

Title	非圧縮粘性流への精度保証付きソルバ
Author(s)	熊畑, 清
Citation	
Issue Date	2001-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1436
Rights	
Description	Supervisor:松澤 照男, 情報科学研究科, 修士

非圧縮粘性流への精度保証付きソルバの開発

熊畑 清

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2001年2月15日

キーワード: Computational fluid dynamics, Guaranteed accuracy, A posteriori error estimation, Evaluation of the numerical solutions.

流体シミュレーションに限らず、電磁場解析や構造解析などに代表される連続系のシミュレーションにおいては、その系の振舞を記述する偏微分方程式の解を差分法や有限体積法、有限要素法等の方法により求めることにより行われる。これらの方法で共通する特徴は、本来連続であるべき対象とする空間を、不連続な有限個の領域の集合として離散化しているということである。

本来連続な空間を不連続な空間で近似して表現していることから、それらの方法により得られた解は必然的に誤差を含む近似解であり、空間の近似度を上げるにつれ得られる近似解の精度も高くなる。そのためこれらのスキームでは、より高い精度の近似解を得るためにより高い精度のスキーム・より細かいメッシュの使用が推奨されている。

しかし、そのようにして得られた近似解の実際の精度に関しては、詳細に顧みられることは少なく、多くの場合解析結果の信頼性に対する考慮は行われず、結果のみのを盲目的に信じ使用するか、検討を行ったとしても用いたスキームのオーダーレベルの誤差評価や解析者の持つノウハウによる検討がなされているだけという感がある。

これは従来、計算機による数値計算により得られた問題の近似解の精度の検証、すなわち数値計算の検証には、目的とする計算それ自体に要求される計算量と比して、計算量論的に非常に大きな計算量が必要とされると考えられていたという背景があるためと思われる。

しかし近年、現実的な計算量で数値計算の結果の精度検証を行うことを目的とする精度保証付き数値計算 (numerical methods with guaranteed accuracy)、あるいは数値的検証法 (numerical verification method) と呼ばれる分野の研究が発達し、先述したような勘やノウハウによる定性的な精度評価によらずに、計算結果の精度を定量的にとらえることが可能となりつつある。

このような精度保証付き数値計算の技法は連立一次方程式・補間・関数計算・数値積分・数値微分などにおいて存在しているが、これらはいずれも数値計算における丸め誤差の扱いに関する技法であった。

しかるに Navier-Stokes 方程式に支配される流体力学のシミュレーションに代表される、微分方程式によりその振舞が記述される系のシミュレーションにおいて、支配的な誤差は本来連続な空間を不連続に近似することにより生ずる離散化誤差であり、精度保証を唱うからには離散化誤差を扱えることが必要である。

中尾により提唱された微分方程式の解空間を集合で表し、離散化誤差と丸め誤差を区間演算により処理する方法は、偏微分方程式の精度保証としては最も強力な技法であると考えられる。

本研究ではすでに様々な理学・工学の分野で欠くことの出来ない重要なツールとして活用されている流体シミュレーションの、より一層の信頼性向上を目指し、偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算法を、非圧縮粘性流の方程式に対して適用し精度を定量的に把握する試みを行った。

中尾の方法を非圧縮粘性流の基礎方程式へ適応するため、筆者は Navier-Stokes 方程式を有限要素法による流体シミュレーション技法の一つである流速修正法で解くこととし、その定式化中に現われる圧力に関する Poisson 方程式の数値解に対して精度保証を行なうこととした。

本来、非圧縮性かつ粘性流れの解析においては、求められるべき未知の関数は二次元あるいは三次元の流速、および圧力の二種類であるが、流速修正法による定式化の元においては、流速の導出は形状関数の微分項である質量行列を集中化することにより圧力から陽に求まる形が導かれるため、シミュレーション全体の精度は圧力場の精度が支配的であると考えられるため、流体シミュレーションにおけるシミュレーション結果の精度保証という目的に対してのテストケースの問題として、圧力の近似解に対して誤差範囲の検証を行うこととした。

本研究ではまず微分方程式への中尾理論の適用例の予備実験として、Galerkin 式有限要素法による一次元二階常微分方程式の二点境界値問題の解に対する精度保証を行ない、近似解を内包する推定誤差幅の検証に成功した。

次いで、圧力 Poisson 方程式に対する中尾理論を用いた精度保証を行なうため、検証アルゴリズム中にて流速修正法における時間進展ループの修正を行ない、二次元管内流れモデルに対する推定誤差幅の検証に成功した。

流体シミュレーションに対する、精度保証付き数値計算の応用例は目下のところ極めて少なく、シミュレーションの信頼性向上の一助となれば幸いである。