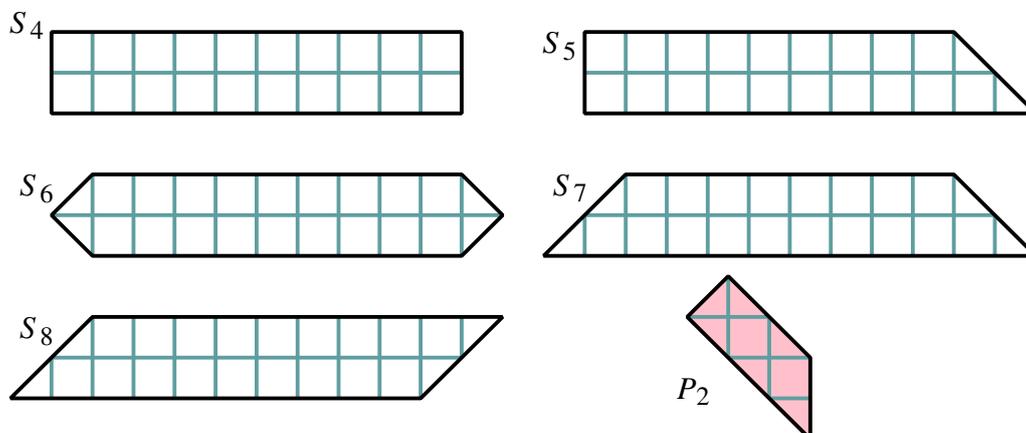


図 4.5: P_2 が入らない凸多角形

P_2 は, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 の全てに入らないことを示す. P_2 の最適被覆は斜めに隣接する二つの正方形タイルを持つ. 補題 4.3.1 より, この二つの正方形タイルが, 敷き詰め対象多角形の最適被覆における正方形タイル二つに一致するようにおく必要がある. しかし, 図 4.6 の通り, そのような置き方は不可能である.

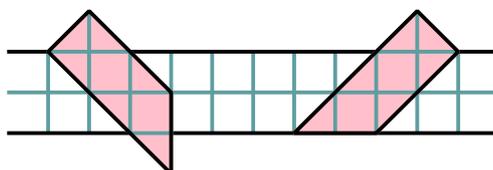


図 4.6: P_2 の置き方

以上より, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 は敷き詰め不可能であるといえる.

4.3.3 その他の場合

ここまで, ある一つのパーツのみの配置可能性を考えるだけで 14 種類の凸多角形に対して不可能性を示すことができた. 残りの 12 種類 (図 4.7) については複数個のピースの配置可能性を考える必要がある. それぞれについて以下で不可能性を証明していく.

多角形 S が敷き詰め可能であるとき, その外周上の辺はあるピースの辺か, または複数のピースの辺の和集合で被覆される. ラッキーパズルのピースで長さ 1 の辺は P_5 にしかないため, 以下が成り立つ.

補題 4.3.2. S の外周が長さ 1 の辺 L を持つとき, 任意の S の敷き詰めにおいて L は P_5 の長さ 1 の辺で被覆される.

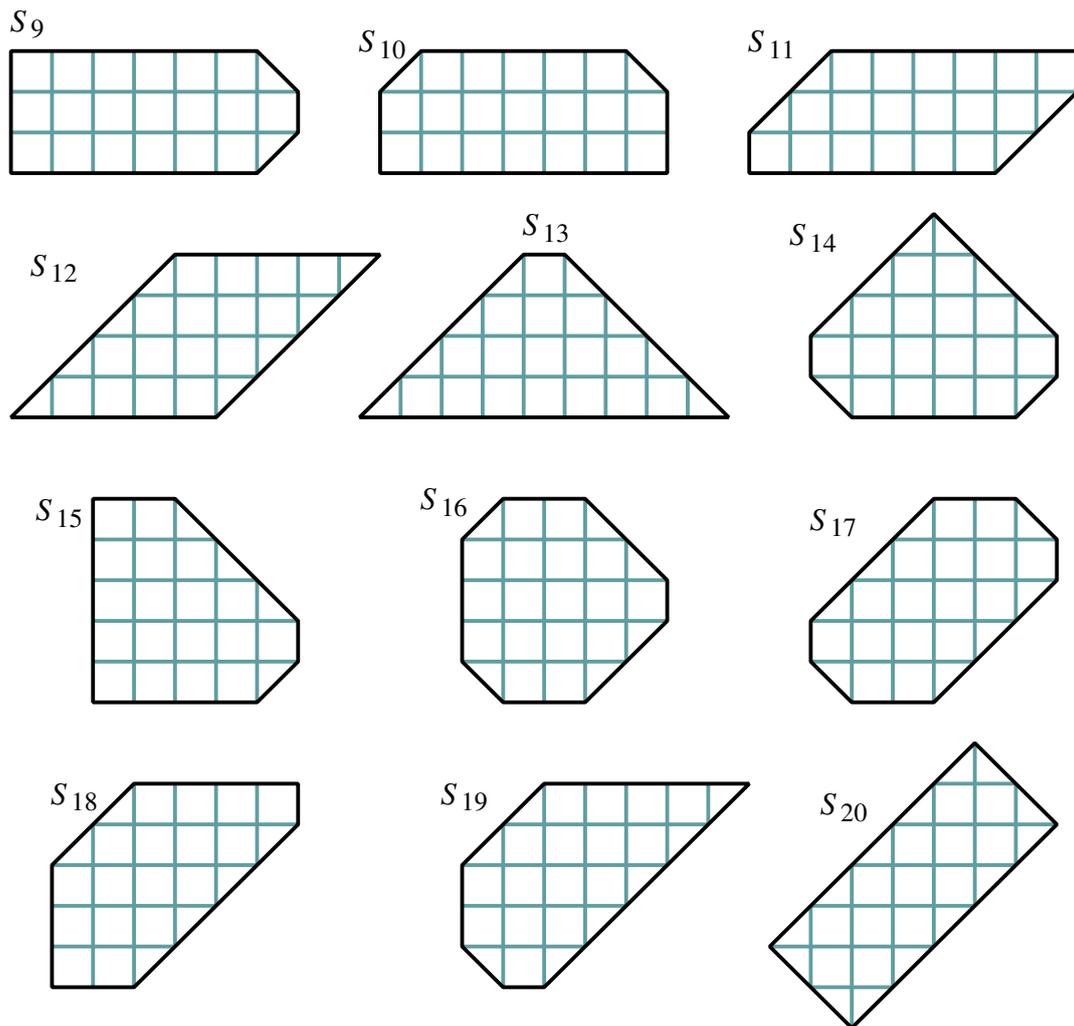


図 4.7: 残りの 12 種類の凸多角形

■ S_9 の不可能性

S_9 の敷き詰め不可能性を示すために、まず P_2 の置き方を考える。対称性を考慮すると、補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.8 の 7 通りのみである。各場合について不可能性を示す。

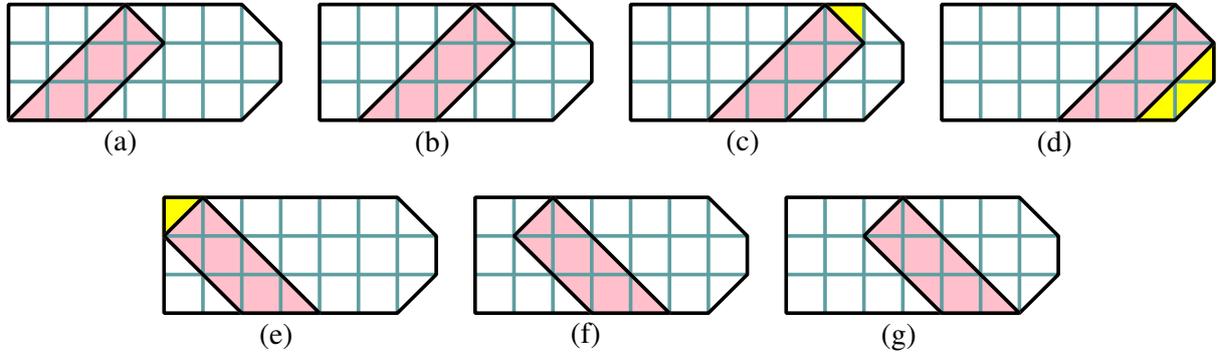


図 4.8: S_9 への P_2 の置き方 (7 通り)

☆ (c), (d), (e) の不可能性: 黄色のタイルを埋めることができない。

☆ (a) の不可能性: 左上の 9 タイルからなる部分を考える。 P_2 以外のピースで合計タイル数が 9 となるのは、 P_3 (6 タイル) と P_5 (3 タイル) の組合せのみ。この部分への P_3 の置き方で補題 4.3.1 を満たすものは、対称性を考慮すると 1 通りしかないが、残りがタイル数 1 の部分とタイル数 2 の部分に分断されてしまう。

☆ (b) の不可能性: 左に 15 タイルからなる部分があるが、 P_2 以外のピースで合計タイル数が 15 となる組合せはない。

☆ (f) の不可能性: 右の 19 タイルからなる部分を考える。 P_2 以外のピースで合計タイル数が 19 となるのは、 P_1 (10 タイル) と P_3 と P_5 の組合せのみ。この部分の唯一の 2×2 正方形は P_1 によって被覆されるが、残った部分に P_3 を置くことができない。

☆ (g) の不可能性: 右の部分には 2×2 正方形がないので、 P_1 は左の部分に置かれる。しかし、 P_1 をどの向きで置いても、タイル数 3 未満の部分が残されてしまう。

■ S_{10} の不可能性

S_{10} の敷き詰め不可能性を示すために、 P_2 の置き方を考える。対称性を考慮すると、補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.9 の 7 通りのみである。各場合について不可能性を示す。

☆ (c), (g) の不可能性: 黄色のタイルを埋める手段がない。

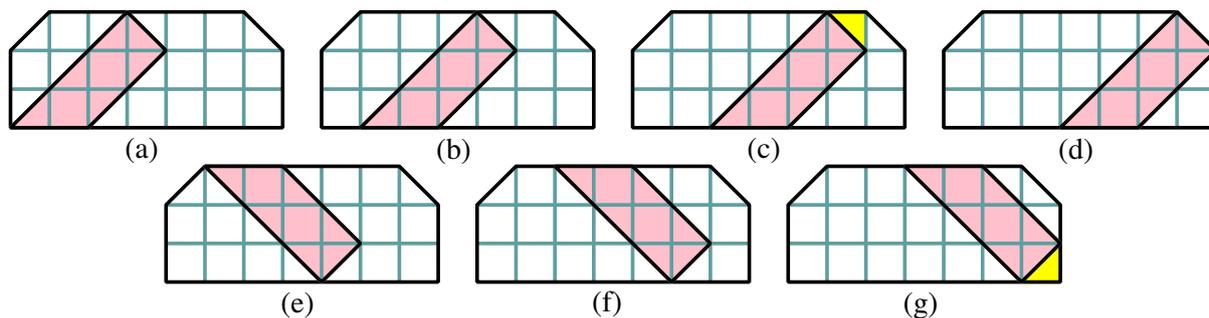


図 4.9: S_{10} への P_2 の置き方 (7通り)

☆ (a) の不可能性: 左上の8タイルからなる部分を考える. タイル数8となるのは P_4 を二つ使う組合せのみであるが, 形が合わず置くことができない.

☆ (b) の不可能性: 左の部分には 2×2 正方形がないので, P_1 は右の部分に置かれる. しかし, P_1 をどの向きで置いても, タイル数3未満の部分が残されてしまう.

☆ (d) の不可能性: 右下は P_4 を置くしかない. 次に, P_1 をどこに置くか決める. これには, 図 4.10 に示す 11 通りがある. 図中で水色で示されているのは, P_1 を置いた後にバックトラックで確定するピースである. すべての置き方で, 埋める手段がない黄色のタイルができています.

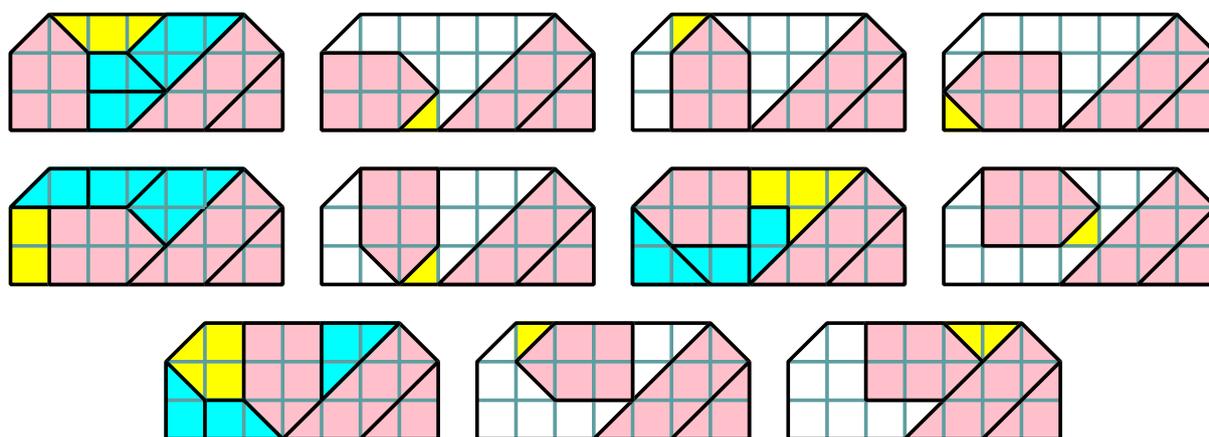


図 4.10: (d) への P_1 の追加の仕方 (11通り)

☆ (e) の不可能性: さらに P_1 を追加することを考えると, その方法は図 4.11 の 3 通り. 左の二つは, 黄色で示したタイルを埋める手段がない. 三つ目の置き方では, タイル数4の部分ができるのでそこには P_4 を置くしかない. ここまで進めたものを (e-1) とする.

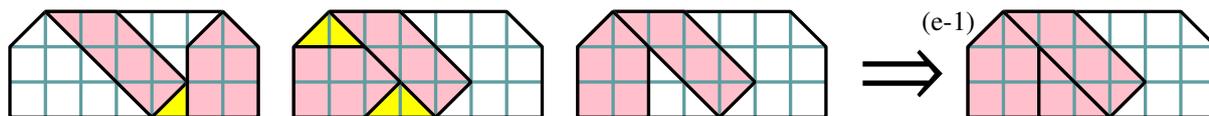


図 4.11: (e) への P_1 の追加の仕方 (3通り)

次に, (e-1) に二つ目の P_4 を追加する. その方法は図 4.12 の 8通り. 図中で水色で示されているのは, 二つ目の P_4 を置いた後に確定するピースである. 全ての置き方で, 埋めることのできない黄色のタイルができています.

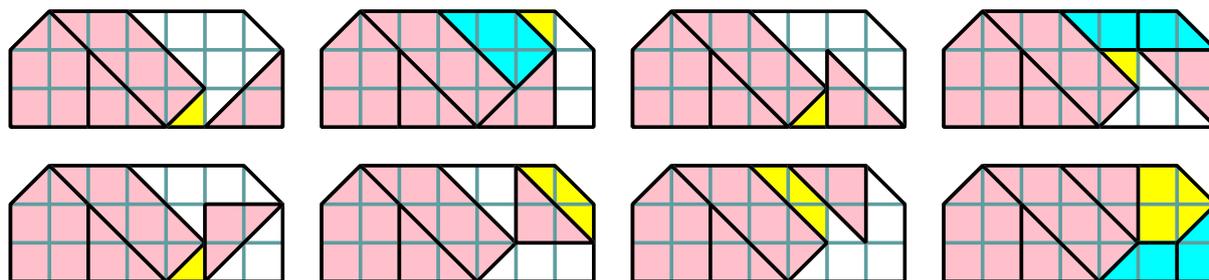


図 4.12: (e-1) への P_4 の追加の仕方 (8通り)

☆ (f) の不可能性: さらに P_1 を追加することを考えると, その方は図 4.13 の 5通り. それぞれ, 黄色で示したタイルを埋める手段がない.

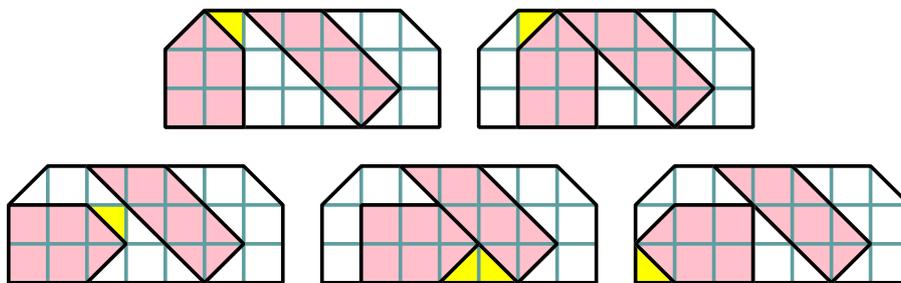


図 4.13: (f) への P_1 の追加の仕方 (5通り)

■ S_{11} の不可能性

S_{11} の敷き詰め不可能性を示すために, P_2 の置き方を考える. 対称性を考慮すると, 補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.14 の 7通りのみである. 各場合について不可能性を示す.

☆ (a), (d), (e), (f) の不可能性: 黄色タイルを埋めることができない.

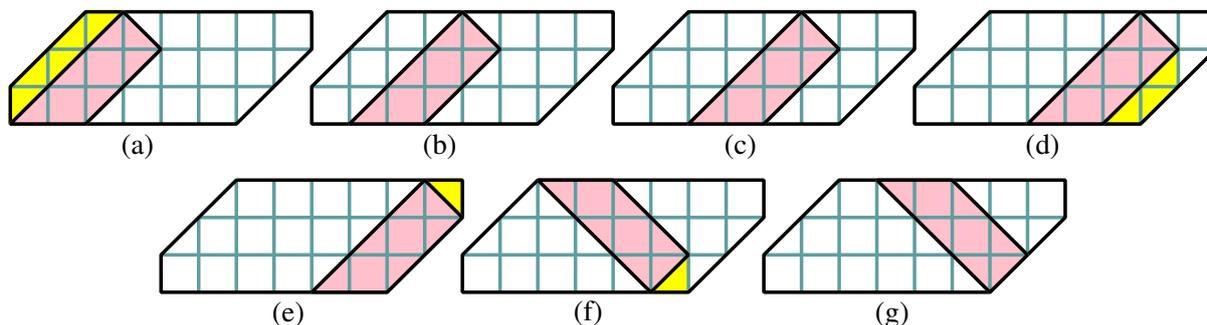


図 4.14: S_{11} への P_2 の置き方 (7通り)

☆ (b) の不可能性: 右上の唯一の 2×2 正方形に合わせて P_1 を置くしかないが, どちらの向きに置いても, P_2 の右上にタイル数 1 の部分が残ってしまう.

☆ (c) の不可能性: 2×2 正方形がないので, P_1 を置くことができない.

☆ (g) の不可能性: 左の部分は外周に長さ 1 の辺を 2 本, 右の部分は外周に長さ 1 の辺を 1 本を持つ. また, 左側の長さ 1 外周辺 2 本は離れているため, 同一の P_5 に含まれない. 補題 4.3.2 より, P_5 が三つ必要であることになる.

■ S_{12} の不可能性

S_{12} の敷き詰め不可能性を示すために, P_2 の置き方を考える. 対称性を考慮すると, 補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.18 の 12 通りである. 各場合について不可能性を示す.

☆ (b), (c), (d), (f), (g), (j), (k), (l) の不可能性: 図中の黄色タイルを埋めることができない.

☆ (a), (i) の不可能性: 唯一の 2×2 正方形に合わせて P_1 を置くしかないが, どの向きに置いても P_2 の右上にタイル数 1 の部分が残ってしまう.

☆ (h) の不可能性: 2×2 正方形がないので, P_1 を置くことができない.

☆ (e) の不可能性: 図 4.16 より, P_1 の置き方は 9 通り存在するが, (e)-2, (e)-3, (e)-4, (e)-5, (e)-6, (e)-7, (e)-9 の置き方では黄色のタイルを埋めることができない.

図 4.17 より P_3 の置き方は, (e)-1 には 6 通り, (e)-8 には 4 通り存在するが, いずれの場合も黄色のタイルを埋めることができない.

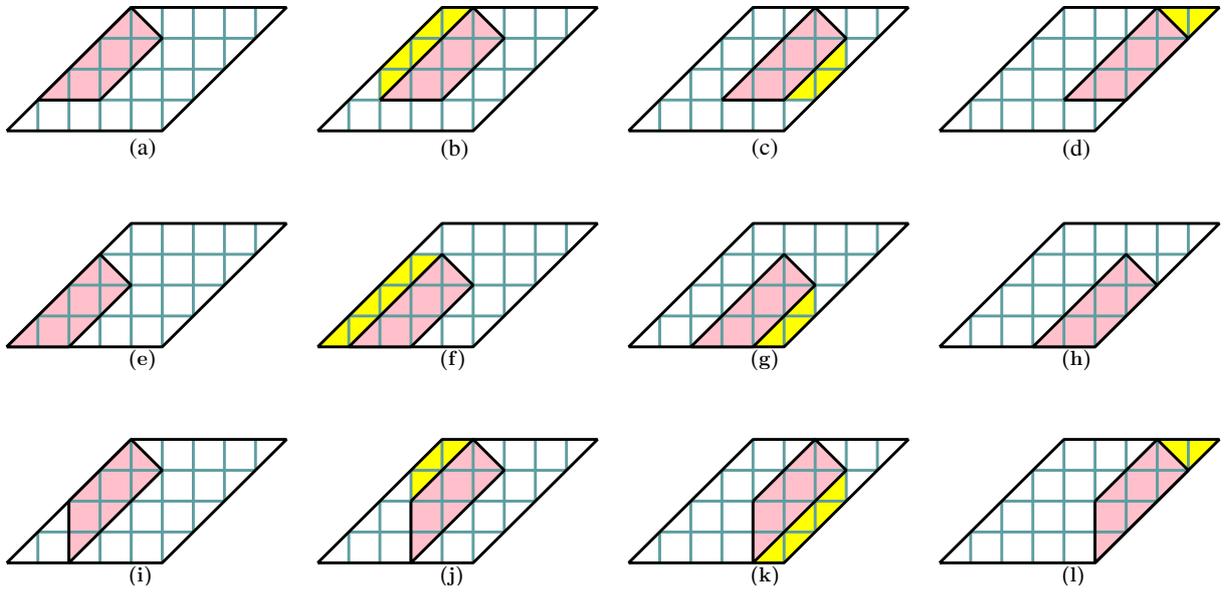


図 4.15: S_{12} への P_2 の置き方 (12通り)

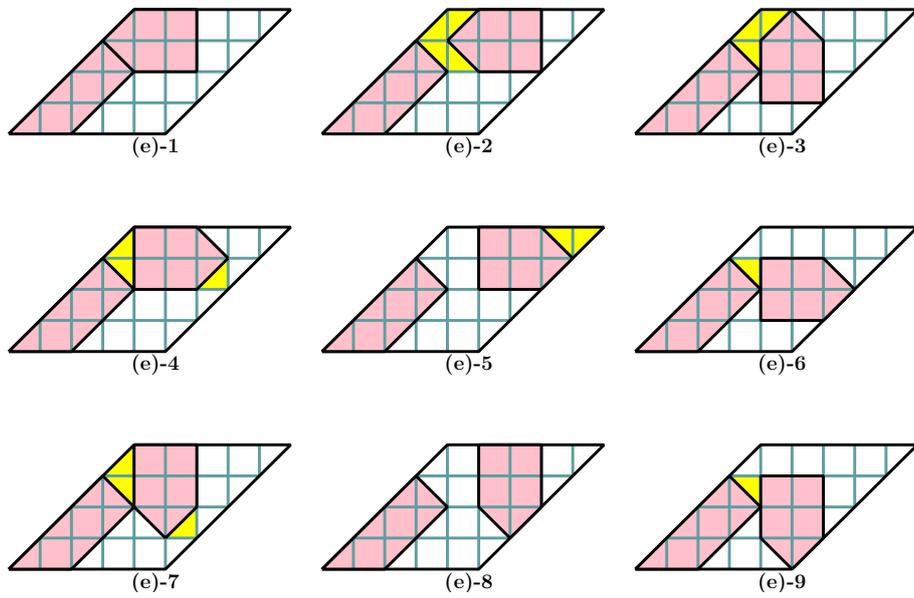


図 4.16: S_{12} への P_1 の置き方 (9通り)

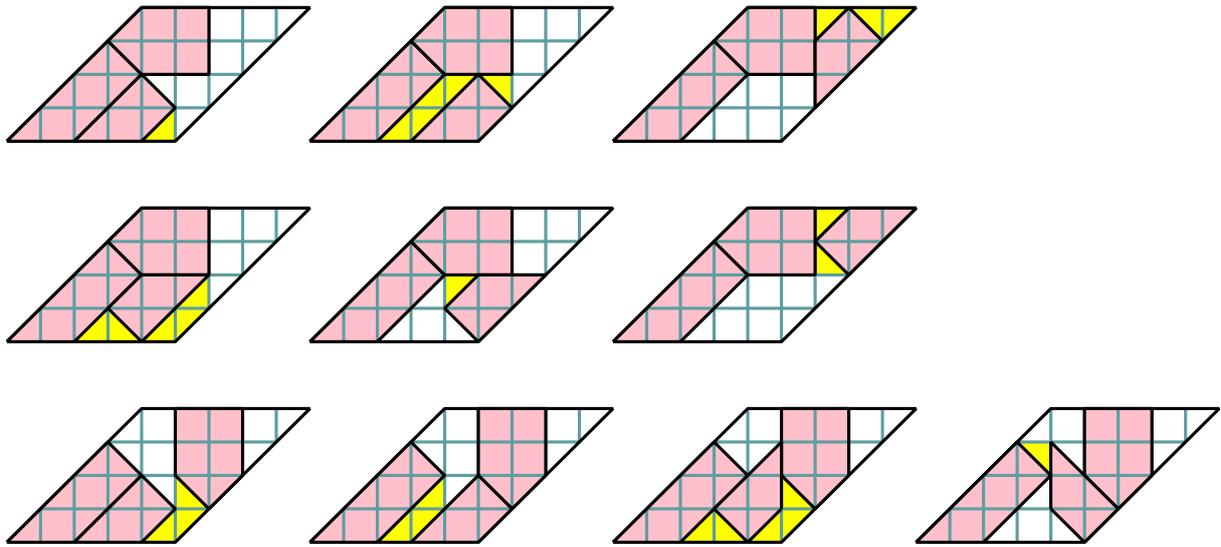


図 4.17: S_{12} への P_3 の置き方

■ S_{13} の不可能性

S_{13} の敷き詰め不可能性を示すために, P_2 の置き方を考える. 対称性を考慮すると, 補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.18 の 10 通りである. 各場合について不可能性を示す.

☆ (b), (c), (e), (f), (g), (h), (i), (j) の不可能性: 図中の黄色タイルを埋めることができない.

☆ (d) の不可能性: 残りの部分には 2×2 正方形がないので, P_1 を置くことができない.

☆ (a) の不可能性: 補題 4.3.2 より, 一つの P_5 の置き方は図 4.19 の 4 通りであるが, 埋めることができない黄色のタイルが現れないのは図中の一番左の置き方のみである.

このとき, P_1 の置き方は図 4.20 の 8 通りであるが, (a)-1 から (a)-7 の場合は黄色タイルを埋めることができず, (a)-8 の場合は, 残った部分の正方形タイルは 4 枚であるのに対し, 残ったピースの正方形タイルの合計は 5 枚であることから, 補題 4.3.1 より, 残った部分を埋めることはできない.

■ S_{14} の不可能性

S_{14} の敷き詰め不可能性を示すために, P_5 の置き方を考える. 補題 4.3.2 より, 二枚の P_5 は左右に一つずつ存在する長さ 1 の辺を被覆するのに使われる. 左側の長さ 1 の辺を被覆する置き方に着目すると, P_5 の置き方は図 4.21 の 4 通り考えられるが, もう一枚の P_5 が右側の長さ 1 の辺に置かれることを考慮すると, 図中の黄色のタイルを埋められな

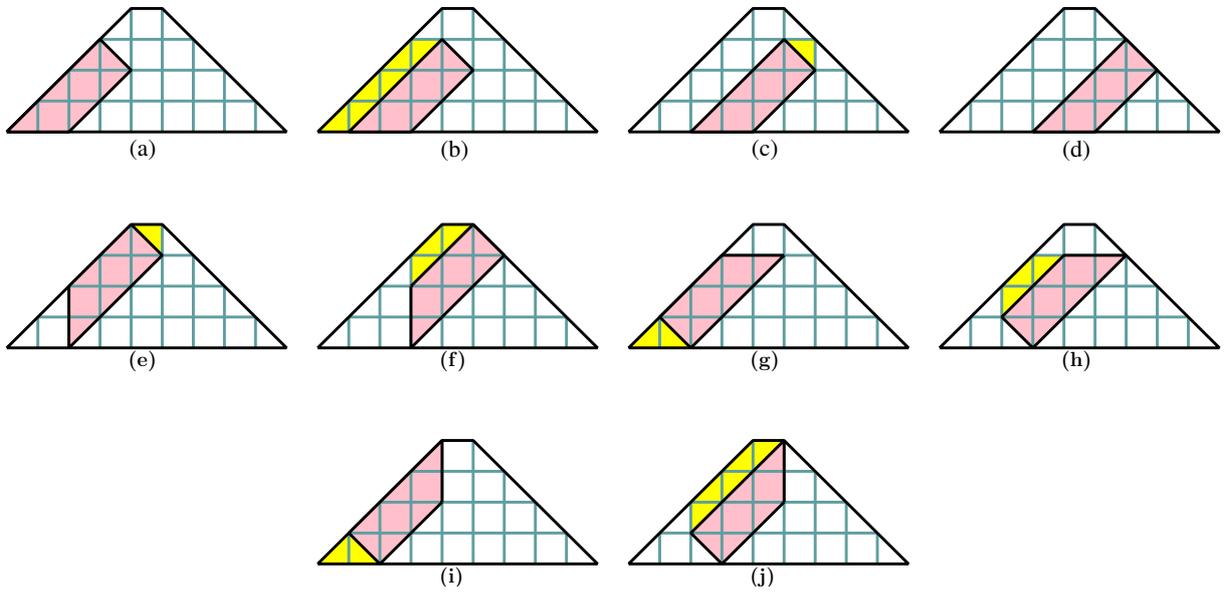


図 4.18: S_{13} への P_2 の置き方 (10通り)

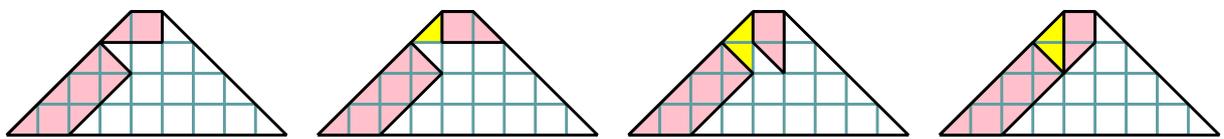


図 4.19: S_{13} への P_5 の置き方 (4通り)

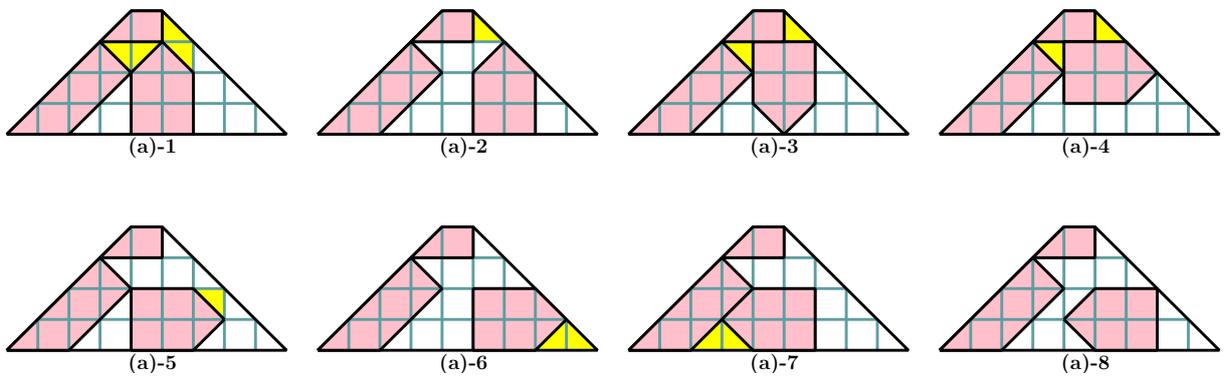


図 4.20: S_{13} への P_1 の置き方 (8通り)

いので、 P_5 の向きは一通りである。また、対称性より同様の議論が右側の P_5 にも成り立つので、二枚の P_5 の置き方は一意に決まる。

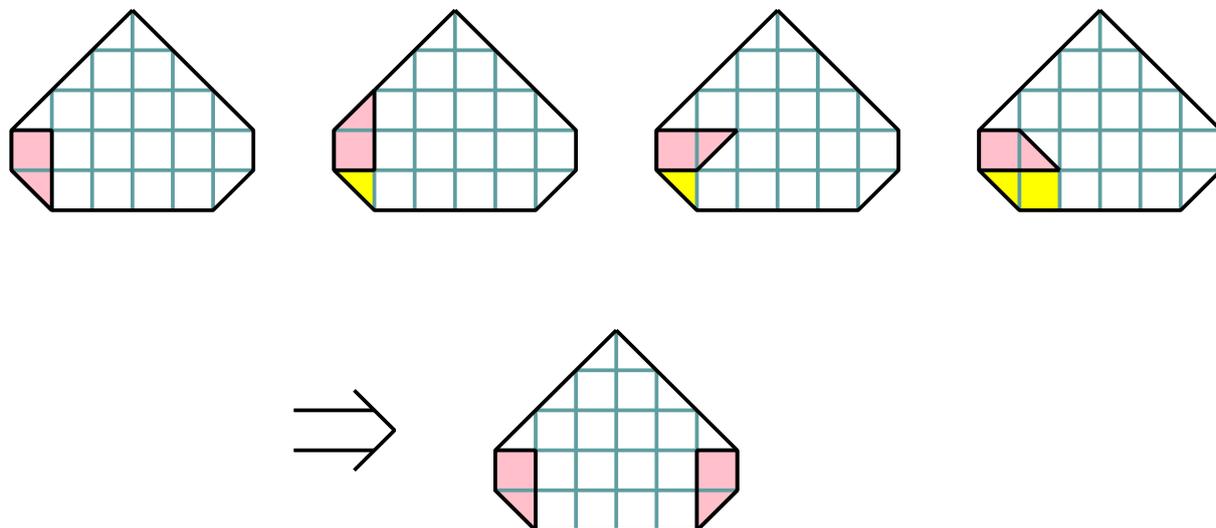


図 4.21: S_{14} への P_5 の置き方

次に、 P_2 の置き方を考える。対称性を考慮すると、補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.22 の 8 通りである。各場合について不可能性を示す。

☆ (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h) の不可能性: 図中の黄色タイルを埋めることができない。

☆ (a) の不可能性: P_5 の置き方は図 4.23 の 9 通り考えられるが、(a)-1, (a)-2, (a)-3, (a)-4, (a)-5, (a)-6, (a)-9 の置き方では図中の黄色タイルを埋めることができない。

(a)-7 の場合、一つの P_4 の置き方は図 4.23 の一通りに決まるが、このとき黄色のタイルを埋められない。

(a)-8 の場合、一つの P_3 の置き方は図 4.25 の 4 通り存在するが、いずれの場合も黄色のタイルを埋められない。

■ S_{15} の不可能性

補題 4.3.2 より、右側の長さ 1 の辺を被覆するために一枚の P_5 を使用する。

S_{15} の敷き詰め不可能性を示すために、 P_2 の置き方を考える。補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.26 の 20 通りである。各場合について不可能性を示す。

☆ (b), (d), (f)-(h), (j), (m)-(p), (r), (t) の不可能性: 図中の黄色タイルを埋めることができない。

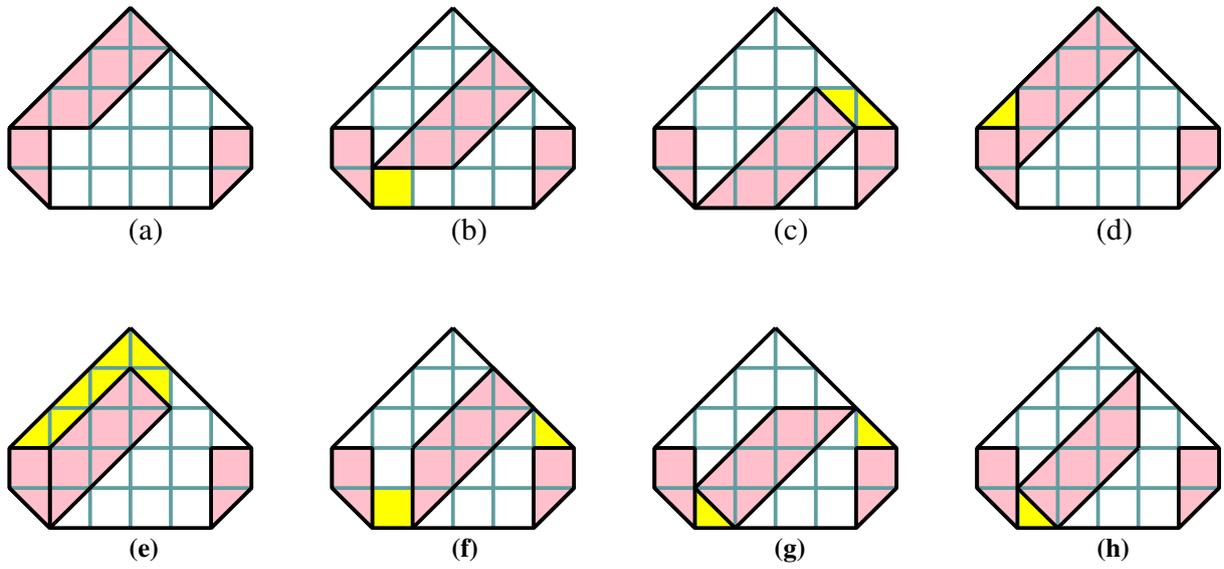


図 4.22: S_{14} への P_2 の置き方 (8通り)

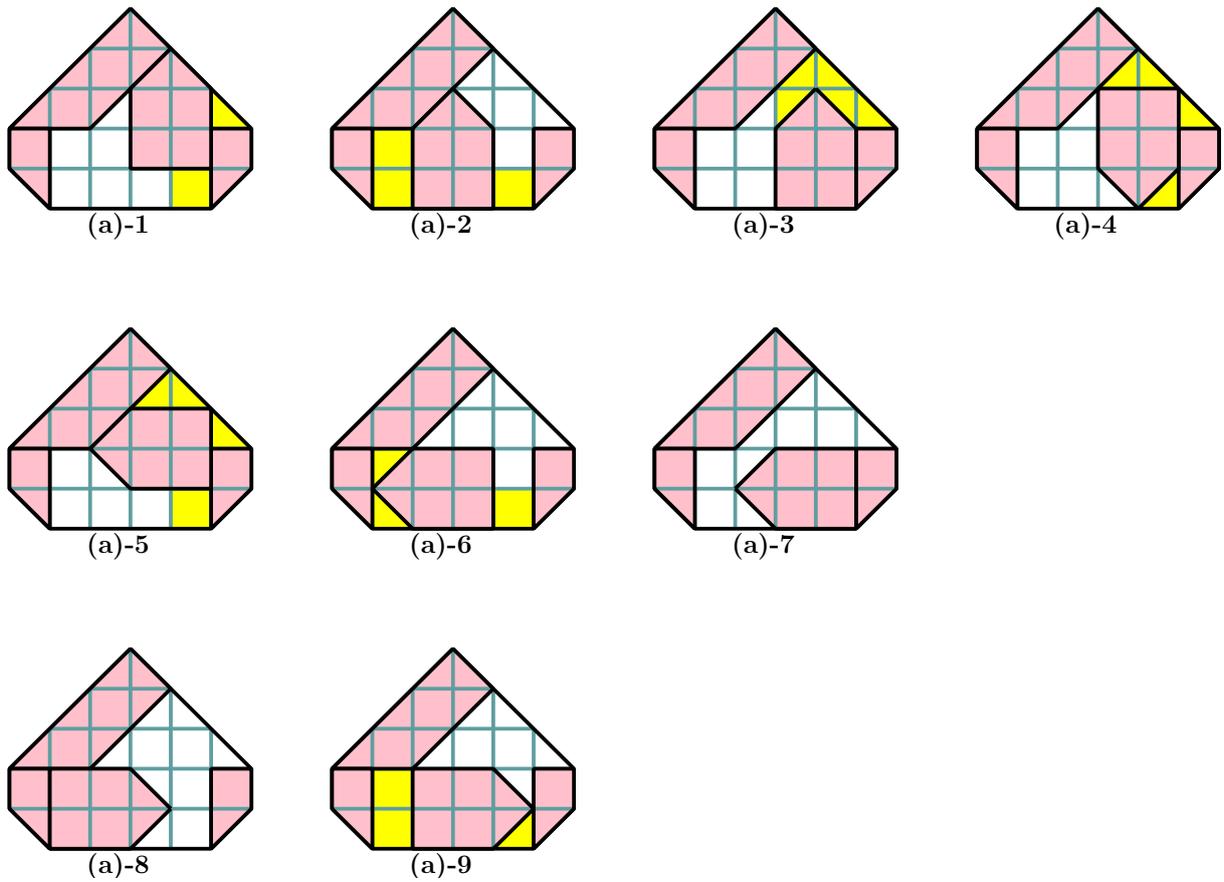


図 4.23: S_{14} への P_1 の置き方 (9通り)

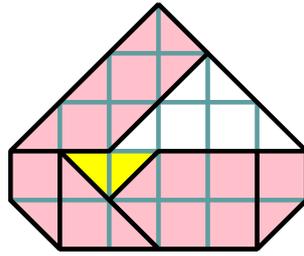


図 4.24: S_{14} への P_4 の置き方

(a)-8

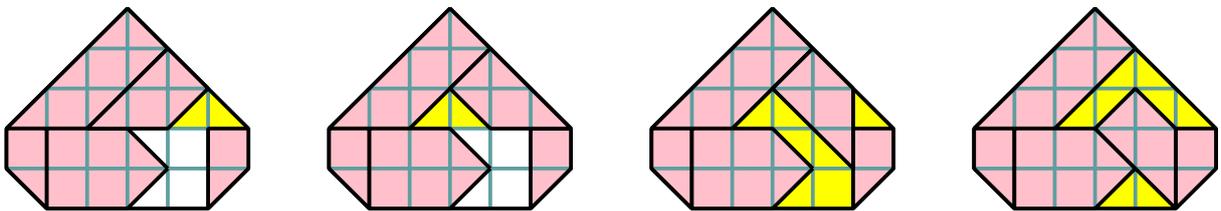


図 4.25: S_{14} への P_3 の置き方

☆ (l), (q), (s) の不可能性: 2×2 正方形がないので, P_1 を置くことができない.

☆ (a), (e) 不可能性: P_5 の置き方は図 4.27 のそれぞれ 4 通り存在するが, どちらも図の最も左の置き方以外では黄色のタイルを埋められない.

このとき, もう一枚の P_5 は補題 4.3.2 より, 左側の長さ 1 の辺を被覆するために使用されるが, 右側の P_5 の下の黄色のタイルを埋められるピースは残っていない.

☆ (c) の不可能性: 右側の長さ 1 の辺を被覆する P_5 の置き方は 4 通り存在するが, 埋められないタイルが出ないような置き方は 1 通りに決まる. また, 左側の長さ 1 の辺を被覆するためにもう一枚の P_5 が使用される. さらに, 上の 4 タイルの部分埋めるために一枚の P_4 が使用される. このとき, P_1 の置き方は図 4.29 の 7 通り存在するが, いずれの場合も黄色のタイルを埋められない.

☆ (n) の不可能性: 右側の長さ 1 の辺を被覆する P_5 の置き方は 4 通り存在するが, 埋められないタイルが出ないような置き方は 1 通りに決まる. この P_5 の下の部分を埋めるために, もう一枚の P_5 の置き方も決まる. さらに, P_2 と一枚目に置いた P_5 に挟まれた部分を埋めるために一枚の P_4 の置き方も決まる. このとき図 4.30 の黄色のタイルを埋められない.

☆ (i) の不可能性: P_1 の置き方は図 4.31 の 9 通り存在する.

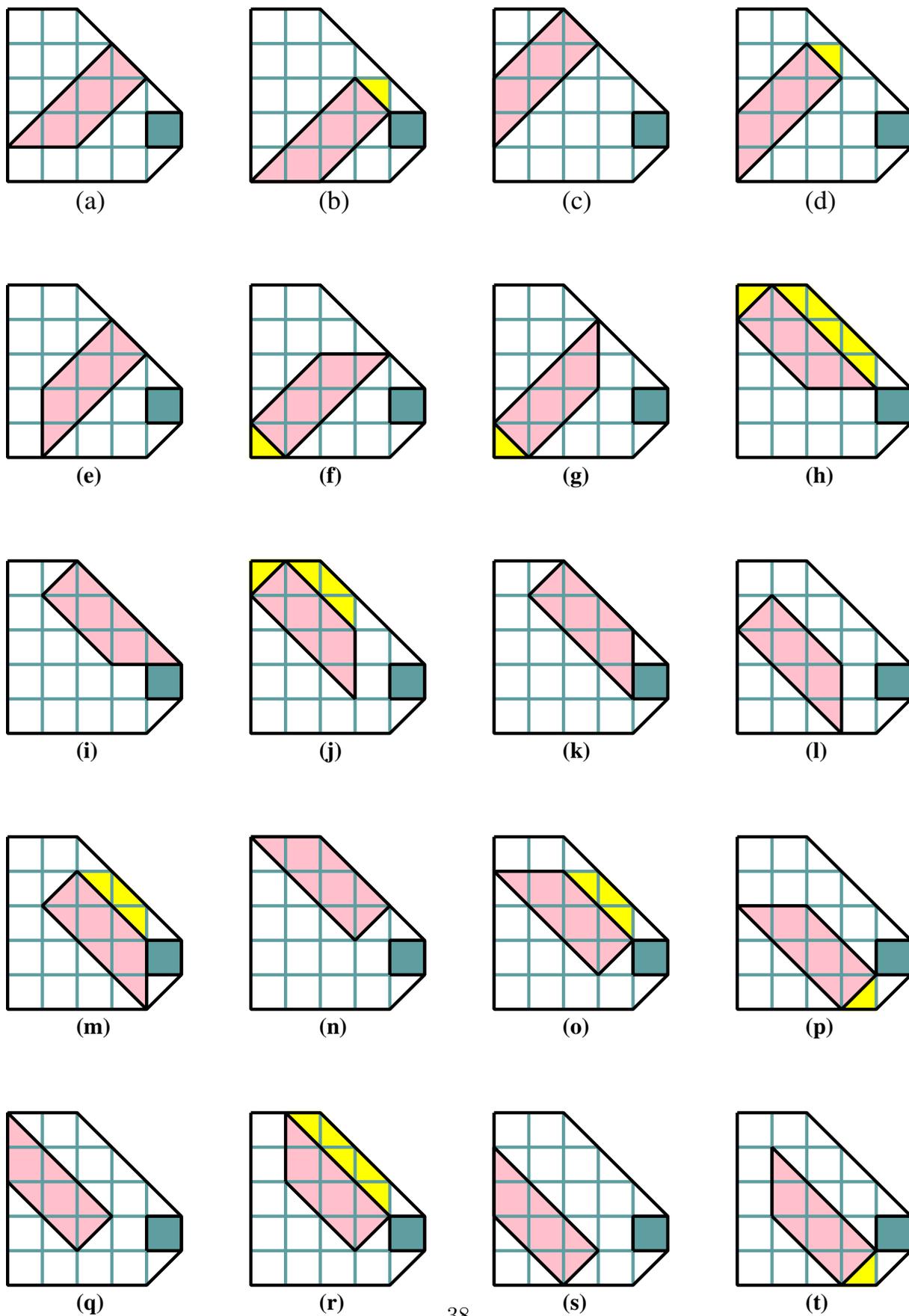


図 4.26: S_{15} への P_2 の置き方 (20通り)

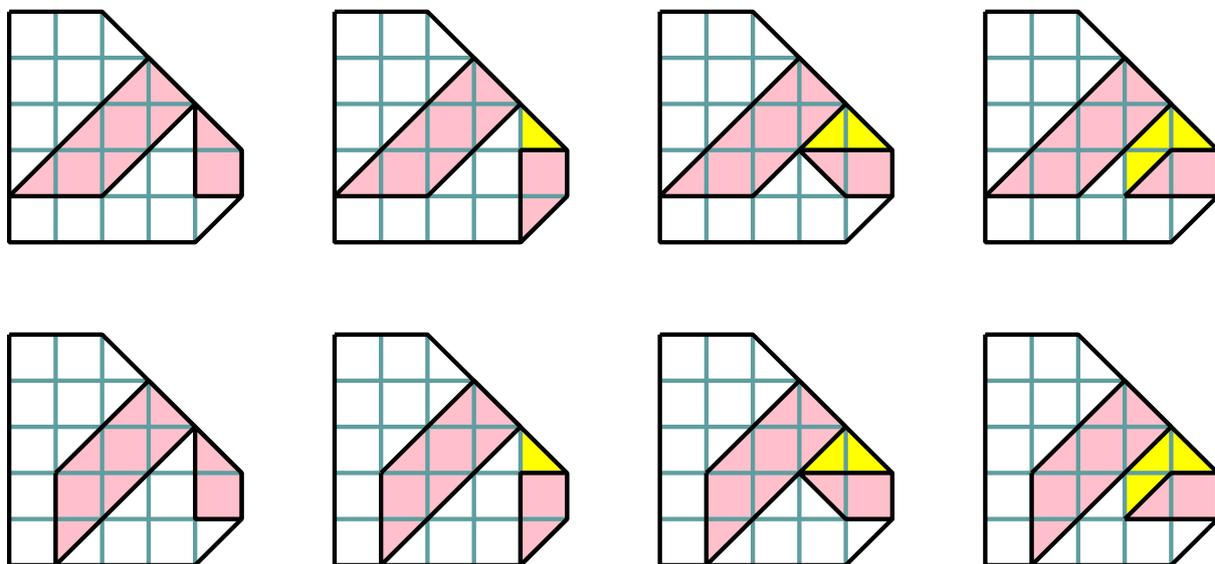


図 4.27: S_{15} への一枚の P_5 の置き方

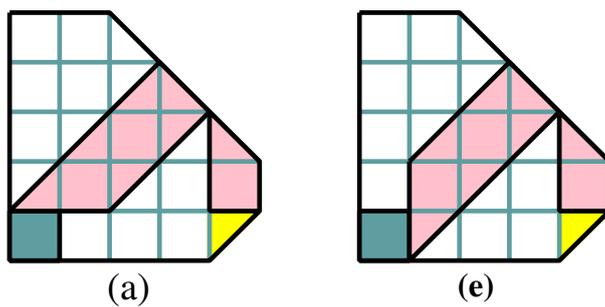


図 4.28: S_{15} への二枚の P_5 の置き方

(c)

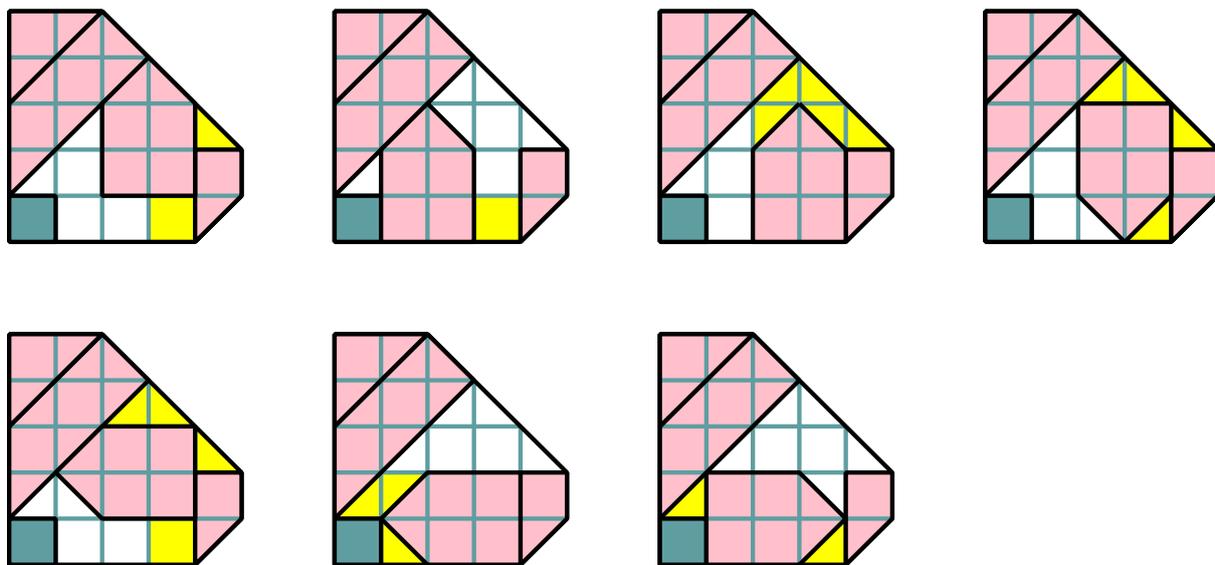


図 4.29: (c) への P_1 の置き方

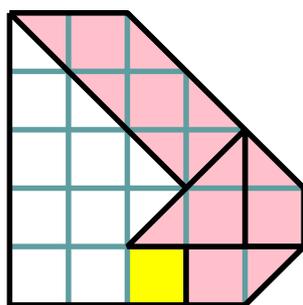


図 4.30: (n) への P_5, P_4 の置き方

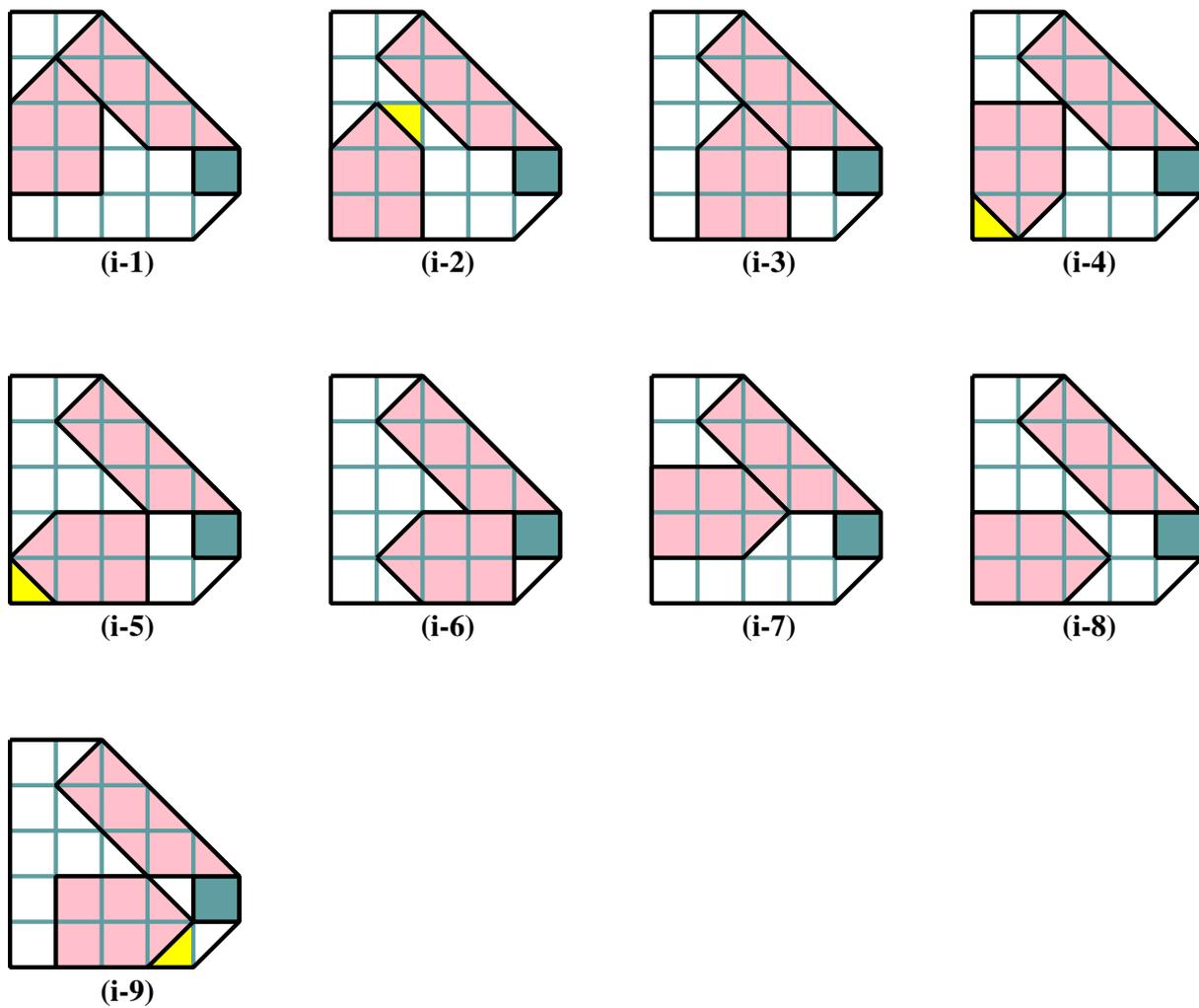


図 4.31: (i) への P_1 の置き方

(i)-2, (i)-4, (i)-5, (i)-9 の場合は黄色のタイルを埋められない. (i)-3 の場合は, 右側の 7 タイルの部分埋めるピースの組み合わせは存在しない. (i)-7 の場合は, 上側の 6 タイルの部分埋めるピースの組み合わせは存在しない. (i)-1 と (i)-8 の場合は P_3 の置き方が図 4.32 の通りそれぞれ 2 通りずつ存在するが, いずれの場合も黄色のタイルを埋められない. (i)-6 の場合は, P_3 の置き方は図 4.33 の 5 通り存在するが, 右上の置き方では 7 タ

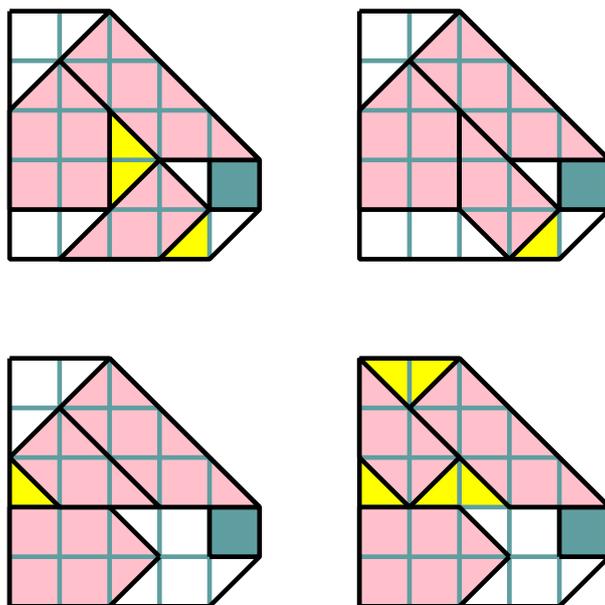


図 4.32: (i)-1, (i)-8 への P_3 の置き方

イルの部分埋めるピースの組み合わせが存在せず, その他の場合は黄色のタイルを埋められない.

☆ (k) の不可能性: P_2 の右側の 1 タイルの部分埋めるために一枚の P_5 の置き方が決まり, それによって二枚目の P_5 の置き方も決まる. さらに, 二枚の P_5 が使われたことから, 残った部分の上部を埋めるために一枚の P_4 の置き方も決まる. このとき, P_1 の置き方は図 4.34 の 7 通り存在するが, 図の左上の置き方では P_3 を置くことが出来ず, その他の場合は黄色のタイルを埋められない.

■ S_{16} の不可能性

S_{16} の敷き詰め不可能性を示すために, P_2 の置き方を考える. 対称性を考慮すると, 補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.35 の 13 通りである. 各場合について不可能性を示す.

☆ (a) の不可能性: 左上の 8 タイルからなる部分を埋めるピースは二つの P_4 に限られるが, どの向きにも置くことができない.

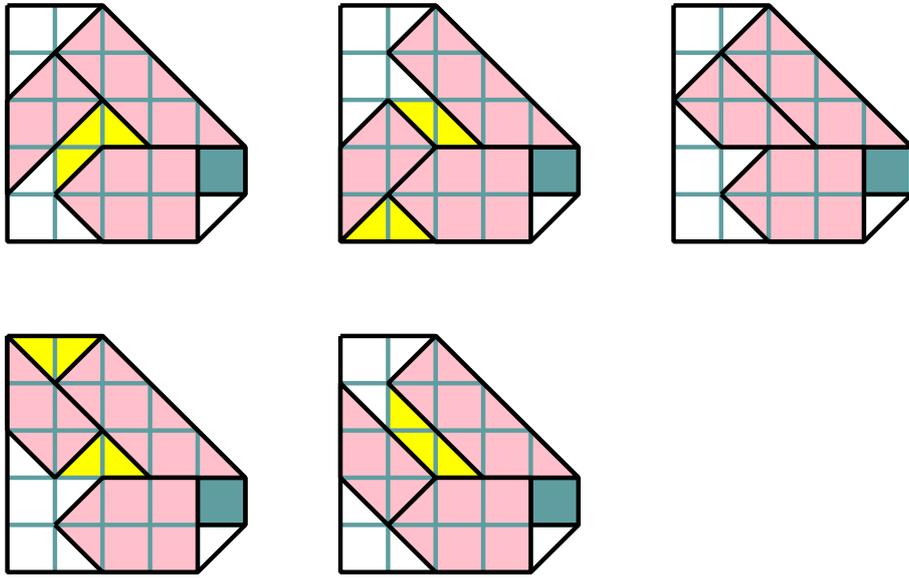


図 4.33: (i)-6 への P_3 の置き方

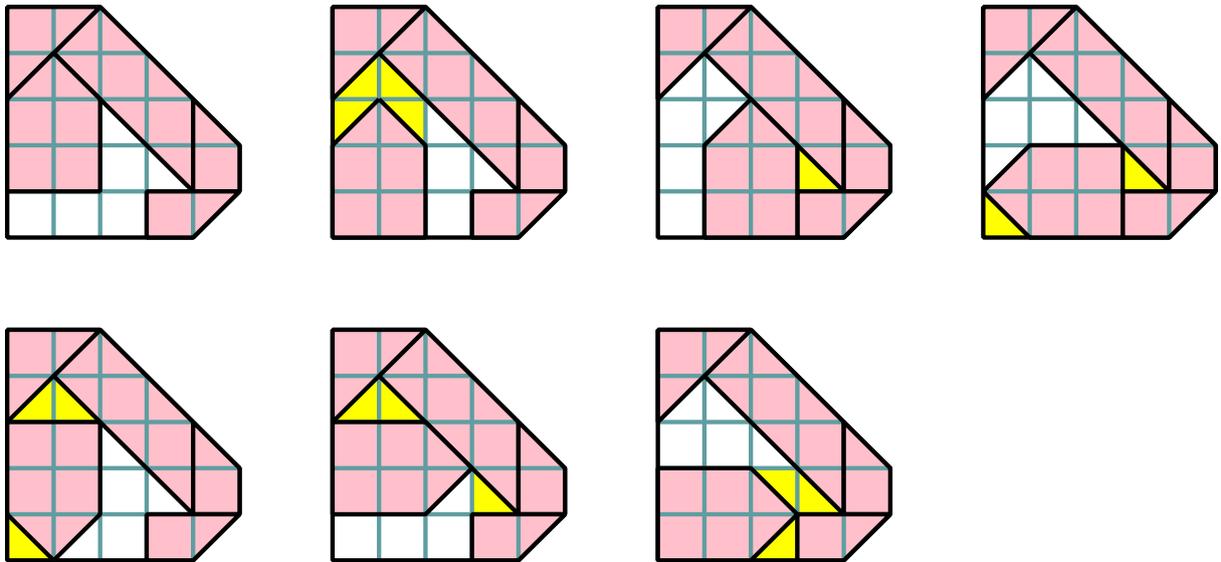


図 4.34: S_{15} への P_1 の置き方 (7通り)

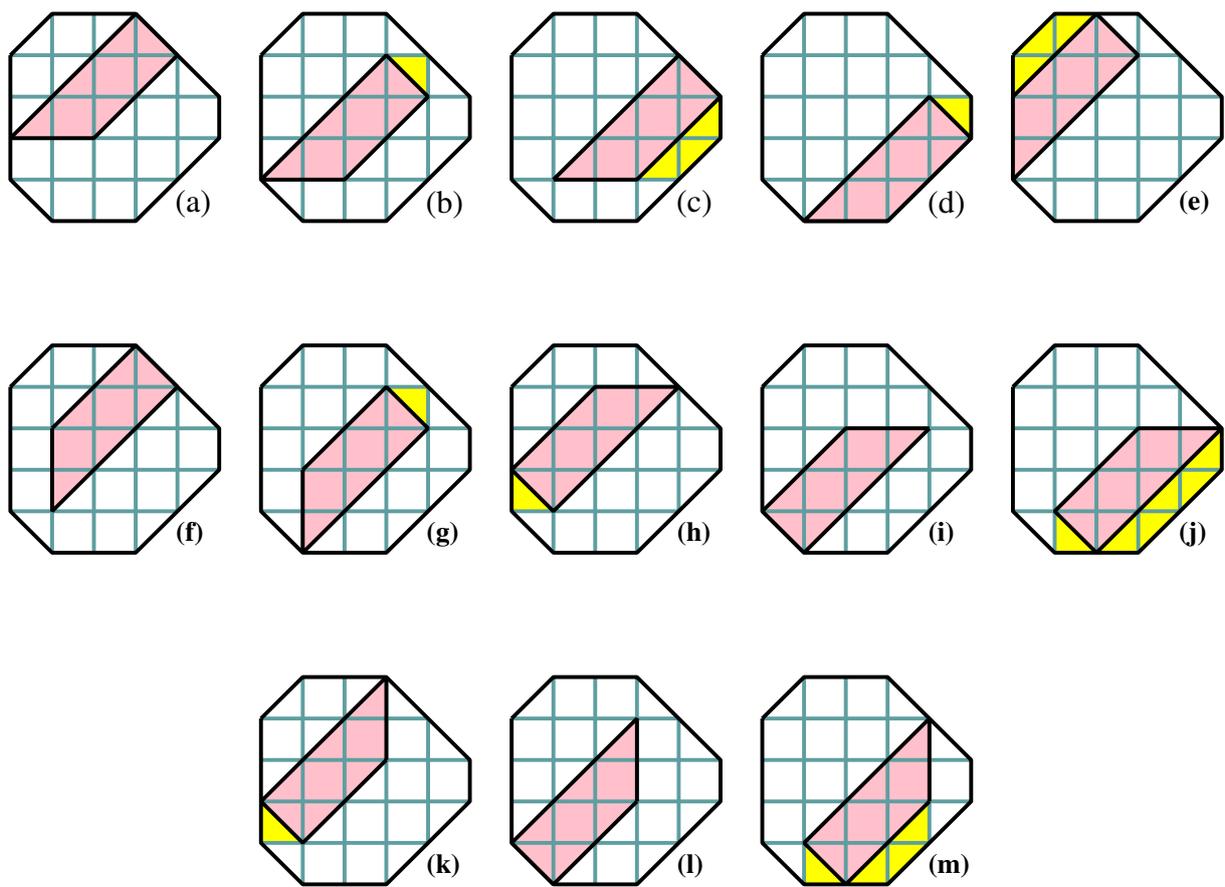


図 4.35: S_{16} への P_2 の置き方 (13通り)

☆ (b), (c), (d), (e), (g), (h), (j), (k), (m) の不可能性: 図中の黄色タイルを埋めることができない.

☆ (f), (l) の不可能性: 2×2 正方形がないので, P_1 を置くことができない.

☆ (i) の不可能性: P_1 の置き方は図 4.36 の二通り存在するが, 図 4.36 の左側の置き方では残った部分の左側の 5 タイルからなる部分を埋めることができず, 図 4.36 の右側の置き方では黄色タイルを埋められない.

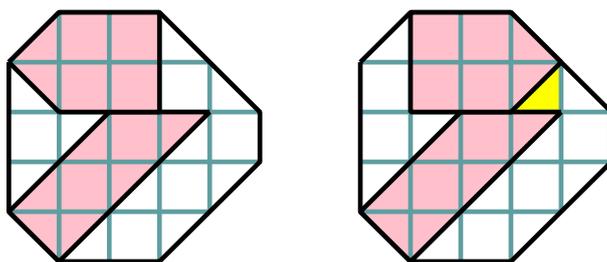


図 4.36: S_{16} への P_1 の置き方 (2 通り)

■ S_{17} の不可能性

S_{17} の敷き詰め不可能性を示すために, P_2 の置き方を考える. 対称性を考慮すると, 補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.37 の 13 通りである. 各場合について不可能性を示す.

☆ (g) の不可能性: 唯一の 2×2 正方形に合わせて P_1 を置くしかないが, どの向きに置いても P_2 の右上のタイルが埋められなくなってしまう.

☆ (h) の不可能性: 2×2 正方形がないので, P_1 を置くことができない.

☆ (b), (c), (d), (e), (f), (i), (j), (k), (l), (m) の不可能性: 図中の黄色タイルを埋めることができない.

☆ (a) の不可能性: 補題 4.3.2 より, 一つの P_5 の, 残った部分の左下への置き方が決まり, その結果 P_1 の置き方も決まる (図 4.38).

このとき, P_3 の置き方は図 4.39 の 11 通り存在するが, いずれも図中の黄色タイルを埋めることができない.

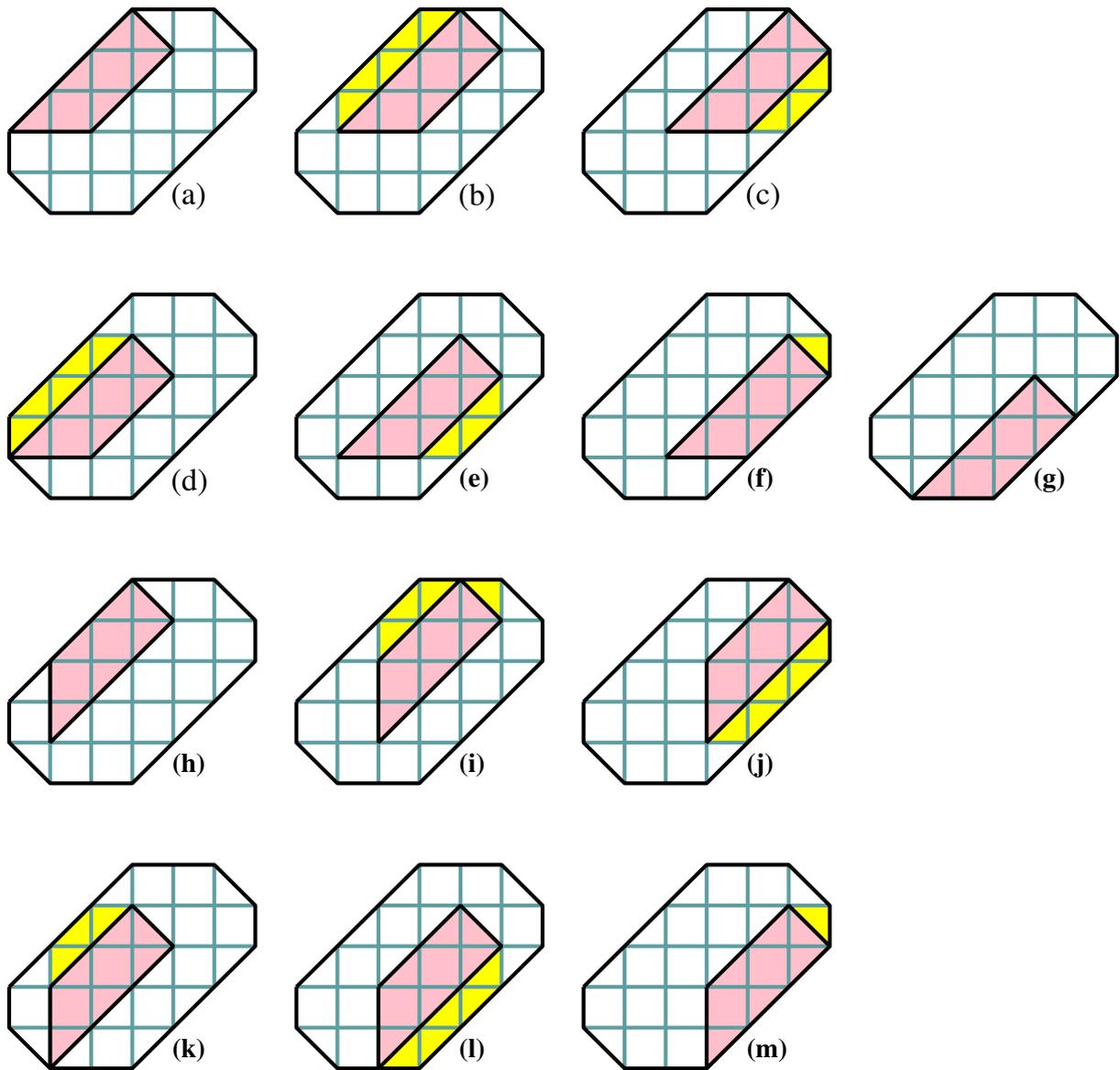


図 4.37: S_{17} への P_2 の置き方 (13通り)

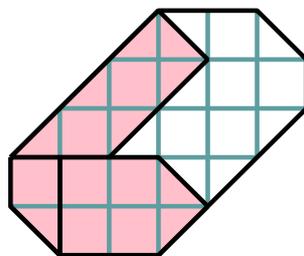


図 4.38: S_{17} への P_5 と P_1 の置き方

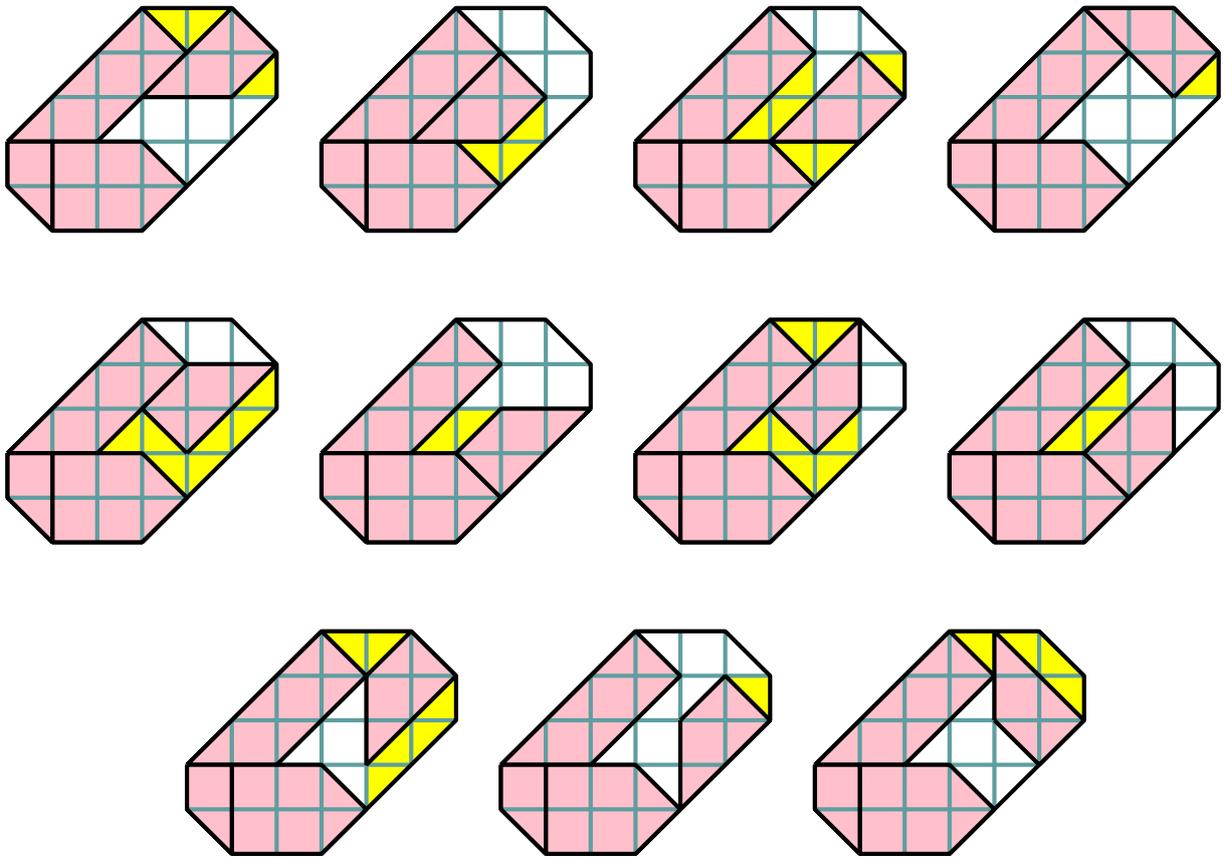


図 4.39: S_{17} への P_3 の置き方 (11通り)

■ S_{18} の不可能性

S_{18} の敷き詰め不可能性を示すために、 P_2 の置き方を考える。対称性を考慮すると、補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.40 の 24 通りである。各場合について不可能性を示す。

☆ (d),(x) の不可能性: 2×2 正方形がないので、 P_1 を置くことができない。

☆ (f),(m) の不可能性: 残った部分への P_1 は唯一で、そのとき黄色タイルを埋めることができない。

☆ (e), (v) の不可能性: どちらの場合も、図 4.42 の通り、 P_1 の置き方が決まり、次に一枚の P_5 の置き方も一通りに決まる。

(e) に P_1 と一枚の P_5 を置いた後の P_3 の置き方は図 4.43 の 11 通り存在するが、いずれの場合も黄色のタイルを埋められない。ここで、(v) の残った部分の形は (e) 左右対称であることを利用すると、同様の議論から (v) の場合も残った部分を埋めることができない。

☆ (l) の不可能性: P_1 の置き方は図 4.44 の 3 通り存在するが、図の最も右の置き方では P_1 の下の部分を埋めるピースの組み合わせは存在せず、その他の置き方では黄色のタイルを埋められない。

☆ (q) の不可能性: P_1 の置き方は図 4.45 の 4 通り存在するが、図の最も左の置き方以外では黄色のタイルを埋められず、 P_1 の置き方は確定する。このとき、残った部分の左に長さ 1 の辺が存在するので、補題 4.3.2 より、これを被覆するために P_5 が使われる。

このとき、 P_3 の置き方は図 4.46 の 8 通り存在するが、いずれの場合も黄色のタイルを埋められない。

☆ (s) の不可能性: P_1 の置き方は図 4.47 の 3 通り存在するが、図の最も左の置き方では P_1 の右の 7 タイルの部分を埋めるピースの組み合わせは存在せず、その他の置き方では黄色のタイルを埋められない。

☆ (a)-(c), (g)-(k), (n)-(p), (r), (t), (u), (w): 図中の黄色タイルを埋めることができない。

■ S_{19} の不可能性

S_{19} の敷き詰め不可能性を示すために、 P_2 の置き方を考える。対称性を考慮すると、補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.48 の 19 通りである。各場合について不可能性を示す。

☆ (m) の不可能性: 2×2 正方形がないので、 P_1 を置くことができない。

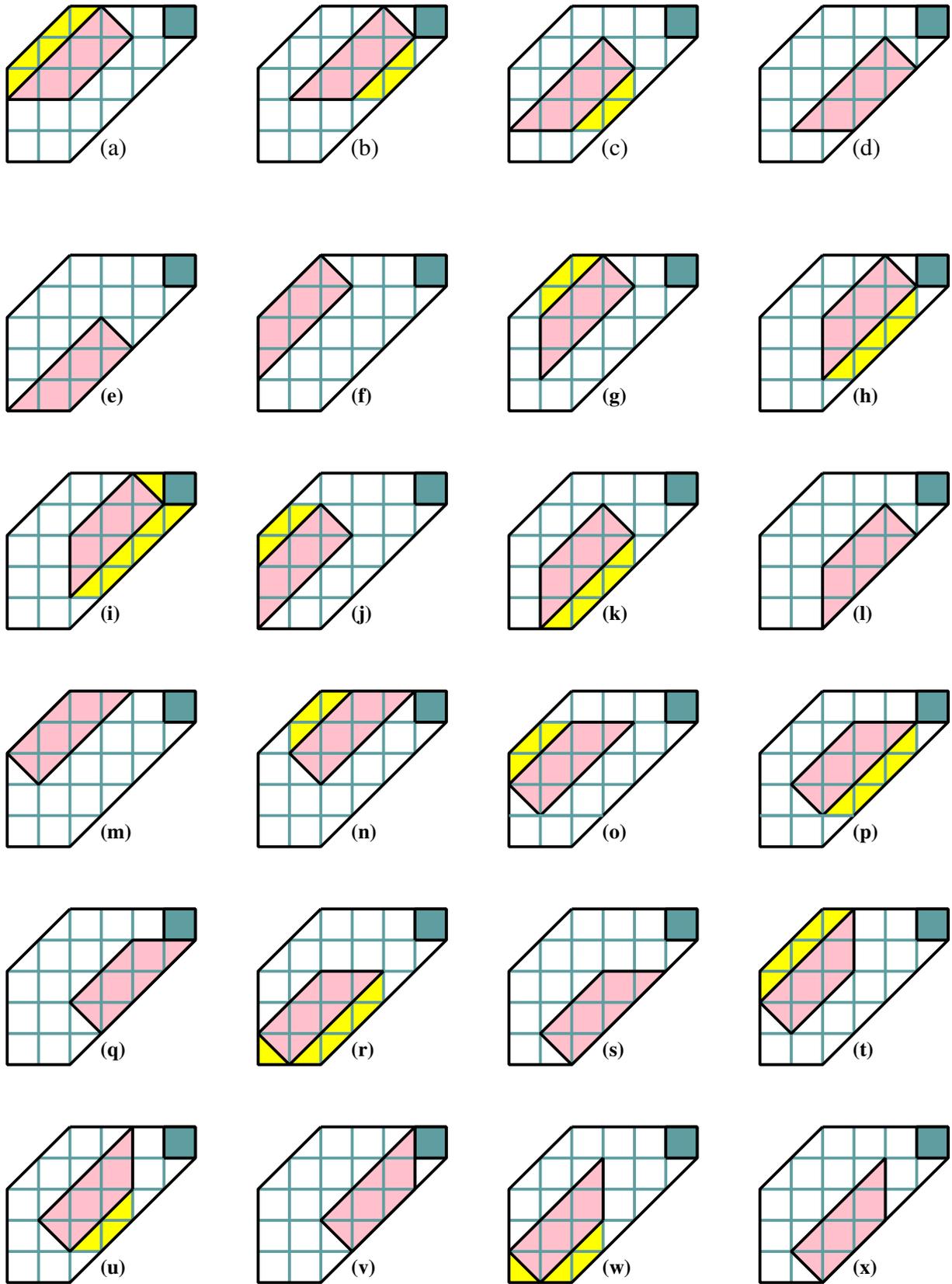


図 4.40: S_{18} への P_2 の置き方 (24通り)

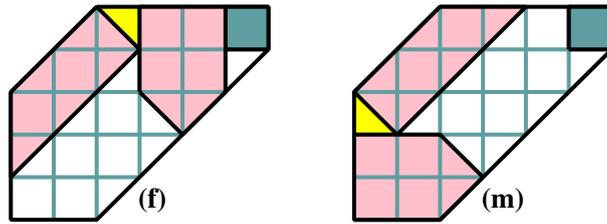


図 4.41: (f), (m) への P_1 の置き方

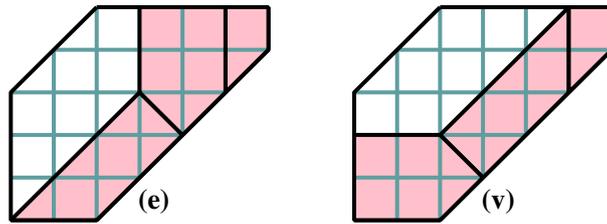


図 4.42: (e), (v) への P_1, P_5 の置き方

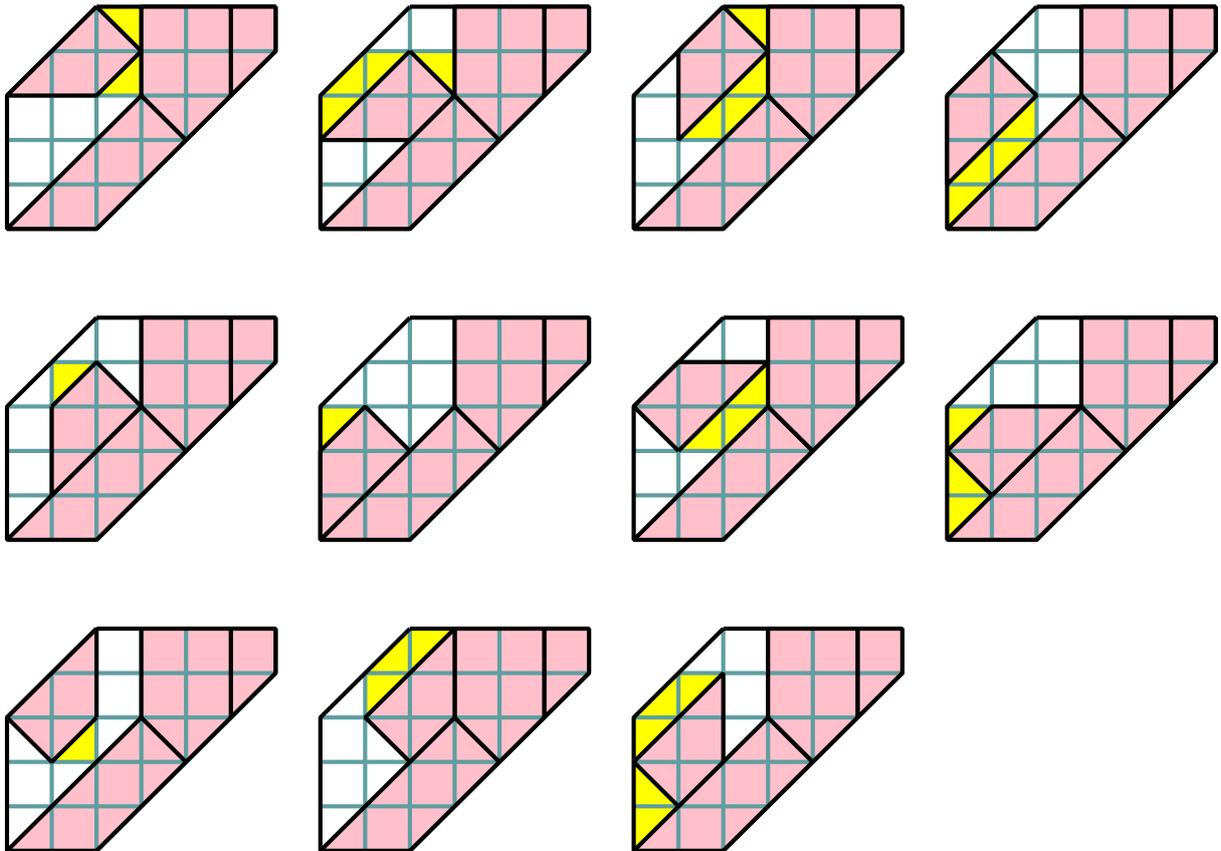


図 4.43: (e) への P_3 の置き方 (11通り)

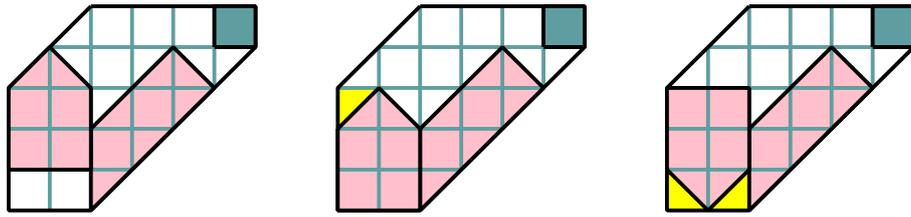


図 4.44: (q) への P_1 の置き方 (3通り)

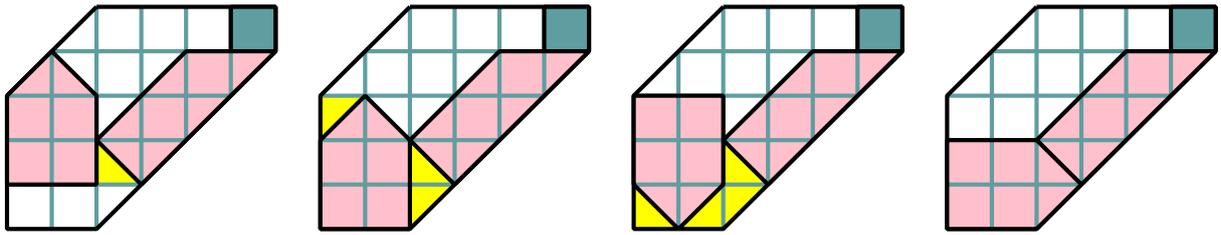


図 4.45: (q) への P_1 の置き方 (4通り)

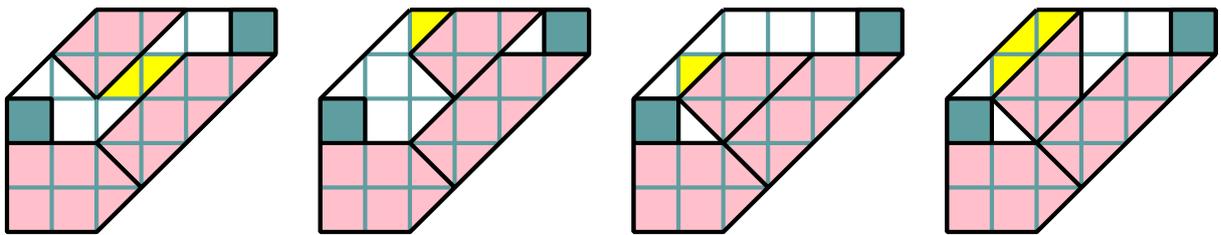
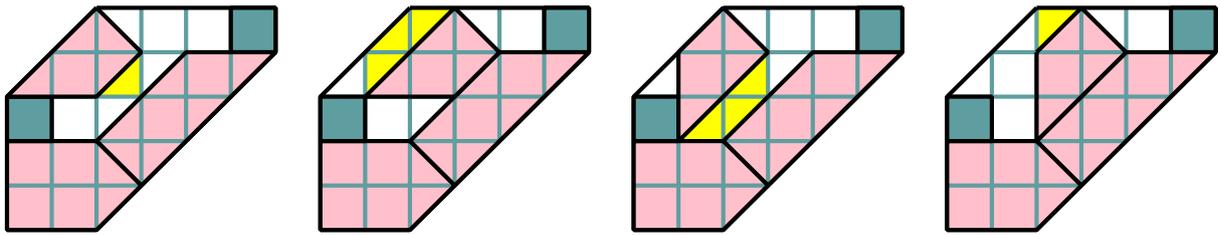


図 4.46: (q) への P_3 の置き方 (8通り)

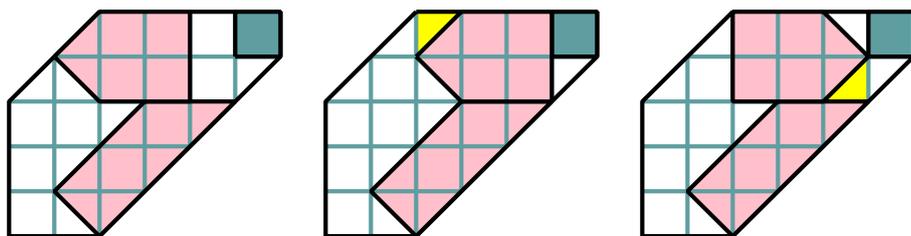


図 4.47: (s) への P_1 の置き方 (3通り)

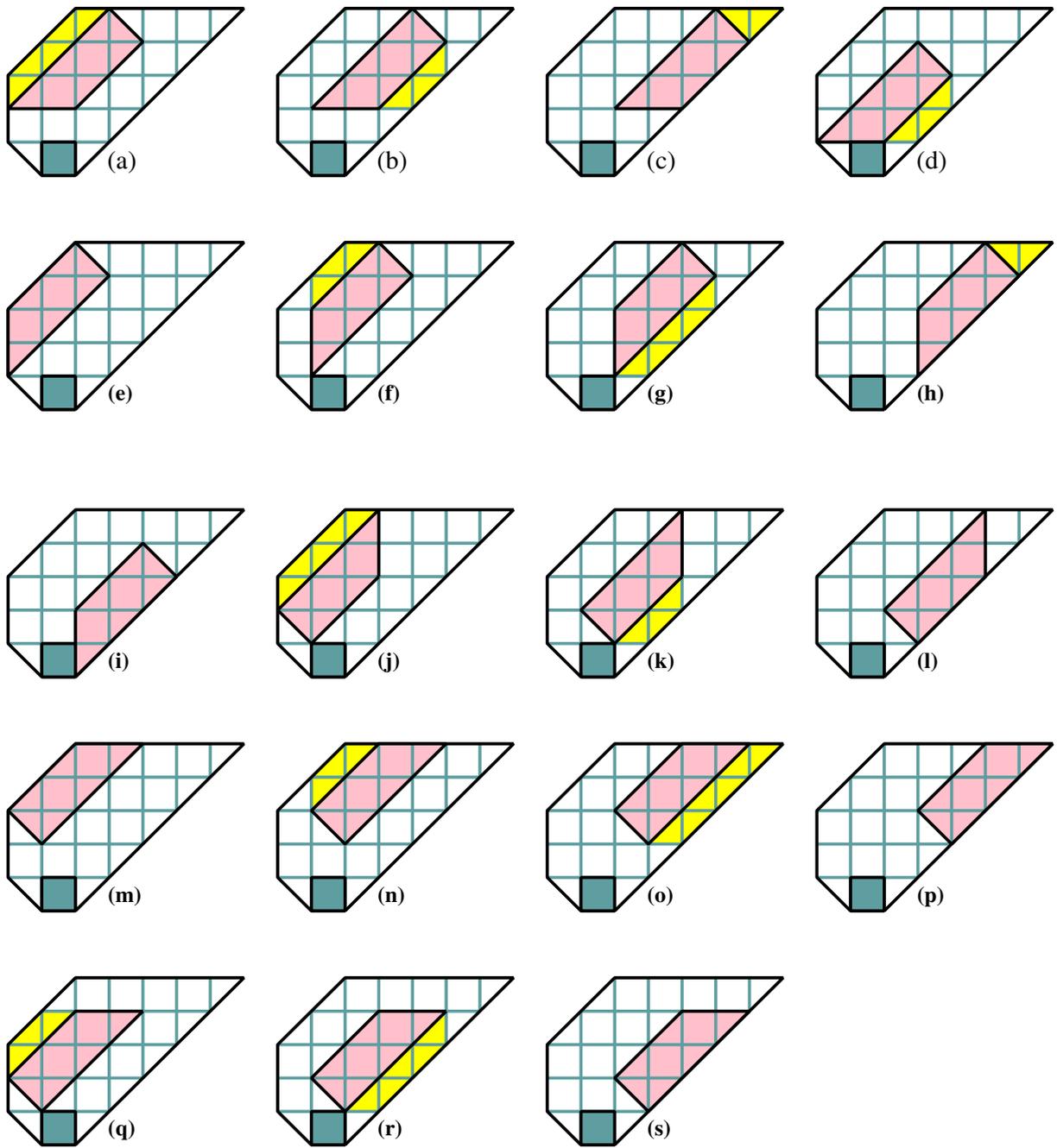


図 4.48: S_{19} への P_2 の置き方 (19通り)

☆ (e),(l),(s) の不可能性: 2×2 正方形は一つであり, それが P_1 によって埋められた場合, 残った部分の黄色のタイルが埋められない.

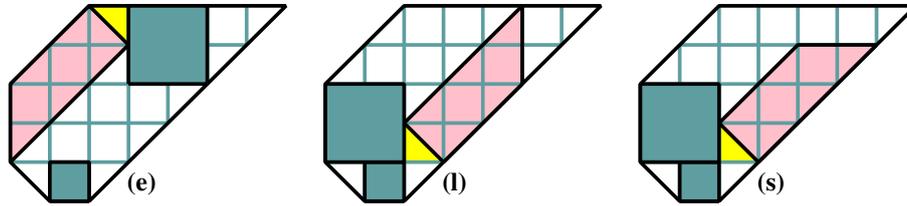


図 4.49: (e), (l), (s) への P_1 の置き方

☆ (i) の不可能性: P_1 の置き方は一通りに決まり, それによって一枚の P_5 の置き方も決まる. このとき, P_3 の置き方は図 4.50 の 4 通り存在するが, 図の一番右の置き方は残った部分に P_4 を二枚置くことができず, 他の場合には黄色のタイルを埋められない.

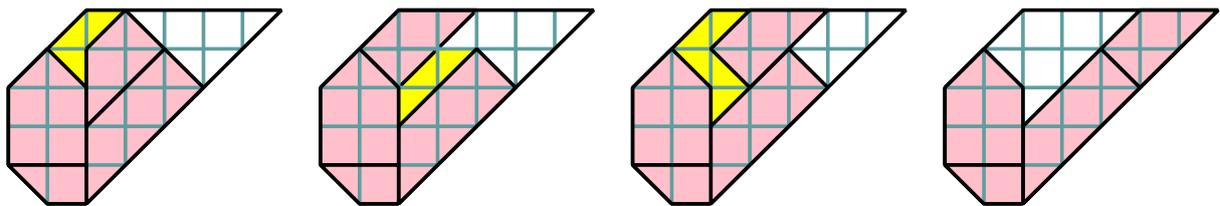


図 4.50: (i) への P_3 の置き方 (4 通り)

☆ (p) の不可能性: P_1 の置き方は図 4.51 の 8 通り存在するが, (p)-3 から (p)-7 の置き方では黄色のタイルを埋められない. (p)-1 の置き方では, 残ったタイル数 5 の部分を埋められない. 黄色のタイルを埋められない.

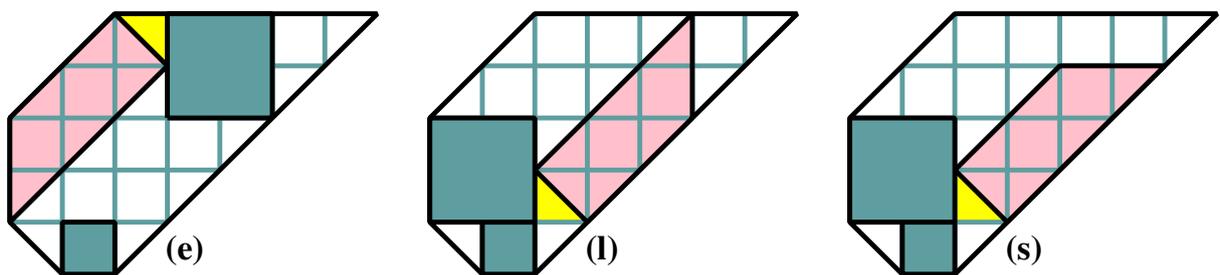


図 4.51: (p) への P_1 の置き方 (3 通り)

(p)-2 に対しては一枚の P_5 の置き方が決まり, P_3 の置き方は図 4.52 の 6 通り存在する. (p)-2-2 の場合は残った部分に二枚の P_4 を置くことができず, その他の場合は黄色のタイルを埋められない.

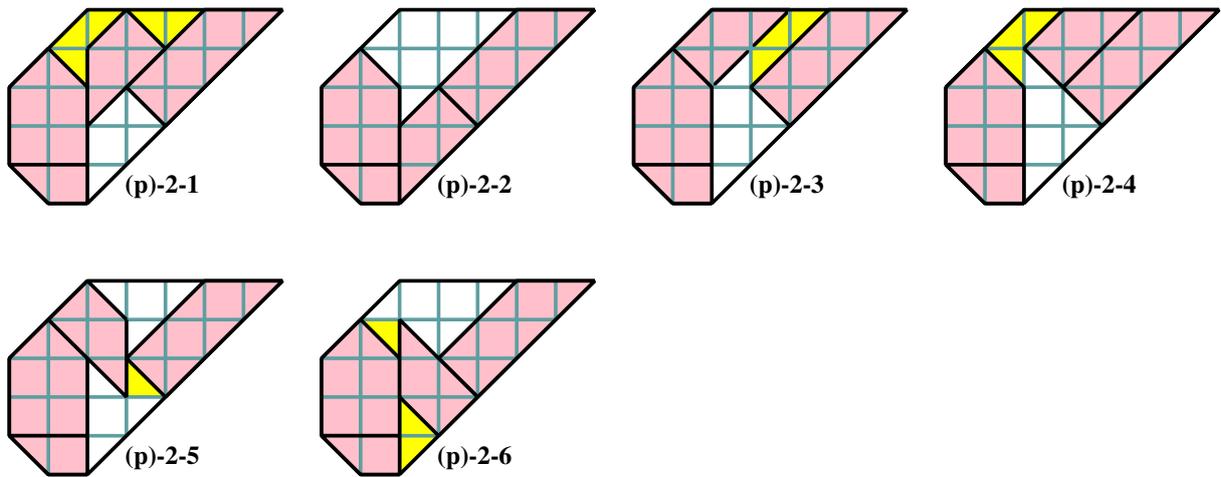


図 4.52: (p)-2 への P_3 の置き方 (6 通り)

(p)-8 の置き方では、二枚の P_5 の置き方が図 4.53 のように決まり、黄色のタイルを埋められない。

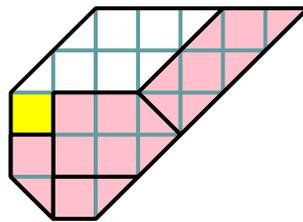


図 4.53: (p)-8 への P_5 の置き方

☆ (a)-(d), (f)-(h), (j), (k), (n), (o), (q), (r): 図中の黄色タイルを埋めることができない。

■ S_{20} の不可能性

S_{20} の敷き詰め不可能性を示すために、 P_1 の置き方を考える。対称性を考慮すると、補題 4.3.1 を満たす置き方は図 4.54 の 4 通りのみである。各場合について不可能性を示す。

☆ (a),(d) の不可能性: 図中の黄色タイルを埋めることができない。

☆ (b) の不可能性: 左下の 12 タイルからなる部分を考える。タイル数 12 となるのは P_3 と P_5 を二つ使う組合せのみであるが、形が合わず置くことができない。

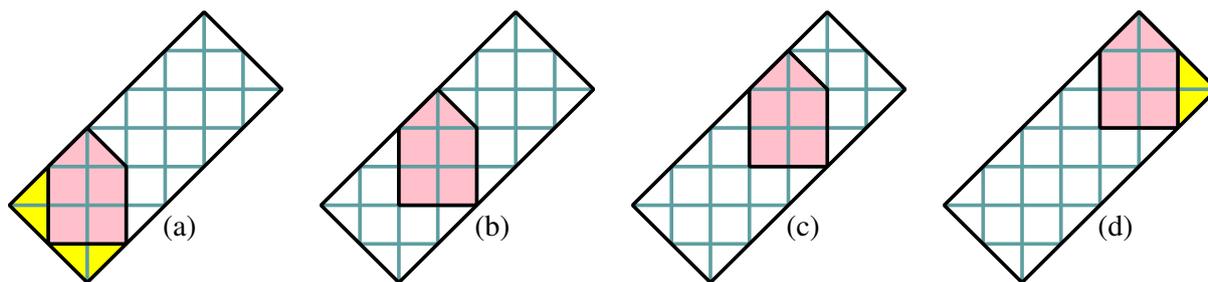


図 4.54: S_{20} への P_1 の置き方 (4通り)

☆ (c) の不可能性: 右上の部分には P_2 を置くことはできないので, P_2 は左下の部分に置くしかない. 左下の20タイルからなる部分を考える. この部分の対称性を考慮すると, P_2 の置き方は図 4.55 の1通りを考えればよい. このとき, 全体の残った部分を見ると正方形タイルは4枚であるのに対し, 残ったピースの正方形タイルの合計は5枚であることから, 補題 4.3.1 より, 残った部分を埋めることはできない.

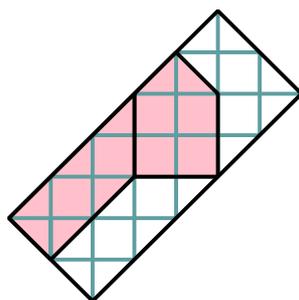


図 4.55: (c) への P_2 の置き方

第5章 おわりに

本研究では，堀山，上原，細矢らが考案した，シルエットパズルの凸配置を列挙するアルゴリズムを，本研究で扱う図形に合わせて最適化して実装し，以下のことを明らかにした．

- タングラムと清少納言知恵の板における，本研究にて用いたプログラムに対する探索時間が最短になるようなピースの入力順序の法則
- 合計タイル数が16で初期ピース数が2,3,4,5の場合，初期ピースが全て凸多角形であるとしたときに生成できる凸多角形の種類の数の最大値とその場合のピースの全ての組み合わせ

拡張タングラムのピースに凸でない多角形が含まれるとき，形成可能な凸多角形の数の調査は，今後の課題である．

謝辞

本研究を行うにあたり，日頃から研究活動について終始丁寧なご指導をしていただいた本学上原隆平教授と，本論文の執筆において大変なお力添えをいただきました大館陽太助教には心から厚くお礼申し上げます．また，ラッキーパズルの理論的解析において非常に重宝した，パズルの実物を作成してくださった谷口智子研究補助員，そしてアルゴリズムの実装において多くのアドバイスをくださった埼玉大学理工学研究科 堀山貴史准教授には深謝いたします．最後に，研究生生活において様々な助言をくださった研究室の皆様，ならびに共に学んだ友人たちに感謝いたします．ありがとうございました．

参考文献

- [1] ラッキーパズル7ピースを使って作れる21種類の凸多角形. <http://blog.goo.ne.jp/satokatsuhiko/e/d03dd09efbb0f4188b4788c58848857b>.
- [2] Eli Fox-Epstein, Kazuho Katsumata, and Ryuhei Uehara. The convex configurations of “Sei Shonagon Chie no Ita,” tangram, and other silhouette puzzles with seven pieces. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol. 99, No. 6, pp. 1084–1089, 2016.
- [3] Takashi Horiyama, Ryuhei Uehara, and Haruo Hosoya. Convex configurations on nana-kin-san puzzle. In *8th International Conference on Fun with Algorithms*, pp. 20:1–20:14, 2016.
- [4] Jerry Slocum. *The Tangram Book: The Story of the Chinese Puzzle with over 2000 Puzzles to Solve*. Sterling Puzlishing, 2004.
- [5] Fu Traing Wang and Chuan-Chih Hsiung. A theorem on the tangram. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 49, No. 9, pp. 596–599, 1942.
- [6] 小田原充宏. 上原隆平との間の私信, 2016.
- [7] 渋谷純吾. ダイセクションパズルの凸多角形形成. 北陸先端科学技術大学院大学 副テーマ研究, 2016.
- [8] 樋田正一. 21種の凸多角形一覧図. <http://aries.fam.cx/~toida/lucky%20puzzle/lucktotutakakukei.html>.

付録

ピース数が6の場合の凸配置の最大数は17であることの証明

本節では、武永康彦氏による、ピース数が6の場合の凸配置の最大数は17であることの証明を記述する。16タイルで形成可能な凸多角形は、図2.1の番号を用いて呼称する。

ピース数が6のとき、ピースの平均タイル数は、 $16/6 = 2.666\dots$ となる。よって、6ピースの中には必ず3タイル以上のピースが含まれていることがわかる。

10番の図形を形成できるピースの構成では、3タイル以上のピースの存在を考慮すると1, 2, 3番を形成することはできないことがわかる。よって、凸配置を18個以上形成するピース構成が存在する場合、そのピース構成では10番を形成できない。

ここで、1, 2, 3番を形成するためには、ピースの高さは1に限られることに注意すると、9番と19番を形成するためには5タイル以上のピースは不可で、4タイルのピースは平行四辺形に限られる。

以下では、3タイル以上のピースに注目して場合分けして考える。以下の議論では3タイル以上のピースには2タイルの正方形が必ず含まれることを利用している。

3タイル以上のピースが4個以上の場合

3タイル以上のピースが3個以下、あるいは3タイルのピースが4個という条件を満たしていない場合、12番と14番を形成できず、3タイルのピースが4個では9番と12番を形成できない。(3タイルのピースを4個使って9番を形成しようとする、7ピース以上必要になる。) よって、18個以上の凸配置を形成できない。

3タイル以上のピースが2個の場合

ピース構成は、4タイルが2個、2タイルが4個に決まるが、これでは1番を形成できない。また、2, 3番の両方を形成できるピース構成は存在しない。よって、18種類以上の凸配置を形成できない。

3 タイル以上のピースが3 個の場合

3 タイルのピースが3 つというピース構成はありえない。

4 タイル1 個, 3 タイル2 個の場合, 残りのピースは2 タイルが3 個となる。このとき, 9 番と12 番は1 タイルのピースが必ず必要になり, 形成できない。

4 タイル2 個, 3 タイル1 個の場合, 残りのピースは2 タイルが2 個と1 タイルが1 個となる。2 タイルのピースが両方とも直角三角形でなければ12 番と14 番を形成できない。一方で, このピース構成では11 番と14 番を形成できない。

4 タイル3 個の場合, 8 番と14 番を形成できない。

よって, 18 種類以上の凸配置を形成できない。