修 士 論 文

代数および関係意味論による Lambek 計算の研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

下川賢介

2003 年 3 月

修 士 論 文

代数および関係意味論による Lambek 計算の研究

指導教官　小野寛晰 教授

審査委員主査　小野寛晰 教授
審査委員　石原哉 助教授
審査委員　大堀淳 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

110059 下川賢介

提出年月: 2003 年 2 月

概 要

本稿では、剰余束の代数的性質を調べ、さらに特別な剰余束のクラスである束順序群 (lattice ordered group) や二項関係のなす構造である関係構造 (relational structure) について研究しその性質を明らかにする

目 次

第 1 章　序論 **1**

1.1　研究の背景 1

1.2　研究の目的 1

1.3　論文の概要 2

第 2 章　代数に関する種々の定義 **3**

2.1　束の定義 3

2.2　順序数と超限帰納法 5

2.3　束同型と部分束 7

2.4　分配束とモジュラ束 8

2.5　完備束 と 同値関係 13

2.6　代数に関する基本的な定義 15

2.7　合同と商代数 16

2.8　Variety 17

第 3 章　代数と論理 **20**

3.1　論理と代数構造 20

第 4 章　束順序群と剰余束の関係 **21**

4.1　束順序群と剰余束 21

4.2　束順序群と variety 22

4.3　束順序群と剰余束の関係 23

4.4　束順序可換群の有界可換剰余束への埋め込み定理 24

第 5 章　Lambek 計算の関係意味論による完全性定理 **27**

5.1　Lambek 計算の定義 27

5.2　関係構造 30

5.3　Lindenbaum Tarski 代数 31

5.4　K モデル 34

5.5　ORS モデルに関する Lambek 計算の完全性 34

5.6　Lambek 計算の関係意味論 38

5.7　表現可能な関係構造 40
5.8　RRS モデルと関係モデル 41
5.9　関係意味論に関する表現定理 43
5.10 関係意味論に関する Lambek 計算の強い完全性定理 51

第 6 章　結論　53

第1章　序論

1.1　研究の背景

シーケント計算における証明は始式 (initial sequent) に現れる各論理記号から始め、構造規則、論理規則 ($\vee, \wedge, \supset, \neg$) および cut 規則を繰り返し適用することにより得られる. これらの規則のうち構造規則は論理規則の適用のための補助的な規則だとみなされてきた。しかし、独自の立場から研究されてきた様々な非古典論理は形式的には古典論理や直観主義論理からいくつかの構造規則を取り除くことにより得られる部分構造論理の体系とみなせることが最近になりわかってきたため、構造規則が注目されるようになった.

部分構造論理はもともと Gentzen によるシーケント計算（式計算）の構造規則の役割に注目することから始まっている. そのために 90 年代に部分構造論理について書かれた論文の多くは証明論を用いたものであった. 最近になり、部分構造論理の意味論としての代数的モデルが注目されるようになってきた. このような背景で得られたのが剰余束の概念である. 剰余束は、束とモノイドの構造の両方を持ち、さらにモノイド演算が剰余 (residual) を持つような代数構造である. 代数学からみたときの典型的な剰余束の例は、束順序群である. 本研究では剰余束一般の性質を明らかにするとともに、とくに剰余束全体の中で束順序群に注目し、それがもつ特殊性を明らかにしていきたい.

1.2　研究の目的

現在までに、古典論理 **LK** や直観主義論理 **LJ** とは異なる様々な論理の研究が盛んに行われているが、それらの論理の多くは部分構造論理とみなせることがわかってきた. 部分構造論理とは、古典論理 **LK** や直観主義論理 **LJ** から構造規則を取り除いたものである. 部分構造論理としては代数的方法が有効であることが最近明らかになってきた. その基本となる代数構造は剰余束 (residuated lattice) とよばれる. 剰余束は、部分構造論理に対する代数構造である. 本研究では剰余束の代数的性質を調べ、さらに特別な剰余束のクラスである束順序群 (lattice ordered group) や二項関係のなす構造である関係構造 (relational structure) について研究しその性質を明らかにすることを目的とする.

1.3 論文の概要

本論文では主に二つの問題に取り組んでいる．まず一つめは、束順序群 (lattice ordered group) と剰余束との関係である．もう一つは関係意味論に関する Lambek 計算の完全性である．

第２章では、４章や５章での種々の定理を取り扱うのに必要な代数の基本概念を紹介する．特に束という概念が代数と論理をみる上で重要な役割を担っていることが４章や５章で理解できるだろう．４章で証明する埋め込み定理を証明するのに必要な部分束や同型などの概念や５章で証明する表現定理に必要な順序数や超現帰納法などの概念もこの章で紹介される．

第３章では、論理と代数の関係を紹介している．５章で Lambek 計算というシステムが登場するがこれは３章で紹介される論理体系 **FL** に他ならない．

第４章では、束順序群と剰余束との関係について紹介する．この章により５章で登場する表現可能な関係構造と束順序半群との関係を理解しやすくなるだろう．

第５章では、この論文の主定理である Lambek 計算の関係意味論による強い完全性を証明する．この定理は非常に難解な問題であるができるだけ理解しやすく述べたい．

以上が本論文の章立てである．

第2章　代数に関する種々の定義

この章では後の各章に対する準備を行う．特に束という概念は本論文で一貫して登場してくる重要な概念である．後の章で紹介する束の代数や論理における多彩なふるまいを理解するためにも、この章で紹介する束の基本的な性質やそれに付随する順序や同型の定義などを理解して欲しい.

2.1　束の定義

Definition 2.1.1　L を空でない任意の集合とし、$\vee$(join) と $\wedge$(meet) を L 上の二項演算子とする．$\langle L, \vee, \wedge \rangle$ が以下の L1 から L4 を満たすとき、$\langle L, \vee, \wedge \rangle$ は束 (lattice) であるという.

任意の $x, y, z \in L$ に対し

L1: (a) $x \vee y = y \vee x$
(b) $x \wedge y = y \wedge x$ （交換律）

L2: (a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ （結合律）

L3: (a) $x \vee x = x$
(b) $x \wedge x = x$ （冪等律）

L4: (a) $x = x \vee (x \wedge y)$
(b) $x = x \wedge (x \vee y)$ （吸収律）

$\vee$ を論理結合子 “or” 、$\wedge$ を論理結合子 “and” とすると L1 から L4 は、よく知られたの命題論理の性質であることを注意しておく.

L を自然数全体の集合とし、$\vee$ を最小公倍数、$\wedge$ を最大公約数とする. このとき明らかに L1 から L4 が満たされる.

Definition 2.1.2 A 上の二項関係 $\leq$ が A 上の順序であるとは $\leq$ が以下の (i) から (iii) を満たすときである.

任意の $a, b, c \in A$ に対し

(i) $a \leq a$ （反射律）

(ii) $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$ （反対称律）

(iii) $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$ （推移律）

さらに、順序 $\leq$ が全順序であるとは次の (iv) を満たすときである.

(iv) 任意の $a, b \in A$ に対し $a \leq b$ または $b \leq a$

空でない任意の集合 A と A 上の順序 $\leq$ の組 $\langle A, \leq \rangle$ を順序集合 (partially ordered set,poset) と呼ぶ. 混同しないときは $\langle A, \leq \rangle$ を 単に A と略して書く. さらに、順序集合の二項関係が全順序であるとき、全順序集合 (totally orderd set,linearly ordered set,chain) と呼ぶ. $a < b$ は $a \leq b$ かつ $a \neq b$ の略記とする.

A を順序集合 P の部分集合とする. このとき、$p \in P$ が A に対する上界（upper bound）とは、

任意の $a \in A$ に対し $a \leq p$

となることである. A に対する上界が少なくとも一つ存在するときには、A は上に有界であるという. また、$p \in P$ が A の上限 (supremum of A,$\sup A$, $\bigvee A$）とは、p が A の上界で、かつ、p は A の上界の中で最小となること、すなわち最小の上界になることである.（つまり、すべての $a \in A$ に対し $a \leq p$ かつ、すべての $a \in A$ に対し $a \leq b$ となるどんな b に対しても $p \leq b$ となる.）同様に、$p \in P$ が A に対する下界（lower bound）とは、

任意の $a \in A$ に対し $p \leq a$

となることである. A に対する下界が少なくとも一つ存在するときには、A は下に有界であるという. また、$p \in P$ が A の下限 (infimum of A,$\inf A$, $\bigwedge A$）とは、p が A の下界で、かつ、p は A の下界の中で最大となること、すなわち最大の下界になることである.（つまり、すべての $a \in A$ に対し $p \leq a$ かつ、すべての $a \in A$ に対し $b \leq a$ となるどんな b に対しても $b \leq p$ となる.）A が上に有界でかつ下に有界なとき単に A は有界であるという.

束は次のような形で定義することもできる. 順序集合 L が 束とは、任意の $a, b \in L$ に対し $\sup\{a, b\}$ と $\inf\{a, b\}$ が共に L 内に存在することである. 実際、上に述べたこれら二つの束の定義が同値であることは次のようにして簡単に示すことができる.

(A) L を最初の定義の束とする. L 上の二項関係 $\leq$ を $a,b \in L$ に対し $a \leq b \iff a = a \wedge b$ と定義すると $\leq$ は順序となり、さらに、$a \vee b$ と $a \wedge b$ が それぞれの順序に関して $\sup\{a,b\}$ と $\inf\{a,b\}$ に一致することが確かめられる.

(B) L を二つ目の定義の束とする.L 上の二項演算 $\vee$ と $\wedge$ を $a,b \in L$ に対し $a \vee b = \sup\{a,b\}, a \wedge b = \inf\{a,b\}$ と定義することにより、$\vee, \wedge$ は 最初の定義の L1 から L4 を満たす.

このことより、任意の全順序集合は束になることがわかる. したがって最大元や最小元を持たない全順序集合をとれば、最大元や最小元を持たない束になる. よって、束は一般には最大元や最小元を持たない. 最大元と最小元の両方を持つ束のことを有界束という. 有限な束はすべて有界である. なぜなら、その束 L のすべての要素を書き並べて $L = \{a_1, \ldots, a_n\}$ とすると、$a_1 \vee \cdots \vee a_n$, $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ がそれぞれ、L の最大元、最小元になるからである.

$a,b \in P$ に対し

(i) $a < b$ かつ

(ii) $a \leq c \leq b$ ならば $a = c$ または $c = b$

であるとき、b は a を覆う（b coveres a,a is covered b）といい、$a \prec b$ と書く. また b は a の直後 (successor) であるといい、a は b の直前 (predecessor) であるという. （つまり $a \prec b$ とは、b が a の次に大きな要素になっていることをいう.）

閉区間 $[a,b]$ は、$[a,b] = \{c \in P \mid a \leq c \leq b\}$, 開区間 (a,b) は、$(a,b) = \{c \in P \mid a < c < b\}$ としてそれぞれ定義される.

2.2 順序数と超限帰納法

集合 A の元 a に対して、A のいかなる元 x に対しても $a < x$ とならないとき a を A の極大元 (maximal element) という. また A のいかなる元 x に対しても $x < a$ とならないとき a を A の極小元 (minimal element) という. 最大元や最小限があればそれはそれぞれただ一つの極大元、極小元となる. 一般に極大元や極小元が存在してもただ一つとは限らない.

順序集合 P の任意の空でない部分集合が極小元を持つとき、P は極小条件 (minimal condition) を持つといい、順序集合 P の任意の空でない部分集合が極大元を持つとき、P は極大条件 (maximal condition) を持つという.

全順序集合 X が極小条件を持つとき X を整列集合 (well ordered set) といい、その順序を整列順序 (well order) という. 整列集合の部分集合は定義より明らかに整列集合となる.

Definition 2.2.1 次の (i),(ii) の条件を満たす集合 α を順序数という.

(i) α は $\in$ という二項関係を順序とする整列集合である.

(ii) $\alpha \in \beta$ ならば $\beta \subset \alpha$

この定義によると空集合は順序数である．これを 0 と表す．また

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{0\} = \{\emptyset\} \\ 2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

は順序数である．これら有限集合である順序数のことを有限順序数 (finite ordinal number) という．有限順序集合は自然数 (0 を含めて) と同一視して考えられる．自然数全体の集合 $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ も順序数である．ω のように、無限集合である順序数のことを超限順序数という．

任意の整列集合 A に対して A と順序同型な順序集合 α がただ一つ存在する．（つまり、A から α への写像 h があって A の順序 $\leq$ と $a, b \in A$ および α の順序 $\in$ に対して $a \leq b \iff h(a) \in h(b)$ となる．）その順序数を A の順序数とよぶ．以下この節では $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ を順序数とする．

$\alpha \in \beta$ を $\alpha < \beta$ で表わし、これによって順序数の大小を定義する．0 が最小の順序数であり、有限順序数の大小関係は自然数の大小関係と一致する．また ω が最小の超限順序数である．$\alpha \leq \beta$ を $\alpha < \beta$ または $\alpha = \beta$ として定義される関係 $\leq$ は全順序関係であり、順序数全体のなす族は $\leq$ により整列集合となる．したがって、順序数に対して以下で述べる超限帰納法を用いることができる．

Theorem 2.2.1 整列集合 X の元 x に関する命題 $P(x)$ に対して

(i) X の最小元 x_0 に対して $P(x_0)$ は真である．

(ii) X の任意の元 x に対して、$y < x$ であるすべての元 $y \in X$ について $P(y)$ が真であれば $P(x)$ も真である．

とする. このとき X の任意の元 z に対して $P(z)$ は真である．

この定理を超限帰納法 (transfinite induction) という．X が自然数全体からなる集合 ω のときが数学的帰納法である．

α を任意の順序数とすれば $\alpha' = \{\beta \mid \beta \leq \alpha\}$ も順序数であり α の直後の順序数を与える．α の直前の順序数はたかだか一つ存在する．また順序数の任意の集合 A に対して $\{\beta \mid$ ある順序数αが存在して、$\beta < \alpha \in A\}$ は順序数となる．この順序数は A の上限 $\sup A$ を与える．

順序数の和 $(\alpha+\beta)$, 積 $(\alpha\beta)$, 冪 (α^β) は β の超限帰納法により次のように定義される．ただし γ は直前の順序数を持たない超限順序数とし、冪については $\alpha > 0$ とする.

$$\alpha + 0 = \alpha,\ \alpha + \beta' = (\alpha+\beta)',\ \alpha+\gamma = \sup\{\alpha+\kappa \mid \kappa < \gamma\}$$

$$\alpha 0 = 0,\ \alpha\beta' = \alpha\beta + \alpha,\ \alpha\gamma = \sup\{\alpha\kappa \mid \kappa < \gamma\}$$

$$\alpha^0 = 1,\ \alpha^{\beta'} = \alpha^\beta\alpha,\ \alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\kappa \mid \kappa < \gamma\}$$

このとき和、積については結合律

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$$
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

および左分配律

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$$

がなりたつ．また冪については

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$$
$$\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$$

がなりたつ.

2.3 束同型と部分束

L_1 と L_2 を束とし、 α を L_1 から L_2 への写像とする．任意の $a, b \in L_1$ に対して

$$\alpha(a{\vee}b) = \alpha(a){\vee}\alpha(b)$$

$$\alpha(a{\wedge}b) = \alpha(a){\wedge}\alpha(b)$$

が成り立つとき、α を L_1 から L_2 への束準同型写像という．さらに α が全単射であれば、α を L_1 から L_2 への束同型写像という．また、L_1 から L_2 への束同型写像が存在するとき、L_1 と L_2 は束同型であるという.

α が L_1 から L_2 への束同型写像であるとき逆写像 α^{-1} は L_2 から L_1 への束同型写像になっている. さらに L_2 から L_3 への束同型写像 β も存在するとき合成写像 $\alpha\circ\beta$ は L_1 から L_3 への束同型写像になっている.

Definition 2.3.1 L' を束 L の空でない部分集合とする．任意の $a, b \in L'$ に対して $a{\vee}b$ と $a{\wedge}b$ が共に L' の要素であるとき L' は L の部分束であるという.

Definition 2.3.2 束 L_2 が部分束として束 L_1 と束同型なものをもつとき、L_1 が L_2 に埋め込まれる (L_1 can be embedded into L_2) という.

2.4 分配束とモジュラ束

Definition 2.4.1 分配律 (distributive law) が成り立つ束を分配束という. ここで分配律とは以下の D1、D2 のことである.

D1: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

D2: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (分配律)

Theorem 2.4.1 束 L が分配束となるためには D1 または、D2 の一方のみを確かめれば良い. (つまり、束 L が D1 を満たすことは、D2 を満たすことと同値である.)

Proof. 束 L が D1 を満たすと仮定する.

$$\begin{aligned}
x \vee (y \wedge z) &\overset{\text{L4(a)}}{=} (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \\
&\overset{\text{L2(a)}}{=} x \vee ((x \wedge z)) \vee (y \wedge z)) \\
&\overset{\text{L1(b)}}{=} x \vee ((z \wedge x)) \vee (z \wedge y)) \\
&\overset{\text{D1}}{=} x \vee (z \wedge (x \vee y)) \\
&\overset{\text{L1(b)}}{=} x \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&\overset{\text{L4(b)}}{=} (x \wedge (x \vee y)) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&\overset{\text{L1(b)}}{=} ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&\overset{\text{D1}}{=} (x \vee y) \wedge (x \vee z)
\end{aligned}$$

このように、D2 もまた成り立つ. また D2 を仮定すると同様に D1 が得られる. □

上の Theorem2.4.1 より、束 L が分配束となるためには D1 または、D2 の一方のみを確かめれば良いことがわかったが、さらにすべての束は、

D1′: $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$

D2′: $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

この二つの性質を持っているので、実際に束 L が分配束かどうかを調べるには、

D1$''$: $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

D2$''$: $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$

のいずれかを確かめれば良い.

Definition 2.4.2 モジュラ律が成り立つ束をモジュラ束という. モジュラ律とは以下の M のことである.

M: $x \leq y$ ならば $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$ (モジュラ律)

束の性質より任意の $a, b \in L$ に対し $a \leq b \iff a = a \wedge b$ となるので、明らかに、M は、以下の M$'$ と同値である.

M$'$: $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge ((x \wedge y) \vee z)$

さらに、すべての束について

M$''$: $x \leq y$ ならば $x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z)$

この性質を持っているので、実際に 束 L がモジュラ束かどうかを調べるには、

M$'''$: $x \leq y$ ならば $y \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$

のみを確かめれば良い.

Theorem 2.4.2 すべての分配束はモジュラ束となる.

Proof. 束 L が分配束とすると、D2 より、任意の $x, y, z \in L$ に対し 以下の不等式が得られる.

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$$

ここで、$x \leq y$ と仮定すると、$x \leq y \iff x \vee y = y$ より、$x \vee y = y$ が得られる. 上の不等式に代入すると、

$$y \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$$

が得られ L は、モジュラ束となる. □

次に紹介する二つの定理から、モジュラ束と分配束の特徴をみることができる. まず二つの束、M_5 と N_5 を用意する.

図からわかるように、どちらの束もともに 5 個の要素を持ち、$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ とならない. だから、M_5 と N_5 は分配束ではない. さらに、N_5 は $a \leq b$ であるが、$a \vee (b \wedge c) \neq b \wedge (a \vee c)$ となり、モジュラ束でもない. それに対し M_5 はモジュラ律を満たすことを確かめることができる.

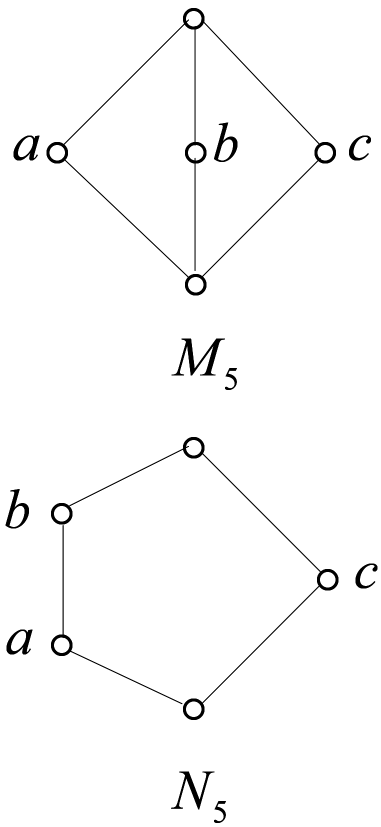

図 2.1: five elements lattice

Theorem 2.4.3 [Dedekind]

L がモジュラ束でないとき、かつ、そのときに限り N_5 は L に埋め込まれる.

Proof. N_5 が L に埋め込まれるとする. 上で述べたように、N_5 は モジュラ束 ではないことから、L も モジュラ束でなくなるのは明らか.

L がモジュラ律を満たさないと仮定する. モジュラ律 を 満たさないのだから、L の中に、$a \leq b$ となり、かつ、$a \vee (b \wedge c) < b \wedge (a \vee c)$ となる要素 a, b, c を見つけることができる.

ここで、

$$\begin{aligned} a_1 &= a \vee (b \wedge c) \\ b_1 &= b \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

とする.（ $a_1 \leq b_1$ となっている.）このとき、

$$\begin{aligned} c \wedge b_1 &= c \wedge (b \wedge (a \vee c)) \\ &\overset{\mathrm{L1(b)}}{=} c \wedge ((a \vee c) \wedge b) \\ &\overset{\mathrm{L2(b)}}{=} (c \wedge (a \vee c)) \wedge b \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{L1(a)}}{=} (c\wedge(c\vee a))\wedge b \\
&\overset{\text{L4(b)}}{=} c\wedge b
\end{aligned}
$$

さらに、

$$
\begin{aligned}
c\vee a_1 &= c\vee(a\vee(b\wedge c)) \\
&\overset{\text{L1(a)}}{=} c\vee((b\wedge c)\vee a) \\
&\overset{\text{L2(a)}}{=} (c\vee(b\wedge c))\vee a \\
&\overset{\text{L1(b)}}{=} (c\vee(c\wedge b))\vee a \\
&\overset{\text{L4(a)}}{=} c\vee a
\end{aligned}
$$

ここで、

$$c\wedge b \leq a\vee(c\wedge b) = a_1 \leq b_1$$

より、

$$c\wedge b \leq c\wedge a_1 \leq c\wedge b_1 = c\wedge b$$

よって $c\wedge a_1 = c\wedge b_1 = c\wedge b$ となる. 同様に、$c\vee b_1 = c\vee a_1 = c\vee a$ もいえる.

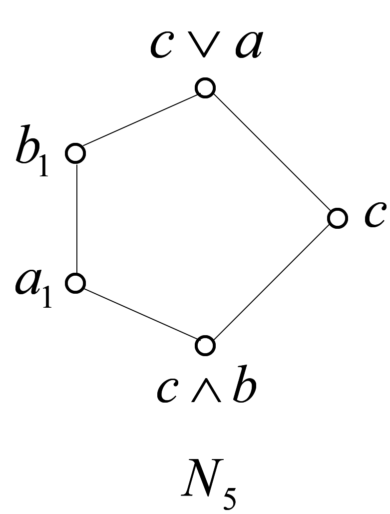

図 2.2: N_5 と同型な L の部分束

このようにして、図のように、N_5 と同型なものが L の中にあることが示せた. □

次のように同様なタイプの定理を分配束に対しても示すことができる.

Theorem 2.4.4 [Birkhoff]

L が分配束でないとき、かつ、そのときに限り M_5 または、N_5 が L に埋め込まれる.

Proof. まず上で述べたように、M_5 と N_5 は 分配束 ではないことから、もし M_5 または N_5 が L に埋め込まれるなら L も分配束でなくなるのは明らか.

L が分配束でなくてしかも L に N_5 が埋め込まれていないと仮定する. (すると Theorem2.4.3 より L はモジュラ束になっている.)

L で分配律が成り立たないことより、$(a{\wedge}b){\vee}(a{\wedge}c) < a{\wedge}(b{\vee}c)$ となるような L の要素を見つけることができる. ここで以下のように名前をつける.

$$\begin{aligned} d &= (a{\wedge}b){\vee}(a{\wedge}c){\vee}(b{\wedge}c) \\ e &= (a{\vee}b){\wedge}(a{\vee}c){\wedge}(b{\vee}c) \\ a_1 &= (a{\wedge}e){\vee}d \\ b_1 &= (b{\wedge}e){\vee}d \\ c_1 &= (c{\wedge}e){\vee}d \end{aligned}$$

このとき、$d \leq a_1, b_1, c_1 \leq e$ であることが簡単に確かめられる. さらに、

$$\begin{aligned} a{\wedge}e &= a{\wedge}((a{\vee}b){\wedge}(a{\vee}c){\wedge}(b{\vee}c)) \\ &\overset{\mathrm{L2(b)}}{=} ((a{\wedge}(a{\vee}b)){\wedge}(a{\vee}c)){\wedge}(b{\vee}c) \\ &\overset{\mathrm{L4(b)}}{=} a{\wedge}(b{\vee}c) \end{aligned}$$

ここで $a{\vee}(a{\wedge}b){\vee}(a{\wedge}c) \overset{\mathrm{L4(a)}}{=} a$ より、$a \leq (a{\wedge}b){\vee}(a{\wedge}c)$ であるから、下線部にモジュラ律を使って

$$\begin{aligned} a{\wedge}d &= \underline{a}{\wedge}(\underline{(a{\wedge}b){\vee}(a{\wedge}c)}{\vee}(b{\wedge}c)) \\ &\overset{\mathrm{M}}{=} ((a{\wedge}b){\vee}(a{\wedge}c)){\vee}(a{\wedge}(b{\wedge}c)) \\ &= (a{\wedge}b){\vee}(a{\wedge}c) && [a{\wedge}(b{\wedge}c) \leq a, b, c \text{ より}] \end{aligned}$$

よって、以上のことより $d < e$ が示せた. さらに

$$a_1{\wedge}b_1 = a_1{\wedge}c_1 = b_1{\wedge}c_1 = d$$

$$a_1{\vee}b_1 = a_1{\vee}c_1 = b_1{\vee}c_1 = e$$

を示すことができれば、図のように M_5 が L に埋め込まれているのがわかる. ここでは、$a_1{\wedge}b_1 = d$ のみを示すことにする.

$$\begin{aligned} a_1{\wedge}b_1 &= ((a{\wedge}e){\vee}\underline{d}){\wedge}(\underline{(b{\wedge}e){\vee}d}) && [d \leq (b{\wedge}e){\vee}d \text{ より}] \\ &\overset{\mathrm{M}}{=} ((a{\wedge}e){\wedge}((b{\wedge}\underline{e}){\vee}\underline{d}){\vee}d && [d \leq e \text{ より}] \end{aligned}$$

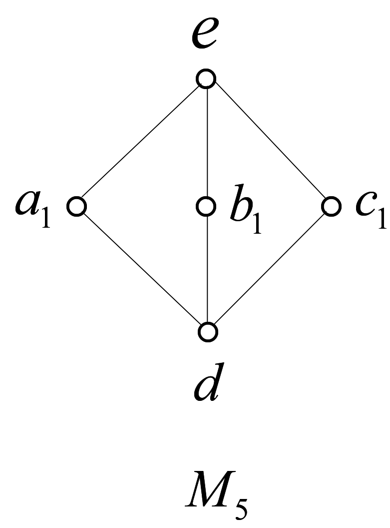

図 2.3: M_5 と同型な L の部分束

$$
\begin{aligned}
&\overset{\mathrm{M}}{=} && ((a\wedge e)\wedge((b\vee d)\wedge e))\vee d && \\
&\overset{\mathrm{L1(b)}}{=} && ((a\wedge e)\wedge e\wedge(b\vee d))\vee d && \\
&\overset{\mathrm{L3(b)}}{=} && ((a\wedge e)\wedge(b\vee d))\vee d && [e=b\vee c, b\vee d=b\vee(a\wedge c) \text{ より}] \\
&= && (a\wedge(\underline{b\vee c})\wedge(\underline{b}\vee(a\wedge c)))\vee d && [b\leq b\vee c \text{ より}] \\
&\overset{\mathrm{M}}{=} && (a\wedge(b\vee((b\wedge c)\wedge(a\wedge c))))\vee d && \\
&\overset{\mathrm{L4(b)}}{=} && (\underline{a}\wedge(b\vee(\underline{a\wedge c})))\vee d && [a\wedge c\leq a \text{ より}] \\
&\overset{\mathrm{M}}{=} && (a\wedge c)\vee(b\wedge a)\vee d && [d=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\vee(b\wedge c) \text{ より}] \\
&= && d &&
\end{aligned}
$$

よって、M_5 と同型なものがが L に埋め込めることを示せた. □

2.5 完備束 と 同値関係

束の空でない任意の有限部分集合に対しては、その上限と下限がつねに存在している. L を束とする. L の空でない任意の部分集合 A に対し上限 $(\sup A)$ と下限 $(\inf A)$ が存在するとき、L を完備束 (complete lattice) という.

L が完備束のときには、L 自身の上限および下限が存在しなければならないが、それらは当然 L の最大元と最小元に一致する. このことから、完備束は有界であることがわかる. さらに定義より有限な束は完備束である.

順序集合 L が完備束になるためには、次の (i),(ii) のどちらかが成り立てばよい.

(i) L は最大元を持ち、さらに L の空でない任意の部分集合に対し下限が存在する.

(ii) L は最小元を持ち、さらに L の空でない任意の部分集合に対し上限が存在する.

A を任意の集合とし、A 上の二項関係 $R \in A^2$ をとる. このとき、$\langle a, b\rangle \in R$ となることを、aRb と書くことにする. R_1, R_2 を A 上の二項関係とする. このとき、A 上の二項関係の合成 $R_1 \circ R_2$ を

$$\langle a, b\rangle \in R_1 \circ R_2 \iff \text{ある } c \in A \text{ が存在して } \langle a, c\rangle \in R_1 \text{ かつ } \langle c, b\rangle \in R_2$$

と定義する. さらに、帰納的に、$R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n = (R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_{n-1}) \circ R_n$ と定義する. R の逆関係 (inverse relation) $R^{\smile}$ を $R^{\smile} = \{\langle a, b\rangle \in A^2 \mid \langle b, a\rangle \in R\}$ により定義する.

A 上の対角関係（diagonal relation）Δ_A を $\Delta_A = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$ で定義する. さらに、A 上の全体関係（all relation）A^2 を ∇_A と書くことにする. また混同しない場合は単純に Δ (delta) , ∇ (nabla) と略して書くことにする.

A 上の二項関係 R が同値関係（equivalence relation）であるとは、以下の E1 から E3 を満たすときである. 任意の $a, b, c \in A$ に対し

E1: aRa （反射律）

E2: aRb ならば bRa （対称律）

E3: aRb かつ bRc ならば aRc （推移律）

また、A 上の 同値関係全体の集合を $Eq(A)$ と表す.

Theorem 2.5.1 順序として、包含関係 $\subseteq$ を持つ順序集合 $Eq(A)$ は完備束となる.
Proof. $Eq(A)$ は ∇_A を最大元に持ち、さらに任意の $S \subseteq Eq(A)$ に対して、$\bigcap S \in Eq(A)$ が $\inf S$ となっている. よって、$Eq(A)$ は完備束になる. $\square$

θ_1, θ_2 を A 上の同値関係とすると $\theta_1 \cap \theta_2$ も A 上の同値関係となる. したがって $\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$ が成り立つ.

Theorem 2.5.2 θ_1, θ_2 を A 上の同値関係とすると

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup \cdots$$

が成り立つ. このことから次のことが成り立つ.

$\langle a, b\rangle \in \theta_1 \vee \theta_2 \iff$ ある $c_1, \ldots, c_n \in A$ が存在し、$1 \leq i < n$ となるすべての i に対し $\langle c_i, c_{i+1}\rangle \in \theta_1$ または、$\langle c_i, c_{i+1}\rangle \in \theta_2$

Definition 2.5.1　θ を A 上の同値関係とする. θ を法とした a の同値類 (equivalence class) a/θ を $a/\theta = \{b \in A \mid \langle b, a\rangle \in \theta\}$ と定義する. さらに、商集合 A/θ を $A/\theta = \{a/\theta \mid a \in A\}$ と定義する.

2.6　代数に関する基本的な定義

A を空でない任意の集合とする. そして、$A^0 = \{\emptyset\}$ とし、正整数 n に対して、A^n を $A^n = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}$ とする. (つまり、A^n とは n 組の A の要素からなる集合とする.) f が A 上の n 引数関数（n 引数演算）とは、A^n から A への任意の関数のこととする. n 引数関数 f の $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ の像を $f(a_1, \ldots, a_n)$ と書く. A 上の関数 f が零引数関数のとき定数と呼ぶ. ここで注意するのは、零引数関数 f は A^0 の唯一の要素である $\emptyset$ の像 $f(\emptyset) \in A$ によって完全に決定されることである. このため、f が零引数関数のとき A の一つの要素として考える.

A の言語（型）$\mathcal{F}$ とは、関数記号の集合である. 各要素 $f \in \mathcal{F}$ に対し自然数が割り当てられるものとする. $\mathcal{F}$ の中で引数が n のものだけを集めた集合を $\mathcal{F}_n$ とする.

$\mathcal{F}$ を言語とする. このとき $\mathbf{A}$ が $\mathcal{F}$ 型代数であるとは、$\mathbf{A}$ が、対 $\langle A, F\rangle$ であり、 A が空でない任意の集合、F は $\mathcal{F}$ のそれぞれの要素に対応した引数を持つ A 上の関数の集合となっていることである. （つまり、$\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_k\}$ であるとき、$F = \{f_1^{\mathbf{A}}, \ldots, f_k^{\mathbf{A}}\}$ となる.）A を universe と呼び、$f^{\mathbf{A}}$ を基本関数 (fundamental operation) と呼ぶ.

$F = \{f_1^{\mathbf{A}}, \ldots, f_k^{\mathbf{A}}\}$ であるとき、$\langle A, F\rangle$ を習慣として $\langle A, f_1^{\mathbf{A}}, \ldots, f_k^{\mathbf{A}}\rangle$ と書く. また混同しないとき $\langle A, f_1, \ldots, f_k\rangle$ と書くようにする. さらに、習慣として引数の小さい関数から並べて書く.

Definition 2.6.1　$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ を同じ $\mathcal{F}$ 型の代数とする. このとき写像 $\alpha : A \longrightarrow B$ が $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ への準同型写像 (homomorphism) であるとは、$\mathcal{F}$ に属する任意の n 引数関数記号 f と任意の $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対し

$$\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

となることである.
とくに、$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ であるとき α を自己準同型写像 (endomorphism) という.

とくに α が以下の性質を満たすものをそれぞれ定義する.

(i) α が全射であるとき、α を全射準同型写像 (epimorphism) であるという. さらにこの場合 $\mathbf{B}$ を $\mathbf{A}$ の準同型像 (homomorphic image) であるという.

(ii) α が単射であるとき、α を単射準同型写像 (monomorphism) であるという. さらにこのとき $\mathbf{A}$ は $\mathbf{B}$ に埋め込まれるという.

(iii) α が全単射であるとき、α を同型写像 (isomorphism) であるという. このとき $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ と書く. とくに、$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ であるとき α を自己同型写像 (automorphism) という.

Definition 2.6.2 $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ を同じ $\mathcal{F}$ 型の代数とする. このとき $\mathbf{B}$ が $\mathbf{A}$ の 部分代数 (subalgebra) であることを以下の (i),(ii) で定義する.

(i) B は A の空でない任意の部分集合である.

(ii) 任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}$ に対し $f^{\mathbf{B}}$ は $f^{\mathbf{A}}$ を B に制限したものになっている.

また、$\mathbf{B}$ が $\mathbf{A}$ の 部分代数であるとき単純に $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ と書く. A の部分集合 B が $\mathbf{A}$ の基本関数の下で閉じているときに B は $\mathbf{A}$ の subuniverse という. (つまり、$f \in F$ かつ $a_1, \ldots, a_n \in B$ ならば $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in B$ となる.)

上の定義から $\mathbf{B}$ が $\mathbf{A}$ の 部分代数であるとき、明らかに B は $\mathbf{A}$ の subuniverse である. ここで注意するのは、空集合は任意の代数の subuniverse であるが、代数の定義では universe は空であってはいけないので、部分代数の universe にはならない. また、$\mathbf{A}$ が零引数関数、すなわち定数 a を持っているとき、任意の subuniverse は a を要素として含まなければならない.

このように、部分代数を定義しておけば、群を例にとってみると群の部分代数は同様に群に成って欲しいが、実際は群の部分代数は部分半群（半群は結合律のみを持つ. ）にしか成らない. たとえば整数全体と加法は群を成すが、その部分代数である正整数と加法は部分半群である.

Definition 2.6.3 $\mathbf{A}_1$,$\mathbf{A}_2$ を共に $\mathcal{F}$ 型の代数とする. このとき $\mathbf{A}_1$ と $\mathbf{A}_2$ の直積 (direct product) $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ は universe が $A_1 \times A_2$ で $f \in \mathcal{F}_n$ と $a_i \in A_1, a'_i \in A_2 (1 \leq i \leq n)$ に対して、

$$f^{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}(\langle a_1, a'_1 \rangle, \ldots, \langle a_n, a'_n \rangle) = \langle f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}_2}(a'_1, \ldots, a'_n) \rangle$$

と関数を定義する.

一般に $\mathbf{A}_1$ と $\mathbf{A}_2$ は $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ に埋め込まれることはない. しかし、$\mathbf{A}_1$ と $\mathbf{A}_2$ は共に、$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ の準同型像になる.

2.7 合同と商代数

$\mathbf{A}$ を $\mathcal{F}$ 型の代数とする. そして、$\theta \in Eq(A)$ をとる. ここで、θ が 以下の両立性 (compatibility property,CP) を持っているとき θ を $\mathbf{A}$ 上の合同関係 (congruence relation) という.

CP :各 n 引数関数記号 $f \in \mathcal{F}$ と要素 a_i, b_i に対して、 $a_i \theta b_i$ が $1 \leq i \leq n$ で成り立つならば、$f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)$ が成り立つ.

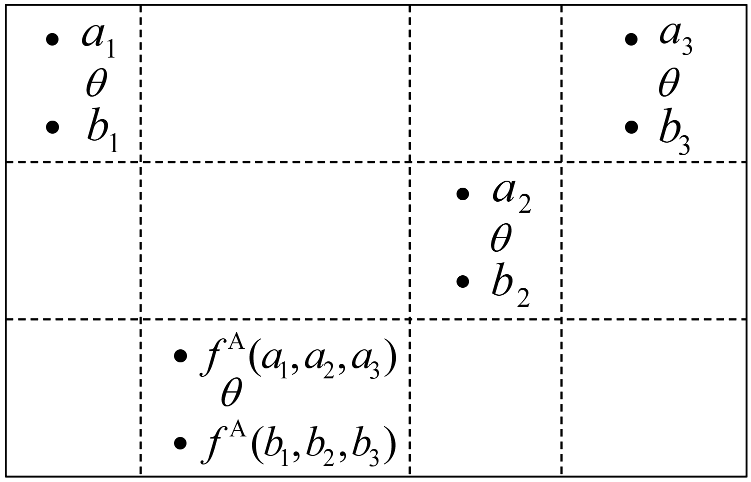

図 2.4: 両立性 (compatibility property,CP)

$\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ を $\mathbf{A}$ 上の合同関係全体の集合とする. このとき、A/θ を universe とし、$a_1, \ldots, a_n \in A$, $f \in \mathcal{F}$ に対し基本関数 $f^{\mathbf{A}/\theta}$ を $f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta$ と定めることにより得られる代数を θ を法とする商代数と呼び、$\mathbf{A}/\theta$ と表す. $\mathbf{A}$ の商代数の型は、$\mathbf{A}$ の型と等しくなる.

2.8 Variety

Definition 2.8.1 代数のクラス K から代数のクラス $I(\mathsf{K}), S(\mathsf{K}), H(\mathsf{K}), P(\mathsf{K})$ への写像を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \in I(\mathsf{K}) &\iff \mathbf{A} \text{ が } \mathsf{K} \text{ のある代数と同型である.} \\
\mathbf{A} \in S(\mathsf{K}) &\iff \mathbf{A} \text{ が } \mathsf{K} \text{ のある代数の部分代数になっている.} \\
\mathbf{A} \in H(\mathsf{K}) &\iff \mathbf{A} \text{ が } \mathsf{K} \text{ のある代数の準同型像になっている.} \\
\mathbf{A} \in P(\mathsf{K}) &\iff \mathbf{A} \text{ が } \mathsf{K} \text{ のある代数の直積になっている.}
\end{aligned}$$

ここでの代数のクラスはすべて同じ型とする.

O_1, O_2 を代数のクラスの演算とする. (つまり、$O_1, O_2 \in \{I, S, H, P\}$ とする.) このとき $O_1 O_2$ は二つの演算の合成を表している. さらに $\leq$ は代数のクラスの演算の順序を表している. つまり、$O_1 \leq O_2$ は 任意の代数のクラス K に対して $O_1 \subseteq O_2$ と定義する. 演算 O

が冪等 (idempotent) であるとは、$O^2 = O$ となることである. 代数のクラス K が演算 O の下で閉じているとは $O(\mathsf{K}) \subseteq \mathsf{K}$ となることである.

Lemma 2.8.1 以下の不等式が成立する.

(i) $SH \leq HS$

(ii) $PS \leq SP$

(iii) $PH \leq HP$

さらに演算 H, S, IP は冪等である.

Proof.

(i) $\mathbf{A} \in SH(\mathsf{K})$ とする. このときある $\mathbf{B} \in \mathsf{K}$ と $\mathbf{B}$ から $\mathbf{C}$ への全射準同型写像 α が存在して、すなわち $\mathbf{A} \leq \mathbf{C}$ が成り立っている. このとき $\mathbf{A} = \alpha(\alpha^{-1}(\mathbf{A}))$ かつ $\alpha(\mathbf{A}) \leq \mathbf{B}$ となり $\mathbf{A} \in HS(\mathsf{K})$ となる.

(ii) $\mathbf{A} \in PS(\mathsf{K})$ とする. このときある $\mathbf{B}_i \in \mathsf{K}$ $(i \in I)$ が存在して $\mathbf{A} = \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ かつ $\mathbf{A}_i \leq \mathbf{B}_i$ である. $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i \leq \Pi_{i\in I}\mathbf{B}_i$ であるので $\mathbf{A} \in SP(\mathsf{K})$ となる.

(iii) $\mathbf{A} \in PH(\mathsf{K})$ とする. このとき $\mathbf{B}_i \in \mathsf{K}$ と $\mathbf{B}_i$ から $\mathbf{A}_i$ への全射準同型写像 α_i が存在して $\mathbf{A} = \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ となっている. $b \in \Pi_{i\in I}\mathbf{B}_i$ に対し $\alpha(b)(i) = \alpha_i(b(i))$ によって定義される $\Pi_{i\in I}\mathbf{B}$ から $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}$ への写像 α は全射準同型写像になっているので $\mathbf{A} \in HP(\mathsf{K})$ となる.

演算 H, S, IP が冪等になっていることの証明は省略する. $\square$

空でない $\mathcal{F}$ 型の代数のクラスが 部分代数、準同型像、直積について閉じているときその代数を variety という. $\mathcal{F}$ 型の代数の variety を集めてくるとその共通部分はまた variety になっている. よって代数のクラス K を含む最小の variety が存在することがわかる. その variety を $V(\mathsf{K})$ で表し、K から生成された variety と呼ぶ. 代数のクラス K が唯一の要素 $\mathbf{A}$ からなるとき $V(\mathbf{A})$ と書くことにする. さらに、有限な代数の有限のクラス K から variety $V = V(\mathsf{K})$ が生成されるとき、V は K から有限生成されたという.

Theorem 2.8.1 [Tarski]

$V = HSP(K)$ ($HSP(K)$ は代数のクラス K を含む最小の variety である.)

Proof. $HV = SV = IPV = V$ かつ $I \leq V$ より $HSP \leq HSPV = V$ となり $HSP \leq V$ となる. 逆を示す. Lemma2.8.1 より、$H(HSP) = HSP, S(HSP) \leq HSSP = HSP$

である．また、

$$
\begin{aligned}
P(HSP) &\leq HPSP \\
&\leq HSPP \\
&\leq HSIPP \\
&= HSIP \\
&\leq HSHP \\
&\leq HHSP \\
&= HSP
\end{aligned}
$$

よって任意のクラス K に対して HSP(K) は H, S, P について閉じている．V(K) は K を含み H, S, P について閉じているクラスの中で最小のクラスであるので $V \leq HSP$ である．よって $V = HSP(K)$ を証明することができた． $\square$

第3章　代数と論理

3.1　論理と代数構造

FL とは直観主義論理 **LJ** から構造規則 exchange、weakning、contraction のすべてを取り除いたものでありLambek計算と呼ばれる.**FLe** は **FL** に exchange を付け加えたものである.exchange、weakning、contraction は代数ではそれぞれ、交換律(comutativity,$x{\cdot}y = y{\cdot}x$) integrality($x \cdot y \leq x$), 弱冪等律 (weak idempotency,$x \leq x \cdot x$) に対応しており、したがって構造規則を持たないということはそれらがすべて成り立たないことで対応付けられる.

第4章　束順序群と剰余束の関係

代数学からみたときの典型的な剰余束の例は、束順序群である．この章では剰余束と束順序群の関係について紹介する．

4.1　束順序群と剰余束

Definition 4.1.1　$\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \bullet, \backslash, /, 1 \rangle$ が 剰余束 (residuated lattice) であるとは、以下を満たすことである．

R1: $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ は束である．

R2: $\langle L, \bullet, 1 \rangle$ は 1 を単位元とするモノイドである．すなわち、

(i) $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$

(ii) $x \bullet 1 = 1 \bullet x = x$

R3: 任意の $x, y, z \in L$ に対し
$x \bullet y \leq z \iff x \leq z/y \iff y \leq x \backslash z$
が成立する．

演算子 \ と / はそれぞれ • の 右剰余 (right residual), 左剰余 (left residual) と呼ばれている．ここで紹介した代数は **FL** に対応している．

Definition 4.1.2　$\mathbf{G} = \langle G, \wedge, \vee, \bullet, ^{-1}, 1 \rangle$ が束順序群 (lattice ordered group,l-group) であるとは、以下を満たすことである．

G1: $\langle G, \wedge, \vee \rangle$ は束である．

G2: $\langle G, \bullet, ^{-1}, 1 \rangle$ は群である．すなわち、

(i) $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$

(ii) $x \bullet 1 = 1 \bullet x = x$

(iii) $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = 1$

G3: 任意の $x, y, z \in G$ に対し $x \leq y$ ならば $x \bullet z \leq y \bullet z$ かつ $z \bullet x \leq z \bullet y$ (単調性)

上の束順序群の定義で G2 の (i),(ii),(iii) に加え

(iv)$x \bullet y = y \bullet x$　　(交換律)

が成り立つとき **G** を束順序可換群 (abelian l-group) という.

単調整 G3 は、以下と同値である. 任意の $w, x, y, z \in G$ に対し

(A) $w \bullet (x \vee y) \bullet z = (w \bullet x \bullet z) \vee (w \bullet y \bullet z)$

(B) $w \bullet (x \wedge y) \bullet z = (w \bullet x \bullet z) \wedge (w \bullet y \bullet z)$

ここでは、G3 $\Longleftrightarrow$ (A) のみを示す.

最初に任意の $x, y, z \in G$ に対し $x \leq y$ ならば $x \bullet z \leq y \bullet z$ かつ $z \bullet x \leq z \bullet y$ と仮定する. $y \leq x \vee y$ にたいして単調性より $w \bullet y \bullet z \leq w \bullet (x \vee y) \bullet z$ となる. $x \leq x \vee y$ にたいして単調性より $w \bullet x \bullet z \leq w \bullet (x \vee y) \bullet z$ となる. よって、$(w \bullet x \bullet z) \vee (w \bullet y \bullet z) \leq w \bullet (x \vee y) \bullet z$ 次に $w \bullet x \bullet z \leq u$ かつ $w \bullet y \bullet z \leq u$ とする. このとき単調性より $x \leq w^{-1} \bullet u \bullet z^{-1}$ かつ $y \leq w^{-1} \bullet u \bullet z^{-1}$ となるから $x \vee y \leq w^{-1} \bullet u \bullet z^{-1}$ となる. よって $w \bullet (x \vee y) \bullet z \leq u$ となる. よって、$w \bullet (x \vee y) \bullet z \leq (w \bullet x \bullet z) \vee (w \bullet y \bullet z)$ となるから $w \bullet (x \vee y) \bullet z = (w \bullet x \bullet z) \vee (w \bullet y \bullet z)$ がいえる.

逆に、任意の $w, x, y, z \in G$ に対し $w \bullet (x \vee y) \bullet z = (w \bullet x \bullet z) \vee (w \bullet y \bullet z)$ と仮定する. 今、$x \leq y$ であるとする. $x \vee y = y$ より両辺右から z をかけて $(x \vee y) \bullet z = y \bullet z$ ここで (A) の w として単位元 1 をとると $(x \vee y) \bullet z = (x \bullet z) \vee (y \bullet z)$ となる. よって、$(x \bullet z) \vee (y \bullet z) = y \bullet z$ つまり、$x \bullet z \leq y \bullet z$ となる. $z \bullet x \leq z \bullet y$ についても同様に示せる.

束順序群の例を示す. $\mathbf{Z} = \langle Z, \wedge, \vee, +, 0, - \rangle$ は、$x \wedge y$ を x, y の最小値、$x \vee y$ を x, y の最大値とし、Z を整数全体の集合、$+, -$ を整数上の自然な加算、減算としたとき束順序群となる.

4.2　束順序群と variety

さらに束順序群の例を示す. R を実数全体の集合としたとき、$A(R) = \langle R_a, \vee, \wedge, \circ, id_R, ^{-1} \rangle$ は束順序群となる. ただし id_R は R 上の恒等写像とし $^{-1}$ は逆写像とする. R_a は R 上の順序自己同型写像 (order automorphism) 全体の集合 $\{f : R \to R \mid x, y \in R$ に対して $x < y$ ならば $f(x) < f(y)\}$ で以下を満たすものである. 任意の $x, y \in R$ と任意の $f, g \in R_a$ に対して

(i) $(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$

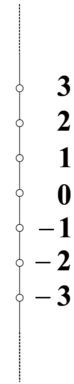

図 4.1: 束順序群

(ii) $(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$

(iii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

となる.

LG を束順序群全体の集合とする.

Theorem 4.2.1 [Birkhoff[1935]] LG は variety となる. つまり、準同型像と部分代数および直積について LG が閉じている.

ここで LG の大変興味深い特徴を紹介する.

ある束順序群で成り立たないような性質は、$A(R)$ でも成り立たない.

[Holland and McCleary]

さらに LG $= HSP(A(R))$ となることが知られている.

4.3 束順序群と剰余束の関係

ここで確かめておきたいのは、任意の束順序群は剰余束になるという事実である. 定義より G1,G2 の (i),(ii) はそれぞれ R1,R2 の (i),(ii) に等しいことがわかる. よって確かめることは、束順序群が R3 を満たすかどうかである. 束順序群において \ および / を

$$x \backslash y = x^{-1} \bullet y$$
$$x / y = x \bullet y^{-1}$$

と定義すると

$$x \bullet y \leq z \overset{(*)}{\iff} x \leq z/y \overset{(**)}{\iff} y \leq x \backslash z$$

が成り立つ．すなわち、このように定義された $\backslash$ と $/$ がそれぞれ右剰余と左剰余になる．
$(*)$ を示す．$x \leq z/y$ と仮定する．

$$\begin{aligned} x \leq z/y &\iff x \leq z \bullet y^{-1} \\ &\overset{\text{G3}}{\implies} x \bullet y \leq z \bullet y^{-1} \bullet y \\ &\implies x \bullet y \leq z \end{aligned}$$

逆に $x \bullet y \leq z$ と仮定する．

$$\begin{aligned} x \bullet y \leq z &\overset{\text{G3}}{\implies} x \bullet y \bullet y^{-1} \leq z \bullet y^{-1} \\ &\implies x \leq z/y \end{aligned}$$

このようにうまく剰余演算を定義することで R3 を示すことができる．$(**)$ も同様に示せる．よってすべての束順序群は剰余束になることをを証明できた．

4.4　束順序可換群の有界可換剰余束への埋め込み定理

Definition 4.4.1　$\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \bullet, \to, 1, \top, \bot \rangle$ が 有界可換剰余束 (bounded commutative residuated lattice) であるとは、以下を満たすことである．

R$'$1: $\langle L, \wedge, \vee, \top, \bot \rangle$ は $\top$ を最大元、$\bot$ を最小元とする有界束である．

R$'$2: $\langle L, \bullet, 1 \rangle$ は 1 を単位元とする可換モノイドである．すなわち R2 にくわえ、任意の $x, y \in L$ に対し $x \bullet y = y \bullet x$ が成立する．

R$'$3: 任意の $x, y, z \in L$ に対し

$$x \bullet y \leq z \iff x \leq y \to z$$

が成立する．

R$'$3 は、$y \to z = y \backslash z = z/y$ が成立することを意味している．　ここで紹介した代数は **FLe** に対応している．

上で示したことと同様なことが束順序可換群と有界可換剰余束の間になり立つのかということを考える．問題点は束順序可換群は有界とは限らないことである．$\top, \bot$ を束順序可換群にうまく付けることで、順序可換群は有界可換剰余束に埋め込まれることを示すことができる．

Theorem 4.4.1 任意の束順序可換群は有界可換剰余束に埋め込まれる．

Proof. 束順序可換群はそのままでは有界とは限らないので、上で述べたように問題となる $\top, \bot$ の取り扱いを考える．まず、$\overline{G} = G \cup \{\top, \bot\}$ とし有界な $\overline{G}$ をつくる．そして G 上の $\bullet$ を $\overline{G}$ 上に拡張する．

$$\top \bullet x = x \bullet \top = \begin{cases} \top & \text{if} \quad x \in G \cup \{\top\} \\ \bot & \text{if} \quad x = \bot \end{cases}$$

$$\bot \bullet x = x \bullet \bot = \bot$$

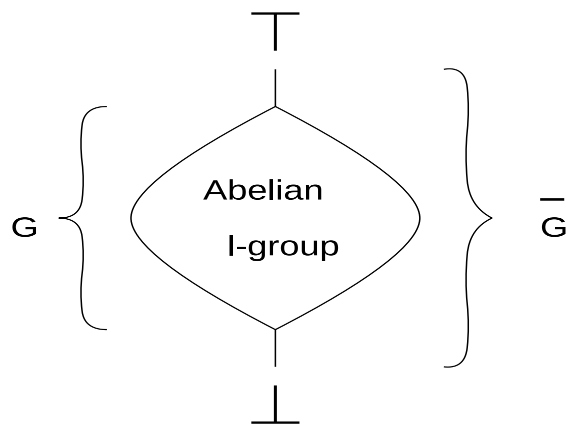

図 4.2: $\overline{G}$ への拡張

新しい代数 $\overline{\mathbf{G}} = \langle \overline{G}, \wedge, \vee, \bullet, {}^{-1}, 1 \rangle$ について考える．拡張の仕方より明らかに $\overline{\mathbf{G}}$ は $\bullet$ に対して可換である．さらに $\overline{\mathbf{G}}$ は任意の $x \in \overline{G}$ に対して

$$\begin{aligned} \sup\{x, \top\} &= \top \in \overline{G} \\ \inf\{x, \top\} &= x \in \overline{G} \\ \sup\{x, \bot\} &= x \in \overline{G} \\ \inf\{x, \bot\} &= \bot \in \overline{G} \end{aligned}$$

となるから定義より $\overline{\mathbf{G}}$ は有界束になる．

すると以下の $\top, \bot$ に対する $\rightarrow$ の定義により、$\langle \overline{G}, \wedge, \vee, \bullet, \rightarrow, 1 \rangle$ は実際に有界可換剰余束となることを示すことができる．

$$x \rightarrow y = x^{-1} \bullet y \quad \text{if} \quad x, y \in G$$

$$\top \rightarrow x = \begin{cases} \bot & \text{if} \quad x \in G \cup \{\bot\} \\ \top & \text{if} \quad x = \top \end{cases}$$

$$x \to \top = \top$$

$$\bot \to x = \top$$

$$x \to \bot = \begin{cases} \bot & \text{if} \quad x \in G \cup \{\top\} \\ \top & \text{if} \quad x = \bot \end{cases}$$

と $\to$ を定義する. 確かめておかなければならないのは、$\overline{\mathbf{G}}$ が

$$\mathrm{R}'3: \quad x \bullet y \leq z \iff x \leq y \to z$$

を満たすかどうかである.

z が $\top$ のとき任意の $y \in \overline{G}$ に対して $y \to z = \top$ となり明らかに任意の $x \in \overline{G}$ に対して $x \leq y \to z$ となる.

z が $\bot$ のとき $x \bullet y \leq z$ を満たすならば、x, y のどちらかが $\bot$ になるが、x が $\bot$ とすると明らかに $x \leq y \to z$ であり、y が $\bot$ とすると $y \to z = \top$ となりこの場合も $x \leq y \to z$ となる.

$z \in G$ のとき $x \bullet y \leq z$ を満たすならば、x, y が $\bot$ または $\overline{G}$ の要素になるが x または y が $\bot$ のときは上と同じ議論で $x \leq y \to z$ となり、x, y が $\overline{G}$ の要素のときは x, y, z が共に $\overline{G}$ の要素であるから単調性が成り立つ.

$$\begin{aligned} x \bullet y \leq z &\implies x \bullet y \bullet y^{-1} \leq z \bullet y^{-1} \\ &\implies x \leq z \bullet y^{-1} \\ &\implies x \leq y \to z \end{aligned}$$

よって $\overline{\mathbf{G}}$ は有界可換剰余束になる. つまり束順序可換群の拡張代数が有界可換剰余束になることを示せたので束順序可換群は有界可換剰余束に埋め込まれることが証明できた.
$\square$

第5章　Lambek計算の関係意味論による完全性定理

この章では、Lambek 計算の関係意味論による完全性定理の証明を行うが、この証明は直接示すのは困難なので以下の図のようにして同値関係をたどり証明していく．図の記号の意味は後に紹介する．

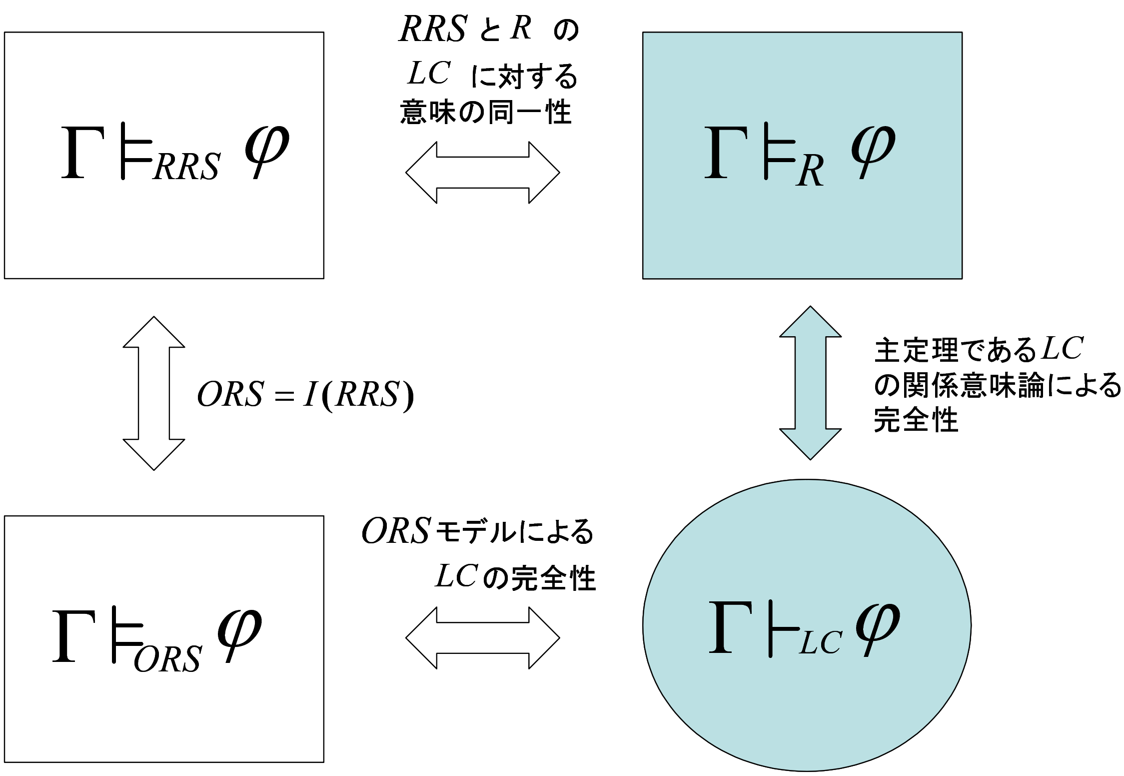

図 5.1: Lambek 計算の関係意味論による完全性定理

5.1　Lambek計算の定義

ここでは Lambek 計算 (Lambek Calculus, LC) の構文論 (syntax) について紹介する．P を原子記号全体の集合とする．$\backslash, /, \bullet$ を論理結合子とする．$Form_{LC}$ を Lambek 計算の論理

式の集合とする. ここでいう論理式とは P を含み P の要素から $\backslash, /, \bullet$ を用いて構成されるもの全体を表す. （つまり、$P \subseteq Form_{LC}$ かつ $A, B \in Form_{LC}$ ならば、$A/B \in Form_{LC}$, $A \backslash B \in Form_{LC}$, $A \bullet B \in Form_{LC}$ となっている.）n を正整数とし 各 $i \leq n$ について $A_i \in Form_{LC}$ をとるとき、$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0$ となる型の表現を式 (sequent) という. この式計算を用いて論理 **FL** を形式化したものが Lambek 計算である.

Lambek 計算で公理 (axiom) に相当するものは始式 (initial sequent) である. Lambek 計算の始式は

(LC0)

$$A \Rightarrow A$$

という形の式である. ここで A は任意の論理式とする. この式は A を仮定すると A が導かれるという自明なことを表しわしている.

Lambek 計算では、(LC1) 以外に構造に関する推論規則を持っていないので、これから紹介する (LC1) 以外の推論規則はすべて論理結合子に関する推論規則である. Lambek 計算の推論規則は一般に、

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{S_1 \qquad S_2}{S}$$

という形をしている. ここで S_1, S_2 および S は式である. これらの直観的な意味は、式 S_1 が証明できるならば S も証明できること、および、式 S_1, S_2 が共に証明できるならば式 S も証明できることを表している. 推論規則を I とするとき、S_1(および S_2) は I の上式、S は I の下式といわれる.

以下では、有限個の論理式の列（空列を含む）を表すのに x, y, z を使うことにする. ここで注意しておくのは、論理式の列 A, B は B, A や A, B, B などの列と区別されることである. いま A, B, C を任意の論理式とする. Lambek 計算の推論規則を以下にあげる. (LC$\bullet$左) 以外は x が空でないとする. また (LC$\bullet$右) は x, y が共に空でないとする.

(LC1)

$$\frac{x \Rightarrow A \quad A \Rightarrow B}{x \Rightarrow B}$$

(LC $\bullet$ 左)

$$\frac{x, A, B, y \Rightarrow C}{x, A \bullet B, y \Rightarrow C}$$

(LC $\bullet$ 右)

$$\frac{x \Rightarrow A \quad y \Rightarrow B}{x, y \Rightarrow A \bullet B}$$

(LC\ 左)

$$\frac{x \Rightarrow A \quad y, B, z \Rightarrow C}{y, x, A \backslash B, z \Rightarrow C}$$

(LC\ 右)

$$\frac{A, x \Rightarrow B}{x \Rightarrow A \backslash B}$$

(LC/左)

$$\frac{x \Rightarrow A \quad y, B, z \Rightarrow C}{y, B/A, x, z \Rightarrow C}$$

(LC/右)

$$\frac{x, A \Rightarrow B}{x \Rightarrow B/A}$$

(LC1) は cut 規則に対応しているが、式 $A \Rightarrow B$ の左辺には唯一 A だけが現れている. つまり A の他に論理式の列が現れてはいけないということに注意しておく.

Definition 5.1.1 Γ を任意の式の集合、φ を任意の式とする. φ が Γ から Lambek 計算により証明可能とは以下の (i) から (iii) のいずれかを満たすことである. このとき、$\Gamma \vdash_{LC} \varphi$ と書く.

(i) $\varphi \in \Gamma$

(ii) φ が始式である.

(iii) 一つまたは二つの式の集合 Λ が存在して、Λ のすべての要素が Γ から Lambek 計算により証明可能であり、かつ、ある推論規則 I が存在して

$$\frac{\Lambda}{\varphi}\ I$$

がこの推論規則の一つの例になっている. つまり、$\Lambda = \{\mu_1, \mu_2\}$ とすると、各 $\mu_i \in \Lambda$ に対して、$\Gamma \vdash_{LC} \mu_i$ となり、以下のように推論が行われる.

$$\frac{\mu_1 \quad \mu_2}{\varphi}\ I$$

5.2　関係構造

代数 $\mathbf{A} = \langle A, \bullet, \backslash, /, \leq \rangle$ について、その universe A が空集合でない任意の集合であり $\bullet, \backslash, /$ が A 上の任意の二項演算で、さらに $\leq$ が A 上の任意の二項関係であるとき $\mathbf{A}$ を関係構造 (relational structure) という．また関係構造全体のなす代数の族を RS と表す.

$\mathbf{A}$ を関係構造とする．また σ を $\bullet, \backslash, /, \leq$ および等号 $=$ から構成される量化記号を一つも含まない論理式とし、Σ を量化記号を含まない論理式の集合とするとこのとき、

$$\mathbf{A} \models s \iff s \text{ の閉包 (universal closure) が } \mathbf{A} \text{ で真である.}$$

$$\mathbf{A} \models \Sigma \iff \text{任意の } s \in \Sigma \text{に対して } \mathbf{A} \models s$$

と表す．$\mathbf{A} \models \Sigma$ は Σ が $\mathbf{A}$ で恒真であることを意味している．例として論理式 $x \leq x$(反射律) について考えてみる．$\mathbf{A} \models x \leq x$ は $\mathbf{A}$ の universe A の任意の要素 x に対し $x \leq x$ が成り立つことを表している.

Definition 5.2.1　[Ordered residuated semigroup,ORS]
$\mathbf{A} = \langle A, \bullet, \backslash, /, \leq \rangle$ を関係構造とする．また Σ は以下の (A1) から (A7) の論理式の集合とする．$\mathbf{A}$ が $\mathbf{A} \models \Sigma$ を満たしているとき順序剰余半群 (ordered residuated semigroup) という．また、順序剰余半群全体のなす代数の族を ORS と表す.

(I) $\leq$ は順序である. つまり、

- (A1) $x \leq x$　（反射律）
- (A2) $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$　（推移律）
- (A3) $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$　（反対称律）

(II) $\bullet$ は $\leq$ に関して単調な半群演算である. つまり、

- (A4) $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$　（結合律）
- (A5) $x \leq y$ かつ $z \leq u$ ならば $x \bullet z \leq y \bullet u$　（単調性）

(III) $\backslash$ と $/$ は $\bullet$ に関する剰余性 (residual property) を持つ．($\backslash$ と $/$ は $\bullet$ の左剰余と右剰余である.) つまり、

- (A6) $x \bullet y \leq z \iff y \leq x \backslash z$　(左剰余性)
- (A7) $x \bullet y \leq z \iff x \leq z / y$　(右剰余性)

5.3 Lindenbaum Tarski 代数

$\mathbf{F} = \langle Form_{LC}, \bullet, \backslash, / \rangle$ をLambek計算の論理式全体をuniverseとし論理結合子$\bullet, \backslash, /$を$Form_{LC}$上の自然な演算とする言語代数(word algebra)とする．このときLambek計算の式の任意の集合Γに対して、$Form_{LC}$上の関係$\leq_\Gamma$と$\equiv_\Gamma$を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} A \leq_\Gamma B &\iff \Gamma \vdash_{LC} A \Rightarrow B \\ A \equiv_\Gamma B &\iff A \leq_\Gamma B \text{ かつ } B \leq_\Gamma A \end{aligned}$$

さらに、$A \in Form_{LC}$ に対して、$A/{\equiv_\Gamma} = \{B \in Form_{LC} \mid A \equiv_\Gamma B\}$ とする．

Lemma 5.3.1 上で定義した$\leq_\Gamma$と$\equiv_\Gamma$および$\mathbf{F}$について以下の(i),(ii)が成立する．

(i) 任意の式の集合 Γ に対して、$\equiv_\Gamma$ は $\mathbf{F}$ 上の合同関係になる．

(ii) $A \equiv_\Gamma A'$ かつ $B \equiv_\Gamma B'$ となるような任意の $A, B, A', B' \in Form_{LC}$ に対して、

$$A \leq_\Gamma B \iff A' \leq_\Gamma B'$$

となる．

Proof.

(i) まず$\equiv_\Gamma$は同値関係であることを示す．(LC0)より、任意の $A \in Form_{LC}$ に対して $\Gamma \vdash_{LC} A \Rightarrow A$となるから$A \leq_\Gamma A$となり$A \equiv_\Gamma A$となる．よって反射律を持つ．$A \equiv_\Gamma B$ とすると、$A \leq_\Gamma B$ かつ $B \leq_\Gamma A$ となり、明らかに$B \equiv_\Gamma A$となる．よって対称律を持つ．$A \equiv_\Gamma B$ かつ$B \equiv_\Gamma C$ とすると$A \leq_\Gamma B$ かつ $B \leq_\Gamma C$となり、$\Gamma \vdash_{LC} A \Rightarrow B$ かつ$\Gamma \vdash_{LC} B \Rightarrow C$となる．ここで(LC1)より$\Gamma \vdash_{LC} A \Rightarrow C$となるから$A \leq_\Gamma C$がいえる．$C \leq_\Gamma A$ も同様に示せる．すると$A \equiv_\Gamma C$となり推移律を持つ．よって$\equiv_\Gamma$は同値関係である．

次に$\equiv_\Gamma$ は $Form_{LC}$ 上の合同関係であることを示す．$A, A', B, B' \in Form_{LC}$ に対して $A \equiv_\Gamma A'$ かつ $B \equiv_\Gamma B'$ とすると$\Gamma \vdash_{LC} A \Rightarrow A'$かつ$\Gamma \vdash_{LC} B \Rightarrow B'$となる．ここで(LC$\bullet$右)より、$\Gamma \vdash_{LC} A, B \Rightarrow A' \bullet B'$となる．さらに(LC$\bullet$左)より、$\Gamma \vdash_{LC} A \bullet B \Rightarrow A' \bullet B'$となる．よって$A \bullet B \leq_\Gamma A' \bullet B'$がいえた．$A' \bullet B' \leq_\Gamma A \bullet B$も同様であるから$A \bullet B \equiv_\Gamma A' \bullet B'$となる．$\backslash$および$/$に対しても同様にして$A \equiv_\Gamma A'$かつ $B \equiv_\Gamma B'$ ならば$A \backslash B \equiv_\Gamma A' \backslash B'$ および$A/B \equiv_\Gamma A'/B'$を示すことができる．よって合同関係であることを示せた．

(ii) $A \leq_\Gamma B$ とすると$A' \leq_\Gamma A$ かつ $A \leq_\Gamma B$ かつ$B \leq_\Gamma B'$となり$A' \leq_\Gamma B'$ となる．逆も同様に示すことができる．

□

代数 $\mathbf{L}_\Gamma = \langle L, \bullet, \backslash, /, \leq \rangle$ が以下を満たすとき Lambek 計算の Lindenbaum Tarski 代数という.

(i) $\langle L, \bullet, \backslash, / \rangle$ は因子代数 (facter algebra) $\mathbf{F}/\equiv_\Gamma$ である. つまり、universe L は $Form_{LC}/\!\!\equiv_\Gamma$ となる. すなわち $\{A/\!\!\equiv_\Gamma \ \mid A \in Form_{LC}\}$ により与えられ各演算子については

$$\begin{aligned}(A/\!\!\equiv_\Gamma) \bullet (B/\!\!\equiv_\Gamma) &= (A \bullet B)/\!\!\equiv_\Gamma \\ (A/\!\!\equiv_\Gamma)\backslash(B/\!\!\equiv_\Gamma) &= (A\backslash B)/\!\!\equiv_\Gamma \\ (A/\!\!\equiv_\Gamma)/(B/\!\!\equiv_\Gamma) &= (A/B)/\!\!\equiv_\Gamma\end{aligned}$$

により定義される.

(ii) $\leq$ は $\leq_\Gamma$ の像とする. つまり、$(A/\!\!\equiv_\Gamma) \leq (B/\!\!\equiv_\Gamma) \iff (A \leq_\Gamma B)$ により定める.

Lemma5.3.1 により、L 上の演算 $\bullet, \backslash, /$ および二項関係 $\leq$ がその代表元の選び方によらず矛盾なく定義されていることが分かる. また、Lindenbaum Tarski 代数は定義より明らかに関係構造である.

Theorem 5.3.1 $\mathbf{L}_\Gamma$ は順序剰余半群である.

Proof. 順序剰余半群の定義より、任意の式の集合 Γ に対して、$\mathbf{L}_\Gamma \models \Sigma$ が成立することを示す.

(∗) まず最初に $\Gamma \vdash_{LC} A, B \Rightarrow C \iff \Gamma \vdash_{LC} A \bullet B \Rightarrow C$ となることを示す.

$\Gamma \vdash_{LC} A \bullet B \Rightarrow C$ を仮定すると、

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow A \bullet B}\,(\mathrm{LC}\bullet\text{右}) \qquad A \bullet B \Rightarrow C}{A, B \Rightarrow C}\,(\mathrm{LC1})$$

となり、$\Gamma \vdash_{LC} A, B \Rightarrow C$ が導かれる.

逆に $\Gamma \vdash_{LC} A, B \Rightarrow C$ と仮定すると (LC•左) より、

$$\dfrac{A, B \Rightarrow C}{A \bullet B \Rightarrow C}\,(\mathrm{LC}\bullet\text{左})$$

明らかに $\Gamma \vdash_{LC} A \bullet B \Rightarrow C$ となる.

(A1) $\leq_\Gamma$ は 反射律を持つことを示す. (LC0) より、$\Gamma \vdash_{LC} A \Rightarrow A$ よって、$A \leq_\Gamma A$ となる.

(A2) $\leq_\Gamma$ は 推移律を持つことを示す．$A \leq_\Gamma B$ かつ $B \leq_\Gamma C$ とすると定義より、$\Gamma \vdash_{LC} A \Rightarrow B$ かつ $\Gamma \vdash_{LC} B \Rightarrow C$ となり、

$$\frac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}\ \text{(LC1)}$$

となり、$\Gamma \vdash_{LC} A \Rightarrow C$ よって、$A \leq_\Gamma C$ となる．

(A3) $\leq_\Gamma$ は 反対称律を持つことを示す．$A \equiv_\Gamma B$ を $A \leq_\Gamma B$ かつ $B \leq_\Gamma A$ と定義したので明らか．

以上のことと、L 上の関係 $\leq$ の定義から $\leq$ が順序になることが分かる．

(A4) $\bullet$ は 結合律を持つことを示す．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow A \bullet B}\ (\text{LC}\bullet\text{右}) \quad C \Rightarrow C}{A, B, C \Rightarrow (A \bullet B) \bullet C}\ (\text{LC}\bullet\text{右})}{A, B \bullet C \Rightarrow (A \bullet B) \bullet C}\ (\text{LC}\bullet\text{左})}{A \bullet (B \bullet C) \Rightarrow (A \bullet B) \bullet C}\ (\text{LC}\bullet\text{左})$$

よって、$\Gamma \vdash_{LC} A \bullet (B \bullet C) \Rightarrow (A \bullet B) \bullet C$ となる．

(A5) $\bullet$ は 単調性を持つことを示す．$\Gamma \vdash_{LC} A \Rightarrow B$ かつ $\Gamma \vdash_{LC} C \Rightarrow D$ と仮定する．

$$\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow B \quad C \Rightarrow D}{A, C \Rightarrow B \bullet D}\ (\text{LC}\bullet\text{右})}{A \bullet C \Rightarrow B \bullet D}\ (\text{LC}\bullet\text{左})$$

よって、$\Gamma \vdash_{LC} A \bullet C \Rightarrow B \bullet D$ となる．

(A6) $\Gamma \vdash_{LC} A \bullet B \Rightarrow C \iff \Gamma \vdash_{LC} B \Rightarrow A \backslash C$ となることを示す

まず最初に $\Gamma \vdash_{LC} A \bullet B \Rightarrow C$ と仮定する．$(*)$ より、$\Gamma \vdash_{LC} A, B \Rightarrow C$ となる．ここで、

$$\frac{A, B \Rightarrow C}{B \Rightarrow A \backslash C}\ (\text{LC}\backslash\text{右})$$

よって、$\Gamma \vdash_{LC} B \Rightarrow A \backslash C$

逆に $\Gamma \vdash_{LC} B \Rightarrow A \backslash C$ と仮定する．$\bullet$ の単調性より、$\Gamma \vdash_{LC} A \bullet B \Rightarrow A \bullet (A \backslash C)$ となる．ここで、

$$\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A \quad C \Rightarrow C}{A, (A \backslash C) \Rightarrow C}\ (\text{LC}\backslash\text{左})}{A \bullet (A \backslash C) \Rightarrow C}\ (\text{LC}\bullet\text{左})$$

よって、$\Gamma \vdash_{LC} A \bullet (A \backslash C) \Rightarrow C$ $\Gamma \vdash_{LC} A \bullet B \Rightarrow A \bullet (A \backslash C)$

$$\frac{A \bullet B \Rightarrow A \bullet (A \backslash C) \quad A \bullet (A \backslash C) \Rightarrow C}{A \bullet B \Rightarrow C}\ \text{(LC1)}$$

よって、$\Gamma \vdash_{LC} A \bullet B \Rightarrow C \iff \Gamma \vdash_{LC} B \Rightarrow A \backslash C$ を示せた．

(A7) $\Gamma \vdash_{LC} A \bullet B \Rightarrow C \iff \Gamma \vdash_{LC} B \Rightarrow C/A$ は (A6) と同様にして示せる.

以上の (A4) から (A7) と L 上の $\bullet, \backslash, /$ の定義より $\mathbf{L}_\Gamma$ も (A4) から (A7) を満たすことがわかる. よって $\mathbf{L}_\Gamma$ は順序剰余半群となることを示せた. □

5.4 K モデル

K $\subseteq$ RS に対して、$\langle \mathbf{G}, v \rangle$ が以下の (i),(ii) を満たすとき、Lambek 計算に対する K モデル (K-model) であるという.

(i) $\mathbf{G} \in$ K

(ii) v は $\mathbf{F}$ から $\mathbf{G}$ への準同型写像となる. ただし $\mathbf{F}$ は Lambek 計算の言語代数 $\langle Form_{LC}, \bullet, \backslash, / \rangle$ とする. つまり $\mathbf{G} = \langle G, \bullet, \backslash, /, \leq \rangle$, としたとき、$v : Form_{LC} \longrightarrow G$ が任意の $A, B \in Form_{LC}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
v(A \bullet B) &= v(A) \bullet v(B) \\
v(A \backslash B) &= v(A) \backslash v(B) \\
v(A/B) &= v(A)/v(B)
\end{aligned}
$$

となっている.

Lambek 計算に対する K モデル全体の集合を M(K) と表す.

φ を $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0$ の形の Lambek 計算の式とし、Γ を式の集合とする. $\mathcal{M} = \langle \mathbf{G}, v \rangle \in M$(K) としたとき、このとき以下のように K モデルに対する Lambek 計算の式についての意味を定義する.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \varphi &\iff v((A_1 \bullet A_2) \ldots \bullet A_n)) \leq v(A_0) \qquad (\leq \text{ は } G \text{ 上の二項関係}) \\
\mathcal{M} \models \Gamma &\iff \text{任意の} \psi \in \Gamma \text{に対して } \mathcal{M} \models \psi \\
\Gamma \models_K \varphi &\iff \mathcal{M}' \models \Gamma \text{となるような任意の } \mathcal{M}' \in M(\mathsf{K}) \text{ に対して } \mathcal{M}' \models \psi
\end{aligned}
$$

$\Gamma \models_K \varphi$ は 式 φ がモデル K での Γ からの論理的帰結であることを意味している.

5.5 ORS モデルに関する Lambek 計算の完全性

Lemma 5.5.1 Γ を式の集合とする. φ を Lambek 計算の任意の式とする. このとき、以下が成立する.

$$\Gamma \models_{ORS} \varphi \iff \Gamma \vdash_{LC} \varphi$$

Proof.

$\Gamma \models_{ORS} \varphi$ と仮定する. 任意の $B \in Form_{LC}$ に対して、

$$v(B) = B/{\equiv_\Gamma} \ \ (= \{A \in Form_{LC} \mid A \equiv_\Gamma B\})$$

と定義する.

Theorem5.3.1 より、$\langle L_\Gamma, v\rangle \in M(\mathsf{ORS})$ となっている. $\mathcal{M} = \langle L_\Gamma, v\rangle$ とする.

ここで、任意の 式 $\psi = A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0$ をとり、$A = A_1 \bullet A_2 \bullet \cdots \bullet A_n$ とする.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \psi &\iff v(A) \leq_\Gamma v(A_0) \\
&\iff A/{\equiv_\Gamma} \leq_\Gamma A_0/{\equiv_\Gamma} \\
&\iff A \leq_\Gamma A_0 \\
&\iff \Gamma \vdash_{LC} A \Rightarrow A_0 \\
&\iff \Gamma \vdash_{LC} A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0 \\
&\iff \Gamma \vdash_{LC} \psi
\end{aligned}$$

Lambek 計算により証明可能の定義より、任意の $\psi \in \Gamma$ に対して $\Gamma \vdash_{LC} \psi$ であるから、上の結果とあわせて、

$$\begin{aligned}
\text{任意の}\psi \in \Gamma\text{に対して}\Gamma \vdash_{LC} \psi &\iff \text{任意の}\psi \in \Gamma\text{に対して}\ \mathcal{M} \models \psi \\
&\iff \mathcal{M} \models \Gamma
\end{aligned}$$

仮定より、$\mathcal{M}' \models \Gamma$ となるような任意の $\mathcal{M}' \in M(\mathsf{ORS})$ に対して $\mathcal{M} \models \varphi$ となっている. $\mathcal{M} \models \Gamma$ は示せているので、$\mathcal{M} \models \varphi$ がいえた. $\mathcal{M} \models \varphi \iff \Gamma \vdash_{LC} \varphi$ より $\Gamma \vdash_{LC} \varphi$ が示せた.

逆に $\Gamma \vdash_{LC} \varphi$ と仮定する. $\mathcal{M} \models \Gamma$ となるような任意の $\mathcal{M} \in M(\mathsf{ORS})$ をとってくる.

$\mathcal{M} \models \Gamma$ より、任意の $\psi \in \Gamma$ に対して $\mathcal{M} \models \psi$ がいえている. ここでもし $\mathcal{M} \models \varphi$ となっていれば $\Gamma \models_{ORS} \varphi$ がいえる. Definition5.1.1 より $\Gamma \vdash_{LC} \varphi$ となった場合を分けて考える.

(i) のとき $\varphi \in \Gamma$ かつ $\mathcal{M} \models \Gamma$ より、$\mathcal{M} \models \varphi$

(ii) のとき φ が $A \Rightarrow A$ の形をしているので、(A1) より、$v(A) \leq v(A)$ よって定義より、$\mathcal{M} \models A \Rightarrow A$ よって、$\mathcal{M} \models \varphi$

(iii) のとき

(LC1) 推論規則 I が (LC1) の場合. $\varphi = A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ とする.

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0 \quad A_0 \Rightarrow B}{A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B} \text{(LC1)}$$

帰納法の仮定より、

$\Gamma \vdash_{LC} A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0$ ならば $\mathcal{M} \models A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$
$\Gamma \vdash_{LC} A_0 \Rightarrow B$ ならば $\mathcal{M} \models A_0 \Rightarrow B$

よって、

$v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n) \leq v(A_0)$ かつ $v(A_0) \leq v(B)$

(A2) より

$$v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n \leq v(B)$$

よって

$$\mathcal{M} \models A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$$

すなわち $\mathcal{M} \models \varphi$

(LC•右) 推論規則 I が (LC•右) の場合. $\varphi = A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \Rightarrow A \bullet B$ とする.

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0 \quad B_1, \ldots, B_m \Rightarrow B_0}{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \Rightarrow A \bullet B} \text{(LC} \bullet \text{右)}$$

帰納法の仮定より、

$v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n) \leq v(A_0)$ かつ $v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m) \leq v(B_0)$

(A5) より、

$v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n) \bullet v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m) \leq v(A_0) \bullet v(B_0)$

v は準同型写像だから、

$$(\cdots(v(A_1) \bullet v(A_2)) \bullet \cdots) \bullet v(A_n)) \bullet (\cdots(v(B_1) \bullet v(B_2)) \bullet \cdots) \bullet v(B_m)) \leq v(A_0 \bullet B_0)$$

(A4) より、

$(\cdots(v(A_1) \bullet v(A_2)) \bullet \cdots) \bullet v(A_n)) \bullet v(B_1)) \bullet \cdots) \bullet v(B_m)) \leq v(A_0 \bullet B_0)$

v は準同型写像だから、

$v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet B_1) \bullet \cdots) \bullet B_m) \leq v(A_0 \bullet B_0)$

よって、

$\mathcal{M} \models A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \Rightarrow A_0 \bullet B_0$

すなわち $\mathcal{M} \models \varphi$

(LC●左) 推論規則 I が (LC●左) の場合. $\varphi = A_1, \ldots, A_n, A \bullet B, B_1, \ldots, B_n \Rightarrow C$ とする.

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, A \bullet B, B_1, \ldots, B_m \Rightarrow C}{A_1, \ldots, A_n, A, B, B_1, \ldots, B_m \Rightarrow C} \ (\mathrm{LC} \bullet \text{左})$$

帰納法の仮定より、

$$v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n) \bullet A) \bullet B) \bullet B_1) \bullet \cdots) \bullet B_m) \leq v(C)$$

v は準同型写像でありさらに (A4) を適用することで次式が得られる.

$$v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n) \bullet (A \bullet B) \bullet B_1) \bullet \cdots) \bullet B_m) \leq v(C)$$

よって、

$$\mathcal{M} \models A_1, \ldots, A_n, (A \bullet B), B_1, \ldots, B_m \Rightarrow C$$

すなわち $\mathcal{M} \models \varphi$

(LC\ 右) 推論規則 I が (LC\ 右) の場合. $\varphi = A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A \backslash B$ とする.

$$\frac{A, A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B}{A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A \backslash B} \ (\mathrm{LC}\backslash \text{右})$$

帰納法の仮定より、

$$v(\cdots(A \bullet A_1) \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n \leq v(B)$$

v は準同型写像でありさらに (A6) を適用することで次式が得られる.

$$v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n \leq v(A \backslash B)$$

よって、

$$\mathcal{M} \models A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A \backslash B$$

すなわち $\mathcal{M} \models \varphi$

(LC\ 左) 推論規則 I が (LC\ 左) の場合. $\varphi = B_1, \ldots, B_m, A_1, \ldots, A_n, A \backslash B, C_1, \ldots, C_l \Rightarrow C$ とする.

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A \quad B_1, \ldots, B_m, B, C_1, \ldots, C_l \Rightarrow C}{B_1, \ldots, B_m, A_1, \ldots, A_n, A \backslash B, C_1, \ldots, C_l \Rightarrow C} \ (\mathrm{LC}\backslash \text{左})$$

帰納法の仮定より、

$$v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n) \leq v(A) \quad \text{かつ}$$
$$v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m) \bullet B) \bullet C_1) \bullet \cdots) \bullet C_l) \leq v(C)$$

(A1) より、

$$v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m) \leq v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m)$$

(A5) より、

$v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m) \bullet v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n) \leq v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m) \bullet v(A)$

(A1) より、

$v(A\backslash B) \bullet v(\cdots(C_1 \bullet C_2) \bullet \cdots) \bullet C_l) \leq v(A\backslash B) \bullet v(\cdots(C_1 \bullet C_2) \bullet \cdots) \bullet C_l)$

(A5) より、

$v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m) \bullet v(\cdots(A_1 \bullet A_2) \bullet \cdots) \bullet A_n) \bullet v(A\backslash B) \bullet v(\cdots(C_1 \bullet C_2) \bullet \cdots) \bullet C_l) \leq v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m) \bullet v(A) \bullet v(A\backslash B) \bullet v(\cdots(C_1 \bullet C_2) \bullet \cdots) \bullet C_l)$

ここで $v(A)\backslash v(B) \leq v(A)\backslash v(B)$ より、(A6) を適用して、$v(A) \bullet (v(A)\backslash v(B)) \leq v(B)$

$v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m) \bullet v(A) \bullet v(A\backslash B) \bullet v(\cdots(C_1 \bullet C_2) \bullet \cdots) \bullet C_l) \leq v(\cdots(B_1 \bullet B_2) \bullet \cdots) \bullet B_m) \bullet v(B) \bullet v(\cdots(C_1 \bullet C_2) \bullet \cdots) \bullet C_l)$

よって、

$\mathcal{M} \models B_1, \ldots, B_m, A_1, \ldots, A_n, A\backslash B, C_1, \ldots, C_l \Rightarrow C$

すなわち $\mathcal{M} \models \varphi$

(LC/左),(LC/右) については、(LC\ 左), (LC\ 右) と同様な手順で示すことができる. これですべての推論規則について示すことができた. よって、$\Gamma \vdash_{LC} \varphi$ と仮定すると、$\mathcal{M} \models \varphi$ となる.

□

5.6 Lambek 計算の関係意味論

W を空でない推移的な二項関係とし、v を原子記号全体の集合 P から W の巾集合 $\mathcal{P}(W)$ への写像とする. このとき、その対である $\langle W, v\rangle$ を Lambek 計算の関係モデル (relational model for LC) という.

Definition 5.6.1 [Relational semantics]

$\mathbf{W} = \langle W, v\rangle$ を Lambek 計算の関係モデルとする. ここで、任意の $x = \langle a, b\rangle \in W$($\mathbf{W}$ の点 x という.) をとる. 関係モデル $\mathbf{W}$ の点 x が式 φ（または論理式 A）を充足することを $\mathbf{W}, x \Vdash \varphi$ （または $\mathbf{W}, x \Vdash A$）と書き、以下に充足関係 (satisfaction relation) を帰納的に定義する. $A, B, A_0, \ldots, A_n$ を Lambek 計算の論理式とする. （ただし n は正整数）

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W}, x \Vdash p \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in v(p) \qquad (p \in P \text{ のとき}) \\
\mathbf{W}, \langle a, b\rangle \Vdash A \bullet B \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{ある } c \text{ が存在して、} \langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle \in W \text{ かつ} \\
& \qquad\quad \mathbf{W}, \langle a, c\rangle \Vdash A \text{ かつ } \mathbf{W}, \langle c, b\rangle \Vdash B \\
\mathbf{W}, \langle a, b\rangle \Vdash A \backslash B \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle c, a\rangle \in W \text{ となるような任意の } c \text{ に対して、} \\
& \qquad\quad \mathbf{W}, \langle c, a\rangle \Vdash A \text{ ならば } \mathbf{W}, \langle c, b\rangle \Vdash B \\
\mathbf{W}, \langle a, b\rangle \Vdash A / B \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle b, c\rangle \in W \text{ となるような任意の } c \text{ に対して、} \\
& \qquad\quad \mathbf{W}, \langle b, c\rangle \Vdash B \text{ ならば } \mathbf{W}, \langle a, c\rangle \Vdash A \\
\mathbf{W}, x \Vdash (A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{W}, x \Vdash (\cdots(A_1 \bullet A_2) \ldots \bullet) A_n) \text{ ならば } \mathbf{W}, x \Vdash A_0
\end{aligned}
$$

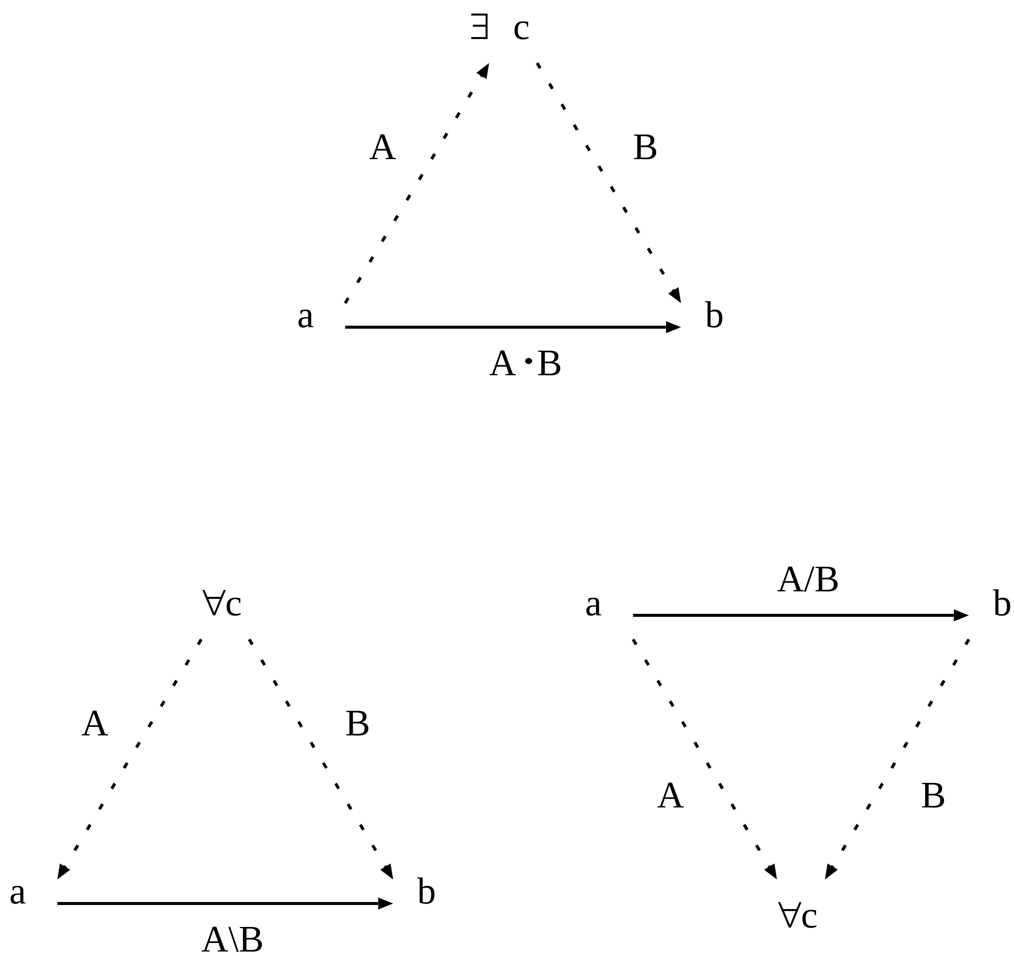

図 5.2: 関係モデル

$\mathbf{W}$ を Lambek 計算の関係モデルとし、φ を Lambek 計算の式とし、Γ を Lambek 計算の式の集合とする．このとき以下のように関係モデルに対する Lambek 計算の意味を定義する．

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{W} \models \varphi & \iff & \text{任意の } x \in W \text{ に対して、} \mathbf{W}, x \Vdash \varphi \\
\mathbf{W} \models \Gamma & \iff & \text{任意の} \psi \in \Gamma \text{に対して、} \mathbf{W} \models \psi \\
\models_R \varphi & \iff & \text{任意の関係モデル } \mathbf{W} \text{ に対して、} \mathbf{W} \models \varphi \\
\Gamma \models_R \varphi & \iff & \text{任意の関係モデル } \mathbf{W} \text{ に対して、} \mathbf{W} \models \Gamma \text{ならば} \mathbf{W} \models \varphi
\end{array}$$

$\mathbf{W} \models \varphi$ は、式 φ が関係モデル $\mathbf{W}$ で真 (true) であるということを意味している．$\mathbf{W} \models \Gamma$ は、式の集合 Γ が関係モデル $\mathbf{W}$ で真であるということを意味している．$\models_R \varphi$ は、式 φ が関係意味論に関して恒真 (valid) であるということを意味している．$\Gamma \models_R \varphi$ は、式 φ が関係意味論での Γ からの論理的帰結 (relational semantics consequence) であることを意味している．

5.7 表現可能な関係構造

Definition 5.7.1 [Representable relational structure,RRS]

W を二項関係の集合とし、$R, S \subseteq W$ とする．W に応じて左剰余 $\backslash_W$ と右剰余 $/_W$ および合成 $\circ_W$ を以下に定義する．

$$\begin{array}{rcl}
R \backslash_W S & = & \{\langle x, y\rangle \in W \mid \text{任意の } z \text{ に対して、} \langle z, x\rangle \in R \text{ ならば } \langle z, y\rangle \in S\} \\
R /_W S & = & \{\langle x, y\rangle \in W \mid \text{任意の } z \text{ に対して、} \langle y, z\rangle \in S \text{ ならば } \langle x, z\rangle \in R\} \\
R \circ_W S & = & \{\langle x, y\rangle \in W \mid \text{ある } z \text{ が存在して、} \langle x, z\rangle \in R \text{ かつ } \langle z, y\rangle \in S\}
\end{array}$$

代数が二項関係の集合を要素として持ち、演算として $\backslash_W, /_W, \circ_W$ を持ち、順序として集合論的な包含関係を持っているときその代数を表現可能 (representable) であるという．以下により詳しく示す．

代数 $\mathbf{A} = \langle A, \bullet, \backslash, /, \subseteq\rangle$ が以下の (i) から (iv) を満たすとき、表現可能な関係構造 (representable relational structure）であるという．

(i) A は 二項関係の集合

(ii) $\subseteq$ は A 上の集合論的な包含関係

(iii) $\bullet, \backslash, /$ は A 上の二項演算

(iv) $W = \bigcup A \quad (= \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R$ となるような $R \in A$ が存在する $\})$

とすると、 $\bullet, \backslash, /$ は、$\circ_W, \backslash_W, /_W$ と同一である．

混同しないときは、$\circ_W, \backslash_W, /_W$ を単に $\circ, \backslash, /$ と略して書く．また、表現可能な関係構造全体のなす代数の族を RRS と表す．

上の定義の W は推移的である．なぜなら $\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle \in W$ とすると $\circ_W$ の定義より $\langle a, c\rangle \in W \circ_W W$ となる．A は $\circ_W$ について閉じているから $W \circ_W W \in A$ よって $W \circ_W W \subseteq W$ となり $\langle a, c\rangle \in W$ となる．

また $\mathbf{A} = \langle A, \circ_V, \backslash_V, /_V, \subseteq\rangle$ が $A \subseteq \mathcal{P}(V)$ となるような任意の推移的な二項関係 V に対する代数であるとき V は $W = \bigcup A$ となる W と入れ替えることができる．

5.8 RRS モデルと関係モデル

Lemma 5.8.1 Γ を式の集合とする．φ を Lambek 計算の任意の式とする．このとき、以下が成立する．

$$\Gamma \models_{RRS} \varphi \iff \Gamma \models_R \varphi$$

Proof. まず最初に $\Gamma \models_R \varphi$ と仮定する．そして $\mathcal{M} \models \Gamma$ となるような 任意の $\mathcal{M} \in M(\mathsf{RRS})$ をとってくる．ここで $\mathcal{M} = \langle \mathbf{G}, v\rangle$ とすると、$\mathbf{G} \in$ RRS より、$W = \bigcup G$（このとき W は推移的な二項関係になる.）に対して、$\mathbf{G} = \langle G, \circ_W, \backslash_W, /_W, \subseteq, \rangle$ となり、また v は $\mathbf{F} = \langle Form_{LC}, \bullet, \backslash, /\rangle$ から $\mathbf{G}$ への準同型写像となる．したがって $\mathbf{W} = \langle W, v\lceil P\rangle$ が関係モデルとなる．ただし $v\lceil P$ は v を P に制限した写像とする．

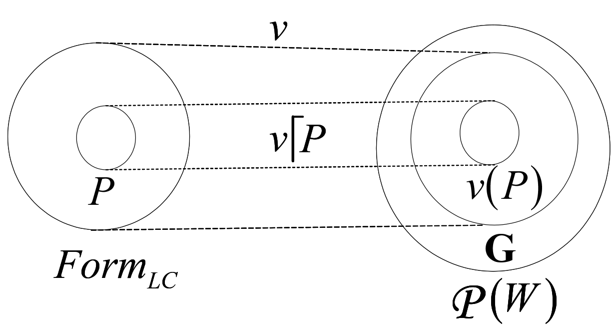

図 5.3: v を P に制限した写像 $v\lceil P$

ここで、任意の $A \in Form_{LC}$ に対して、

$$w(A) = \{\langle a, b\rangle \in W \mid \mathbf{W}, \langle a, b\rangle \Vdash A\}$$

と定義する．

　このとき Lambek 計算の関係モデルに関する意味の定義より、

$$\begin{aligned} w(A \bullet B) &= w(A) \circ w(B) \\ w(A \backslash B) &= w(A) \backslash_W w(B) \\ w(A / B) &= w(A) /_W w(B) \end{aligned}$$

を得る. ここでは $w(A \bullet B) = w(A) \circ w(B)$ のみを示す.

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \in w(A \bullet B) &\iff \mathbf{W}, \langle a, b \rangle \Vdash A \bullet B \\ &\iff \text{ある } c \text{ が存在して、} \\ &\qquad \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle \in W \text{ かつ } \mathbf{W}, \langle a, c \rangle \Vdash A, \mathbf{W}, \langle c, b \rangle \Vdash B \\ &\iff \text{ある } c \text{ が存在して、} \langle a, c \rangle \in w(A), \langle c, b \rangle \in w(B) \\ &\iff \langle a, b \rangle \in w(A) \circ w(B) \end{aligned}$$

よって、$w(A \bullet B) = w(A) \circ w(B)$ を示すことができた.
　任意の $A \in P$ に対しては、$\langle a, b \rangle \in v(A) \iff \mathbf{W}, \langle a, b \rangle \Vdash A \iff \langle a, b \rangle \in w(A)$ がいえるので、$w \lceil P = v \lceil P$ である. さらに v は準同型写像なので、$w = v$ がいえる.
　任意の Lambek 計算の 式 ψ に対して、

$$\mathcal{M} \models \psi \iff \mathbf{W} \models \psi$$

が成立することを示す. $\psi = A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0$ とする.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \psi &\iff v((A_1 \bullet A_2) \cdots \bullet A_n)) \subseteq v(A_0 \\ &\iff \text{任意の } x \in \bigcup G \text{ に対して、} x \in v((A_1 \bullet A_2) \cdots \bullet A_n)) \text{ ならば } x \in v(A_0) \\ &\iff \text{任意の } x \in W \text{ に対して、} x \in v((A_1 \bullet A_2) \cdots \bullet A_n)) \text{ ならば } x \in v(A_0) \\ &\iff \text{任意の } x \in W \text{ に対して、} x \in w((A_1 \bullet A_2) \cdots \bullet A_n)) \text{ ならば } x \in w(A_0) \\ &\iff \text{任意の } x \in W \text{ に対して、} \mathbf{W}, x \Vdash ((A_1 \bullet A_2) \cdot \bullet A_n)) \text{ ならば } \mathbf{W}, x \Vdash A_0 \\ &\iff \text{任意の } x \in W \text{ に対して、} \mathbf{W}, x \Vdash (A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0) \\ &\iff \mathbf{W} \models (A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A_0) \\ &\iff \mathbf{W} \models \psi \end{aligned}$$

　いま、$\mathcal{M} \models \Gamma$ を仮定しているから、

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \Gamma &\iff \text{任意の} \psi \in \Gamma \text{に対して、} \mathcal{M} \models \psi \\ &\iff \text{任意の} \psi \in \Gamma \text{に対して、} \mathbf{W} \models \psi \\ &\iff \mathbf{W} \models \Gamma \end{aligned}$$

となり $\mathbf{W} \models \Gamma$ がいえている. ここで仮定より $\Gamma \models_R \varphi$ であるから、定義より任意の関係モデル $\mathbf{W}'$ に対して、$\mathbf{W}' \models \Gamma$ ならば $\mathbf{W}' \models \psi$ がいえる. $\mathbf{W} \models \Gamma$ であるから $\mathbf{W} \models \psi$ と

なる. $\mathbf{W} \models \psi \iff \mathcal{M} \models \psi$ であったから、$\mathcal{M} \models \psi$ がいえた. すなわち、$\mathcal{M} \models \Gamma$ となるような 任意の $\mathcal{M} \in M(\mathsf{RRS})$ に対しては、$\mathcal{M} \models \psi$ となるのだから $\Gamma \models_{RRS} \varphi$ であることを示せた.

逆に、$\Gamma \models_{RRS} \varphi$ と仮定する. $\mathbf{W}$ を $\mathbf{W} \models \Gamma$ となるような任意の関係モデルとする. 上で示したことと同様に、$\mathcal{M} \models \psi \iff \mathbf{W} \models \psi$ がいえるから、やはり $\mathbf{W} \models \Gamma \iff \mathcal{M} \models \Gamma$ がいえる. ここで仮定より $\Gamma \models_{RRS} \varphi$ であるから、定義より $\mathcal{M}' \models \Gamma$ となるような任意の $\mathcal{M}' \in M(\mathsf{RRS})$ に対しては、$\mathcal{M}' \models \psi$ となる. $\mathcal{M} \models \Gamma$ であるから $\mathcal{M} \models \psi$ となる. さらに $\mathcal{M} \models \psi \iff \mathbf{W} \models \psi$ より、任意の関係モデル $\mathbf{W}$ に対して、$\mathbf{W} \models \Gamma$ ならば $\mathbf{W} \models \psi$ となることより $\Gamma \models_R \varphi$ であることを示せた. $\square$

5.9 関係意味論に関する表現定理

Theorem 5.9.1 ORS $= I(\mathsf{RRS})$ となる. つまり、$\mathbf{A}$ が表現可能構造のとき

$$\mathbf{A} \models \Sigma \iff \mathbf{A} \text{ が表現可能な関係構造}$$

となる.

Proof. $\mathbf{A}$ を表現可能な関係構造とする. 表現可能な関係構造の包含関係は明らかに順序である. (よって (A1) から (A3) は明らか.)

(A4) $\circ$ は A 上の半群演算であることを示す.

$$\begin{aligned}
(R \circ S) \circ T &= \{\langle x, y\rangle \mid \text{ある } z \text{ が存在して、} \langle x, z\rangle \in R \circ S \text{ かつ } \langle z, y\rangle \in T\} \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid \text{ある } z \text{ が存在して、} \\
&\quad (\text{ある } t \text{ が存在して、} \langle x, t\rangle \in R \text{ かつ } \langle t, z\rangle \in S) \text{ かつ } \langle z, y\rangle \in T\} \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid \text{ある } z, t \text{ が存在して、} \langle x, t\rangle \in R \text{ かつ } \langle t, z\rangle \in S \text{ かつ } \langle z, y\rangle \in T\} \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid \text{ある } t \text{ が存在して、} \\
&\quad \langle x, t\rangle \in R \text{ かつ } (\text{ある } z \text{ が存在して、} \langle t, z\rangle \in S \text{ かつ } \langle z, y\rangle \in T)\} \\
&= \{\langle x, y\rangle \mid \text{ある } t \text{ が存在して、} \langle x, t\rangle \in R \text{ かつ } \langle t, y\rangle \in S \circ T\} \\
&= R \circ (S \circ T)
\end{aligned}$$

(A5) $\circ$ は $\subseteq$ に関して単調であることを示す. $R \subseteq S$ かつ $T \subseteq Q$ とする.

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in R \circ T &\iff \text{ある } z \text{ が存在して、} \langle x, z\rangle \in R \text{ かつ } \langle z, y\rangle \in T \\
&\Longrightarrow \text{ある } z \text{ が存在して、} \langle x, z\rangle \in S \text{ かつ } \langle z, y\rangle \in Q \\
&\iff \langle x, y\rangle \in S \circ Q
\end{aligned}$$

よって、$R \circ T \subseteq S \circ Q$ となる.

(A6) $\backslash$ は $\circ$ の左剰余であることを示す．$R \circ S \subseteq T$ と仮定する．任意の $\langle x, y \rangle \in S$ をとる．ここで $\langle t, x \rangle \in R$ となるような任意の t をとる．$\langle t, x \rangle \in R$ かつ $\langle x, y \rangle \in S$ より $\langle t, y \rangle \in R \circ S$ となる．よって、$\langle t, y \rangle \in T$ となる．つまり $\langle t, x \rangle \in R$ となるような任意の t をとると $\langle t, y \rangle \in T$ となることから $\langle x, y \rangle \in R \backslash T$ となる．よって $S \subseteq R \backslash T$ となる．

逆に $S \subseteq R \backslash T$ とする．任意の $\langle x, y \rangle \in R \circ S$ をとる．すると、ある z が存在して、$\langle x, z \rangle \in R$ かつ $\langle z, y \rangle \in S$ となっている．$\langle z, y \rangle \in S$ より $\langle z, y \rangle \in R \backslash T$ となる．つまり $\langle k, z \rangle \in R$ となるような任意の k について $\langle k, y \rangle \in T$ となっている．そして $\langle x, z \rangle \in R$ となっていることから $\langle x, y \rangle \in T$ となる．よって $R \circ S \subseteq T$ となる．

(A7) $/$ は $\circ$ の右剰余である．(A6) と同様に示すことができる．

これで $\mathbf{A}$ を表現可能な関係構造としたとき、$\mathbf{A} \models \Sigma$ となっていることを示すことができた．

逆に $\mathbf{A}$ が表現可能構造 かつ $\mathbf{A} \models \Sigma$ と仮定する．以下に方向付グラフを定義する．α を方向付グラフを形成する過程のステップ数とする．ステップ α でのグラフを $\mathbf{G}_\alpha = \langle U_\alpha, E_\alpha, l_\alpha \rangle$ とする．ここで、U_α をステップ α での節の集合とし、$E_\alpha \subseteq U_\alpha \times U_\alpha$ をステップ α での辺の集合とする．さらに、l_α を辺の集合 E_α から $\mathbf{A}$ の universe A へのラベル付け写像とする．

グラフを形成していく各ステップで以下の (I),(II) が成立していることを確かめていく．

(I) (i) E_α は非反射的である. つまり、任意の $x \in U_\alpha$ に対し $\langle x, x \rangle \notin E_\alpha$

(ii) E_α は推移的である. つまり、任意の $x, y, z \in U_\alpha$ に対し $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in E_\alpha$ ならば $\langle x, z \rangle \in E_\alpha$

(II) 任意の $x, y, z \in U_\alpha$ に対し $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in E_\alpha$ ならば $l_\alpha \langle x, z \rangle \leq l_\alpha \langle x, y \rangle \bullet l_\alpha \langle y, z \rangle$

$|A| \leq \kappa$ となるような、無限濃度の κ を選ぶ．V を濃度 κ の集合とする．このとき以下の性質 $(*)$ を満たすような、κ から $A^3 \times V^2 \times 3$ への写像 σ が存在する．

$(*)$ 任意の $\langle a, b, c, x, y, i \rangle \in A^3 \times V^2 \times 3$ と任意の $\lambda < \kappa$ に対して、$\lambda \leq \nu$ かつ $\sigma(\nu + 1) = \langle a, b, c, x, y, i \rangle$ となるような $\nu < \kappa$ が存在する．

このような写像 σ の存在を示す．

f を κ から $A^3 \times V^2 \times 3 \times \kappa$ への全単射の写像とする．

ここで a, b, c, x, y, i を固定すると f は全単射だから $\gamma < \kappa$ に対して、ある $\delta < \kappa$ があって一意に $f(\gamma) = \langle a, b, c, x, y, i, \delta \rangle$ となる．

よって、任意の $\lambda < \kappa$ をとるとある $\delta' < \kappa$ があって $f(\gamma) = \langle a, b, c, x, y, i, \delta' \rangle$ となるような $\nu \geq \lambda$ が存在する．そこで $g : A^3 \times V^2 \times 3 \times \kappa \longrightarrow A^3 \times V^2 \times 3$ として、すべての $\lambda < \kappa$ に対し $\langle a, b, c, x, y, i, \lambda \rangle = \langle a, b, c, x, y, i \rangle$ とする．

ここで、$\nu < \kappa$ となる極限までの $\sigma(\nu)$ に対して、$\sigma(\nu+1) = g(f(\nu))$ と定義すると、このとき σ が要求された関数となる.

0 ステップ

A の任意の要素 c に対して $u_c, v_c \in V$ をとる. このときすべての要素が互いに異なるように二つずつ c に対応付けて $u_c, v_c \in V$ を選んでいく. (もちろん u_c, v_c も異なる要素である.) そして

$$\begin{aligned} U_0 &= \{u_c, v_c \mid c \in A\} \\ E_0 &= \{\langle u_c, v_c \rangle \mid c \in A\} \\ l_0 &= \{\langle \langle u_c, v_c \rangle, c \rangle \mid c \in A\} \end{aligned}$$

とすることにより $G_0 = \langle U_0, E_0, l_0 \rangle$ を定義する. このとき G_0 は (I),(II) を満たす.

(I) 任意の $c \in A$ に対して定義より $\langle u_c, u_c \rangle$ も $\langle v_c, v_c \rangle$ も E_0 の要素ではない. よって非反射律が成立する. 任意の $c, d \in A$ をとると定義より $\langle u_c, v_c \rangle, \langle u_d, v_d \rangle \in E_0$ かつ $v_c = u_d$ となることはない. よって推移律が成立する.

(II) (I) の推移律の証明と同様に前提が成り立たないので (II) 自身は成立する.

$\alpha + 1$ ステップ

このとき $\beta < \alpha + 1$ となる任意の β に対しては G_β が (I),(II) を満たすと仮定する. (超限帰納法の仮定) いま $\sigma(\alpha + 1) = \langle c, a, b, x, y, i \rangle$ となったとする. もし、$\langle x, y \rangle \notin E_\alpha$ または、$l_\alpha \langle x, y \rangle \neq c$ ならば $\alpha + 2$ ステップに進む. その他の場合、i の値に従って 3 通りに場合を分ける.

$i = 0$ のとき u を $V \setminus U_\alpha$ から選び、$G_{\alpha+1}$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} U_{\alpha+1} &= U_\alpha \cup \{u\} \\ E_{\alpha+1} &= E_\alpha \cup \{\langle u, p \rangle \mid \langle x, p \rangle \in E_\alpha\} \\ &\quad \cup \{\langle u, x \rangle\} \\ l_{\alpha+1} &= l_\alpha \cup \{\langle \langle u, p \rangle, a \bullet l_\alpha \langle x, p \rangle \rangle \mid \langle x, p \rangle \in E_\alpha\} \\ &\quad \cup \{\langle \langle u, x \rangle, a \rangle\} \end{aligned}$$

$i = 1$ v を $V \setminus U_\alpha$ から選び、$G_{\alpha+1}$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} U_{\alpha+1} &= U_\alpha \cup \{v\} \\ E_{\alpha+1} &= E_\alpha \cup \{\langle q, v \rangle \mid \langle q, v \rangle \in E_\alpha\} \end{aligned}$$

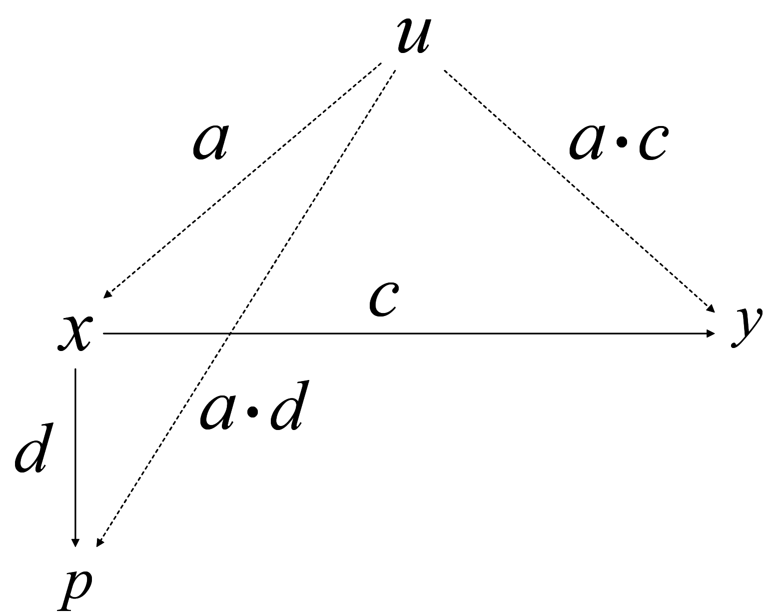

図 5.4: $i=0$

$$
\begin{aligned}
& \cup \{\langle y,v\rangle\} \\
l_{\alpha+1} &= l_\alpha \cup \{\langle\langle q,v\rangle, a \bullet l_\alpha\langle q,y\rangle\rangle \mid \langle q,y\rangle \in E_\alpha\} \\
& \cup \{\langle\langle y,v\rangle, a\rangle\}
\end{aligned}
$$

$i=2$ もし $c \not\leq a \bullet b$ となるなら $\alpha+2$ ステップへ進み、そうでない場合は z を $V \setminus U_\alpha$ から選び、$G_{\alpha+1}$ を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
U_{\alpha+1} &= U_\alpha \cup \{z\} \\
E_{\alpha+1} &= E_\alpha \cup \{\langle r,z\rangle \mid \langle r,x\rangle \in E_\alpha\} \\
& \cup \{\langle z,s\rangle \mid \langle y,s\rangle \in E_\alpha\} \\
& \cup \{\langle x,z\rangle\langle z,y\rangle\} \\
l_{\alpha+1} &= l_\alpha \cup \{\langle\langle x,z\rangle, a\rangle, \langle\langle z,y\rangle, b\rangle\} \\
& \cup \{\langle\langle r,z\rangle, l_\alpha\langle r,x\rangle \bullet a\rangle \mid \langle r,x\rangle \in E_\alpha\} \\
& \cup \{\langle\langle z,s\rangle, b \bullet l_\alpha\langle y,s\rangle\rangle \mid \langle y,s\rangle \in E_\alpha\}
\end{aligned}
$$

$i=0,1,2$ のそれぞれの場合について $G_{\alpha+1}$ が (I),(II) を満たすことを示す.

$i=0$ のとき

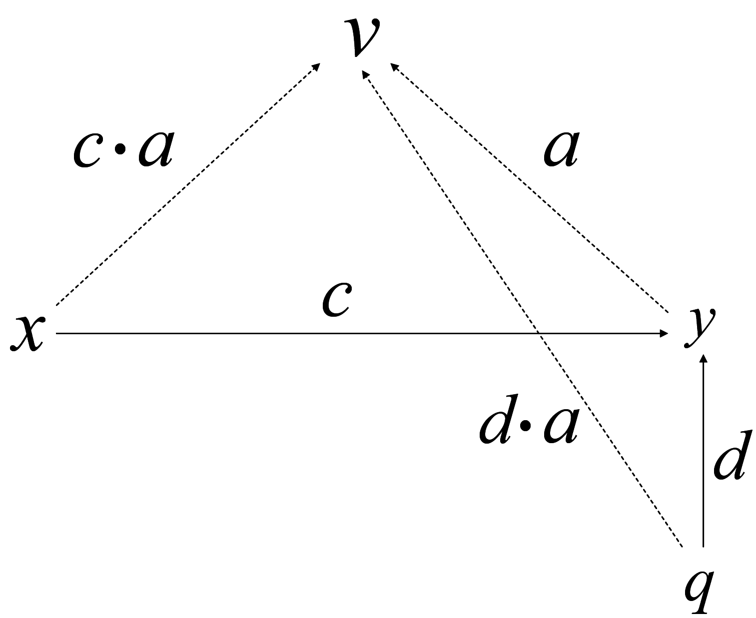

図 5.5: $i = 1$

(I) (i) 帰納法の仮定より E_α は非反射律を持つ．さらに $u \neq x$ かつ $\langle x, u \rangle \notin E_\alpha$ より $\langle u, u \rangle \notin E_{\alpha+1}$ となる．よって $E_{\alpha+1}$ は非反射律を持つ．

(ii) 新しい辺が加わっても推移律が保たれていることを示す．$p = x$ となり $\langle u, x \rangle$ が新しい辺として加わったとする．そしてこのとき $\langle u, x \rangle, \langle x, t \rangle \in E_{\alpha+1}$ となるような $t \in U_\alpha$ が存在するとしよう．$\langle x, t \rangle$ は新しい辺でないから $\langle x, t \rangle \in E_\alpha$ となり定義より $\langle u, t \rangle \in E_{\alpha+1}$ となる．

また、$\langle x, p \rangle \in E_\alpha$ となるような $p \in U_\alpha$ が存在し $\langle u, p \rangle$ が新しい辺として加わったとする．そしてこのとき $\langle u, p \rangle, \langle p, t \rangle \in E_{\alpha+1}$ となるような $t \in U_\alpha$ が存在するとしよう．$\langle p, t \rangle$ は新しい辺ではないから $\langle p, t \rangle \in E_\alpha$ となる．つまり $\langle x, p \rangle, \langle p, t \rangle \in E_\alpha$ となる．帰納法の仮定より推移律を適用すると $\langle x, t \rangle \in E_\alpha$ となる．すると新しい辺として $\langle u, t \rangle$ も $E_{\alpha+1}$ に加わる．よって $E_{\alpha+1}$ は推移律をもつ．

(II) $E_{\alpha+1}$ で現れた新しい辺の集合を

$$\begin{aligned} newedge_0 &= \{\langle u, p \rangle \mid p = x \text{ または } \langle x, p \rangle \in E_\alpha\} \\ &= \{\langle u, x \rangle, \langle u, p_1 \rangle, \langle u, p_2 \rangle, \ldots, \langle u, p_j \rangle, \ldots\} \end{aligned}$$

とする．さらに

$$\begin{aligned} a_j &= l_{\alpha+1}\langle x, p_j \rangle \in E_\alpha \\ c_j &= l_{\alpha+1}\langle u, p_j \rangle \notin E_\alpha \end{aligned}$$

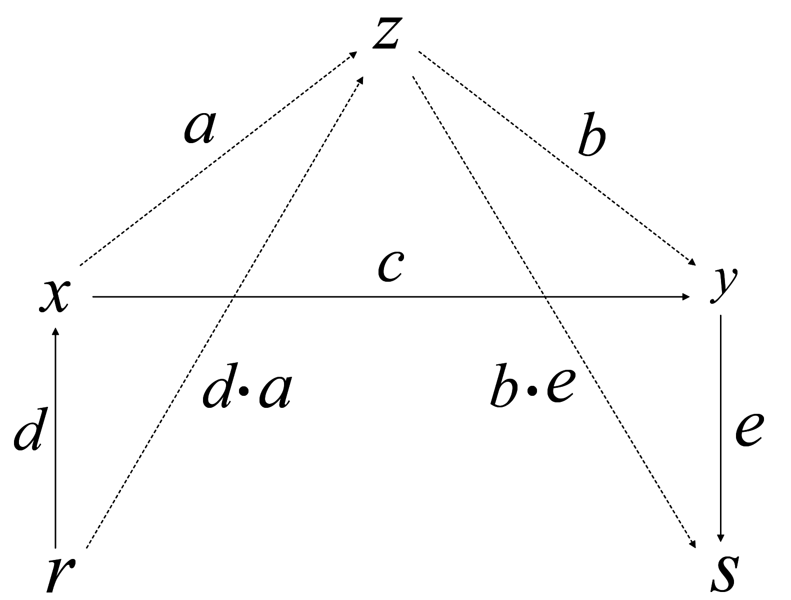

図 5.6: $i = 2$

とする.

ここで、$c_j \leq a \bullet a_j$ を示す. グラフの定義より任意の j に対して $c_j = a \bullet a_j$ となる. (A1) より $c_j \leq a \bullet a_j$ となる.

次に、$\langle p_j, p_{j+1} \rangle \in E_\alpha$ となる $p_j \in U_\alpha$ が存在するとき、$b_j = l_{\alpha+1}\langle p_j, p_{j+1} \rangle \in E_\alpha$ とする. このとき、$c_{j+1} \leq c_j \bullet b_j$ を示す. グラフの定義より $c_j = a \bullet a_j$ と $c_{j+1} = a \bullet a_{j+1}$ がいえる. 帰納法の定義より E_α に関しては (II) が成立するから、$a_{j+1} \leq a_j \bullet b_j$ となる. よって、

$$\begin{aligned} c_{j+1} &\leq a \bullet (a_j \bullet b_j) \\ &= (a \bullet a_j) \bullet b_j \end{aligned}$$

よって $c_{j+1} \leq c_j \bullet b_j$ となる. これで $G_{\alpha+1}$ で (II) が成立することが示せた.

$i = 1$ のとき $i = 0$ のときと同様に示せる.

$i = 2$ (I) $E_{\alpha+1}$ で現れた新しい辺の集合を

$$\begin{aligned} newedge_2 &= \{\langle r, z \rangle \mid \langle r, x \rangle \in E_\alpha \quad \text{or} \quad r = x\} \\ &\quad \cup \{\langle z, s \rangle \mid \langle y, s \rangle \in E_\alpha \quad \text{or} \quad s = y\} \end{aligned}$$

とする.

(i)$z \neq x, z \neq y$ かつ $\langle z, x \rangle, \langle z, y \rangle \notin E_\alpha$ より、$\langle z, z \rangle \notin E_{\alpha+1}$ となる. よって $E_{\alpha+1}$ は非反射律を持つ.

(ii) $r = x$ のときつまり、$\langle x, z\rangle \in newedge_2$ のとき、

ある $t \in U_\alpha$ が存在して $\langle x, z\rangle\langle z, t\rangle \in E_{\alpha+1}$ となっているとすると、$\langle z, t\rangle \in E_{\alpha+1}$ より、$\langle y, t\rangle \in E_\alpha$ または $t = y$ ここで $t = y$ とすると、$\langle x, y\rangle \in E_\alpha \subseteq E_{\alpha+1}$ となる. さらに $\langle y, t\rangle \in E_\alpha$ とする. $\langle x, y\rangle \in E_\alpha$ となっているから帰納法の仮定を適用して、$\langle x, t\rangle \in E_\alpha \subseteq E_{\alpha+1}$ となる.

ある $t \in U_\alpha$ が存在して $\langle t, x\rangle, \langle x, z\rangle \in E_{\alpha+1}$ とすると、$\langle t, x\rangle \notin newedge_2$ より、$\langle t, x\rangle \in E_\alpha$ となる. グラフの定義より、$\langle t, z\rangle \in E_{\alpha+1}$ となる.

ある $r \in U_\alpha$ が存在して $\langle r, x\rangle \in E_\alpha$ となっているとき、つまり $\langle r, z\rangle \in newedge_2$ のとき.

ある $t \in U_\alpha$ が存在して $\langle r, z\rangle, \langle z, t\rangle \in E_{\alpha+1}$ とすると、$\langle z, t\rangle \in E_{\alpha+1}$ より、$\langle y, t\rangle \in E_\alpha$ または $t = y$ となる. $t = y$ とすると、$\langle r, x\rangle, \langle x, y\rangle \in E_\alpha$ となり、帰納法の仮定より、$\langle r, y\rangle \in E_\alpha \subseteq E_{\alpha+1}$ さらに $\langle y, t\rangle \in E_\alpha$ とすると、$\langle r, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, t\rangle \in E_\alpha$ 帰納法の仮定より $\langle r, t\rangle \in E_\alpha \subseteq E_{\alpha+1}$

ある $t \in U_\alpha$ が存在して $\langle t, r\rangle, \langle r, z\rangle \in E_{\alpha+1}$ とすると、$\langle t, r\rangle, \langle r, x\rangle \in E_\alpha$ より、帰納法の仮定を適用して、$\langle t, x\rangle \in E_\alpha$ グラフの定義より、$\langle t, z\rangle \in E_{\alpha+1}$ $E_{\alpha+1}$ は推移律を持つ.

(II) $i = 0$ のときと同様に示せる.

極限ステップ

α を $\alpha < \kappa$ となる最大の順序数 (limit ordinal) とする. このとき、

$$U_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta \quad , \quad E_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta \quad , \quad l_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} l_\beta$$

とする.

$G = G_\kappa$ とする. つまり、

$$U = \bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha \quad , \quad E = \bigcup_{\alpha<\kappa} E_\alpha \quad , \quad l = \bigcup_{\alpha<\kappa} l_\alpha$$

明らかに G は (I),(II) を満たす.

ここで、表現関数 (representation function) rep を導入する. 任意の $c \in A$ に対して

$$\mathrm{rep}(c) = \{\langle u, v\rangle \mid l\langle u, v\rangle \leq c\}$$

とする. この rep が $\mathbf{A}$ から G の節 U 上の二項関係のなす構造への同型写像になっていることを示したい. (任意の $c \in A$ に対して $\mathrm{rep}(c)$ は明らかに U 上の二項関係となっている.)

まず最初に rep が $\leq$ に関して同型写像になっていることを示す. つまり、

$$a \leq b \iff \mathrm{rep}(c) \subseteq \mathrm{rep}(c)$$

となっていることを示す．$a \le b$ と仮定する．すると $l\langle u,v\rangle \le a$ ならば $l\langle u,v\rangle \le b$ となる．よって $\langle u,v\rangle \in \mathrm{rep}(a)$ ならば $\langle u,v\rangle \in \mathrm{rep}(b)$ となる．逆に $\mathrm{rep}(c) \subseteq \mathrm{rep}(c)$ と仮定する．rep の定義より、任意の $\langle u,v\rangle \in E$ に対して $l\langle u,v\rangle \le a$ ならば $l\langle u,v\rangle \le b$ となっている．step0 で $l\langle u_\alpha, v_\alpha\rangle = a$ としたから、

$$\begin{aligned} l\langle u_\alpha, v_\alpha\rangle \le a &\implies l\langle u_\alpha, v_\alpha\rangle \le b \\ &\implies a \le b \end{aligned}$$

rep が全単射であることを示す．$\mathrm{rep}(a) = \mathrm{rep}(b)$ と仮定する．すると、$\mathrm{rep}(a) \subseteq \mathrm{rep}(b)$ かつ $\mathrm{rep}(b) \subseteq \mathrm{rep}(a)$ となる．rep は $\le$ に関して同型写像になっているから、$a \le b$ かつ $b \le a$ となる.(A3) より $a = b$ となる．よって rep は単射である．

各演算子についても確かめる．

演算子 $\bullet$ について

$$\begin{aligned} \mathrm{rep}(a \bullet b) &= \{\langle u,v\rangle \mid l\langle u,v\rangle \le a \bullet b\} \\ &= \{\langle u,v\rangle \mid \text{ある } z \in U \text{ が存在して } l\langle u,z\rangle \le a \text{ かつ } l\langle z,v\rangle \le b\} \\ &= \{\langle u,z\rangle \mid l\langle u,z\rangle \le a\} \circ \{\langle z,v\rangle \mid l\langle z,v\rangle \le b\} \\ &= \mathrm{rep}(a) \circ \mathrm{rep}(b) \end{aligned}$$

演算子 $\backslash$ について

$$\begin{aligned} \mathrm{rep}(a\backslash b) &= \{\langle u,v\rangle \mid l\langle u,v\rangle \le a\backslash b\} \\ &= \{\langle u,v\rangle \mid a \bullet l\langle u,v\rangle \le b\} \\ &= \{\langle u,v\rangle \mid \text{任意の } z \in U \text{ に対して、} l\langle z,u\rangle \le a \text{ ならば } l\langle z,u\rangle \bullet l\langle u,v\rangle \le b\} \\ &= \{\langle u,v\rangle \mid \text{任意の } z \in U \text{ に対して、} l\langle z,u\rangle \le a \text{ ならば } l\langle z,v\rangle \le b\} \\ &= \mathrm{rep}(a)\backslash\mathrm{rep}(b) \end{aligned}$$

演算子 / について

$$\begin{aligned} \mathrm{rep}(b/a) &= \{\langle u,v\rangle \mid l\langle u,v\rangle \le b/a\} \\ &= \{\langle u,v\rangle \mid l\langle u,v\rangle \bullet a \le b\} \\ &= \{\langle u,v\rangle \mid \text{任意の } z \in U \text{ に対して、} l\langle u,z\rangle \le a \text{ ならば } l\langle u,v\rangle \bullet l\langle u,z\rangle \le b\} \\ &= \{\langle u,v\rangle \mid \text{任意の } z \in U \text{ に対して、} l\langle u,z\rangle \le a \text{ ならば } l\langle u,z\rangle \le b\} \\ &= \mathrm{rep}(b)/\mathrm{rep}(a) \end{aligned}$$

よって以上のことから ORS $= I$(RRS) であることが証明できた．　□

5.10 関係意味論に関する Lambek 計算の強い完全性定理

この章の目標は次の定理の証明を与えることである.

Theorem 5.10.1 [関係意味論に関する Lambek 計算の強い完全性定理] 任意の式の集合 Γ と任意の式 φ に対して以下の同値関係が成立する.

$$\Gamma \vdash_{LC} \varphi \iff \Gamma \models_R \varphi$$

Proof. Lemma5.5.1 と Lemma5.8.1 および Theorem5.9.1 の結果より、

$$\Gamma \vdash_{LC} \varphi \iff \Gamma \models_{ORS} \varphi \iff \Gamma \models_{RRS} \varphi \iff \Gamma \models_R \varphi$$

となる □

章頭で登場した図を再び紹介する.

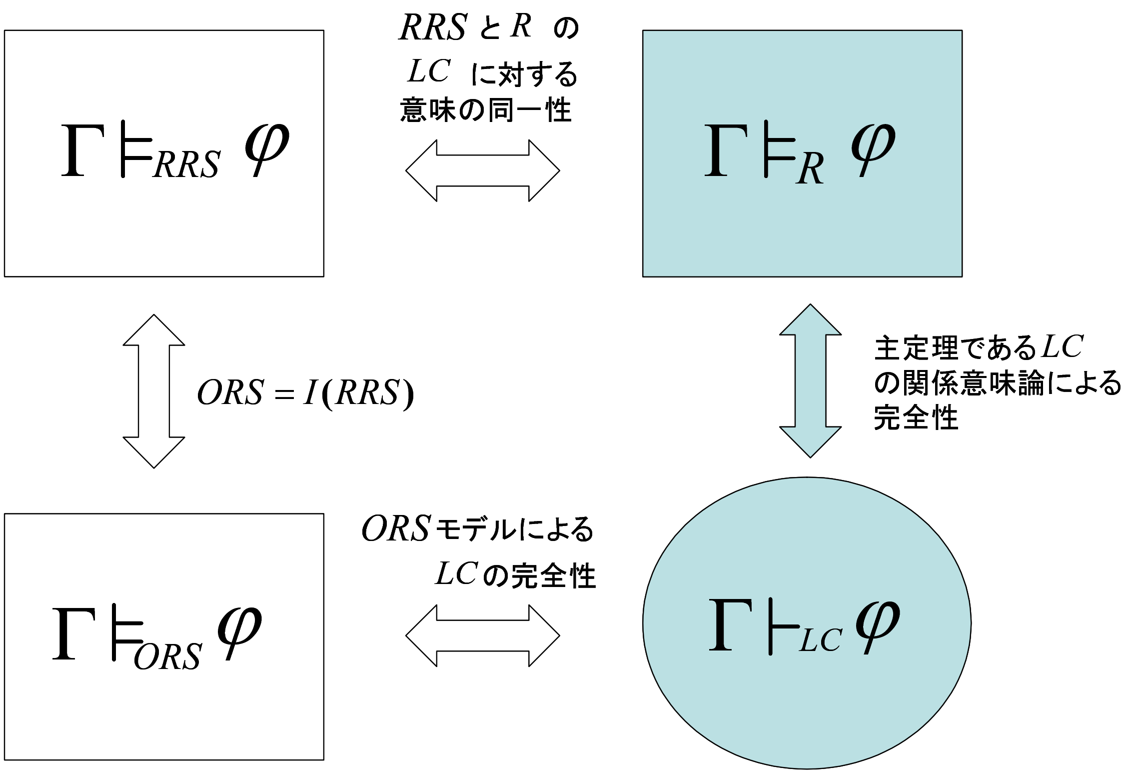

図 5.7: Lambek 計算の関係意味論による完全性定理

上で述べた強い完全性定理で、$\Gamma = \emptyset$ のときに関係意味論関する弱い完全性定理という．（つまり $\vdash_{LC} \varphi \iff \models_R \varphi$ となる.）
この定理 5.10.1 から次の重要な結果が導かれる.

Corollary 5.10.1 [コンパクト性定理] 任意の式の集合 Γ と任意の式 φ に対して以下が成立する.

もし $\Gamma \models_R \varphi$ ならば、ある有限な部分集合 $\Lambda \subseteq \Gamma$ があって $\Lambda \models_R \varphi$ となる.

Proof. $\Gamma \models_R \varphi$ と仮定すると Theorem5.10.1 より $\Gamma \vdash_{LC} \varphi$ となる. このとき Lambek 計算での証明可能性の定義より、ある有限な部分集合 $\Lambda \subseteq \Gamma$ があって $\Lambda \vdash_{LC} \varphi$ となる. さらに再び 5.10.1 を適用すると $\Lambda \models_R \varphi$ が得られる. □

第 6 章　結論

第 4 章より

(i) 束順序群が剰余束となることを証明できた.

(ii) 束順序可換群の有界可換剰余束への埋め込み定理を証明できた.

第 5 章より

関係意味論に関する Lambek 計算の強い完全性を証明することができた.

謝辞

本研究に多大なご指導をして頂いた小野寛晰教授、石原哉教授、 Kowalski Tomasz 助手浜野正浩助手ならびに小野研究室の皆様に深く感謝致します.

参考文献

[1] H. Andŕeka and S. Mikulás, Lambek calculus and its relational semantics : completeness and incompleteness, *Journal of Logic, Language, and Information 3 (1994)pp.1-37.*

[2] K. Blount, On the structure of residuated lattices, *Ph.D thesis, Vandenbilt University*, 1999.

[3] S. Burris and H. P. Sankappanavar, A Course in Universal Algebra, 2000.

[4] P. Jipsen and C. Tsinakis, A survey of residuated lattice, Ordered Algebraic Structures,ed. by J.Martinez,Kluwer Academic Publishuers, 2002,19-56

[5] V. M. Kopytov and N. Ya. Medvedev, The Theory of Lattice-Ordered Groups, *Kluwer Academic Publishers*, 1994.

[6] H. Ono, Logics without contraction rule and residuated lattice I, to appear, 2001.

[7] C. J. van Alten, On the categorical equivalence of lattice-ordered groups cones, draft, 2001.