

Title	直観主義論理に対する図を用いた推論システムの構築
Author(s)	石田, 泰三
Citation	
Issue Date	2001-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1465
Rights	
Description	Supervisor: 東条 敏, 情報科学研究科, 修士

修士論文

直観主義論理に対する図を用いた推論システムの構築

指導教官 東条 敏 教授

北陸先端科学技術大学院大学
北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科情報処理学専攻

石田泰三

2001年2月14日

要 旨

人間は問題解決において、しばしば図を利用する。それは図によって複雑な状況を理解しやすくしたり、明示的には与えられていない情報が得られたりするなどといった利点があるからである。推論や問題解決における図の役割についての考察は、人間の知的活動を明らかにする上で興味深いだけでなく、効果的なインターフェイスを実現する上でも重要である。図を有効利用して論理体系を記述しようとする試みは古くから存在し、Venn 図、Euler 図、Pierce 図などがこれにあたる。近年、これらの図を厳密に定義し、図を用いて論理体系を記述する研究がなされている。しかし今までの研究では、対象とする論理体系が多くの場合、古典論理であり、直観主義論理などの非古典論理を対象として図形を定義する研究は十分に考慮されていないと考える。

直観主義論理は近年、構成的プログラミングへの対応から重要視されている。しかし、そのセマンティクスの取り扱いが容易ではなく、それを容易に理解することができる図形が望まれている。直観主義論理のクリプキ・セマンティクスを表す図形として Hasse 図が存在するが、Hasse 図の記述は、クリプキ・モデルをそのまま表現したものであり、各可能世界の到達可能関係を表現するのには優れているが、各可能世界における付値をうまく表現することができない。

そこで本研究では直観主義命題論理を対象として Hasse 図の改良・拡張をおこなう。そこから直観主義論理の性質をより明示的に表現することができ、学習者にとって直観主義論理のセマンティクスの理解を促進させる図形を提案する。具体的には 2 次元的な図形である Hasse 図を 3 次元化し、各可能世界における付値の関係を明示的に示す。また直観主義論理の可能世界を対象とする Venn 図を定義し、それを Hasse 図と組み合わせることによってクリプキ・モデルを表す。この Venn 図と Hasse 図を組み合わせた図は各可能世界の内部状態をわかりやすく表現することができる。

我々はこの Venn 図と Hasse 図を組み合わせた図をモデルに基づく直観主義論理のクリプキ・モデルを表すシステムを作成した。このシステムはテキストによるクリプキ・モデルおよび論理式を入力とし、それに対応した Hasse 図および Venn 図と Hasse 図を組み合わせた図を出力する。

目次

第1章	序論	1
1.1	本研究の背景と目的	1
1.2	本論文の構成	2
第2章	直観主義論理と図による推論	3
2.1	図による推論	3
2.1.1	FreeRide	3
2.1.2	定性推論と図形	4
2.1.3	図を用いたシステム	4
2.2	命題直観主義論理	6
2.2.1	直観主義論理	6
2.2.2	命題直観主義論理のシンタックス	6
2.2.3	命題直観主義論理のセマンティクス	6
2.3	Hasse 図	8
2.3.1	直観主義論理における Hasse 図	9
2.3.2	Hasse 図の問題点	12
2.3.3	NA-Hasse 図	13
2.3.4	Hasse 図を用いたシステム	16
第3章	図による直観主義論理	18
3.1	3D-Hasse 図	18
3.1.1	3D-Hasse 図	18
3.1.2	3D-Hasse 図の生成規則	20
3.1.3	3D-Hasse 図の問題点	28
3.2	Venn 図 + Hasse 図	29
3.2.1	Venn 図	29

3.2.2	I-Venn+Hasse 図	34
3.3	まとめ	41
第4章	実装と評価	43
4.1	システムの構成	43
4.2	諸概念の実装	45
4.3	ユーザインターフェイス	45
4.4	動作例	46
第5章	おわりに	50
5.1	まとめ	50
5.2	他のシステムとの比較	51
5.3	今後の課題	51

第 1 章

序論

1.1 本研究の背景と目的

近年，直観主義論理は構成的プログラミングに対応する関係から重要視されている．しかし，その意味論の解釈は一般的な論理，つまり古典論理と比べて複雑なものであり，理解しにくいものとなっている．その理由の一つとして，直観主義論理においては図が有効に使用されていない点が考えられる．

「百聞は一見に如かず」，“Diagram is worth ten thousand words” ということわざがあるように，昔から図は，言語に置き換わって物事を理解する有効な手段の一つとして使用されてきた．実際に数学や物理，その他の分野においても学習効果を狙って昔から盛んに図が使用されてきた．

その反面，図は厳密さに欠け，曖昧性がある，などといった特徴をもつと数学者や論理学者に考えられていた．実際，これまで数学の証明や論理学における推論などは，多くの場合文字列によって示されてきた．それに対して，図が占めていた役割は，証明や推論のためのヒューリスティックな補助であった．

しかし近年ふたたび図を用いた推論が注目されている．しかしここで述べる図による推論とは，数式，論理式などの文字列をすべて図形に置き換えて推論をおこなうというものではない．推論または問題解決の際に，その対象とするべきものにもっとも適した表現形態を使用することを目指している．

ここで述べているもっとも適した表現形態とは，もっとも人間の知覚に適した表現形態を指している．実際，人間は単に文字記号のみでなく，様々な表現方法を使って情報を表現したり，思考したりする．よって問題解決や推論の際にもっとも適した表現形態は，図や文字記号，表，グラフなどが混在する Hybrid なものとなるはずである．

問題となっている図のもつ特徴，つまり厳密さに欠けており，曖昧性に満ちているという批判は多くの場合誤解である．図によって生じた多くの間違っただ証明や推論は，厳密な図の定義を行わないままに，図の記述力に頼ってしまった結果である．整合のとれた図においてはこのような失敗は生じない．

実際に Shin [7] は Venn 図を formal system として，一階述語論理に対して独自のシンタックス，セマンティクスをもって厳密な分析を行った．そして Venn 図による推論のルールが健全であることを示した．さらに付加ルールを加えることで，演繹的なシステムに対する複雑な証明が出来ることを示した．

それに対して，直観主義論理では，複数の可能世界，非 2 値原理などといった理由から，その表現として Venn 図を使用することは出来ない．また直観主義論理においては，そのセマンティクスを表現するための図として Hasse 図というものをもつが，これは Venn 図のように，厳密に定義され，それ自体で推論を行えるものではなく，曖昧性を含んでいる．

そこで本研究では，直観主義論理のクリプキ・セマンティクスに基づき，Hasse 図および Venn 図の改良・拡張を行う．またそれに基づいた図を使って反証モデルを生成するシステムを構築する．このシステムにより直観主義論理の複雑なセマンティクスの取り扱いに対する負担が軽減することを期待する．また図は，テキストでは明示されていない情報を得ることができる，という機能をもつ．よって図によって表現された直観主義論理から，テキストでは暗示的であった情報を得ることができるようになることを期待する．

1.2 本論文の構成

本論文では，2 章において，問題解決において図を用いることの意義，図を用いた推論についての関連研究について説明する．さらに直観主義論理のシンタックスとクリプキ・セマンティクス及びクリプキ・セマンティクスを表現するのにしばしば用いられる Hasse 図とその問題点について述べる．

3 章においては本論文で提案する Hasse 図の改良・拡張について述べる．それらには Hasse 図を 3D 化した 3D-Hasse 図と直観主義論理のために定義した Venn 図である I-Venn 図と Hasse 図を組み合わせた I-Venn+Hasse 図がある．

最後に，3 章で述べた Venn+Hasse 図のモデルの実装を行い，直観主義論理のクリプキ・セマンティクスに対する学習システムとして考察する．

第 2 章

直観主義論理と図による推論

2.1 図による推論

2.1.1 FreeRide

問題解決に図を使用する理由の一つとして、FreeRide と呼ばれる機能を図がもっていることがあげられる。

FreeRide とは与えられた情報以上の情報を明示的に示すことができる機能である。与えられた情報量がテキストと図で同じときに、テキストにおいては、その情報から推論しなければ新たな情報を得ることができない。つまりテキストにおいては新たな情報は暗示的に示されている、それに対し、図においては新たな情報がすでに明示的に示されており、推論の必要が無いことがある。具体的な FreeRide の例として、図 2.1 があげられる。

1: A は B より短い

2: C は B より長い

という文章を与えられて、

3: A は B より短い

と結論に達することは可能である。つまりここでは、1 と 2 という情報から 3 という結論を導き出している。それに対して、図 2.1 では、1, 2 の情報が図示されたと同時に 3 の結論も明示的に示されることになる。

問題解決において、図を表すことが、問題の性質に関する理解を深めるのに役立つことが多いが、これは問題を記述する文章には明らかに記述されていない関係も、図を描くことによって明らかになることがあるからである。

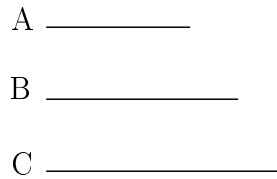


図 2.1 FreeRide

2.1.2 定性推論と図形

図による推論の特徴の一つとして、それが定性的なことである。(岩崎 [iwasaki] 上で述べた線の長さの比較においても、たとえ A, B, C の正確な長さが与えられて、図もその通りに描かれていたとしても、そこからすぐにわかるのは、長短の順などといった定性的な関係である。しばしば、我々はだいたいの答えを得るために図を使うが、詳しい数値的な答えが必要なときには、記号操作を行う。それにも関わらず、定性的理解が重要なのは、詳細にとらわれないことによって全体像の特徴の理解を可能にし、さらに詳しい分析の必要な個所をすばやく見つけることを助けるためである。ここで述べた「詳細にとらわれない」という言葉は、今直面している問題解決において重要でない情報にとらわれない、ということである。

2.1.3 図を用いたシステム

問題解決及び推論において、図を用いることは盛んに行われてきた。例えば数学の集合では Euler 図や Venn 図がよく使われる。幾何においては、図を用いずに問題を解くものはいないだろう。また算数の文章問題においても図は大きな役割を担っている。村田は、算数の文章問題や平面幾何の問題に対して図を用いて問題解決をするシステムを作成している。ここで村田らは、単純に平面幾何や文章問題を解くだけでなく、問題を図式化し、そこから見られる一般規則を発見し、平面幾何の定理及び文章問題に対する公式を導き出すシステムを構築した。これは上述した FreeRide の特性を利用したものと考えられる。

また数学だけでなく論理学においても図を用いて推論を行おうというシステムが研究されている。論理体系を図によって記述しようという試みは古くからあり、Venn 図や Euler 図があげられる。しかしこれらの図は教育用インターフェイスとして開発されたため、厳密に論理体系を記述しているとはいえなかった。それに対して、Shin や Hammer は図を厳密に定義し、その図を用いた推論が記号による推論と同等のものであることを証明し

た．Shin や Hammer が対象にした論理は古典述語論理であり，Venn 図を改良し論理体系を記述した．また，その Venn 図を操作することで演繹的な推論を可能にした．清塚らはその図を取り上げて，Venn 図による証明と一般的な記号操作による証明との違いを定量的に分析した．

さらにコンピュータを用いて，よりユーザインタフェースを考慮したシステムとして Barwise の *HyperProof*(1993) があげられる．これは，一階述語論理の自習用ソフトウェアである．積み木の世界について論理式で描写したり，論理式が真になるように世界を組み立てたりする作業を通じて一階述語論理のセマンティクスの基礎を学習するためのシステムである．*HyperProof* で重要なのは図と論理式つまり記号のハイブリッドな推論システムであるということである．画面に積み木の世界の図とそれを記述した論理式の両方が表示され，一方を操作するとそれに伴ってもう一方も表示が変化する．さらに複数のメディアを利用する推論の数学的性質について状況理論をベースにした基礎づけも行っている．



図 2.2 *HyperProof*

2.2 命題直観主義論理

2.2.1 直観主義論理

直観主義論理は多値論理，様相論理などと同様に非古典論理である．

直観主義論理の特徴の一つに2値原理を採用していない点があげられる．つまり直観主義論理は排中律をトートロジーとしない論理である．

2.2.2 命題直観主義論理のシンタックス

命題直観主義におけるシンタックスは古典論理における命題論理と同じである．

- 論理記号

$\neg \vee \wedge \supset$

ただし古典論理とは異なり，直観主義論理では， \wedge, \supset を $\neg \vee$ の省略形として定義できないすなわち， $\wedge, \vee, \supset, \neg$ は，独立した論理記号として導入される．

2.2.3 命題直観主義論理のセマンティクス

本論文では直観主義論理のセマンティクスとしてクリプキ (S.Kripke) によるセマンティクスをとりあげる．その定義はクリプキ・フレームにより定められる．

定義1 クリップキ・モデル

空でない集合 W と W 上の二項関係 R が半順序関係であるとする．この時，対 (W, R) を半順序集合という．関係 R が半順序関係であるとは次のようなことをいう．

半順序関係

- R は反射的である。
任意の $w \in W$ に対して wRw が成り立つ
- R は推移的である。
任意の $w, w', w'' \in W$ に対して、 wRw' かつ $w'Rw''$ ならば wRw'' が成り立つ

- R は反対称的である。

任意の $w, w' \in W$ に対して、 wRw' かつ $w'Rw$ ならば $w = w'$ が成り立つ

任意の半順序集合 (W, R) のことを直観主義命題論理のクリプキ・フレームという。 W および R をそれぞれクリプキ・フレームの可能世界 (possible world) の集合、および到達可能関係 (accessibility relation) という。いま、 (W, R) をクリプキ・フレームとする。集合 W の部分集合 U が遺伝的 (hereditary) であるとは、 $x, y \in M$ に対し、

$$x \in U \text{ かつ } xRy \text{ ならば } y \in U$$

が成り立つこととする。

各命題変数 p に対し、 W の遺伝的部分集合 $V(p)$ を対応させるような写像 V を、クリプキ・フレーム (W, R) 上の付値という。 V が (W, R) 上の付値であるとき、 (W, R, V) を直観主義論理のクリプキ・モデルという。

クリプキ・モデル (W, R, V) に対し、 W の要素と論理式との関係 \models をつぎのように定義する ($a \models A$ のとき、「(可能世界) a で A は正しい」という。また、 $a \not\models A$ は $a \models A$ が成り立たないことを意味する)。

定義 2 \models の定義

- $a \models p \iff a \in V(p)$ (p は命題変数)
- $a \models A \wedge B \iff a \models A$ かつ $a \models B$
- $a \models A \vee B \iff a \models A$ または $a \models B$
- $a \models A \supset B \iff aRb$ となるすべての b に対し $b \models A$ または $b \models B$
- $a \models \neg A \iff aRb$ となるすべての b に対し $b \not\models A$

関係 \models は写像 V から一意的に決まるので、 \models を V と同一視して *models* を付値とよび、 (W, R, \models) をクリプキ・モデルとよぶ。

補助定理

\models をクリプキ・フレーム (W, R) の付値とする。このとき任意の論理式 A に対し、集合 $\{x \in W \mid x \models A\}$ は遺伝的である。

直観主義論理における真偽値

クリプキ・モデル (W, R, \models) において, どんな $a \in W$ についても $a \models A$ となるとき, 論理式 A は (W, R, \models) で真であるという. そうでなければ, A は (W, R, \models) で偽であるという.

クリプキ・フレーム (W, R) 上の任意の付値 \models に対し, A が (W, R, \models) で真となるとき, A は (W, R, \models) で恒真であるという. A が (W, R, \models) で偽になるような付値が存在するときには, A はクリプキ・フレーム (W, R) で偽であるという.

終末の可能世界における真偽値

可能世界 W_f を, W_f から到達できる可能世界が W_f 自身しかないような可能世界とする. すなわち, $W_f R W$ を満たす可能世界 W は存在しない. このとき, W_f においては, 任意の論理式 A に対して,

$$W_f \models A \vee \neg A$$

が成り立つ. これは, 終末の可能世界においては, 命題の真偽が完全に定まる, ということを意味している.

また, 任意の論理式 A に対して,

$$W_f \models \neg\neg A \supset A$$

も成り立つ. より一般的に, A を古典論理における任意のトートロジーとしたとき,

$$W_f \models A$$

が成り立つ. よって終末の可能世界 W_f における論理式の解釈は古典論理の場合と変わらない.

2.3 Hasse 図

定義 3 半順序集合に対する Hasse 図

有限の半順序集合 $\langle U, \models \rangle$ を表すのに Hasse 図が使われる. $a, b \in U$ であり, $a R b$ かつ $a \neq b$ のとき, $a < b$ と表すことにする. U 上の二項関係 $<$ を

$$a < b \iff a < b \text{ かつ } a R c < b \text{ ならば } a = c$$

により定義する． $a \prec b$ であるとき， b は a の直後の元（の一つ）であるという．

さて， XY 座標の定まった平面上に， U の各要素 a に対応する点を取り，その点に a というラベルをつけておく．さらに， $a \prec b$ であるとき，またそのときに限り， a に対応する点の Y 座標は b に対応する点の Y 座標より小さくなるようにとり，しかもこれら二点を変で結んでおく．このようにして得られた図を，半順序集合 $\langle U, R \rangle$ を表すHasse図という．Hasse図では，ラベル a のついた点からいくつかの辺を上へたどって到達できるとき，またそのときに限り aRb が成り立つことになる．図2.3は $a, b \in U, a \prec b$ を表している．

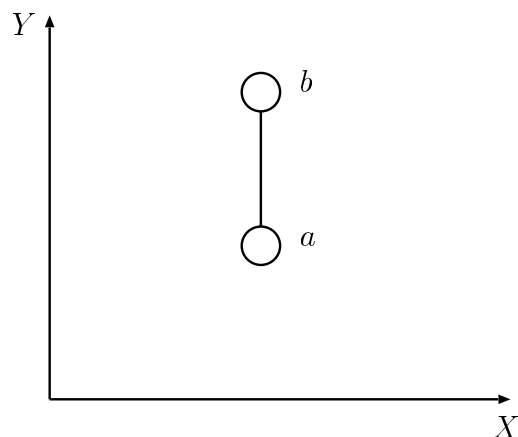


図 2.3 $a \prec b$

2.3.1 直観主義論理における Hasse 図

直観主義論理のクリプキ・フレームにおける二項関係 R は半順序関係であったため，Hasse 図を使ってクリプキ・モデルを表現することができる．

定義 4 直観主義論理における Hasse 図

クリプキ・モデルを表す Hasse 図で用いる図形は図 2.4 で示すそれぞれの図形である．

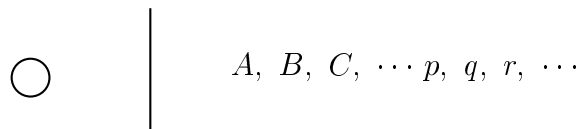


図 2.4 Hasse 図の要素

クリプキ・モデル (W, R, \models) における, W の要素である可能世界を, 図においては各ノードで表し, 各ノードの左側に各要素のラベルをつける. R を表現する方法としては, 上述したように線で結ぶことによって可能となる. また各ノードの右側に, 各可能世界で成り立つ命題変数を記すことにより付値を与えることができる. 図 2.5 は次のクリプキ・モデル $A (W, R, \models)$ を表す.

$$W = \{a, b, c\}$$

$$R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\}$$

$$b \models p, c \models q$$

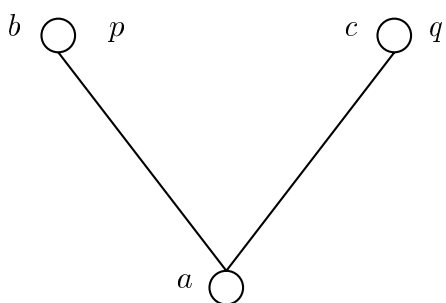


図 2.5 クリプキ・モデル A

ここで上述した補助定理に注目する. 補助定理において, 集合のそれぞれの要素における付値, つまり各可能世界において正しいといえる論理式は要素と同様に推移律が働くことがいわれている. クリプキ・モデル $B (W, R, \models)$ を表した図 2.6 からそのことが読み取れる.

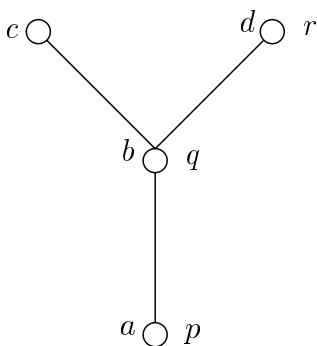


図 2.6 クリプキ・モデル B

図 2.6 において，可能世界 a において命題変数 p ， b において q ， d において r がそれぞれ成り立っていることがわかる．また補助定理からそれぞれの可能世界の y 軸方向にあり，線が結ばれている可能世界においても，それぞれの命題変数が成り立つことがいえる．よって，図 2.6 を書き直してみると次のようになる．

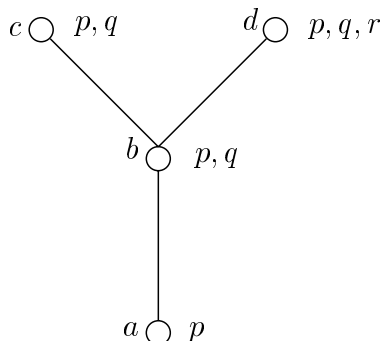


図 2.7 クリプキ・モデル B

Hasse 図は対象とする論理式を偽とするモデル，つまりカウンターモデルを表現することに適しているといわれている．それは Hasse 図を用いると対象とする論理式が偽であるかどうかを判断するのが容易だからである．

例として以下の図 2.8 をあげる．図 2.8 において論理式 $p \vee \neg p$ ，つまり排中律は偽になる．図 2.8 は次のクリプキ・モデルを表している．

$$W = \{a, b\}$$

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$$

$$b \models p$$

$b \models p$ より $a \not\models \neg p$ である．さらに $a \not\models p$ でもある．従って

$$a \not\models p \vee \neg p$$

である．

さらに図 2.8 は排中律を偽とすると同時に $\neg\neg p \supset p$ 二重否定を偽とするモデルである． $b \models p$ なので， $b \not\models \neg p$ である． $a \models \neg p$ も成り立たなかったので， $a \models \neg\neg p$ が成り立つ．ところが， $a \not\models p$ は成り立たなかったので，

$$a \not\models \neg\neg p \supset p$$

は成り立たない．よって図 2.8 は二重否定を偽とする．

直観主義論理でトートロジーであるための必用十分条件は，任意のクリプキ・フレーム (W, R) 上の任意の付値 \models に対し， A が (W, R, \models) で真となることである．ところが，図 2.8 のようなカウンターモデルが存在するので排中律及び二重否定は直観主義論理において恒真でないことが明らかである．

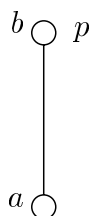


図 2.8 $p \vee \neg p$ のカウンターモデル

2.3.2 Hasse 図の問題点

これまでみてきたように，Hasse 図はカウンターモデルを表現するのに適している．しかし Hasse 図で明示的になるのは，各可能世界の関係，各可能世界において成り立つ命題変数のみである．成り立たない命題変数や命題変数の複合である論理式が各可能世界でどのような付値をとっているのかは暗示的である．

直観主義論理において，学習者にとって非常に分かりにくいものの一つに否定の扱いがある．上述したように直観主義論理において否定， \neg と「成り立たない」， $\not\models$ とは区別すべきものである．2 値原理を採用している古典論理においては命題が成り立たないこととその命題が否定をとることとは同じことであった．

しかし直観主義論理においてそれが成り立つのは，古典論理と同様の付値をとる終末の世界のみである．いま任意の終末の可能世界を W_f とすると，

$$W_f \not\models p \iff W_f \models \neg p$$

が成り立つ．しかし Hasse 図ではこのような情報が明示されていない．よって次のような問題が生じることになる．

図 2.9 は以下のクリプキ・モデル C を表している．

$$W = \{a, b, c, d, e\}$$

$$R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, d \rangle, \langle e, e \rangle, \}$$

$$a \models p, b \models p, c \models p, d \models p, e \models p, e \models q$$

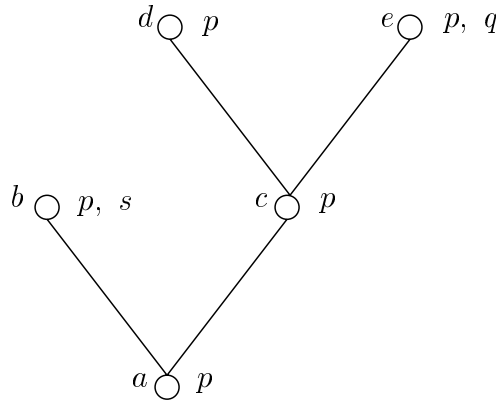


図 2.9 クリプキ・モデル C

図 2.9 より, $a \models p$ である. また a と線で結ばれており, a より y 座標が高い他の可能世界においても p が成り立つので, $b \models p, c \models p, d \models p, e \models p$ がいえる. また可能世界 e においてのみ, q が成り立つ $e \models q$. そのため, e 以外の各可能世界では, q が成り立たないので, $a \not\models q, b \not\models q, c \not\models q, d \not\models q$ となる. 同様に可能世界 b においてのみ s が成り立つので, $a \not\models s, c \not\models s, d \not\models s, e \not\models s$ となる.

ここで図 2.9 の可能世界 c 及び d に注目する. 図を一見すると可能世界 c と d は違いがないように見える. 付値も $c \models p, c \not\models q$ と $d \models p, d \not\models q$ といったように同様である.

しかし, ここで論理式 $\neg q$ について考えてみる. $c \not\models \neg q$ である. これに対して $d \models \neg q$ となる. これは可能世界 d が終末の可能世界であるためである. 上で述べたように, 終末の可能世界ではすべての命題の真偽が決定される. それに対して, 終末の可能世界以外では命題の真偽が決定不可能な状態があり得る. そのため可能世界では成り立つ, または成り立たないと示されている命題変数に関しては違いがないにも関わらず, 可能世界の位置に応じて, どのような論理式が成り立つかに関する違いが生じる.

2.3.3 NA-Hasse 図

Hasse 図では上で述べたように, 一見同様の付値が与えられていても, 可能世界の位置によって成り立つ論理式が異なるという問題があった. そこで Hasse 図に命題変数と同様に, 成り立たない命題変数および命題変数に否定記号を高々 1 つ加えた論理式を付加して

記述する．これを NA-Hasse 図と呼ぶことにする．(Negation Added Hasse Diagram) これによって可能世界の内部状態がより明示的になるはずである．

定義 5 NA - Hasse 図

各可能世界において成り立っている命題変数の下に，成り立たない命題変数を \neq の記号をつけて表す．また成り立つ否定は，成り立つ命題変数に続けて描き，成り立たない否定は，成り立たない命題変数に続けて描く．上で問題の例として取り上げられた図 2.9 を NA-Hasse 図の定義に従って描くと次のようになる．

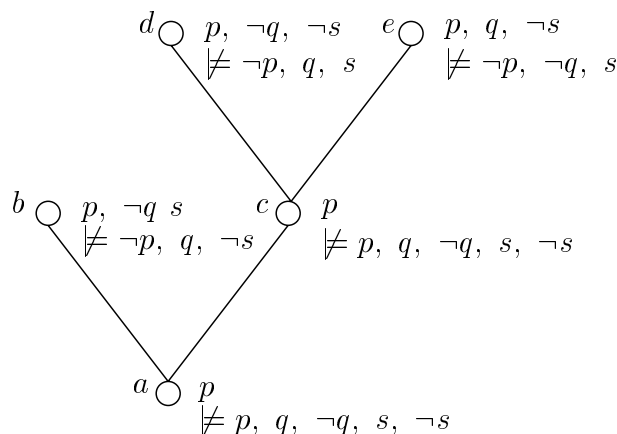


図 2.10 NA-Hasse 図

図 2.10 によって，可能世界 c と d の違いが明らかとなった．このように直観主義論理では成り立つ命題によって一意に論理式が決定されない．これに対して古典命題論理においては命題の真偽値によって一意に論理式の真偽値が決定される．直観主義論理では命題の付値と命題の否定の付値によって論理式の付値は決定される．例えば，図 2.10 において，可能世界 a と c が命題および命題の否定に対して同じ付値をとっている．よって a, c では同様の論理式の付値をとることになる．

このように成り立たない命題変数および命題変数の否定を図に描くことによって，各可能世界のより詳細な情報を得ることができた．しかしこのような拡張 Hasse 図においてもいくつかの問題が残る．

問題 1

命題変数に否定記号をつけた論理式の付値は明らかとなったが，その他の論理式の付値は明示されていない．もしそれを導きたいならば，命題変数を表す記号列から導くことになる．

例えば，図 2.10 の NA-Hasse 図において論理式 $\neg\neg s \vee \neg p$ が真かどうか，もしくは偽であれば各可能世界における $\neg\neg s \vee \neg p$ の付値はどのようになっているかを調べるとする．そのような場合，各可能世界において，明らかとなっている命題から対象とする論理式の部分式 ($\neg\neg s$) を導き，それらを組み合わせて目的の論理式の付値を導く．その際の推論における作業は記号操作である．命題および論理式を図形に置き換えることで，この推論を記号操作でなく，より簡単に行えると思われる図形操作に変形することができる．

問題 2

直観主義論理のさまざまな定理が Hasse 図および NA-Hasse 図では暗示的にされている．

例えば，成り立つ命題，成り立たない命題，命題の否定はそれぞれ関係をもっている．図 2.10 のクリプキ・モデルにおいて，終末の可能世界， b, d, e では必ず命題の真偽が定まっている．これは上述した，終末の可能世界においては必ず命題の真偽が定まる（排中律が成り立つ）という定理である．それに対して終末の世界以外， a, c ではそうっていない．しかし Hasse 図および NA-Hasse 図からそれを読み取ることは難しい．

また，補助定理で述べた付値の遺伝的性質も Hasse 図，NA-Hasse 図においては明らかでない．これらの関係を明示的に表現したい．

問題 3

各可能世界における論理式の付値は，成り立つ命題，成り立たない命題，命題の否定の付値によって決定される．よって各可能世界における論理式の付値が同じであるかどうかを調べるには，それらが同様であるかどうかを調べればよい．この付値が同じかどうかを調べるのは，可能世界の右側に並べられた命題変数およびその否定を各可能世界ごとに見比べていくという作業である．もしこれらの命題変数およびその否定が記号ではなく，なんらかの図形であれば，比較はよりスムーズに行われるように思われる．

図形が同じ形であるかどうかを判断するのは定性的な推論である．上述したように，定性的理解は全体像の特徴の理解を可能にし，すばやい判断をすることができる．

2.3.4 Hasse 図を用いたシステム

Hasse 図は、直観主義論理の証明システムにおいて、対象の論理式が偽である証明としてカウンターモデルを生成するのにしばしば利用されている。

Haack によるシステム *Kripke* は、直観主義論理において入力された論理式が対象となるクリプキ・モデルにおいて成り立つかどうかを判別し、表示するシステムである。*Kripke* では、テキストの行を利用して Hasse 図における y 軸を表現し、クリプキ・モデルを Hasse 図として表現している。そして対象となる論理式およびその論理式の部分論理式を各可能世界において表示している。

Larkin と Simon は、純粹に言語的な表現と、言語的ではあるけれどもその並べ方が図に表された空間的關係を反映している表現を比べて、たとえ情報量は同じでも空間關係が重要な役割を占める問題の場合は、後者を使うことによってより能率よく問題を解決できることを証明している。*Kripke* はその理論を用いたシステムといえる。

また Stoughton によるシステム、*Porgi* も上述した *Kripke* と同様にテキスト行を利用して、テキストベースで Hasse 図を表すが、入力された論理式が直観主義論理においてトートロジーであった場合、自然演繹法でその論理式がトートロジーであることを証明する。

長野らは、直観主義論理における証明システム、*SKIP* を作成している。そのシステムも *Porgi* と同様に論理式を入力とし、もし対象とする論理式が真であれば、自然演繹法による証明図が表示される。もし偽であれば、その論理式を偽とするようなカウンターモデルが生成される。*SKIP* が *Porgi* や *Kripke* と異なるのは、Hasse 図を表現するのにテキストでなく図を用いていることである。そのため *Kripke* と同じクリプキ・モデルを Hasse 図で記述しても *SKIP* のほうが視覚的に優れている。これは、いかに空間的に言語情報をならべても、より抽象化がすすんだ図形のほうが視覚的に優れていることを表している。また Java で実装を行なうことにより、インターネットから利用できるというのも特徴である。

しかしこれらのシステムに共通しているのは、上で述べた Hasse 図の問題点を含んだまま Hasse 図を利用していることである。つまり、Hasse 図は各可能世界において、命題変数に対する付値を明示することはできるが、その複合である論理式を明示することはできていない。また、さまざまな直観主義論理の定理を明示的に表せているとはいえない。

Kripke システムの場合、対象とする論理式およびその部分論理式については明示することができるので、NA-Hasse 図のようなものになっている。しかし上述したように、NA-Hasse 図においても様々な問題が残っている。

以下の章ではこれらの問題を解消する Hasse 図の記述方法を提案し、およびそれに基づ

いて作成したシステムについて記述する．このシステムによって Hasse 図および NA-Hasse 図においては不明瞭な情報が明示的になり，直観主義論理の性質をうまく表現される．これにより学習者が容易に直観主義論理のセマンティクスを理解し学習効果を生み出すことを期待する．

第 3 章

図による直観主義論理

3.1 3D-Hasse 図

2 章において、直観主義論理のクリプキ・モデルを Hasse 図および NA-Hasse 図で表し、その問題について述べた。本章ではその問題を補うべく、Hasse 図を 3D 化した Hasse 図を提案する。以下、3 次元の Hasse 図を 3D-Hasse 図と呼ぶ。

3.1.1 3D-Hasse 図

3D-Hasse 図において、Hasse 図における命題変数を z 軸への線を用いて表現し、Hasse 図を立体的に表現する。それによって、図形操作から各可能世界における論理式の付値を導き出すことができるようになる。また論理式の対応関係の可視化により、暗示的であった情報が明示的になる、視覚的な分かりやすくなる、などの効果が期待できる。

Hasse 図は x, y 軸の 2 次元であったが、3D-Hasse 図では、図 3.1 のように z 軸を加える。ここで z 軸が意味するものは、各可能世界における命題変数および論理式の付値である。以下でクリプキ・モデルと 3D-Hasse 図との対応を定義する。

定義 6 3D-Hasse 図

Hasse 図と同様に、クリプキ・モデル (W, R, \models) における、 W の要素である可能世界を 3D-Hasse 図では各ノードで表し、各ノードの横に各要素のラベルをつける。また R も同様に、線で結ぶことによって表す。異なるのは \models 、つまり付値の表現方法である。Hasse 図では各ノードの右側に、各可能世界で成り立つ命題変数を記したが、3D-Hasse 図では、

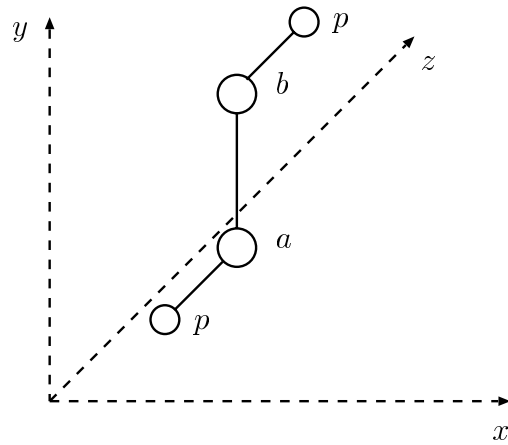


図 3.1 3D-Hasse 図

z 軸上に線を描くことで、命題および論理式の成立、不成立を表現する。各ノードにおける z 軸の座標を 0 にとり、正の方向にのびる線で成立する命題・論理式を表し、負の方向にのびる線で成立しない命題・論理式を表す。 z 軸の線の先端にノードをつけ、その線が表す命題または論理式をノードの横に記述する。この z 軸の線を R の関係を表す線と区別するために、論理式線と呼び、 R の関係を表す線を関係線と呼ぶ。また論理式を表すノードを可能世界のノードと区別するため、論理式ノードと呼び、可能世界を表すノードを可能世界ノードとよぶ。異なる論理式は、論理式ノードからさらに z 軸に論理式線を引き、論理式ノードを先端に描くことによって表す。論理式線の引かれる順番は、命題変数、命題変数の否定、そこから導かれる論理式の順で、可能世界ノードから引くこととする。また異なる論理式は、異なる色の論理式線によって区別される。さらに、命題変数の否定を表す論理線は、命題を表す論理線の色と同色の点線で表す。

3D-Hasse 図とクリプキ・モデルとの対応を以下にまとめる。

- 可能世界 $w \in W$ は可能世界ノードと対応している。
- 可能世界の間関係（半順序関係） R は可能世界ノードを結ぶ関係線と対応している（可能世界ノードは反射的關係を含んだものとする）
- 3D-Hasse 図には y 軸の概念があり、可能世界の間関係が wRw' となっているとき、 w は w' よりも下に位置する。
- 各可能世界における付値は各可能世界ノードまたは論理式ノードから z 軸に対して

上部，下部へ引かれる論理式線と，その先端の論理式ノードに対応している．

さらに 3D-Hasse 図では可能世界における論理式の関係を示すために，次に述べる論理式関係線を導入する．論理式ノードの値が同じであれば，その論理式ノード同士をクリプキ・フレームによって与えられた Hasse 図にしたがって結ぶ．この線を論理式関係線と呼ぶ．また論理式関係線の色は，それに対応する論理式線と同じ色とする．

図 3.2 で，それぞれ定義した図形を表す．

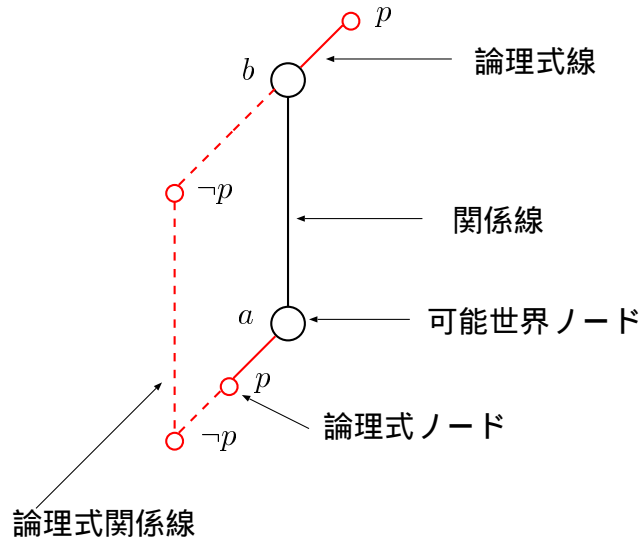


図 3.2 3D-Hasse 図の各名称

3.1.2 3D-Hasse 図の生成規則

3D-Hasse 図において，論理式線で明示された命題および命題の否定から，それらの組合わせである論理式線を生成する規則を定義する．この生成規則は定義で述べた直観主義論理の付値の定義に対応したものである．

定義 7 3D-Hasse 図の生成規則

1. 可能世界ノード a で命題変数 p が成り立つとき，可能世界ノード a から正の z 軸方向に論理式線と p のラベルのついた論理式ノードが描かれる．逆に命題変数 p が成り立たないときには，負の z 軸方向に論理式線と p のラベルのついた論理式ノードが描かれる．

\updownarrow

$$a \models p \iff a \in V(p)$$

2. 異なる2つの論理式線が同じ可能世界ノード上から描かれていれば、 z 軸の正・負の方向に関わらず、その可能世界ノードにおいて、2つの論理式ノードのラベルを \wedge で結んだ論理式線および論理式ノードが描かれる。またそのときに限り、 z 軸の負の方向に、2つの論理式ノードのラベルを \vee で結んだ論理式線および論理式ノードが描かれる。

 \updownarrow

$$a \models A \wedge B \iff a \models A \text{ かつ } a \models B$$

3. 異なる2つの論理式線が片方でも可能世界ノードから z 軸に対して正の方向に描かれていれば、その可能世界ノードにおいて、2つの論理式ノードのラベルを \vee で結んだ論理式線および論理式ノードが描かれる。

 \updownarrow

$$a \models A \vee B \iff a \models A \text{ または } a \models B$$

4. 可能世界ノード a 自身と a より y 軸で上部にあり、直接または間接的に関係線で結ばれているすべての可能世界ノードにおいて、論理式線 A が z 軸上で負の方向にのびている、または論理式線 B が正の方向にのびていれば、可能世界ノード a において論理式線および論理式ノード $A \supset B$ が描かれる。

 \updownarrow

$$a \models A \supset B \iff aRb \text{ となるすべての } b \text{ に対し } b \models A \text{ または } b \models B$$

5. 可能世界ノード a 自身と a より y 軸で上部にあり、直接または間接的に関係線で結ばれているすべての可能世界ノードにおいて、論理式線 A が z 軸上で負の方向にのびていれば、可能世界ノード a において $\neg A$ の論理関係式が正の方向へ描かれる。

 \updownarrow

$$a \models \neg A \iff aRb \text{ となるすべての } b \text{ に対し } b \not\models A$$

6. 論理式線がある可能世界ノードで z 軸上で正の方向にのびていれば、その可能世界ノードより y 軸上で上にあり、直接または間接的に関係線で結ばれているすべての可

能世界ノードにおいて、 z 軸の正の方向にその論理式線がひかれる。

反対に、ある可能世界ノードで z 軸上で負の方向に論理式線がのびていたら、その可能世界ノードより y 軸上で下にあり、直接または間接的に関係線で結ばれているすべての可能世界ノードにおいて、 z 軸の負の方向にその論理式線がひかれる。

↓

クリプキ・モデル (W, R, \models) において、任意の論理式 A に対し、集合 $\{x(\in M) \mid x \models A\}$ は遺伝的である。

7. 終末の可能世界において、 z 軸上で正の方向に論理式線がのびていれば、その論理式に否定記号を奇数個付加した、または除去した論理式線が z 軸上で負の方向にひかれる。

↓

終末の可能世界において命題の真偽が完全に定まる。

生成規則 6 は、成り立つ論理式は y 軸で上への遺伝的性質をもち、成り立たない論理式は下への遺伝的性質をもつ、ということである。

例えば次のクリプキ・モデルで論理式 $\neg p \vee \neg\neg p$ が成り立つかどうか調べるとする。

$$W = a, b, c$$

$$R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle\}$$

$$a \models p$$

このクリプキ・モデルを図 3.3 では Hasse 図、図 3.4 では NA-Hasse 図で表し、図 3.5 では 3D-Hasse 図との対応の定義に基づき 3D-Hasse 図で表す。

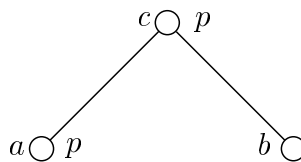


図 3.3 Hasse 図

図 3.5 を上述した生成規則にしたがって論理式 $\neg p \vee \neg\neg p$ を調べる。まず、生成規則 1 をもちいて各可能世界において $\neg p$ の付値を表す (図 3.6) すべての可能世界ノードにお

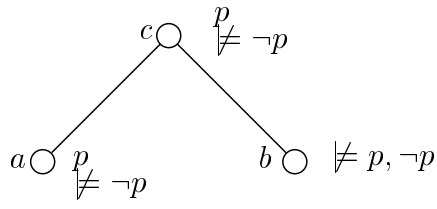


图 3.4 NA-Hasse 图

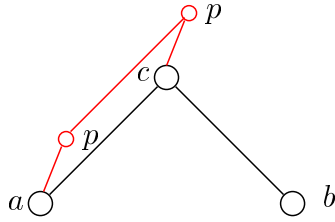


图 3.5 3D-Hasse 图

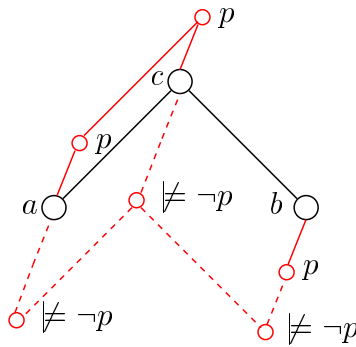


图 3.6 NA-Hasse 图

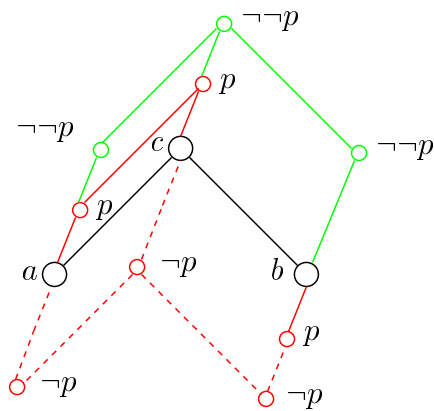


图 3.7 生成規則 5

いて $\neg p$ が負の方向へのびているので，生成規則 5 を使って $\neg\neg p$ の論理式線が描かれる．
 (図 3.7)

次に生成規則 3 にしたがって， $\neg p \vee \neg\neg p$ の論理式線を描く (図 3.8)

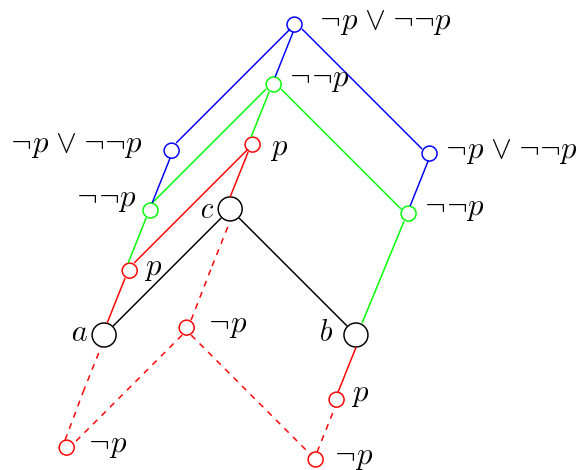


図 3.8 生成規則 3

図 3.8 から論理式 $\neg p \vee \neg\neg p$ を表す論理式ノードを結んだ論理式関係線がクリプキ・フレーム (W, R) と同様の形をしていることが一目でわかる． z 軸で正の方向に論理式関係線がクリプキ・フレームと同じ形をしているということは，すべての可能世界においてその論理式が成り立っており，このクリプキ・モデルにおいてその論理式が真であることを意味する．ここでは論理式 $\neg p \vee \neg\neg p$ がすべての可能世界ノードにおいて成り立つことがわかる．よってこのクリプキ・モデルにおいて $\neg p \vee \neg\neg p$ は真である．

このように 3D-Hasse 図においては，次の補助定理が成り立つ．

補助定理

正の z 軸方向で論理式関係線がクリプキ・フレームと同形するとき，その論理式はそのクリプキ・モデルにおいて真である．

Hasse 図の場合における論理式の導出は記号操作である．それに対して，3D-Hasse 図を用いて，対象とする論理式が真か偽か調べるには，生成規則にしたがって線を組み合わせさせていけばよい．したがって論理式の導出は積み木を積むような操作になり，よりスムーズに行えるものと考えられる．

また，上の補助定理のように，図の形からクリプキ・モデルにおける論理式の真偽を判別することができる．こういった作業は記号操作よりも図形操作の方がより簡単にスムー

ズに行うことができると考えられる。

3D-Hasse 図のもう一つの例として，二重否定除去および排中律を偽とするモデルを見
てみる．次のクリプキ・モデル (W, R, \models) が与えられ，Hasse 図，3D-Hasse 図をそれぞ
れ描き，二重否定除去および排中律がこのモデルにおいて偽であることを示す．図 3.9 で
Hasse 図，図 3.10 で 3D-Hasse 図を描く．

$$W = \{a, b\}$$

$$R = \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle$$

$$b \models p$$

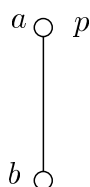


図 3.9 Hasse 図

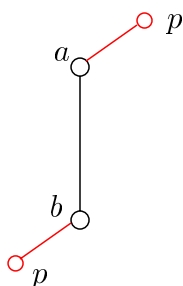


図 3.10 3D-Hasse 図

まず，Hasse 図の図 3.9 から対象とする論理式 $p \vee \neg p$ を導く． $b \models p$ で， a において p の
付値がないので， $a \not\models p$ である．さらに， $b \models p$ より， $b \not\models \neg p$ と $a \not\models \neg p$ が導かれる．よっ
て可能世界 a において， $\not\models p \vee \neg p$ であることがわかる．それに対して，可能世界 b におい
て $p \vee \neg p$ は成り立つ（図 3.11）よってこのクリプキ・モデルにおいて排中律が成り立た
ないことがわかる．

さらに，二重否定については， $a \not\models \neg p, b \not\models \neg p$ より， $b \models \neg \neg p$ が導かれる．しかし，
 $b \not\models p$ なので， $b \not\models \neg \neg p \supset p$ となる．よってこのクリプキ・モデルにおいて二重否定除去
は成り立たない（図 3.12）

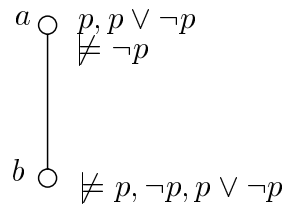


図 3.11 Hasse 図

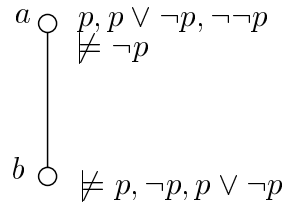


図 3.12 Hasse 図

次に，3D-Hasse 図の図 3.10 から対象とする論理式 $p \vee \neg p$ を導く．これは次の生成規則を使って導くことができる．

まず生成規則 1 を用いて，各可能世界における $\neg p$ の論理式線を描く（図 3.13）次に生成規則 2,3 で $p \vee \neg p$ の論理式線が描かれる（図 3.14）さらに生成規則 5 より $\neg\neg p$ の論理式線が描かれる（図 3.15）生成規則 4 より $\neg\neg p \supset p$ の論理式線が描かれる（図 3.16） $p \vee \neg p$ および $\neg\neg p \supset p$ の論理式関係線はともにクリプキ・フレームと同形ではない（論理式関係線無し）ので，このクリプキ・モデルにおいて偽である．

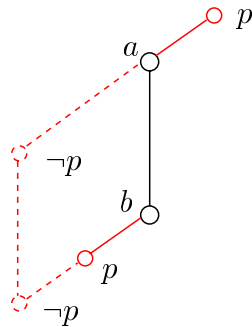


図 3.13 生成規則 1

こうして 3D-Hasse 図によって排中律および二重否定除去を偽とするカウンターモデルを生成することができた．Hasse 図と比較してみると，各可能世界における論理式の成立，不成立がより明瞭に描かれていることがわかる．とくに命題に関してはその否定を点線で表しているのははっきりとわかる．終末の可能世界において命題とその否定の論理式線は

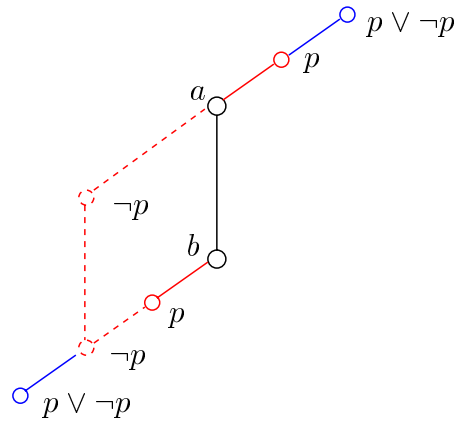


图 3.14 生成規則 5

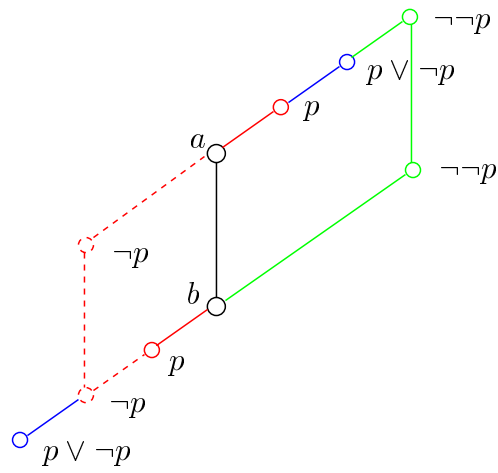


图 3.15 生成規則 4

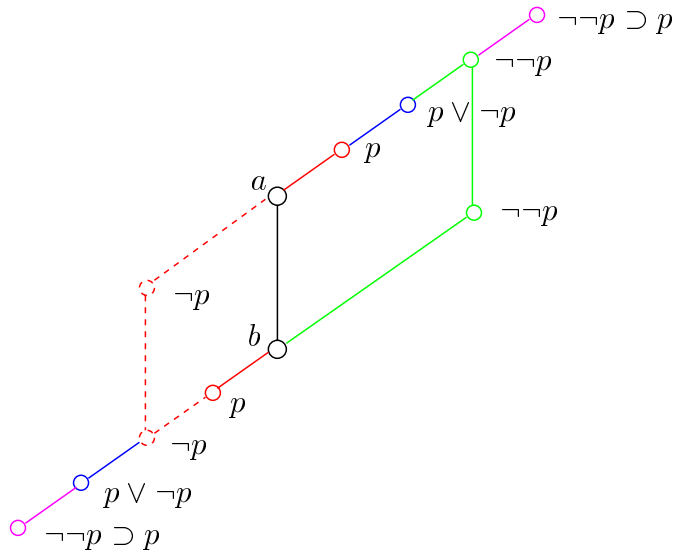


図 3.16 生成規則 4

必ず可能世界を境に上下にわかれて延びている。

3.1.3 3D-Hasse 図の問題点

3D-Hasse 図の問題点として次のようなことが考えられる。

対象とする論理式の数が増えると非常に複雑な図になってしまい、見辛くなってしまし、描きにくくなってしまふ。 n 個の論理式の真偽を 3D-Hasse 図で調べるとすれば、当然 n 本の論理式線を描かなければならない。これでは図のもつ性質、FreeRide をうまく使用しているとはいえない。シンプルな形の図でありながら、多くの情報をもつ図によって描かれるべきである。

さらに対象とする論理式がたとえ 1 個でも、その論理式が複雑であれば論理式線は増えてしまふ。複雑な論理式を導くにはその部分論理式を導かなければならないからである。

3.2 Venn 図 + Hasse 図

3.2.1 Venn 図

3D-Hasse 図の欠点の一つに，複雑な論理式を導こうとすると多くの論理式線を描く必要があり，見にくくなってしまいうというものがあった．そこでここでは Venn 図を用いることによって，一つの図で多くの論理式を表し，それをクリプキ・モデルを表す Hasse 図と組み合わせて直観主義論理を表現することを提案する．

定義 8 Venn 図

まず直観主義論理で使用する Venn 図の基礎となる古典命題論理の図形の体系を定義する（以下古典命題論理を単に命題論理と呼ぶことにする．）

命題論理記号で用いるのは以下の記号である．

- 論理記号： $\wedge \vee \supset \neg$
- 命題変数： p, q, r, \dots
- 論理式： A, B, C, \dots

Venn 図で用いる図形は図 3.17 で示すそれぞれの図形である．

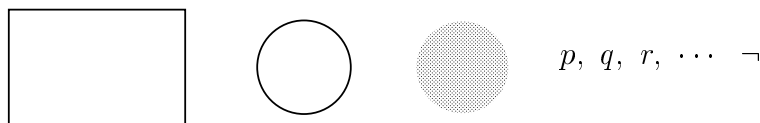


図 3.17 Venn 図に使われる図

左から長方形，閉曲線，影，命題変数である．長方形はすべての命題の領域を表し，閉曲線はその命題が成り立つ領域を表している．影がついている図形は成り立たない領域を表している．閉曲線にはそれぞれにラベルと呼ばれるものがつけられる．これを p, q, \dots などの記号とする．このラベルはその閉曲線の領域で成り立つ命題を表している．さらにラベルには，たかだか 1 個の論理演算子 \neg を付けることができる，とする．これによって命題の否定の領域を表すことができる．

また長方形及び閉曲線は反転という特徴をもつ．反転とは，それぞれの長方形および閉曲線における命題に対する偶数個の否定を付加することが成り立つということである．これによって，命題 p が成り立つという閉曲線が描かれることによって， $\neg\neg p, \neg\neg\neg\neg p, \dots$

が成り立つことを表すことができる．逆に命題 p が成り立たないとすれば ($\neg p$ が成り立つ) , $\neg\neg p, \neg\neg\neg\neg p, \dots$ も成り立たないことを表すことができる．

図 3.18 は命題 p が成り立つ領域を, 図 3.19 は命題 $\neg p$ が成り立つことを表している．また反転により, p に偶数個否定をつけた論理式 ($\neg\neg p, \neg\neg\neg\neg p, \dots$) が図 3.18 では成り立ち, 図 3.19 では $\neg p$ に偶数個否定をつけた論理式 ($\neg\neg\neg\neg p, \neg\neg\neg\neg\neg\neg p, \dots$) が成り立つことを表している．

図 3.20 の 2 つの閉曲線が交わることによってつくられる領域は命題 p と q の conjunction , すなわち $p \wedge q$ の領域を表し, 2 つの閉曲線が形作るすべての領域は $p \vee q$ の領域を表している．

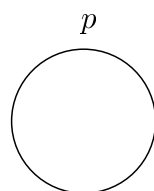


図 3.18 p

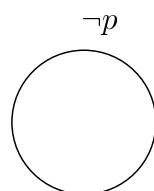


図 3.19 $\neg p$

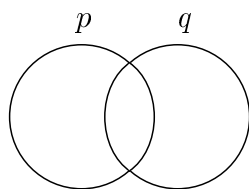


図 3.20 $p \vee q, p \wedge q$

図 3.18, 3.19 の 2 つの図で, 1 つの命題からなる真理値表を表すことができる．すなわち, 図 3.21 は表 3.1 の 1 行目の真理値表を表し, 図 3.22 は 2 行目の真理値表を表している．つまり, 図 3.21 は命題 p が成り立っていることを表し, p 以外の部分は斜線がひかれ

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$	$\neg\neg\neg\neg p$	$p \vee \neg p$	\dots
1	0	1	0	1	1	\dots
0	1	0	1	0	1	\dots

表 3.1 真理値表 1

ているので成り立たない，すなわち $\neg p$ が成り立たないことを表している．また反転により， p に偶数個の否定演算子を付けた論理式も同時に成り立つことを表している．逆に， $\neg p$ に偶数個の否定演算子を付けた論理式はやはり成り立たない．

図 3.22 は逆のことが成り立つ．

また， $p \vee \neg p$ の領域は図 3.21, 3.22 それぞれの長方形を含むすべての領域に当たる．その領域はそれぞれ一部分が白地（図 3.21 においては p のラベルのついた閉曲線，図 3.22 においては $\neg p$ のついた閉曲線）なので， $p \vee \neg p$ すなわち排中律が成り立つ．

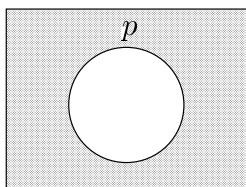


図 3.21 1 行目の Venn 図

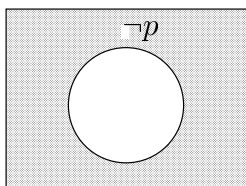


図 3.22 2 行目の Venn 図

さらに図 3.20 を用いることによって 2 つの命題をもつ真理値表を表すことができる．図 3.23, 3.24, 3.25, 3.26 はそれぞれ表 3.2 を上から順に表している．

図 3.23 からは， p と q のラベルの付いた閉曲線が両方白地なので $p, q, \neg\neg p, \neg\neg q$ はもちろん $p \vee q, p \wedge q$ も成り立つことが読み取れる．また斜線部は p, q 以外の領域を示しているため， $\neg p, \neg q$ が成り立たないことも示している．

図 3.24 はラベル p のついた閉曲線および $\neg q$ のついた閉曲線が白地なので， $p, \neg q$ が成り立つ．しかしそれ以外の領域は斜線部なので $\neg p, q$ が成り立たないことを示している．

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg\neg p$	$\neg\neg q$	$\neg\neg\neg p$	$\neg\neg\neg q$	\dots
1	1	0	0	1	0	0	0	\dots
1	0	0	1	1	1	0	1	\dots
0	1	1	0	0	0	1	0	\dots
0	0	1	1	0	1	1	1	\dots

表 3.2 真理値表

よって $p, \neg q$ の反転である $\neg\neg p, \neg\neg\neg p, \dots, \neg\neg q, \neg\neg\neg q, \dots$ が成り立つ。ラベル p の閉曲線とラベル $\neg q$ の閉曲線が交じりあった領域は斜線となっているので $p \wedge \neg q$ が成り立つことが読み取れる。しかし p の閉曲線と交わっている領域は、 q の領域である斜線部と交わっていないので $p \wedge q$ は成り立たないことが示されている。

図 3.25 は図 3.24 と反対に $\neg p, q$ が成り立つので図 3.24 とは逆の付値をとることになる。

図 3.26 は $\neg p, \neg q$ が成り立っていることを示している。また 2 つの閉曲線以外の領域は斜線部となっているので、 p, q は成り立たないことを示している。

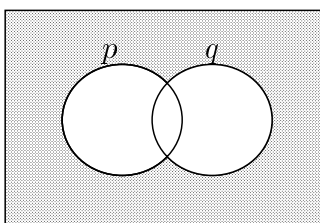


図 3.23 Venn 図

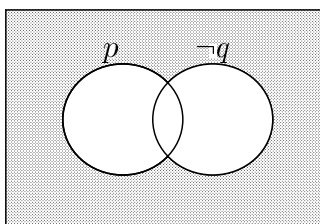


図 3.24 Venn 図

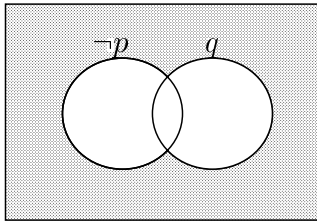


図 3.25 Venn 図

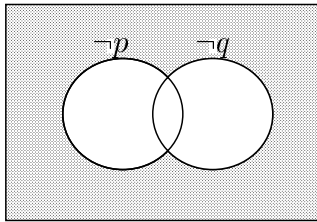


図 3.26 Venn 図

Venn 図の長所

Venn 図の長所は 1 つの図で多くの論理式を表現することができることである。上でみたように、理論的には 1 つの Venn 図によって真理値表の 1 行を表すことができる。ここで理論的には、と断ったのはあまりにも長く複雑な論理式の場合、たとえ図がそれを示していても人間が読み取ることができないためである。しかしながら、1 つの Venn 図からいくつかの論理式の付値を直感的に判断することができるのも事実である。

Venn 図の短所

Venn 図の短所は扱うことのできる命題の数が限られている、ということである。具体的には Venn 図は 3 つの命題までしかうまく表現することができない。無理をすれば、3 つ以上の命題を表すことができる。すなわち 1 つの命題の領域を 1 個以上に分割してやればいいわけである。しかし、そうした場合図の持つ特性であり、テキスト情報と比べて利点である、分かりやすさがなくなってしまふ。それどころかテキスト情報よりも分かりにくくなってしまふ恐れも生じる。よって Venn 図では扱う命題を 3 つまでに限定する方がよい。

また、Venn 図で直観主義論理の各可能世界を表現しようとする問題が生じる。それは Venn 図の基本的理念が 2 値原理であるためである。2 値原理が採用されているということは、ある命題が成り立てば、必ずその命題に否定記号を 1 つ付けた論理式は成り立た

ず，ある命題に否定記号を1つつけた論理式が成り立てば，必ずその命題は成り立たないことである．しかし直観主義論理の場合，命題が成り立たないと同時に，その命題に否定記号を1つつけた論理式も成り立たないという可能世界がある．またある命題は成り立たないが，その命題に2つの否定記号を付けた論理式は成り立つ，という可能世界もある．そういった場合をこのような古典命題論理を表す Venn 図では対応しきれない．

3.2.2 I-Venn+Hasse 図

ここでは Hasse 図と Venn 図を組み合わせることによって直観主義論理のクリプキ・モデルを表す．しかし直観主義論理においては上で述べた Venn 図をそのまま用いることはできないので直観主義論理に適した Venn 図を再定義する．この直観主義論理のための Venn 図を I-Venn 図と呼ぶ．(Intuitionistic Logic Venn Diagram)

定義 9 I-Venn 図

直観主義論理で用いる図は図 3.27 である．



図 3.27 I-Venn 図に使われる図

左から長方形，閉曲線，点線閉曲線，影，命題変数である．長方形はすべての命題の領域を表す．閉曲線はラベルによって指定された命題および論理式の領域を表す．点線閉曲線は命題の領域を表す．影がついている図形は成り立たない領域を表している．閉曲線にはそれぞれにラベルと呼ばれるものがつけられる．これを p, q, \dots などの記号とする．このラベルはその閉曲線の領域で成り立つ命題を表している．さらにラベルには，たかだか1個の論理演算子 \neg を付けることができる，とする．これによって命題の否定の領域を表すことができる．しかし点線閉曲線につけられるラベルには1個の論理演算子もつかないものとする．

また長方形及び閉曲線は反転という特徴をもつ．反転とは，それぞれの長方形および閉曲線における命題に対する偶数個の否定を付加した論理式がもと命題の付値と同様であるということである．これによって，命題 p が成り立つという長方形または閉曲線が描かれることによって， $\neg\neg p, \neg\neg\neg\neg p, \dots$ が同時に成り立つことを表すことができる．逆に命題 p が成り立たない長方形または閉曲線が描かれることによって $\neg p, \neg\neg\neg p, \dots$ も成り

立たないことを表すことができる。

点線閉曲線は，その領域に影がついており，その点線閉曲線についてのラベルが示す命題が成り立っていないとしてもその反転，すなわちラベルの記号に偶数個の否定記号をつけたものが成り立つものとする．これによって， p というラベルのついた点線閉曲線に影がついていても， $\neg p, \neg\neg p, \dots$ は成り立つことを表すことができる．

直観主義論理においては，可能世界 $a \in W$ が $a \not\models p \vee \neg p$ また $a \not\models \neg\neg p \supset p$ といった付値をとるクリプキ・モデル (W, R, \models) が存在する（図 3.28）

$$W = \{a, b\}$$

$$R = \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle$$

$$b \models p$$



図 3.28 Hasse 図

このクリプキ・モデルの可能世界 a, b それぞれの付値を真理値表で表す（表 3.3）この真理値表において 1 はその命題が成り立つことを，0 は成り立たないを意味する．表 3.3 の真理値表をみると可能世界 b を記述するには，上で述べた古典命題論理を表す Venn 図で足りることがわかる（図 3.29）というのは直観主義論理において，ある可能世界から到達することができる可能世界がその可能世界以外無いといった，終末の可能世界においてその付値は古典論理の場合と同じだからである．

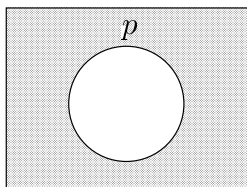


図 3.29 可能世界 b の Venn 図

	p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$	$\neg\neg\neg\neg p$	$p \vee \neg p$	$\neg\neg p \supset p$...
b	1	0	1	0	1	1	1	...
a	0	0	1	0	1	0	0	...

表 3.3 1つの命題をもつ真理値表

しかし可能世界 a では真理値表をみればわかるように，古典命題論理のとり付値とは大きく異なっている． $p, \neg p$ が成り立たないにも関わらず， $\neg\neg p$ が成り立ち，古典命題論理ではトートロジーであるはずの $p \vee \neg p, \neg\neg p \supset p$ すなわち排中律と二重否定除去が成り立っていない．このような可能世界を表すには，2値原理を基礎理念にもつ上で述べた Venn 図では不足である．そこで，ここで新しく導入した点線閉曲線を用いる．

点線閉曲線はその領域に影がついていても，その反転は成り立つという性質をもつので図 3.28 の可能世界 a を図 3.30 で表すことができる．

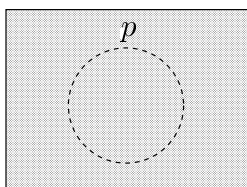


図 3.30 可能世界 a の Venn 図

図 3.30 は真理値表 3.3 にしたがって，ラベル p のついた点線閉曲線およびそれ以外の領域 ($\neg p$) に影がついているので， $p, \neg p$ が成り立たないことを図示している．また $p \vee \neg p$ を表す領域である全体図もすべて影がついているので $p \vee \neg p$ も成り立たないことがわかる．

点線閉曲線の性質から $\neg\neg p, \neg\neg\neg\neg p, \dots$ が成り立つことが読み取れる．よって可能世界 a においては p が成り立たないにも関わらず， $\neg\neg p$ が成り立ち，それゆえ $\neg\neg p \supset p$ が成り立たないことがわかる．

表 3.4 において，2つの命題をもつ真理値表を表す．左の列の $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ は可能世界である．可能世界 a, b, c, d のとり付値は古典命題論理のとり付値と同様である．そのため排中律や二重否定除去が成り立っている．よってこれらの可能世界を I-Venn 図で表すと，上で述べた古典命題論理の Venn 図と同じものとなる（図 3.31, 3.32, 3.33, 3.34）つまり可能世界 a, b, c, d においては 2値原理が採用されている．

可能世界 a, b, c, d と異なり，可能世界 e, f, g, h, i は直観主義論理の特徴である 2値原理が成り立たない世界となっている．

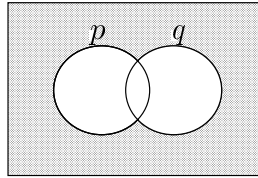


図 3.31 可能世界 a の Venn 図

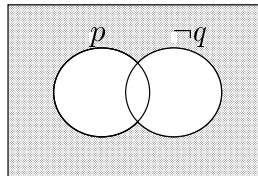


図 3.32 可能世界 b の Venn 図

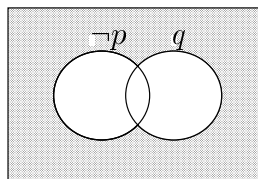


図 3.33 可能世界 c の Venn 図

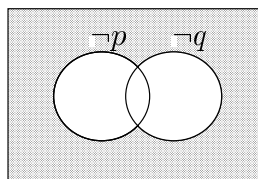


図 3.34 可能世界 d の Venn 図

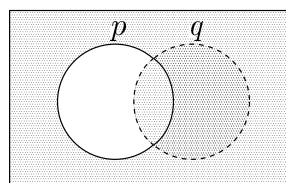


図 3.35 可能世界 e の Venn 図

	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg\neg p$	$\neg\neg q$	$\neg\neg\neg p$	$\neg\neg\neg q$	$p \vee \neg p$	$q \vee \neg q$	$\neg\neg p \supset p$	$\neg\neg q \supset q$	\dots
a	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	\dots
b	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	\dots
c	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	\dots
d	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	\dots
e	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	\dots
f	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	\dots
g	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	\dots
h	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	\dots
i	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	\dots
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	\dots

表 3.4 2つの命題をもつ真理値表

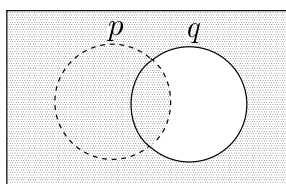


図 3.36 可能世界 f の Venn 図

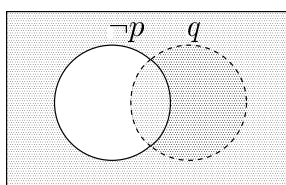


図 3.37 可能世界 g の Venn 図

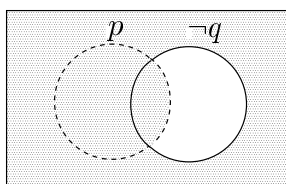


図 3.38 可能世界 h の Venn 図

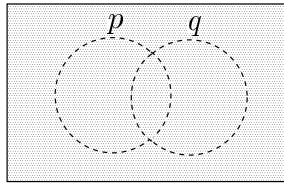


図 3.39 可能世界 i の Venn 図

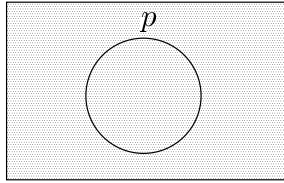


図 3.40 可能世界 i の Venn 図

このように直観主義論理の真理値表である表 3.4 の各列を I-Venn 図で表すことができた . I-Venn 図は可能世界の内容を一つの図で表すことができる . この I-Venn 図と Hasse 図を組み合わせることによってクリプキ・モデルを表すことができる . この図を I-Venn+Hasse 図と呼ぶことにする .

I-Venn+Hasse 図を使って次のクリプキ・モデル (W, R, \models) を表す .

$$W = \{a, b\}$$

$$R = \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle$$

$$b \models p$$

可能世界 a, b の付値は表 3.5 のようになるので , I-Venn 図は図 3.41 のように描かれる . また次のクリプキ・モデル (W, R, \models) を I-Venn+Hasse 図を使って表すと図 3.42 のようになる .

$$W = \{a, b, c, d\}$$

	p	$\neg p$	$\neg\neg p$
b	1	0	1
a	0	0	1

表 3.5 可能世界 a, b の真理値表

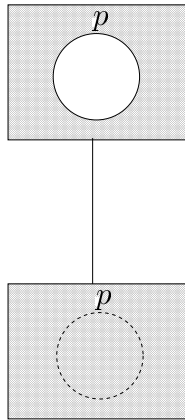


図 3.41 I-Venn+Hasse 図

$$R = \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, d \rangle$$

$$a \models q, b \models p, c \models r$$

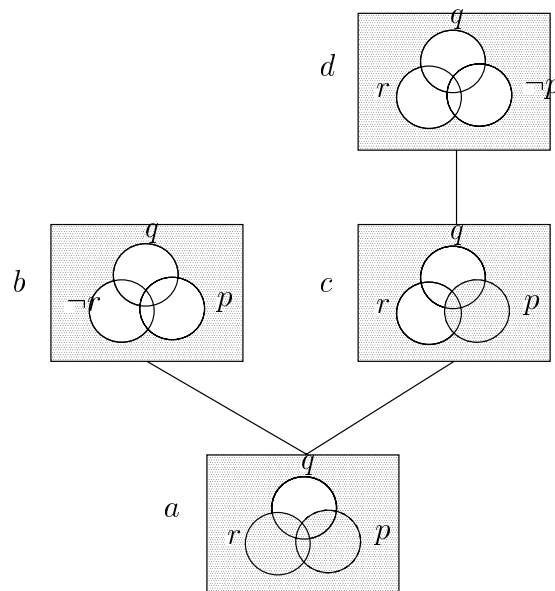


図 3.42 I-Venn+Hasse 図

可能世界 c と d は命題の付値を見る限り同じである . ($c \models q, c \models r, d \models q, d \models r$) しかし可能世界 d は終末の可能世界なので c とは異なる状態となる . I-Venn+Hasse 図 3.42 はそれを表現している . つまり可能世界 c, d の両方とも p が成り立たないことは同じであるが , d においては $\neg p$ が成り立ち , c においては $\neg p$ が成り立たない . この違いを図 3.42 は明確に表している .

3.3 まとめ

これまでクリプキ・モデルを表す図として3種類の図形を提案してきた。2次元的なHasse図(NA-Hasse図も含む)、3D-Hasse図、I-Venn+Hasse図である。これらはそれぞれ長所、短所をもっている所以下にまとめる。

Hasse図

長所

- 最もシンプルな記述である。

短所

- 成り立つ命題および論理式と成り立たないものの区別がされにくい。
- 様々な定理(終末の可能世界における付値、付値の遺伝的性質など)を明示的に表現できない。
- 与えられた命題から論理式を導く方法が記号操作である。

3D-Hasse図

長所

- 様々な定理(終末の可能世界における付値、付値の遺伝的性質など)を明示的に表現することができる。
- 多くの情報が明示的なので、それらを用いてスムーズに論理式の真偽値を導くことができる。

短所

- 多くの論理式を必要とする場合に、複雑な図形となり見辛くなってしまう。

I-Venn+Hasse図

長所

- 様々な定理(終末の可能世界における付値、付値の遺伝的性質など)を明示的に表現することができる。

- シンプルな図で多くの論理式の付値を単純かつ明瞭に表現することができる。
- 直観主義論理の可能世界の内部状態を明確に表現できる。

短所

- 命題が高々3つまでのクリプキ・モデルまでしかうまく表現することができない。

第 4 章

実装と評価

4.1 システムの構成

3 章の Venn 図と Hasse 図を組み合わせたモデルに基づいて, C 言語により実装をおこなった. システムの構成を図 4.1 に示す.

システムのモジュール

Input ユーザからのテキストデータによるクリプキ・モデル (W, R, \models) および対象とする論理式を入力とする.

Worlds Relation Generation 入力されたクリプキ・フレーム (W, R) から可能世界の関係をつくる.

Assignment Determination 各可能世界において, 入力された命題の付値を判定する.

Assignment of Formula Determination 可能世界の付値に応じて, 論理式の付値を判定する.

Formula Parser 入力された論理式を構文解析する.

Output Hasse Diagram 対象とする論理式が成り立つ可能世界を明示した Hasse 図を出力する.

Output I-Venn and Hasse Diagram I-Venn 図と Hasse 図を組み合わせた図を出力する.

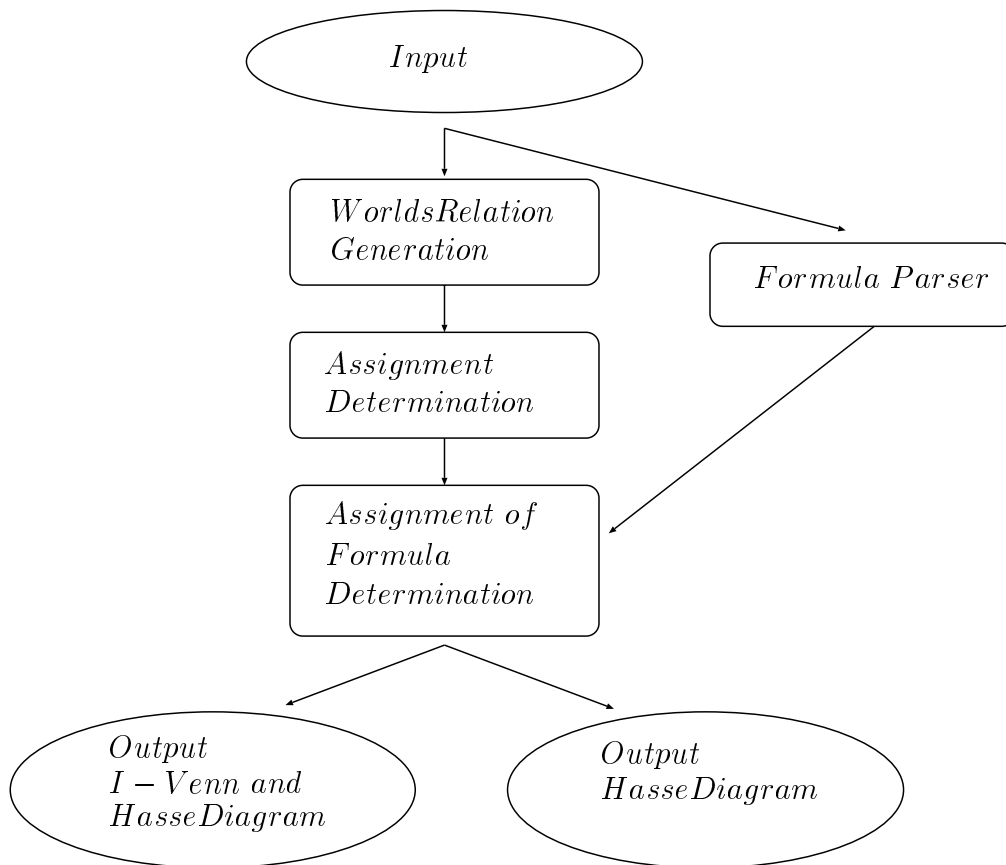


図 4.1 システム構成

4.2 諸概念の実装

今まで論じてきた Hasse 図および I-Venn 図の理論はシステムにおいて以下の通り表現される。

- システムにおいて使用される論理記号は以下のようにして代用される。また本システムにおいて \supset は取り扱わない。

– $\vee \rightarrow \bigvee$

– $\wedge \rightarrow \bigwedge$

– $\neg \rightarrow \sim$

- 論理記号はポーランド記法によって表記される。

(例) $p \vee \neg p \rightarrow \bigvee p \sim p$

- 付値の記号 \models を \vDash で代用する。

- I-Venn 図における図形は以下のようにして代用される。

– 青色の閉曲線はその閉曲線のラベルの命題がその領域内で成り立つことを表す。

– 白の閉曲線はその閉曲線のラベルの命題がその領域内で成り立たないことを表す。

– 赤色の閉曲線はその閉曲線のラベルに否定記号をつけたものが成り立つ領域を表す。

– 点線閉曲線は黄色の閉曲線で表される。

- システムにおける可能世界の到達可能関係のテキスト表示について、反射的關係は省略する。

(例) aRa, bRb, \dots

4.3 ユーザーインターフェイス

本システムでは UNIX 上の *kterm* をユーザーインターフェイスとして、テキスト情報としてクリプキ・モデルおよび論理式を入力する。システムを実行すると以下のような選択画面が表示される。これに従って入力をしていく。

1. see model
2. make new model
3. add relation
4. delete relation
5. change relation
6. add assignment
7. delete assignment
8. change assignment
9. change proposition
10. exit

4.4 動作例

システムの動作例として以下のようなクリプキ・モデル (W, R, \models) およびを論理式 $p \vee q$ を入力した場合の出力を見てみる .

$$W = a, b, c, d$$

$$R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, d \rangle, \}$$

$$a \models q, b \models p, c \models r$$

システムに実際に入力する際には以下のような入力をする .

Input relation -> aRb, aRc, cRd

Input assignment -> a]=q, b]=p, c]=r

Input proposition -> 0 p q

それによって図 4.2 の Hasse 図が出力される . また , [click here!](#) と書かれたところをマウスでクリックすることによって図 4.3 の I-Venn 図+Hasse 図が出力される .

図 4.2 を見てみると , 1 列目に可能世界の到達可能関係 , 2 列目に各可能世界における命題の付値 , 3 列目に各可能世界における対象とする論理式の付値がテキスト情報で表示されている . また 1 列目と 2 列目の情報で入力時の情報は緑で , 入力から導かれた情報はピンクの色で区別されている .

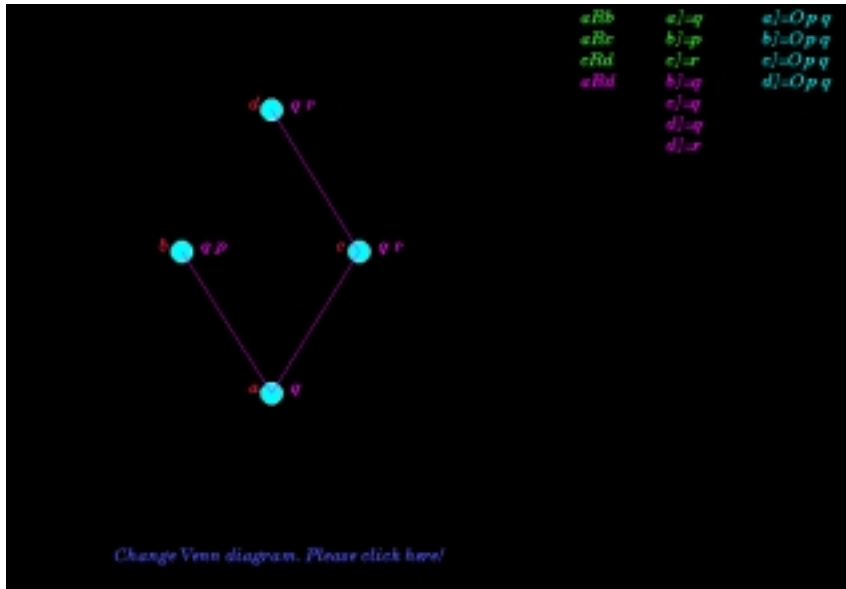


図 4.2 Hasse 図

ここで FreeRide の性質がうまく利用されていることが分かる．可能世界の到達可能関係を例にすると，入力は aRb, aRc, cRd, dRe だったが，そこから描かれた Hasse 図は入力時の情報はもちろん， aRd, aRe という新たな情報も同時に表している．

また 2 列目の付値の場合においても，Hasse 図のおかげで可能世界の到達可能関係が容易に判断でき，付値の遺伝的性質から入力 $a \models p, e \models q$ から， $b \models p, c \models p, d \models p, e \models p$ の情報を得ることが容易にできる．

また 3 列目に表示された可能世界における論理式の付値は Hasse 図の可能世界を同色で塗り潰すことで表されている．図 4.2 において，すべての可能世界が塗り潰されているので，このクリプキ・モデルにおいて $p \vee q$ が成り立っていることがわかる．

しかし図 4.2 の Hasse 図およびテキスト情報は，各可能世界においてどの命題が成り立っていないかを明示的に表してはいない．そこで本研究で提案した I-Venn 図のモデルに基づく図 4.3 の I-Venn 図+Hasse 図をみてみたい．

図 4.3 においては，すべての可能世界において q の青色の閉曲線が描かれている．これはすべての可能世界で命題 q が成り立っていることを表している．また終末の可能世界 b, d ではそれぞれ r, p の赤色の閉曲線が描かれている．これは b では $\neg r$ が， d では $\neg p$ がそれぞれ成り立っていることを表している．さらに可能世界 a では p, r が， c では p が白色の閉曲線で描かれている．これは a, c でそれぞれ p, p, r が成り立たないことを表している．しかも $\neg p, \neg r, \neg r$ が成り立たないことも表している．

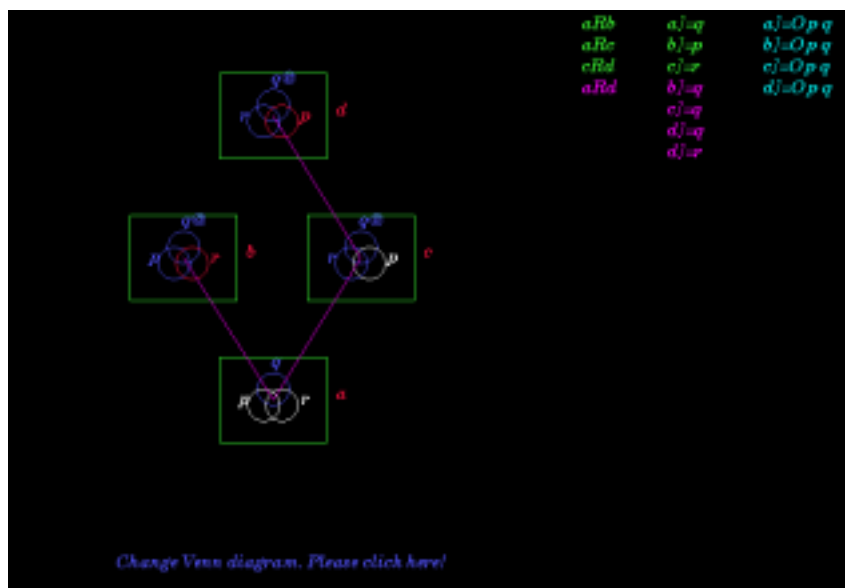


図 4.3 Hasse 図

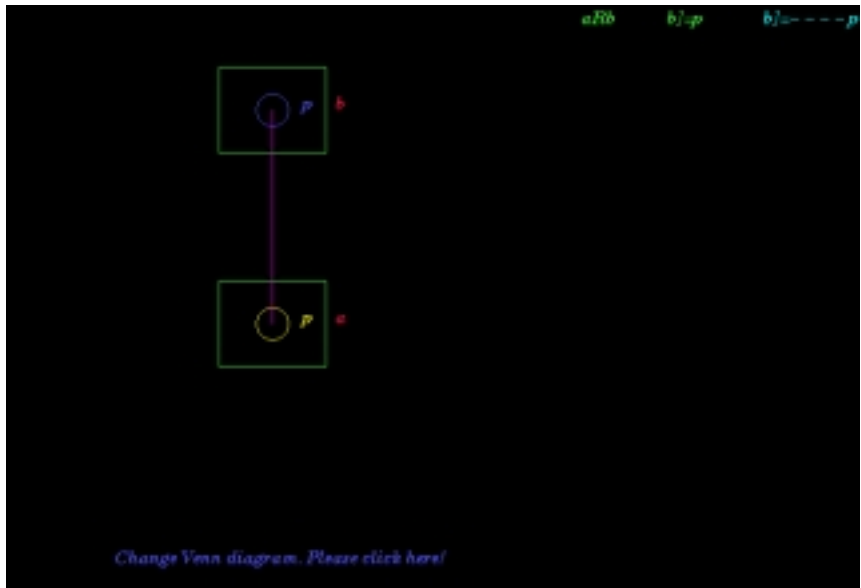
また次のクリプキ・フレームを入力すると図 4.4 のような出力をする .

$$W = a, b$$

$$R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle\}$$

$$b \models p$$

実行結果の図 4.4 では , 可能世界 b において p が青色の閉曲線で描かれおり , a において p が黄色の閉曲線で描かれている . よって $a \not\models p, \neg p$ がわかる . よって $a \models p \vee \neg p$ を表している . また黄色の閉曲線は I-Venn 図においての点線閉曲線であるため p に偶数個の否定記号を付加したものが成り立つので , $a \models \neg\neg p$ であることを表している .



☒ 4.4 Hasse ☒

第 5 章

おわりに

5.1 まとめ

直観主義論理のクリプキ・モデルを表現する図形として 3 つの図を提案してきた (NA-Hasse 図, 3D-Hasse 図, I-Venn+Hasse 図) これらはどれもそれぞれ長所・短所をもっているが, 最もうまく直観主義論理を表現した図は I-Venn+Hasse 図である. I-Venn+Hasse 図は直観主義論理の様々な特徴 (遺伝的性質, 排中律の不成立, 二重否定除去の不成立など) をシンプルな図で表している. I-Venn+Hasse 図において各可能世界の到達可能関係は通常の Hasse 図で描かれており, 可能世界の内部状態は, Venn 図の機能を追加した I-Venn 図で表している. 通常 Venn 図は 2 値原理の基本理念で描かれており, 2 値原理が成り立たない直観主義論理を表すことはできないが, 反転の機能を付加することによって表現できるようにした.

さらに I-Venn+Hasse 図をモデルとしてシステムの実装をおこなった. このシステムにおいて, 複雑な直観主義論理のセマンティクスをシンプルな記述で表現することができることを示した. 本研究の利点は以下の通りである.

I-Venn+Hasse 図

- 従来の Hasse 図では明示的でなかった直観主義論理の様々な性質を図形によって表すことができる.
- 多くの情報をもつ可能世界の内部状態を Venn 図を用いてシンプルに表すことができる.

システム

- 入力したクリプキ・モデルから生成される図によって，そのクリプキ・モデルにおける入力された論理式およびその他の論理式の真偽値，および各可能世界における付値をスムーズに得ることができる．
- 入力されたクリプキ・モデルおよび論理式から通常の Hasse 図および I-Venn+Hasse 図の 2 つが生成されるので両者の違いが明確にわかる．

5.2 他のシステムとの比較

↔ *Kripke, Porgi, SKIP*

これらはすべて与えられた論理式が偽であるときにカウンターモデルを生成する．その際に通常の Hasse 図を用いている．ある論理式がクリプキ・モデルにおいて偽であるということは，少なくとも一つの可能世界においてその論理式が成り立たないことを意味している．それを与えられた図からよりスムーズに導くことができるのは，より多くの情報を含んだ本研究におけるシステムのほうである．

↔ *HyperProof*

HyperProof は記号操作と図形操作の両方の機能をもつシステムである．それに対して，本研究におけるシステムは入力記号のみである．図・記号の両方からの操作は，今後の課題である．

5.3 今後の課題

- I-Venn 図は命題を 3 つまでしか表せないが，Venn 図を 3D 化すると 4 つの命題をもつ Venn 図を表すことができる．従って I-Venn 図を 3D 化し 4 つの命題を表すことができるようにする．
- 図形操作を取り入れたシステムを構築する．図形操作を取り入れるということは，間違った図を生成しないような制限規則が必要である．よって誤った図を描くことがなくなり，図によって誤解が生じることが無くなる．
- 3D-Hasse 図および I-Venn+Hasse 図の他の論理体系への応用（様相論理など）

参考文献

- [1] Allen Stoughton, Porgi, "a Proof-Or-Refutation-Generator for Intuitionistic propositional logic", *CADE-13 Workshop on Proof Search in Type-Theoretic Languages*, pp.109-116, 1996.
- [2] Gerard Allwein, Jon Barwise, "Logical Reasoning with Diagrams", Oxford University Press, 1996.
- [3] Eric Hammer, "Reasoning with Sentences and Diagrams", *Notre Dame Journal of Formula Logic*, Vol.35, No.1, pp.73-87, 1994.
- [4] Jon Barwise, John Etchemendy, "Diagrammatic Reasoning", *AAAI Press*, 1995.
- [5] <http://www.cis.ksu.edu/~allen/kripke.html>
- [6] Larkin, J.H. and Simon, H.A. "Why a Diagram is (sometimes) Worth Ten Thousand Words", *Cognitive Science*, Vol.11, pp.65-99, 1987.
- [7] Sun-Joo Shin, "The Logical Status of Diagrams", *Cambridge University Press*, 1994.
- [8] 岩崎由実, 図による推論と定性推論, 人工知能学会誌, Vol.9, No.2, pp.183-189, 1994年3月.
- [9] 小野寛晰, 「情報科学における論理」, 日本評論社, 1998.
- [10] 佐塚秀人, 長野大介, 廣川佐千男, 証明とモデルを生成するインターネットプルーバー, 九州大学大型計算機センター, 計算機科学研究報告, 第16号, 1-6, 1999.
- [11] 清塚謙助, 沢村一, 図を用いた推論の複雑性に関する考察, 人工知能学会誌, Vol.14, No.4, pp.646-656, 1999年6月.
- [12] 萩谷昌己, 「ソフトウェア科学のための論理学」, 岩波書店, 1994.

- [13] 村田剛志, 志村正道, 実験によるデータ獲得に基づく帰納的発見手法, 電気情報通信学会論文誌, D-I, Vol. J82-D-I, No. 6, pp. 779-785, 1999年6月.