JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	アロー論理における決定可能性に関する研究
Author(s)	森岡，竜司
Citation	
Issue Date	2001-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1459
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰，情報科学研究科，修士

JAIST
JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

アロー論理における決定可能性の研究

森岡 竜司

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研情報科学研究科

2001年2月15日

キーワード: 様相論理, アロー論理, 決定可能性.

1 はじめに

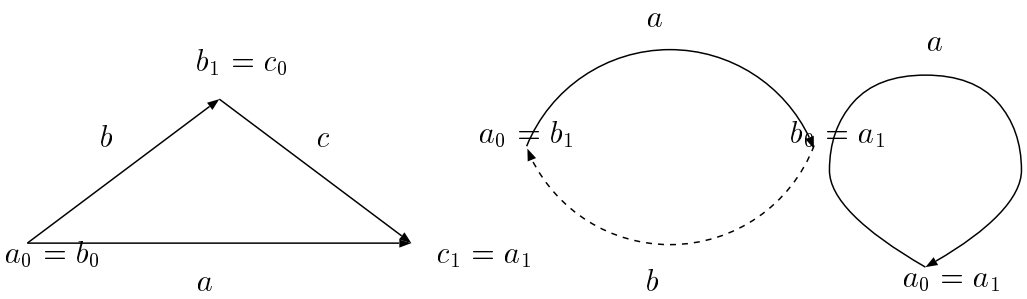
アロー論理は、１９９１年の van Benthem [2] の論文に初めて公式的な形で導入された。アロー論理は状態遷移を表現できる様相論理と考えられ、古典論理にいくつかの様相言語を付け加えて得られる論理である。この論理では、Kripke スタイルのフレームが導入され論理式の集合がアローとみなされる。アローとは２項関係を抽象化して遷移を表現したものであるが、これらの基本的な演算の性質としてアローの結合、逆向きのアロー、そして特別なアローとして遷移が行われないアローが考えられる。こうしたアローの概念を用いて古典論理や従来の様相論理では表現できなかった動的な状況を表現することが可能となる。
また、アロー論理は長い歴史を持つ関係代数によって特徴付けられることから、関係代数において得られた結果を用いてアロー論理の性質を研究が行われている。
本論文ではアロー論理における決定可能性について議論を行う。

2 アロー論理

アロー論理の意味論として、次に述べるアローフレームが導入される。アローフレーム $\mathbf{F} = (\mathbf{W}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{I})$ は直感的にはつぎのように述べられる。
$\mathbf{W}$: アローを元とするような空でない集合
$\mathbf{C_{xyz}}$: x は y と z の結合である。
$\mathbf{R_{xy}}$: x は y に対する逆向きのアローである。
$\mathbf{I_x}$: x は遷移しないアローである。

Copyright © 2001 by Ryuji Morioka

これらの関係を図で表すと以下のようになる。



これらのアローに対する概念が古典論理の拡張として様相言語を導入する際に $\varphi \circ \psi$（結合）, $\otimes\varphi$（逆）,$\iota\delta$ （非遷移）に与える意味論の基礎をなす。
意味論は以下のように与えられる。
$x \models \varphi \circ \psi \Leftrightarrow \exists y, z \mathbf{C}_{xyz} y \models \varphi z \models \psi$
$x \models \otimes\varphi \Leftrightarrow \exists y \mathbf{R}_{xy} y \models \varphi$
$x \models \iota\delta \Leftrightarrow \mathbf{I}_x$

van Benthem [2] はこれらの言語にさらに Kleene star * という言語を加え、動的アロー論理として研究をおこなった。Kleene star * の意味論は以下のように与えられる。
$x \models \varphi^* \Leftrightarrow x \models \varphi$ または $1 \leq i \leq n$ として $x \models x_1 \circ \cdots \circ x_n$ かつ $x_i \models \varphi$ が成立。
本論文では様相演算子として $\circ, \otimes, \iota\delta$ のみを扱う。

3 決定可能性

本論文の目的はアロー論理において決定可能性を得るための条件の考察である。一般に論理の決定可能性を示す有効な方法は２つ考えられる。一つは、Gentzen 流のシーケント計算によって形式化を行い、カット除去定理や部分論理式性を導く方法である。もう一つは、有限公理化可能性を示し、さらに有限モデル性を持つことを示すことにより決定可能性を導く方法である。
アロー論理においては有限モデル性を導く従来の方法が、$\circ$ の結合律 $(\varphi \circ \psi) \circ \chi \leftrightarrow \varphi(\psi \circ \chi)$ が恒真となるようなフレームでは使えないために、この公理をもつようなアロー論理の決定可能性が他の方法で導かれるか否かが問題となる。これまでに、$\circ$ の結合律を公理として持つようなアロー論理においても、$\circ$ の $\vee$ に対する分配律 $\varphi \circ (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi) \vee (\varphi \circ \chi)$ を持たないようなアロー論理は決定可能であることが Gyuris [3] によって示されている。一般に、様相論理においては、様相演算子の $\vee$ に対する分配律を公理として持つために Gyuris が提案した体系は標準的なアロー論理ではないが、リンデンバウム代数により完全性が得られる。
この体系の拡張として、さらにいくつかの公理を加えても決定可能性がいえることを示した。

4 おわりに

本論文では、Gyuris の提案した体系にいくつかの公理をくわえても決定可能性がいえることを、項書換え系の手法を用いて示した。
今後の課題としては、条件付き項書換え系の手法を用いていくつかの推論規則を加えても決定可能性がいえるかを調べることが残された。

参考文献

[1] Y.Venema. A Crash Course in Arrow Logic, In M.Marx, L.Polos and M.Masuch, eds., *Arrow Logic and Multi − Modal Logic*, CSLI and FOLLI, pp.3-34, 1996.

[2] J. van Benthem, A Note on Dynamic Arrow Logic, In J.Eijck and A.Visser, eds., *Logic and Information Flow*, chapter2, The MIT Press, pp.15-29, 1994.

[3] V.Gyuris, Associativity Does Not Imply Undecidability without the Axiom of Modal Distribution, In M.Marx, L.Polos and M.Masuch, eds., *Arrow Logic and Multi − Modal Logic*, CSLI and FOLLI, 63-99, 1996.

[4] J. van Benthem, *Language in action*, Categories, Lambdas and Dynamic Logic, Elsevier Science Publishers, 1991.