

Title	代数および関係意味論によるLambek 計算の研究
Author(s)	下川, 賢介
Citation	
Issue Date	2003-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1673
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 修士

代数および関係意味論による Lambek 計算の研究

下川賢介 (110059)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2003 年 2 月 14 日

キーワード: 剰余束, 順序群, 関係構造, Lambek 計算.

1 背景

現在までに、古典論理 LK や直観主義論理 LJ とは異なる様々な論理の研究が盛んに行われているが、それらの論理の多くは部分構造論理とみなせることがわかってきた. 部分構造論理とは、古典論理 LK や直観主義論理 LJ から構造規則 (exchange, weakning, contraction) を取り除いたものである. それらのうちには contraction を持たない BCK 論理や weakning を持たない適切論理 (relevant logic) や contraction と weakning を両方持たない線形論理 (linear logic) などをあげることができる. さらに、FL とは直観主義論理 LJ から構造規則のすべてを取り除いたものである. FLe は FL に exchange を付け加えたものである.

部分構造論理はもともと Gentzen によるシーケント計算の構造規則の役割に注目することから始まっている. そのために 90 年代に部分構造論理について書かれた論文の多くは証明論を用いたものであった. 最近になり、部分構造論理の意味論としての代数的モデルが注目されるようになってきた.

exchange, weakning, contraction は代数ではそれぞれ、可換律: $x \cdot y = y \cdot x$ 、integral : $x \cdot y \leq x$ 、弱冪等律: $x \leq x \cdot x$ に対応しており、したがって構造規則を持たないということはそれらがすべて成り立たないことで対応付けられる.

このような背景で得られたのが剰余束 (residuated lattice) の概念である. 剰余束は、束とモノイドの構造の両方を持ち、さらにモノイド演算が剰余 (residual) を持つような代数構造である. 代数学からみたときの典型的な剰余束の例は、束順序群である. 本研究では剰余束一般の性質を明らかにするとともに、とくに剰余束全体の中で束順序群に注目し、それがもつ特殊性を明らかにしていきたい.

2 研究の内容

本論文では主に二つの問題に取り組んでいる。まず一つめは、束順序群 (lattice ordered group) と剰余束との関係である。もう一つは関係意味論に関する Lambek 計算の完全性である。

まず束順序群が剰余束との関係では $\backslash$ と $/$ を剰余性 $x \bullet y \leq z \iff x \leq z/y \iff y \leq x \backslash z$ を満たすようにうまく定義することで束順序群が剰余束に一致することが簡単に確かめられる。剰余束が有界で可換のとき有界可換剰余束 (bounded comutative reiduated lattice) という。この特別な剰余束に対しても束順序可換群 (lattice ordered abelian group) が埋め込まれることを証明することができる。しかしこのときは剰余束が有界なのでそれに対応するように束順序可換群を $\top$ と $\perp$ を用いて拡張する必要がある。

次に関係意味論に関する Lambek 計算の完全性である。Lambek 計算は論理 FL に対応している。つまり構造規則 exchange, weakning, contraction を持ってなく論理結合子に関する推論規則を用いて証明を行う。Lambek 計算の論理結合子には $\bullet, \backslash$ の三つがありそれぞれに左と右の推論規則がある。また Lambek 計算の始式 (公理ともいう) としては $A \Rightarrow A$ という形のみがある。

Lambek 計算の意味を考える上で二つのモデルを本論文では扱う。一つは関係モデルである。関係モデルは推移的な二項関係と原子記号全体から二項関係の冪への写像との対で定義される。この関係モデルを用いて Lambek 計算に意味を付ける。もう一つのモデルは関係構造と論理式全体から関係構造への写像の対になっていて K モデルとよぶ。ここで関係構造とは二項関係の集合を universe とし、さらに三つの二項演算と一つの二項関係を持つ代数のことである。この K モデルに対しても Lambek 計算の意味を付けておく。さらに二つの関係構造、表現可能関係構造 (representable relational structure) と順序剰余半群を定義する。これらは関係構造だから前述した K モデルを構成できる。

目標としては関係モデルと Lambek 計算の間に完全性が成り立つことを示したいのだが直接これを証明するのは困難である。よって最初に準備しておいた K モデルに対して Lambek 計算との完全性を示す。次に関係モデルと表現可能関係構造の K モデルは実際には Lambek 計算に対して同じ意味を与えていることを示す。最後に表現可能構造と順序剰余半群とが同型であることを示す。以上のことより関係モデルでの Lambek 計算の完全性を証明することができる。