Title	ハウスメイト問題における平等性に関する研究
Author(s)	浅野，美香
Citation	
Issue Date	2002-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1551
Rights	
Description	Supervisor:Milan Vlach，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

ハウスメイト問題における平等性に関する研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

浅野 美香

2002 年 3 月

修 士 論 文

ハウスメイト問題における平等性に関する研究

指導教官　Milan Vlach 教授

審査委員主査　Milan Vlach 教授
審査委員　平石 邦彦 助教授
審査委員　下平 博 助教授

北陸先端科学技術大学院大学

情報科学研究科情報システム学専攻

010002 浅野 美香

提出年月: 2002 年 2 月

概 要

公平分割問題は、二人以上のプレイヤーが共同で所有している単数または複数のものを分配するとき、「公平」な分配を求める問題である。共同で所有しているものには、分割可能なものと分割不可能なもの、また、手に入れて有利なものと不利なものが考えられる。身近なところではケーキの切り分け、遺産相続、仕事の分担などがあり、昔から考えられてきた問題である。

本研究では、分割不可能で手に入れて有利なものと分割可能で手に入れて不利なものを共同で所有している場合の公平分割問題の一例としてハウスメイト問題を取り上げた。

公平分割問題において、解が「公平」であるか判断するために公平の基準が必要である。ハウスメイト問題では、公平の基準として、比例性、無羨望性、正確性が提案されている。

従来研究において、Brams と Kilgour は、各ハウスメイトの得る割引額の合計が最大になるような比例性を満たす解を求めるアルゴリズム、Gap Procedure を提案した。また、彼らは、無羨望性を満たす解の存在について、$n \leq 3$ であれば無羨望性を満たす解は常に存在し、$n \geq 4$ であれば無羨望性を満たす解が存在するとは限らないことを示した。その後、Sung と Vlach は無羨望性を満たす解が存在するとき、その割当ては必ず最大合計割当てになることを示した。さらに、彼らは無羨望性が存在するとき、そのうちの一つを出力するアルゴリズムを提案した。また、無羨望性を満たす解が存在するとき、一般に一意に定まらないことを示した。

本研究では、公平の基準を平等性としたハウスメイト問題を考え、平等性を満たす解が常に存在することを示した。また、解によって、各ハウスメイトの得る割引額が異なることから平等性と比例性を満たす解が存在するか判定する問題を考え、その問題が NP 完全であることを示した。このことから、平等性を満たす解の中で、各ハウスメイトに最大の割引額を与える問題は NP 困難であることがわかった。さらに、Sung と Vlach により提案されているアルゴリズムの拡張として、無羨望性を満たし、ハウスメイトが得る割引額の最小と最大の差が最小となる解、すなわち、無羨望性を満たす解の中で最も平等な解、を求める効率的なアルゴリズムを提案した。

目 次

第1章　ハウスメイト問題

1.1　はじめに

公平分割問題は、二人以上のプレイヤーが共同で所有している単数または複数のものを分配するとき、「公平」な分配を求める問題である。共同で所有しているものには、分割可能なものと分割不可能なもの、また、手に入れて有利なものと不利なものが考えられる。身近なところではケーキの切り分け、遺産相続、仕事の分担などがあり、昔から考えれてきた問題である。[7]。

公平分割問題において、分配が「公平」であるかを定める基準として、様々な公平の基準が提案されている。ここで、その提案されている公平の基準の代表的なものを紹介する。まず、分配した結果は、共有しているものを n 分割したもの $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ と割当て π で定義される。ここで、$\pi(i) = j$ はプレイヤー i に D_j を割当てることを意味する。また、すべてのプレイヤーが同じ価値観とは限らないため、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、V_i をプレイヤー i が分配されるものの価値を与える関数とする。

この分配が**比例性**を満たすとは、各プレイヤーが自分の価値観で評価して、自分の取り分の価値が全体の価値の $1/n$ 以上である。すなわち、

$$V_i(D_\pi(i)) \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V_i(D_j) \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たす。また、この分配が**無羨望性**を満たすとは、各プレイヤーが自分の価値観で評価して、自分の取り分の価値が他のプレイヤーの取り分の価値以上である。すなわち、

$$V_i(D_\pi(i)) \geq V_i(D_j) \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たす。さらに、この分配が**正確性**を満たすとは、各プレイヤーは自分の価値観で評価して、すべてのプレイヤーの取り分の価値が等しい。すなわち、

$$V_i(D_1) = V_i(D_2) = \cdots = V_i(D_n) \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たす。これらの定義から、明らかに、正確性を満たす分配は無羨望性も満たし、また、無羨望性を満たす分配は比例性も満たす。

1.2 ハウスメイト問題

分割不可能で手に入れて有利なものと分割可能で手に入れて不利なものを共同で所有している場合の公平分割問題の多くは、現実の問題であるハウスメイト問題に定式化できる。ハウスメイト問題とは、n (≥ 2) 人のハウスメイトで n 部屋ある家賃 c (≥ 0) の家を借りるとき、どのハウスメイトにどの部屋をいくらの部屋代で割り当てるかを考える問題である。この問題において、部屋は分割不可能で手に入れて有利なものであり、家賃は分割可能で手に入れて不利なものである。

各ハウスメイト i は各部屋 j に支払ってもよい非負の評価値 b_{ij} を付ける。ただし、各ハウスメイトが付けた評価値の合計は家賃 c となる。よって、ハウスメイト問題の入力とは、$n \times n$ 行列 $B = [b_{ij}]$ と c であり、以下の条件が満たされる。

$$
\begin{aligned}
&b_{ij} \geq 0 \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \\
&b_{i1} + b_{i2} + \cdots + b_{in} = c \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

各ハウスメイトはちょうど一つの部屋が割当てられその部屋の部屋代を支払う。よって、ハウスメイト問題の出力とは、割当て $\pi : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ と非負の n-次元のベクトル $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ の対 (π, P) で表される。部屋の割当て π に対し、$\pi(i) = j$ はハウスメイト i に部屋 j が割当てられ、その部屋代 p_j を支払うことを意味する。ただし、各部屋の部屋代は非負であり、その合計は家賃 c となる。すなわち、各 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し、p_j を部屋 j の部屋代と表すと、以下の条件が満たされる。

$$
\begin{aligned}
&p_j \geq 0 \quad \text{for every } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \\
&p_1 + p_2 + \cdots + p_n = c
\end{aligned}
$$

各ハウスメイトは自分の取り分、すなわち部屋とその部屋代、を割引額で評価する。ここで、ハウスメイト i が部屋 j で得る割引額 s_{ij} とは、支払ってもよい金額 b_{ij} と実際に支払う部屋代 p_j の差である。すなわち、

$$
s_{ij} = b_{ij} - p_j \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}
$$

である。

ここで、ハウスメイト問題において提案されている公平の基準を紹介する。公平の基準は割引額を用いて定義される。

解 (π, P) が**比例性**を満たすとは、各ハウスメイトが自分の価値観で評価して、自分の取り分の価値が全体の $1/n$ 以上である。すなわち、

$$s_{i\pi(i)} \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たす。また、解 (π, P) が**無羨望性**を満たすとは、各ハウスメイトが自分の価値観で評価して、自分の取り分の価値が他のハウスメイトの取り分以上である。すなわち、

$$s_{i\pi(i)} \geq s_{ij} \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たす。さらに解 (π, P) が**正確性**を満たすとは、各ハウスメイトが自分の価値観で評価して、すべてのハウスメイトの取り分の価値が等しい。すなわち、

$$s_{i1} = s_{i2} = \cdots = s_{in} \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たす。

1.3 従来研究

比例性を公平の基準とした従来研究において、Brams と Kilgour [1] は、比例性を満たす解を求めるアルゴリズム、Gap procedure を提案した。そのアルゴリズムの特徴として、部屋の割当てが最大合計割当てであることが挙げられる。最大合計割当てとは、各ハウスメイトの付けた評価値の合計が最大になるような割当てである。

また、彼らは、無羨望性を公平の基準とした問題についても考えている。彼らは、無羨望性を満たす解の存在について、$n \leq 3$ であれば無羨望性を満たす解は常に存在し、$n \geq 4$ であれば無羨望性を満たす解が存在するとは限らないことを示した。その後、Sung と Vlach [2] は無羨望性を満たす解が存在するとき、部屋の割当ては必ず最大合計割当てになることを示した。さらに彼らは無羨望性が存在するとき、そのうちの一つを出力するアルゴリズムを提案した。そして、無羨望性を満たす解が存在するとき、一般に一意に定まらないことを示した。

本研究では、公平の基準を平等性としたハウスメイト問題を考えた。ハウスメイト問題において、解が平等性を満たすとは、ハウスメイトが得る割引額が等しい。よって、平等性を満たす解が存在するとき、解により、各ハウスメイトの得る割引額が異なることがある。よって、平等性と比例性を満たす解が存在するか判定する問題の難しさについて検討し、NP 完全問題とされている問題をその問題に還元をすることを考えた。そして、平等性を満たす解の中で、各ハウスメイトに最大の割引額を与える問題についても難しさを検討した。さらに、Sung と Vlach により提案されているアルゴリズムの拡張として、無羨望性を満たし、ハウスメイトが得る割引額の最小と最大の差を最小にする、すなわち、無羨望性を満たす解の中で最も平等な解を求める効率的なアルゴリズムを提案を試みた。

1.4 本論文の構成

本論文の構成は次の通りである。第二章では、ハウスメイト問題に関する従来研究を紹介する。第三章では、公平の基準をそれぞれ、平等性、平等性と比例性、平等性と無羨望性としたとき、検討したことを述べる。第四章では、無羨望性を満たす解の中で最も平等な解を求めることについて述べる。そして、第五章では本研究のまとめを述べる。

第2章　従来研究

この章では、ハウスメイト問題に関する従来研究について紹介する。

2.1　比例性

ハウスメイト問題では、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (b_{ij} - p_j) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} - \sum_{j=1}^{n} p_j = c - c = 0$$

となるため、解 (π, P) が比例性を満たすとは各ハウスメイトが得る割引額が 0 以上となる。

比例性を満たす解は常に存在する。そのような解を求める方法を以下に示す。まず、

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)} \geq c$$

となる割当て π を求める。このような割当て π は常に存在する。ここで、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$p_{\pi(i)} = b_{i\pi(i)} \left(\frac{c}{\sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)}} \right)$$

となる (π, P) をハウスメイト問題の解とする。明らかに、各 $p_{\pi(i)}$ は非負であり、

$$\sum_{i=1}^{n} p_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)} \left(\frac{c}{\sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)}} \right) = c$$

となり、かつ、

$$s_{i\pi(i)} = b_{i\pi(i)} - b_{i\pi(i)} \left(\frac{c}{\sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)}} \right) \geq 0$$

となるので、(π, P) は比例性を満たす。

Brams と Kilgour [1] は、比例性を満たす解を出力するアルゴリズム、Gap Procedure を提案した。このアルゴリズムの特徴として、部屋の割当てが最大合計割り当てになることが挙げられる。最大合計割当て π とは、任意の割当て σ に対し、

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)}$$

を満たす割当てである。

Gap Procedure

1. 最大合計割り当て π を求める。
2. すべての $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対し、$t_{\pi(i)} = t'_{\pi(i)} := b_{i\pi(i)}$ とする。
3. $t'_1 + t'_2 + \cdots + t'_n > c$ のとき、次の手順を繰り返す。
   (a) すべての $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対し、$t_j := t'_j$ とする。
   (b) 各部屋 j に対し、$t'_j > b_{ij}$ となる最大の評価値を求め、$t'_j := b_{ij}$ とする。そのような b_{ij} が存在しなければ j に対し、t'_j を変更しない。
4. $t_1 + t_2 + \cdots + t_n > c$ のとき、各 $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対し、
$$p_j := t_j - \left(\frac{t_j - t'_j}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - t'_k)}\right)(\sum_{k=1}^{n} t_k - c)$$
   とする。そうでなければ、$p_j = t_j$ とする。
5. 部屋代を $P = [p_j]$ とする。
6. (π, P) を出力する。

ハウスメイトが得る割引額の合計は、各ハウスメイトが割当てられた部屋に付けた評価値の合計から家賃を引いたものであるので、Gap Procedure は、ハウスメイトが得る割引額の合計が最大となる解を求める。

2.2 無羨望性

Brams と Kilgour [1] は無羨望性を満たす解の存在について以下のことを示した。

命題 2.1 $n \leq 3$ のとき、無羨望性を満たす解は常に存在する。

まず、$n = 2$、すなわち二人のハウスメイトで二部屋ある家を借りる場合、を考える。このとき、一人のハウスメイトがもう一人のハウスメイトよりも大きい評価値を付けるか、二人とも同じ評価値を付けるかのどちらかである。前者の場合、各ハウスメイトにそれぞれより大きい評価値を付けた部屋に割当てる。そして、評価値の合計が家賃となるように各ハウスメイトに部屋代を与える。このとき、割当てられなかった部屋で得られる割

引額は、割当てられた部屋で得る割引額よりも少ないので、どちらのハウスメイトも他のハウスメイトを羨望しない。後者の場合、どちらか一方にどちらか一方の部屋を割当てる。評価値の合計は家賃となり、評価値が部屋代となる。このとき、各ハウスメイトの得る割引額は等しいので、羨望しない。

$n=3$、すなわち三人のハウスメイトで三部屋ある家賃 100 の家を借りる場合、を考える。ハウスメイトが付けた評価値は次のような場合を考える。

$$B = \begin{pmatrix} x & 100-x & 0 \\ y & 100-y & 0 \\ z & 100-z & 0 \end{pmatrix}$$

このとき評価値の関係は $x > y > z$ とする。この評価値に対し、部屋の最大合計割当て π は、$\pi(1)=1, \pi(2)=3, \pi(3)=2$ である。Gap Procedure によって得られた部屋代は、$p_1 = y, p_2 = 100-y, p_3 = 0$ である。

ハウスメイト 1 は部屋 1 でのみ正の割引額を得るので他のハウスメイトを羨望しない。同様にハウスメイト 3 も部屋 2 でのみ正の割引額を得るので、他のハウスメイトを羨望しない。ハウスメイト 3 はそれぞれの部屋で得られる割引額が 0 となるので、他のハウスメイトを羨望しない。

命題 2.2 $n \geq 4$ のとき、無羨望性を満たす解は存在するとは限らない。

四人のハウスメイトで四部屋ある家賃 100 の部屋を借りる場合を考える。ハウスメイトが付けた評価値が以下の場合を考える。

$$B = \begin{pmatrix} 36 & 34 & 30 & 0 \\ 31 & 36 & 33 & 0 \\ 34 & 30 & 36 & 0 \\ 32 & 33 & 35 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき、無羨望性を満たす解が存在しないことを示す。まず、無羨望性を満たす解が存在すると仮定する。部屋 4 を割当てられたハウスメイトを i とする。すなわち、$\pi(i) = 4$ とする。ハウスメイト i が無羨望であるため、すべての部屋 j で得られる割引額 $b_{ij} - p_j$ は部屋 4 で得られる割引額 $b_{i4} - p_4$ 以下になるので、部屋代 $P = [p_j]$ は $j = 1,2,3,4$ に対し、$p_j = b_{ij}$ となる。

$i = 1$ のとき

部屋1に部屋代以上の評価値を付けたのはハウスメイト1だけである。しかし、ハウスメイト1には部屋4が割り当てられているので、部屋1はハウスメイト1以外のハウスメイト i' に割当てる。そうすると、ハウスメイト i' は負の割引額を得るので、ハウスメイト1を羨望する。よって、i=1のとき、無羨望性をみたさない。

同様に $i = 2, 3$ のときも無羨望性を満たさない。

$i = 4$ のとき

このとき、部屋代は $P = [32, 33, 35, 0]$ となる。部屋4の部屋代が0であるため、無羨望性を満たす解では、各ハウスメイトは0以上の割引額を得る。よって、ハウスメイト2には部屋2が割当てられる。同様に、ハウスメイト1には部屋1が割当てられる。最後にハウスメイト3に部屋3を割当てる。ここでハウスメイト3が部屋3で得られる割引額が1であるのに対し、ハウスメイト3が部屋1でより大きな割引額2を得る。よって、ハウスメイト3はハウスメイト1を羨望する。よって、無羨望性を満たさない。

以上より、解が無羨望性を満たすことに矛盾する。よって、無羨望性を満たす解は存在しない。

2.2.1 部屋の割当て

ハウスメイト問題の解は部屋の割当て π と部屋代 P の対 (π, P) で表される。n 人のハウスメイトの場合、異なる部屋の割当ては $n!$ 通り存在する。Sung と Vlach は無羨望性を満たす解が存在する場合の部屋の割当てについて以下のことを示した。

命題 2.3 もし、(π, P) が

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \geq b_{ij} - p_j \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たすのならば、部屋の任意の割当て σ に対し、割当て π は、

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)}$$

を満たす。

証明: (π, P) が

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \geq b_{ij} - p_j \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たすとき、任意の部屋の割当て σ について、

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \geq b_{i\sigma(i)} - p_{\sigma(i)} \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

となる。よって、

$$\sum_{i=1}^{n}(b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}) \geq \sum_{i=1}^{n}(b_{i\sigma(i)} - p_{\sigma(i)})$$

から

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)}$$

が成り立つ。 ■

命題 2.4 もし、(π, P) が

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \geq b_{ij} - p_j \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たすならば、

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)}$$

となる部屋の任意の割当て σ に対し、(σ, P) は

$$b_{i\sigma(i)} - p_{\sigma(i)} \geq b_{ij} - p_j \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たす。

証明: (π, P) が

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \geq b_{ij} - p_j \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たすことから、部屋の任意の割当て σ に対し、

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \geq b_{i\sigma(i)} - p_{\sigma(i)} \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

となる σ を

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} b_{\pi(i)}$$

を満たす部屋の割当てとする。

ある $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在し、

$$b_{k\sigma(k)} - p_{\sigma(k)} < b_{kj} - p_j \quad \text{for some } k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たすと仮定する. このとき、

$$b_{k\pi(k)} - p_{\pi(k)} \geq b_{kj} - p_j > b_{k\sigma(k)} - p_{\sigma(k)}$$

となる。これより、

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)} - \sum_{i=1}^{n} p_j = \sum_{i=1}^{n} (b_{\pi(i)} - p_{\pi(i)}) > \sum_{i=1}^{n} (b_{\sigma(i)} - p_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{n} p_j$$

が成り立つ。しかし、これは

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} b_{\pi(i)}$$

に矛盾する。 ■

この二つの命題により、無羨望性を満たす解における部屋の割当てと無羨望性を満たす解に関する以下の性質が導かれる。

- ハウスメイト問題において、無羨望性を満たす解が存在するのならば、部屋の割当ては必ず最大合計割当てである。
- 無羨望性を満たす解 (π, P) に対し、π と異なる最大合計割当て π' が存在するならば、(π', P) もまた無羨望性を満たす解である。

よって、一つの無羨望性を満たす解を求めるには任意の最大合計割当てに着目すればよい。最大合計割当てを求める問題は重みつき二部グラフにおける最大マッチング問題と同価であり、$O(n^3)$ 時間で解けることが知られている。

2.2.2 無羨望性を満たす解を求めるアルゴリズム

また、彼らは次に示す性質から、線形計画法を用いて無羨望性を満たす解が存在するかを判定し、無羨望性を満たす解が存在するならば、そのうちの一つを求めるアルゴリズムを提案した。

命題 2.5 もし、(π, P) が

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \geq b_{ij} - p_j \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

を満たすのならば、任意の実数 q に対し、$p'_j = p_j + q$ となる $P' = [p'_j]$ は

$$b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)} \geq b_{ij} - p'_j \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

証明: (π, P) が無羨望性を満たすことから、

$$b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)} = b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} - q \geq b_{ij} - p_j - q = b_{ij} - p'_j \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

が成り立つ。 ■

Sung と Vlach のアルゴリズム

1. 最大合計割当て π を求める。
2. 次の線形計画問題を解き、その最適解を $P^* = [p^*_j]$ とする。

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_n, \\ &\text{subject to} \quad p_j - p_{\pi(j)} \geq b_{ij} - b_{i\pi(i)} \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ &\qquad\qquad\quad p_j \geq 0 \quad \text{for every } j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

3. もし、$p^*_1 + p^*_2 + \cdots + p^*_n > c$ の場合、「無羨望性を満たす解は存在しない」と出力する。そうでなければ、無羨望性を満たす解が存在する。$P = [p_j]$ を

$$p_j = p^*_j + \frac{c - \sum_{k=1}^{n} p^*_k}{n} \quad \text{for every } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

とし、(π, P) として出力する。

また、徳重によりグラフを用いた無羨望性を満たす解を求めるアルゴリズムが紹介されている。上記の線形計画問題は、条件が連立差分制約式になっていることから、単一始点最長パス問題として解くことができる。そして単一始点最長パス問題は、Bellman-Ford のアルゴリズムを用いて解くことができる。結果として上記の線形計画問題を解くことができる [5]。また、Sung と Vlach はこの無羨望性を満たす解が存在する必要十分条件は、この線形計画問題で求まった $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ が c 以下であることを示した。よって、アルゴリズムは次のようになる。

グラフ理論を用いた手法

1. 条件に対応する制約グラフ G を構成する。
2. そのグラフに Bellman-Ford のアルゴリズムを適用する。ここで d_j は頂点 0 から j までの最長パスである。
3. $p_j^* = d_j$ とする。p_j^* は線形計画問題の最適解となる。
4. $p_1^* + p_2^* + \cdots + p_n^* > c$ のとき、「無羨望性を満たす解は存在しない」と出力する。そうでなければ、無羨望性を満たす解が存在する。部屋代を $P = [p_j]$ とし、各 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$p_j = p_j^* + q$$

とし、(π, P) を出力する。ただし、各 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$q = \frac{c - \sum_{k=1}^{n} p_k^*}{n}$$

上記の制約グラフ G は以下のように定義される。

$$V = \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$E = \{\{(0, i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, \ldots, n\}\}$$

また、各辺の長さが次のように定義される。頂点 0 から出るすべての辺はすべて長さ 0 をもつ。各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、$i \neq j$ のとき、辺 $(\pi(i), j)$ は E に含まれ、長さ $b_{ij} - b_{i\pi(i)}$ をもつ。ここで、制約グラフ G において、正の長さのサイクルが存在しないことを示す。

制約グラフ G の任意のパスを p とする。

$$p = (i_1, i_2, \ldots, i_{m+1})$$

定義より、辺 $(\pi(i), j)$ の重みは $w(\pi(i), j) = b_{ij} - b_{i\pi(i)}$ なので，割当て $\pi(k) = i$ とすると、頂点 i_1 から頂点 i_2 への重みは

$$w(i_1, i_2) = w(\pi(k_1), i_2) = b_{k_1 i_2} - b_{k1\pi(k_1)}$$

同様に頂点 i_2 から頂点 i_3 への重みは

$$w(i_2, i_3) = w(\pi(k_2), i_3) = b_{k_2 i_3} - b_{k2\pi(k_2)}$$

よって頂点 i_1 から i_{m+1} への重みの合計は

$$\sum_{j=1}^{m} w(i_j, i_{j+1}) = \sum_{j=1}^{m}(b_{k_j i_{j+1}} - b_{k_j \pi(k_j)}) = \sum_{j=1}^{m} b_{k_j i_{j+1}} - \sum_{j=1}^{m} b_{k_j \pi(k_j)}$$

ここで制約グラフ G は正のサイクルをもつと仮定すると

$$\sum_{j=1}^{m} b_{k_j i_{j+1}} - \sum_{j=1}^{m} b_{k_j \pi(k_j)} > 0$$

よって

$$\sum_{j=1}^{m} b_{k_j i_{j+1}} > \sum_{j=1}^{m} b_{k_j \pi(k_j)}$$

ここで、$i_{j+1} = \sigma(k_j)$ とすれば、

$$\sum_{j=1}^{m} b_{k_j \sigma(k_j)} > \sum_{j=1}^{m} b_{k_j \pi(k_j)}$$

上記より、最大合計割当てより大きい割当てが存在することが示された。しかし、これはハウスメイト問題において無羨望解における割当ては最大合計割当てになることに矛盾する。よって制約グラフ G において正のサイクルは存在しない。したがって、制約グラフ G において最長パスが定義できる。Cormen, Leiserson, and Revest [5] により、制約グラフ G において、頂点 0 から各頂点への最長パスの長さ d_j に対し、以下の性質を満たす。

1. $d_i \geq 0 \quad$ for every $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
2. $d_j \geq d_{\pi(i)} + b_{ij} - b_{i\pi(i)} \quad$ for every $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
3. $\sum_{j=1}^{n} d_j \quad$ for every $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が最小化

性質 1 について、頂点から出るすべての辺の長さが 0 であることより性質 1 を満たす。

性質 2 について、最長パスの性質から

$$d_j \geq d_i + w(i, j)$$

$i = \pi(i)$,$w(i, j) = b_{ij} - b_{i\pi(i)}$ とすると、

$$d_j \geq d_i + w(i, j) = d_{\pi(i)} + b_{ij} - b_{i\pi(i)}$$

よって性質 2 を満たす。

性質 3 を示すために次の二つの補題を示す。

補題 2.1 制約グラフ G において、任意のパス $p = (0, i_1, i_2, \ldots, i_k, j)$、$P_j$ を頂点 0 から j へのパスの集合、$w(p)$ をパスの重みの合計としたとき、各 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$p_j \geq p_i + w(i, j), p_i \geq 0 \Rightarrow p_j \geq \max\{w(p) \mid p \in P_j\}$$

証明:

$$p_1 \geq p_0 + w(0, i_1) = 0 + w(0, i_1)$$

ここで頂点 0 から頂点 i_k までの長さが p_k が

$$p_k \geq p_{k-1} + w(i_{k-1}, i_k)$$

が成り立つと仮定する。枝を一本増やして、頂点 j までの長さ p_j は

$$p_j \geq p_k + w(i_k, j) \geq p_{k-1} + w(i_{k-1}, i_k) + w(i_k, j) \geq w(0, i_1) + w(i_1, i_2) + \cdots + w(i_k, j) = w(p)$$

よって数学的帰納法により、

$$p_j \geq \max\{w(p) \mid p \in P_j\} \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

が成り立つ。 ■

補題 2.2 制約グラフ G において、各 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$d_j = \max\{w(p) \mid p \in P_j\} \Rightarrow d_j \geq d_i + w(i, j), d_i \geq 0$$

証明: d_j は最長パスなので、

$$d_j \geq d_i + w(i, j) \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

また、頂点 0 から出るパスの長さは 0 であるので、

$$d_i \geq 0 \quad \text{for every } j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

が成り立つ。 ■

そして、性質 3 について、補題として示す。

補題 2.3 線形計画問題の条件を満たす任意のベクトル p_j に対し、

$$p_j \geq d_j \quad \text{for every } j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

証明: p_j が各 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して、線形計画問題の条件、

$$p_j \geq p_i + w(i, j)$$

$$p_i \geq 0$$

を満たすとする。このとき、制約グラフ G において、頂点 0 から頂点 j までのパスの集合を P_j とし、任意のパスを $p = (0, i_1, i_2, \ldots, j)$、パス p の重みの合計を $w(p)$ とすると、各 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、補題 2.1 より

$$p_j \geq \max\{w(p) \mid p \in P_j\}$$

が成り立つ。

一方、制約グラフ G において、各 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して、

$$d_j = \max\{w(p) \mid p \in P_j\}$$

となるパスが、各 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して、補題 2.2 より

$$d_j \geq d_i + w(i, j)$$

$$d_i \geq 0$$

を満たす。よって、

$$p_j \geq d_j \quad \text{for every } j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

が成り立つ。 ■

補題 2.3 により $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、各 d_j が最小化されているので、その合計 $\sum_{j=1}^{n} d_j$ も最小化されている。よって、性質 3 を満たす。

2.3 正確性

一般の公平分割問題において、正確性と平等性は混同されることが多い。そこで、この節ではハウスメイト問題における正確性について述べる。また、平等性と正確性の違いについては、次の章で述べる。

2.3.1 解の存在

命題 2.6 正確性を満たす解 (π, P) が存在するための必要十分条件は

$$b_{1j} = b_{2j} = \cdots = b_{nj} \quad \text{for every } j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

証明: 解が正確性を満たすとは、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$s_{i1} = s_{i2} = \cdots = s_{in}$$

である。ここで、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_j = c$$

であるため、各 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し、$b_{ij} = p_j$ となる。一方、各 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し、$b_{ij} = p_j$ となるなら、任意の割当て π に対し、

$$p_{\pi(i)} = b_{i\pi(i)} \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

となる (π, P) は正確性を満たす。以上から、正確性を満たす解が存在する必要十分条件は

$$b_{1j} = b_{2j} = \cdots = b_{nj} \quad \text{for every } j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

である。 ■

よって、ハウスメイト問題において正確性を満たす解が存在するとき、各ハウスメイトは同じ部屋に同じ評価値を付ける。このとき、部屋代を評価値と同額にすれば、各ハウスメイトは割引額 0 を得る。

第3章　平等性

前章では、公平の基準を比例性、無羨望性、正確性とした従来研究を紹介した。この章では、ハウスメイト問題では、平等性を公平の基準とした問題を考える。

3.1　平等性の定義

平等性と呼ばれる公平の基準について定義する。一般に、平等性とは、すべてのプレイヤーが同じ額の利益を得ることである。ハウスメイト問題において、平等性を満たすとは、すべてのハウスメイトの得る割引額が等しい。すなわち、

$$b_{1\pi(1)} - p_{\pi(1)} = b_{2\pi(2)} - p_{\pi(2)} = \cdots = b_{n\pi(n)} - p_{\pi(n)}$$

が成り立つ。

3.2　解の存在

ハウスメイト問題において、部屋の割当ては $n!$ 通り存在する。解が平等性を満たすとき、ハウスメイトが得る割引額が等しいことから、部屋の割当てさえ決めれば、部屋代が求まる。よって、部屋の割当てをみれば、平等性を満たす解が存在するかどうか判定できる。そこで、部屋の割当てについて検討し、次の定理を示した。

定理 1 平等性を満たす解は常に存在する。

この定理を以下の三つの補題により示す。

補題 3.1 平等性を満たす解 (π, P) が存在するための必要十分条件は、

$$\min_{1\leq i\leq n} b_{i\pi(i)} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}$$

証明:　解 (π, P) が平等性を満たすとき、各ハウスメイトが得る割引額は等しいので、

$$s_{i\pi(i)} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)})}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n} \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$p_{\pi(i)} = b_{i\pi(i)} - s_{i\pi(i)}$ より

$$p_{\pi(i)} = b_{i\pi(i)} - \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n} \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

また、各部屋代は 0 以上であるため、

$$b_{i\pi(i)} - \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n} \geq 0 \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

すなわち、

$$b_{i\pi(i)} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n} \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

よって、

$$\min_{1 \leq i \leq n} b_{i\pi(i)} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}$$

が成り立つ。

また、

$$\min_{1 \leq i \leq n} b_{i\pi(i)} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}$$

と仮定する。すなわち、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$b_{i\pi(i)} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}$$

が成り立つ。このとき、部屋代 $P = [p_j]$ を次のように定義する。各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$p_{\pi(i)} = b_{i\pi(i)} - \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}$$

とする。すると、各 p_j は 0 以上であるため、各ハウスメイト i が割り当てられた部屋で得る割引額は

$$s_{i\pi(i)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n} \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

となる。よって、解 (π, P) は平等性を満たす。 ■

上記の補題から平等性を満たす解が存在するための必要十分条件がわかった。そこで、平等性を満たす解の存在について、以下に二つの補題を示す。

補題 3.2　もし、解 (π, P) が

$$\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} \leq c$$

を満たすならば、

$$\min_{1\leq i\leq n} b_{i\pi(i)} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}$$

を満たす。

補題 3.3

$$\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} \leq c$$

を満たす割当て π は少なくとも一つは存在する。

証明:

$$S_n = \{\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} \mid i \neq j, \pi(i) \neq \pi(j)\}$$

$\pi \in S_n$ を満たす評価値の合計 $\sum_{i=j}^{n} b_{j\pi(j)}$ のすべてが $\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} > c$ になると仮定する。

一方、$\pi \in S_n$ を満たす評価値の合計を足し合わせると、

$$\sum_{\pi\in S_n} \sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} = c \times n!$$

これは $\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} > c$ に矛盾する。よって、少なくともひとつの割当て π は

$$\sum_{j=1}^{n} b_{i\pi(j)} \leq c$$

を満たす。■

以上により、平等性を満たす解は常に存在する。また、ハウスメイトの付けた評価値の合計が最小になる割当てを求めれば、その解は必ず平等性を満たす。

3.3　平等性と比例性

前節より平等性を満たす解は常に存在することが示された。よって、平等性を満たす解が存在するとき、解により、ハウスメイトの得る割引額が異なる。そこで、平等性と比例性を満たす解が存在するかを判定する問題（以下、この節において、ハウスメイト問題と

呼ぶことにする）について検討し、NP 完全とされている問題をハウスメイト問題に還元を示すことにより、平等性と比例性を満たす解が存在するか判定する問題が NP 完全問題であることを示した。

ここで、Garey と Johnson [6] により、NP 完全問題とされている PARTITION 問題を紹介する。

PARTITION 問題

入力：有限集合 A、各 $a \in A$ に対し大きさ $s(a) \in Z^+$

質問：$\sum_{i \in A'} s(a) = \sum_{i \in A-A'} s(a)$ となる部分集合 A' が存在するのか？

また、この問題は、$|A'| = |A|/2$、すなわち集合 A' の要素数が集合 A の要素数の半分である場合、についても NP 完全問題であることが示されている。よって $|A| = 2n$ としたとき、この問題は次のように定義される。

入力：有限集合 A、各 $i \in A$ に対し大きさ $s_i \in Z^+$

質問：$\sum_{i \in A'} s_i = \sum_{i \in A-A'} s_i$ となる部分集合 A' が存在するのか？ただし、$|A| = 2n$、$|A'| = n$

定理 2 平等性と比例性を満たす解が存在するか判定する問題は *NP* 完全である。

証明: この NP 完全性は PARTITION 問題からの還元で示す。まず、PARTITION 問題の入力から、ハウスメイト問題の入力、すなわち各ハウスメイトが各部屋に付けた評価値 $[b_{ij}]$ と家賃 c、を作る。各ハウスメイトの付けた評価値 $[b_{ij}]$ を以下のように定義する。各 $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ に対し、

$$b_{ij} = \begin{cases} s_i & \text{for every } j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ L - s_i & \text{for every } j \in \{n+1, \ldots, 2n\}, \\ 0 & \text{for } j = 2n+1, \end{cases}$$

また、

$$b_{2n+1j} = \begin{cases} L & \text{for every } j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ 0 & \text{for every } j \in \{n+1, \ldots, 2n+1\}, \end{cases}$$

ただし、L を $L > \sum_{i=1}^{2n} s_i$ となる任意の整数とする。よって、ハウスメイトがつけた評価

値 $[b_{ij}]$ の行列は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_1 & L-s_1 & \dots & L-s_1 & 0 \\ s_2 & \dots & s_2 & L-s_2 & \dots & L-s_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{2n} & \dots & s_{2n} & L-s_{2n} & \dots & L-s_{2n} & 0 \\ L & \dots & L & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

そして、家賃を nL とする。すなわち、$c = nL$ である。この入力は、ハウスメイト問題における入力に関する条件である各ハウスメイトの付けた評価値の合計は家賃 $c = nL$ となることを満たしている。

ここで、この入力に対し、平等性と比例性を満たす解 (π, P) が存在すると仮定する。すべてのハウスメイトが部屋 $2n+1$ に評価値 0 を付けていることに注目する。解 (π, P) は比例性を満たすことから、部屋 $2n+1$ の部屋代は 0 となり、その部屋を割当てられたハウスメイトは割引額 0 を得る。一方、解 (π, P) は平等性も満たすため、すべてのハウスメイトは割引額 0 を得る。よって、各ハウスメイトの割当てられた部屋に付けた評価値が部屋代となる。部屋代の合計は家賃となることから、この入力において、平等性と比例性を満たす解が存在するか判定する問題は、$\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} = nL$ となる割当てが存在するか判定する問題となる。

割当ては $(2n+1)!$ 通り存在するが、$\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} = nL$ となる割当て π は $\pi(2n+1) = 2n+1$ を満たさなければならない。このことを背理法を用いて示す。すなわち、$1 \leq \pi(2n+1) \leq 2n$ ならば、$\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} \neq nL$ となることを示す。まず、$1 \leq \pi(2n+1) \leq n$ の場合，$b_{(2n+1)\pi(2n+1)} = L$ であり，$i \neq 2n+1$ かつ $n+1 \leq \pi(i) \leq 2n$ となる i が n 個存在する．そのため,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} \geq L + nL - \sum_{i=1}^{2n} s_i > nL$$

となる。また、$n+1 \leq \pi(2n+1) \leq 2n$ の場合、$b_{(2n+1)\pi(2n+1)} = 0$ であり，$i \neq 2n+1$ かつ $n+1 \leq \pi(i) \leq 2n$ となる i が $n-1$ 個存在するため,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} \leq 0 + \sum_{i=1}^{2n} s_i + (n-1)L < nL$$

よって、$\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} = nL$ となるならば $\pi(2n+1) = 2n+1$ となることが分かる。

次に、$\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} = nL$ となる π が存在するならばPARTITION 問題の解も存在することを示す。そこで、$\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} = nL$ となる π が存在するとし、PARTITION 問題の解を次のように作る。集合 A' を次のように定義する。$1 \leq \pi(i) \leq n$ となる i を集合 A' の要素とする。すなわち、

$$A' = \{i \in \{1, 2, \ldots, 2n\} \mid 1 \leq \pi(i) \leq n\}$$

と定義する。上で示したように $\pi(2n+1) = 2n+1$ となるため、$|A'| = n$ となる。また、$\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} = nL$ となるため、

$$\begin{aligned} nL &= \sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} \\ &= \sum_{i\in A'} b_{i\pi(i)} + \sum_{i\in A-A'} b_{i\pi(i)} + 0 \\ &= \sum_{i\in A'} s_i + \sum_{i\in A-A'} (L - s_i) \\ &= \sum_{i\in A'} s_i + nL - \sum_{i\in A-A'} s_i \end{aligned}$$

となり、

$$\sum_{i\in A'} s_i = \sum_{i\in A-A'} s_i$$

が導かれる。したがって、A' は PARTITION 問題の解である。

最後に、PARTITION 問題の解が存在するとき $\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} = nL$ となる割り当て π が存在することを示す。集合 A' を n 個の要素をもち、

$$\sum_{i\in A'} s_i = \sum_{i\in A-A'} s_i$$

を満たすと仮定し、割当て π を次のように定義する。まず、ハウスメイト $2n+1$ を部屋 $2n+1$ に割当て、集合 A' に含まれる n 人のハウスメイトを部屋 1 から部屋 n に割当て、その他のハウスメイトは残りの部屋に割当てる。すると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n+1} b_{i\pi(i)} &= \sum_{i\in A'} s_i + \sum_{i\in A-A'} (L - s_i) \\ &= \sum_{i\in A'} s_i + nL - \sum_{i\in A-A'} s_i \\ &= \sum_{i\in A'} s_i + nL - \sum_{i\in A'} s_i \\ &= nL \end{aligned}$$

となる。

明らかにこの還元は多項式時間還元であるため、平等性と比例性を満たす解が存在するか判定する問題は NP 完全であることが示された。 ■

一方、平等性を満たす解が存在するとき、一般に複数個存在することがある。そこで、それらの中から最大の割引額を与えるものを求めることが考えられる。しかし、この問題が解けたら、NP 完全問題である平等性と比例性を満たす解が存在するか判定する問題は解けてしまう。よって、以下の系が導かれる。

系 1 平等性を満たす解の中から最大の割引額を与えるものを求める問題は NP 困難である。

3.4 平等性と無羨望性

比例性を満たす解と同様に、無羨望性を満たす解は、存在する場合、一意に定まらないことが知られている。平等性と無羨望性を満たす解について、徳重 [3] は、その解が存在する必要十分条件を示した。

命題 3.1 平等性と無羨望性を満たす解が存在するための必要十分条件は、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$b_{i\pi(i)} \quad \geq \max\{b_{1\pi(i)}, b_{2\pi(i)}, \cdots, b_{n\pi(i)}, \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}\}$$

証明: 平等性と無羨望性を満たす解 (π, P) が存在すると仮定する。このとき、

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} = b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)} \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)} \geq b_{j\pi(i)} - p_{\pi(i)} \quad \text{for every } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

が成り立つ。よって、$b_{i\pi(i)} \geq b_{j\pi(i)}$ となる。また、平等性を満たすことから

$$n(b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}) = \sum_{j=1}^{n}(b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)}) = \sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c$$

となり、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$p_{i\pi(i)} = b_{i\pi(i)} - \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}$$

が成り立つ。また、各部屋代 p_j は 0 以上であるため、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$b_{i\pi(i)} - \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n} \geq 0$$

となる。したがって、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$b_{i\pi(i)} \quad \geq \max\{b_{1\pi(i)}, b_{2\pi(i)}, \cdots, b_{n\pi(i)}, \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}\}$$

が成り立つ。

また、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$b_{i\pi(i)} \quad \geq \max\{b_{1\pi(i)}, b_{2\pi(i)}, \cdots, b_{n\pi(i)}, \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}\}$$

と仮定する。このとき、部屋代 $P = [p_j]$ を次のように定義する。各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$p_{i\pi(i)} = b_{i\pi(i)} - \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}$$

とする。すると、各 p_j は 0 以上であり、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、ハウスメイト i が割当てられた部屋 $\pi(j)$ で得る割引額は、

$$b_{i\pi(i)} - p_{i\pi(i)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{j\pi(j)} - c}{n}$$

となり、明らかに平等性を満たす。また、$b_{i\pi(i)} \geq b_{j\pi(i)}$ であるため、

$$b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)} = b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \geq b_{j\pi(i)} - p_{\pi(i)}$$

となり無羨望性を満たす。よって、(π, P) は平等性と無羨望性を満たす解となる。 ■

3.5 平等性と正確性

一般の公平分割問題において、平等性と正確性は混同されていることが多い。そこで、この節では、ハウスメイト問題における平等性と正確性の違いについて説明する。正確性を満たすとは、どのハウスメイトがどの部屋をみてもすべてが同じ価値に見えることである。つまり、どの部屋を割当てられても各ハウスメイトにとって同じ価値を持つ。また、平等性を満たすとは、各ハウスメイトがもらった部屋に対する価値が同じであることをいう。よって、正確性を満たす分配は、平等性を満たすが、平等性を満たす分配は正確性を満たすとは限らない。

第 4 章　緩和した平等性

4.1　緩和した平等性の定義

平等性と無羨望性を満たす解について、徳重 [3] はその解が存在する必要十分条件を示した。また、平等性と無羨望性、平等性と比例性を満たす解は常に存在するとは限らないことから、平等性を緩和した基準についても考えている。その基準とは、ハウスメイトが得る割引額の最小と最大の差 (以後、ギャップと呼ぶことにする) を最小にすることである。

$$G(\pi, P) = \max_{1 \le i \le n}\{b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}\} - \min_{1 \le j \le n}\{b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)}\}$$

無羨望性、比例性を満たす解において、各ハウスメイトは 0 以上の割引額を得る。よって $G(\pi, P)$ の最小値は 0 である。$G(\pi, P) = 0$ であれば、平等性を満たすので、この基準は平等性を緩和した基準である。徳重はこの基準を定義した理由を次のように説明している。評価値はハウスメイトが部屋に払ってもよいと思う金額である。よって、割引額はハウスメイトが得をした額と考えることができる。そこで、ハウスメイトが得る割引額の最小と最大の差を最小にすることでより平等な解が求まる。

4.2　緩和した平等性と無羨望性

4.2.1　部屋の割当て

無羨望性を満たす解の割当ては、最大合計割当てになる。よって、無羨望性と緩和した平等性を満たす解の割当ても最大合計割当てとなる。命題 2.4 において、無羨望性を満たす解 (π, P) に対し、π と異なる最大合計割当て π' が存在するとき、解 (π', P) もまた無羨望性を満たす解である。

このように、部屋代は同じで、異なる部屋の割り当てをもつ二つの緩和した平等性と無

羨望性を満たす解 (π, P) と (π', P) に対し、徳重は、$G(\pi, P)$ と $G(\pi', P)$ の関係について以下のことが示した。

補題 4.1 緩和した平等性と無羨望性を満たす解 (π, P) と (π', P')

$$P = P' \Rightarrow G(\pi, P) = G(\pi', P')$$

証明: (π, P) と (π', P') が無羨望性を満たす解であることから

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \geq \max_{1 \leq j \leq n} \{b_{ij} - p_j\}$$

$$b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)} \geq \max_{1 \leq j \leq n} \{b_{ij} - p'_j\}$$

が成り立つ。そして、$P = P'$ となるとき、

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} = b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)}$$

となり、各ハウスメイトが (π, P) と (π', P') で得られる割引額は等しい。よって、

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)}\}$$

と

$$\min_{1 \leq j \leq n} \{b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)}\} = \max_{1 \leq j \leq n} \{b_{j\pi'(j)} - p'_{\pi'(j)}\}$$

が成り立ち、$G(\pi, P) = G(\pi', P')$ となる。 ■

この補題から部屋の割当てを変更することによって、各ハウスメイト間の割当てられた部屋から得る割引額の差は変わらない。したがって、緩和した平等性と無羨望性を満たす解を求めるには、一つの最大合計割当てに注目すれば良い。

4.2.2 緩和した平等性と無羨望性を満たす解を求めるアルゴリズム

ここでは、緩和した平等性と無羨望性を満たす解を求めるアルゴリズムを示す。

アルゴリズム

1. 条件を満たす制約グラフ G を構成する。
2. 制約グラフ G に Bellman-Ford のアルゴリズムを適用し、その出力を $d = [d_1, d_2, \ldots, d_n]$ とする。ここで d_j は最長パスである。

3. $p_j^* = d_j$ とする。
4. $p_1^* + p_2^* + \cdots + p_n^* > c$ であれば、「緩和した平等性と無羨望性を満たす解は存在しない」と出力する。そうでなければ、緩和した平等性と無羨望性を満たす解が存在する。各 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、$p'_j = p_j^*$ とする。
5. $p'_1 + p'_2 + \cdots + p'_n \leq c$ において、以下を繰り返す。
   (a) 部屋代を増やすハウスメイトの集合を M とし、s_p を部屋代 P' で得られる最大の割引額とする。

   $b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)} = s_p \Rightarrow i \in M$、

   $\forall j \quad \exists i \in M \quad b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)} = b_{i\pi(j)} - p'_{\pi(j)} \Rightarrow j \in M$

   (b) p'_j、$j \in M$ であれば、$\bar{p}_j = p'_j + \varepsilon(P)$、そうでなければ、各 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、$\bar{p}_j = p'_j$ とする。

   ただし、

   $$\varepsilon(P) = \min\{\max_{i \in M}\{b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)}\} - \max_{j \notin M}\{b_{j\pi(j)} - p'_{\pi(j)}\}, \min_{i \in M, j \notin M}\{\{b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)}\} - \{b_{i\pi(j)} - p'_{\pi(j)}\}\}$$

   (c) $p'_j = \bar{p}_j$ とする。
6. p'_j、$j \in M$ であれば、$p_j = p'_j + (c - \sum_{j=1}^{n} p'_j)/|M|$、$p'_j$、$j \notin M$ であれば、$p_j = p'_j$ とする。
7. 部屋代を $P = [p_j]$ とする。
8. (π, P) を出力する。

4.2.3　アルゴリズムの正当性

前節において、緩和した平等性と無羨望性を満たす解を求めるアルゴリズムを提案した。ここでは、そのアルゴリズムの正当性を示す。

まず、部屋代が P であるときのハウスメイトが割当てられた部屋でもらえる最大の割引額を s_p とし、$s_p = s, 0 \leq s \leq s_{p^0}$ とする。ただし、s_{p^0} は Bellman-ford のアルゴリズムにより求まった部屋代における最大の割引額である。すなわち、最大の割引額を s と固定したとき、異なる部屋代でのギャップの関係について考える。このときギャップの関係はどうなるであろうか。補題として、ハウスメイトが得る最大の割引額を s と固定したとき、部屋代の合計がちょうど c になる部屋代と、部屋代の合計が c 以下で部屋代の合計が最小

になる部屋代におけるギャップの関係について、以下に示す。

補題 4.2 次のように P,$\hat{P}$ を定義する。ただし，$P_s = \{P \mid s_p = s\}$ である。

P：

- $P \in P_s$
- P:*envy-free*
- $\sum_{j=1}^{n} p_j = c$

$\hat{P}$：

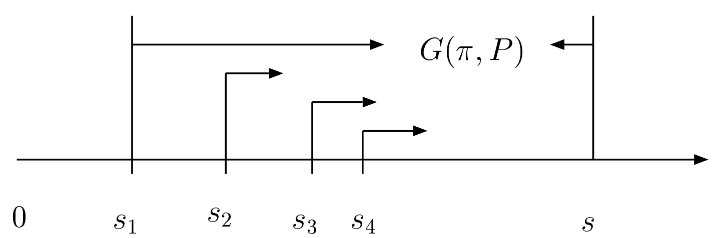
- $\hat{P} \in P_s$
- $\hat{P}$:*envy-free*
- $\sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j \leq c$
- $\sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j = \min\{\sum_{j=1}^{n} p'_j \mid P' \in P_s\}$

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j \leq \sum_{j=1}^{n} p_j \Rightarrow G(\pi, \hat{P}) \leq G(\pi, P)$$

証明:　　定義から

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j \leq \sum_{j=1}^{n} p_j$$

ギャップはハウスメイトが得る割引額の最小と最大の差である。したがって、ハウスメイトの得る最大の割引額が s と固定されている部屋代において、各部屋代が最小化 (補題 4.7) 、すなわち各割引額が最大化されているので、ギャップは最小である。



よって、

$$G(\pi, \hat{P}) \leq G(\pi, P)$$

が成り立つ。 ■

この補題では、最大の割引額が等しい部屋代におけるギャップの関係を示した。次に最大の割引額とギャップの関係を考える。Bellman-ford のアルゴリズムで求まった部屋代は最小化されている [補題 2.3]。よって、ギャップを小さくするためには、部屋代を増やしていく。すなわち、割引額を減らしていく。そこで、最大の割引額を小さくするとギャップはどうなるであろうか。最大の割引額とギャップの関係を以下に示す。

補題 4.3 $0 \leq s, s' \leq s_{P^0}$, $\hat{P}^s \in P_s$,$\bar{P}^{s'} \in P_{s'}$

$$s > s' \Rightarrow G(\pi, \hat{P}^s) = G(\pi, \bar{P}^{s'})$$

証明: 各 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$\bar{p_j} = \hat{p}_j + s - s'$$

とすると、

$\bar{P}^{s'} \in P_{s'}$ であり、$\bar{P}^{s'}$ は無羨望を満たし、ギャップは $\hat{P}^s$ と等しい。

よって、

$$G(\pi, \bar{P}^{s'}) = G(\pi, \hat{P}^s)$$

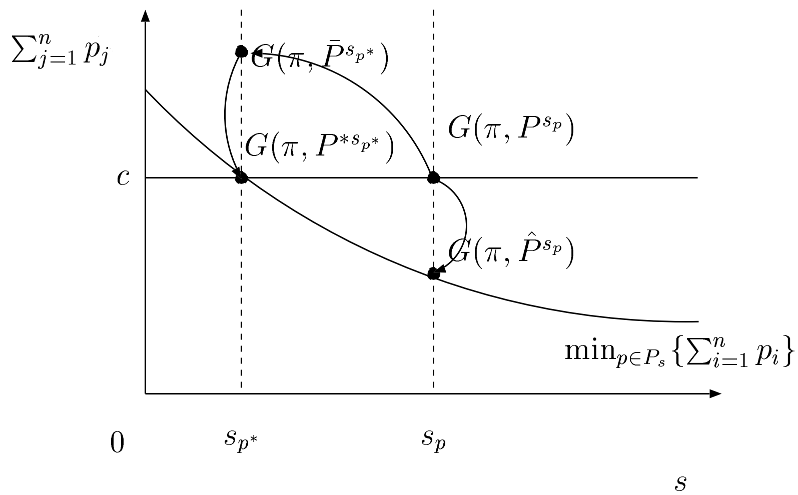
■

補題 4.2 により、s が等しいとき、部屋代の合計が c 以下でかつ部屋代の合計が最小になるような部屋代のギャップは、部屋代の合計がちょうど c となる部屋代のギャップ以下になることがわかった。そして補題 4.3 では、s を小さくしていくと、s を小さくする前とでは、ギャップは等しいことがわかった。したがって、最小となる部屋代の合計がちょうど c になる部屋代を P^*、そのときの最大の割引額を s_{p^*} とし、P と $\hat{P}$ は補題 4.2 で定義した通りとし、$s_p^* < s_p$ とすると、それら部屋代におけるギャップの関係は、

$$G(\pi, P^{s_p}) \geq G(\pi, \hat{P}^{s_p}) = G(\pi, \bar{P}^{s_{p^*}}) \geq G(\pi, P^{*s_{p^*}})$$

となる。

また、最小の部屋代の合計は、s が大きくなるにつれて、増えることはない。すなわち、s が大きくなるにつれ、最小の部屋代の合計は単調減少していく。よって、横軸を最大の割引額 s、縦軸を部屋代の合計 $\sum_{j=1}^{n} p_j$ とし、上記の関係を表した図は次のようになる。



よって、最小の部屋代の合計がちょうど c であるような部屋代において、ギャップは最小となる。したがって、最小の部屋代の合計がちょうど c になるような s を見つければよい。

ここで、$s_p = s$ と固定した場合の最小の部屋代の求め方がわからないが、$s_p \leq s$、すなわちすべての割引額が s 以下とした場合の最小の部屋代の求め方はわかっている。よって、$0 \leq s \leq s_{p^0}$ において、$s_p = s$ と固定した場合と、$s_p \leq s$ とした場合では、最小の部屋代を求めることが同等であることを示す。まず、$P'_s = \{P \mid s_p \leq s\}$ としたとき、P_s, P'_s に関してそれぞれ以下のことを示す。

補題 4.4

$$0 \leq s \leq s_{p^0}, P_s \Rightarrow P_s \neq \phi$$

証明: $P^0 \in s_{p^0}$、$0 \leq s \leq s_{p^0}$ において、

$$P^0 + s \Rightarrow s_{p^0} - s$$

が成り立つとき、$P \in P_s$ は存在する。よって、P^0 に $0 \leq \gamma \leq s_{p^0}$ を足すと

$$P^0 + \gamma \in P_{s_{p^0} - \gamma}$$

よって，$0 \leq s \leq s_{p^0}$ であれば、$P_s \neq \phi$ である。 ■

補題 4.5 $0 \leq s \leq s_{p^0}$ において、少なくとも割引額のひとつはちょうど s になる。

証明: 　条件

- $b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \leq s \quad$ for every $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
- $p_{\pi(i)} \geq 0 \quad$ for every $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

を満たす。すなわち、

$$p_{\pi(i)} \geq \max\{0, b_{i\pi(i)} - s\} \quad \text{for every } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たす。ここで、各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$p_{\pi(i)} > \max\{0, b_{i\pi(i)} - s\}$$

と仮定する。このとき、

$$q = \min_{1 \leq i \leq n}\{p_{\pi(i)} - \max_{1 \leq i \leq n}\{0, b_{i\pi(i)} - s\}\} > 0$$

とすると、

$$p_{\pi(i)} - q \geq p_{\pi(i)} - (\min_{1 \leq i \leq n}\{p_{i\pi(i)} - \max_{1 \leq i \leq n}\{0, b_{i\pi(i)} - s\}\}) = \max_{1 \leq i \leq n}\{0, b_{i\pi(i)} - s\}$$

これは各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、各 $p_{\pi(i)}$ が最小 (補題 2.3) であることに矛盾する。よって、少なくとも割引額の一つはちょうど s になる。 ■

　上記二つの補題により、明らかに $P'_s \supseteq P_s$ となる。このことから、P_s に含まれる最小の部屋代と P'_s に含まれる最小の部屋代の関係について以下に示す。

補題 4.6

$$P'_s = \{P \mid s_p \leq s\}, P_s = \{P \mid s_p = s\}$$

$$P'_s \supseteq P_s \Rightarrow \min_{P \in P'_s} P \leq \min_{P \in P_s} P$$

　$0 \leq s \leq s_{p^0}$ において、P'_s に含まれる最小の部屋代は P_s の要素でもあるので、$s_p = s$ と固定するかわりに、$s_p \leq s$、すなわち、すべての割引額が s 以下として最小の部屋代を求めることにする。

以上から、すべての割引額が s 以下となる部屋代において、最小の部屋代の合計が c となるような s を求められれば、最小のギャップを求めることができることがわかった。

ではどのようにして s の値を求めるのか。そこで、0 から s_{p^0} の間を区間に区切ることを考える。区間を区切ることにより、その区切りでの部屋代の合計がわかるので c と比べることにより c が存在する区間がわかる。ではどのようにして区間を区切るのか。

ここで、部屋代を増やすハウスメイトには同じ額を増やすことにする。すべてのハウスメイトのもらう部屋の部屋代を増やしてしまうとギャップは変わらない。それでは、どのハウスメイトのもらう部屋の部屋代を増やしたらよいだろうか。あるハウスメイトのもらう部屋の部屋代を増やすことにより、そのハウスメイトが他のハウスメイトを羨望することがある。よって、ハウスメイト i のもらう部屋 $\pi(i)$ の部屋代を増やすとき、

$$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} = b_{i\pi(j)} - p_{\pi(j)} \quad \text{for some } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$$

となるハウスメイト j がもらう部屋 $\pi(j)$ の部屋代も同時に増やさなければならない。ただし、割引額は s_{p^0} より大きくなることはないので、最大の割引額を得るハウスメイトがもらう部屋の部屋代を増やす。

ここで、部屋代を増やす人の集合を M とし、次のように定義する。

M:

$\forall i \quad b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} = s_p \Rightarrow i \in M$

$\forall j \quad \exists i \in M \quad b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} = b_{i\pi(j)} - p_{\pi(j)} \Rightarrow j \in M$ そして、増やすを額を $\varepsilon(P)$ とすると、

$$\varepsilon(P) = \min\{\max_{i \in M}\{b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}\} - \max_{j \notin M}\{b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)}\}, \min_{i \in M, j \notin M}\{\{b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}\} - \{b_{i\pi(j)} - p_{\pi(j)}\}\}\}$$

ここで、s_{p^0} から s_{p^1} の区間での増やすハウスメイトを関数 $M(P^0)$ で表すことにする。P^0 は Bellman-Ford のアルゴリズムにより求まっているので、$M(P^0)$ は求まる。$\varepsilon(P^0)$ は、

$$\varepsilon(P^0) = \min\{\max_{i \in M}\{b_{i\pi(i)} - p^0_{\pi(i)}\} - \max_{j \notin M}\{b_{j\pi(j)} - p^0_{\pi(j)}\}, \min_{i \in M, j \notin M}\{\{b_{i\pi(i)} - p^0_{\pi(i)}\} - \{b_{i\pi(j)} - p^0_{\pi(j)}\}\}\}$$

よって s_{p^1} は、

$$s_{p^1} = s_{p^0} - \varepsilon(P^0)$$

次に s_{p^1} が求まることにより P^1 が求まる。また、P^1 が求まることにより、$M(P^1)$、$\varepsilon(P^1)$ が求まるので、$s_{p^2} = s_{p^1} - \varepsilon(P^1)$ と求まる。同様に $s_{p^3}, s_{p^4}, \ldots$ と区間を区切っていく。こ

のように区間を区切っていくとき、最小の部屋代の合計がちょうど c になる s を見つけられることを示せれば良い．よって、次の補題を示す。

補題 4.7 次の条件を満たす p_j が与えられ、上記と同様に $\bar{p_j}$ が求まる。

p_j:

- $p_j \geq 0 \quad for\ every\ j \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $p_j\ is\ envy\text{-}free \quad for\ every\ j \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $p_j = \min\{p'_j | p'_j \geq 0, P'\ is\ envy\text{-}free,\ b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)} \leq s_p\} \quad for\ every\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$\bar{p_j}$:

$$\bar{p_j} = \begin{cases} p_j + \delta, & if\ j \in M \\ p_j, & otherwise \end{cases}$$

ただし，$0 \leq \delta \leq \varepsilon(P)$ である。

このとき、以下の性質が満たされることを示す。

1. $b_{i\pi(i)} - \bar{p}_{\pi(i)} \leq s_p - \delta, \quad for\ every\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$
2. $\bar{p_j} \geq 0 \quad for\ every\ j \in \{1, 2, \dots, n\}$
3. $\bar{p_j}\ is\ envy\text{-}free \quad for\ every\ j \in \{1, 2, \dots, n\}$
4. $\bar{p_j} = \min\{P'_j | P'_j \geq 0, P' is\ envy\text{-}free, b_{i\pi(i)} - p'_{\pi(i)} \leq s_p - \delta\} \quad for\ every\ j \in \{1, 2, \dots, n\}$

証明: 　性質 1 について、$\bar{p_j}, j \in M$ については明らかに満たす。

また、$\bar{p_j}, j \notin M \Rightarrow \forall i \in M, b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \neq b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)}$ より

$$(b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}) - (b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)}) > 0 \quad i \in M, j \notin M \text{ for every } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$\varepsilon(P)$ の定義より、

$$\varepsilon(P) \leq (b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}) - (b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)}) \quad i \in M, j \notin M \text{ for every } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

また，$b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \leq s_p$ より、

$$b_{j\pi(j)} - p_{\pi(j)} \leq (b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}) - \varepsilon(P) \leq s_p - \varepsilon(P) \quad i \in M, j \notin M \text{ for evrey } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

よって、各 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対し、

$$b_{i\pi(i)} - \bar{p}_{\pi(i)} \leq s_p - \varepsilon(P)$$

が成り立つ。また，$0 \leq \delta \leq \varepsilon(P)$ より，

$$b_{i\pi(i)} - \bar{p}_{\pi(i)} \leq s_p - \delta \quad \text{for every } i \in \{1,2,\ldots,n\}$$

よって、性質 1 が満たされる。

性質 2 については、すべての $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対して、$p_j \geq 0$ と $\varepsilon(P) > 0$，$\bar{p_j}$ の定義より明らかに満たす。

性質 3 について、部屋代を増やさないハウスメイトは他のハウスメイトを羨望することはない。また、部屋代を増やすハウスメイトについても $\varepsilon(P)$ の定義から、

$$0 < \varepsilon(P) \leq \min_{i \in M, j \notin M} \{(b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}) - (b_{i\pi(j)} - p_{\pi(j)})\} \quad \text{for evrery } i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

また、$0 \leq \delta \leq \varepsilon(P)$ より、

$$0 < \delta \leq \min_{i \in M, j \notin M} \{(b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)}) - (b_{i\pi(j)} - p_{\pi(j)})\} \quad \text{for every } i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

よって他のハウスメイトを羨望することはないので性質 3 を満たす。

性質 4 を示すため、まず次の線形計画問題を考える。条件

- $b_{i\pi(i)} - p_{\pi(i)} \geq b_{ij} - p_j \quad \text{for every } i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$
- $p_j \geq 0 \quad \text{for every } j \in \{1,2,\ldots,n\}$
- $p_j \geq b_{i\pi(i)} - (s - \delta) \quad \text{for every } i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$

を満たし、$p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ を最小化する $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ を求める。

補題 2.3 において最小化を示しているがそのときの条件との違いは以下の条件だけである。

$$p_{\pi(i)} \geq b_{i\pi(i)} - (s - \delta) \quad \text{for every } i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

そこで、制約グラフ G に新しい頂点 $q_i, i \in \{1,2,\ldots,n\}$ を追加する。各辺は次のように定義される。頂点 0 から出るすべての辺は長さ 0 をもち、各 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対し、辺

$(q_i, \pi(i))$ は長さ $b_{i\pi(i)} - (s - \delta)$ をもつ。また、各 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し，辺 $(\pi(i), j)$ は長さ $b_{ij} - b_{i\pi(i)}$ をもつ。このグラフを G' とする。また、割当ては最大合計割当てであるため、正のサイクルは存在しない。よって、最長パス d_j が補題 2.3 と同様に定義できる。

よって、p_j が $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、

$$p_j \geq q_i + w(i, j)$$

$$q_i \geq 0$$

とすると、補題 2.3 と同様に各 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し、各 p_j の最小化が示される。

以上より、性質すべてが満たされることを示せた。 ■

補題 4.7 より、区間内で合計が最小となる部屋代が求まることがわかった。よって、そのときの s の値も求まる。また補題 4.2 と補題 4.3 により、最小の部屋代の合計がちょうど c になるような s が求まれば、最小のギャップが求まることがわかっている。アルゴリズムでは正当化で示した通りに計算しているので、アルゴリズムの正当性が示せた。

4.2.4 アルゴリズムの評価

ここでは、提案したアルゴリズムの計算時間について述べる。このアルゴリズムは、$\varepsilon(P)$ の計算に $O(n^2)$ 時間かかり、区間は最大で n^2 個に区切れるので、 $O(n^4)$ 時間で解くことができると考えられる。

第5章　おわりに

本研究では、分割不可能で手に入れて有利なものと分割可能で手に入れて不利なものを分配する公平分割問題であるハウスメイト問題を取り扱った。ハウスメイト問題の解析を行う上で、新たな観点として公平の基準を平等性とした。

まず、従来研究で混同されていた平等性と正確性の違いについて述べた。そして、平等性を満たすハウスメイト問題の解は常に存在することを示し、そのような解は効率的に求められることが分かった。

また、平等性を満たす解において、すべてのハウスメイトは同額の割引額を得るが、得る割引額は解によって異なる。そこで、平等性と比例性（すなわち各ハウスメイトが得る割引額が０以上）を満たす解を求める問題について考えた。結果として、その問題はＮＰ完全であることが分かった。このことから、平等性を満たす解の中で最大の割引額を与えるものを求める問題はＮＰ困難であることを示した。

さらに、平等性と無羨望性が常に存在するとは限らないことから、従来研究において、平等性を緩和した公平の基準が示されている。そこで、本研究では無羨望性と緩和した平等性を満たす解を求めるアルゴリズムを提案し、そのアルゴリズムの正当性を示した。

関連図書

[1] Steven J Brams and D.Marc Kilgour, *Competive Fair Division*, Prepared for Delivery at the Annual Meeting of the Public Choice Society,New Orleans,March 12-14,2000

[2] Shao Chin Sung and Milan Vlach, *Competitive Envy-Free Division*, JAIST Reserch Report,IS-RR-2002-002,2002

[3] 徳重久美子, 競合するものを対象にする公平分割問題についての研究, 本学修士論文,2000

[4] Steven J Brams and Alan D.Taylor *The Win-Win Solution Guaranteeing Fair Shares to Everybody*,1999

[5] T.H.Cormen,C.E.Leiserson,and R.L.Rivest *Introduction To Algorithms*,Twenty-first printing,1998

[6] Michael R.Garey and David S.Johnson, *COMPUTERS AND INTRACTABILITY A Guide to the Theory of NP-Completeness*,1979

[7] 曽道智, 茨木俊秀, 公平分割とその手順, 応用数理,vol.9 NO.1,Mar.1999.