Title	A topological approach to modal logics
Author(s)	大下, 健史
Citation	
Issue Date	2003-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1698
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 修士

A topological approach to modal logics

大下 健史 (110021)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2003 年 2 月 18 日

キーワード: 位相的解釈, トポロジカルバイシミュレーション, 様相論理 S4, 完全性, 決定可能性.

1 背景

様相論理における位相空間を用いた解釈は, 古くから研究が行なわれてきている. 特に, *Tarski* 等により注目されてきた様相演算子 $\Box$ の解釈として集合の開核演算子を対応させることができるというものがある. そして, (性質がよく知られている) 位相空間上での完全性などの研究が行なわれるようになってきている. その結果の例として, カントル空間や実数上, ユークリッド空間上での完全性がそれぞれ或る様相論理において導かれている.

また, 我々が日常行なうような近い概念の関係にあるものは, 同じものとして扱ってもいいという考え方があり, 位相空間では, 近いという概念に相当する近傍というものがある. この点において, 位相空間の近傍による近さの概念がどの様に論理的な性質へと関わっているのかを明確にすることは非常に興味深いことである.

本研究では, $\Box$ を開核演算として捉える位相モデルや, 点と集合とを同時に扱うことができる様な部分集合空間論理とその完全性, 決定性について述べ, それらに関連し考察を試みる.

2 位相モデル

様相論理 S4 における意味論は位相モデルと呼ばれるものを用いている. 位相モデルとは, $\langle X, O, \nu \rangle$ のような 3 つの組で表され, $\langle X, O \rangle$ が位相空間, ν が付値であるようなものをいう.

topo-bisimulation とは, 2 つの位相モデル間における論理式の意味を変えない X と X' 上の関係であるが, これは以下のように定義されるものである.

$\langle X, O, \nu \rangle$, $\langle X', O', \nu' \rangle$ を位相モデルとする. X と X' 上の空でない関係 $\rightleftharpoons \subseteq X \times X'$ が *topo-bisimulation* であるとは, 次の性質を満たすことを言う. $x \rightleftharpoons x'$ ならば,

(i) $x \in \nu(P) \Leftrightarrow x' \in \nu'(P)$

(ii) $x \in u \in O$ ならば, 或る $u' \in O'$ が存在し, $x' \in u'$ であり,
任意の $y' \in u'$ に対し 或る $y \in u$ が存在し $y \rightleftharpoons y'$ を満たす.

(iii) $x' \in u' \in O'$ ならば, 或る $u \in O$ が存在し, $x \in u$ であり,
任意の $y \in u$ に対し 或る $y' \in u'$ が存在し $y \rightleftharpoons y'$ を満たす.

条件 (ii) を forth condition といい, 条件 (iii) を back condition という.

S4 が カントル空間や実数上で完全であることは, この topo-bisimulation を用いて *Aiello*[1] により示されたが, この結果の一般系となっている 「S4 はどんな自己稠密であり可分な距離空間においてでも完全」であることが 1944 年 *Mckinsey* や *Tarski* によりオリジナルの証明がなされている.

3 部分集合空間論理と完全性

部分集合空間論理という様相論理は, 2 つの様相演算子 $\Box$ と K をもつ論理体系であり, 有限個の公理により記されている. この論理体系の意味論には部分集合モデルと呼ばれるモデルを用いている. 部分集合モデルとは 3 つの組 $\langle X, O, \nu \rangle$ が X が集合, O が X のべき集合の部分集合, ν が付値であるようなモデルのことをいう. ここで, 論理式の解釈について述べることにする.

Definition 3.1. $M = \langle X, O, \nu \rangle$ を部分集合モデルとする. $x \in X$ かつ $x \in u$ である $u \in O$ に対し,

すべての $P \in Prop$ 対し $x, u \models P \Leftrightarrow x \in \nu(P)$
$x, u \models \varphi \wedge \chi \Leftrightarrow x, u \models \varphi$ かつ $x, u \models \chi$
$x, u \models \neg\varphi \Leftrightarrow x, u \not\models \varphi$
$x, u \models \Box\varphi \Leftrightarrow$ 任意の $v \in O$ に対し, $v \subseteq u$ ならば $x, v \models \varphi$
$x, u \models K\varphi \Leftrightarrow$ 任意の $y \in u$ に対し $y, u \models \varphi$

$\Box$, K の直感的な解釈を以下に述べる.

視界 u 内部の x を含むようなどんな視界 v においても, 視点 x と視界 v の組み合わせで φ が真になる. すなわち, $x, u \models \Box\varphi$ とは, ”視点を変えず, 与えられた視界 u の内部でどの様に視界を変えてもその視点と (u 内部の) 視界との組み合わせにおいては, φ が真である” と捉えることができる.

また, この様な捉え方において $x, u \models K\varphi$ は, ”視界を変えずその視界内のどの視点をとっても, その視界と視界内の視点の組み合わせにおいて φ が真になる” と捉えることができる.

4　部分集合空間論理と決定可能性

部分集合モデルは, 部分集合空間論理との間に完全性を持つが, この部分集合モデル全体のクラスからは, 有限モデル性が言えないことが知られている [2]. そこで, このモデルのクラスよりも広いモデルのクラスを考えることが必要となる.

$\langle J, \xrightarrow{L}, \xrightarrow{\Diamond} \rangle$ がクロス公理モデルであるとは, J が集合で, $\xrightarrow{L}$ が J 上の空でない同値関係であり, かつ $\xrightarrow{\Diamond}$ が J 上の空でない擬順序であって, さらに次の性質をもつことである. 任意の $i, j, k \in J$ に対し,

$$i \xrightarrow{\Diamond} j \xrightarrow{L} k \text{ ならば, 或る } l \in J \text{ が存在し } i \xrightarrow{L} l \xrightarrow{\Diamond} k$$

さらに, ν が $Prop$ から J のべき集合 $P(J)$ への写像であり, 任意の $i, j \in J$, およびすべての $P \in Prop$ に対し

$$i \xrightarrow{\Diamond} j \text{ ならば, } i \in \nu(P) \Leftrightarrow j \in \nu(P)$$

であることをいう.

部分集合モデル全体のクラスよりもこのクロス公理モデル全体のクラスは広い. また, このクロス公理モデルのクラスは, 有限モデル性をもつ. それ故, 部分集合空間論理における証明可能性は決定可能である.

5　考察

直積空間と topo-bisimulation との関係に次の様な関係が成り立つ. $M_\lambda = \langle X_\lambda, O_\lambda, \nu_\lambda \rangle$ を位相モデルのクラスとする $(\lambda \in \Lambda)$. このとき, $M = \langle X, O, \nu \rangle$ とし, $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積位相モデルであるとは, $\langle X, O \rangle$ が位相空間のクラス $\{\langle X_\lambda, O_\lambda \rangle\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積位相空間であり付値に関しては, 任意の $P \in Prop$ に対し, $\nu(P) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \nu_\lambda(P)$ であるとする.

いま, 添字 λ に対する位相モデルの組 $M_\lambda = \langle X_\lambda, O_\lambda, \nu_\lambda \rangle$ および $M'_\lambda = \langle X'_\lambda, O'_\lambda, \nu'_\lambda \rangle$ において, $\rightleftharpoons_\lambda$ を M_λ と M'_λ 上の全面的な topo-bisimulation であるとする $(\lambda \in \Lambda)$. このとき, $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積位相モデルを $M = \langle X, O, \nu \rangle$ とし, "$\{M'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積位相モデルを $M' = \langle X', O', \nu' \rangle$ とする. このとき, 次のことが成り立つ.

Proposition 5.1. *任意の $x \in X$ および任意の $x' \in X'$ に対し, X と X' との間の関係 $\rightleftharpoons$ を,*

$$x \rightleftharpoons x' \Leftrightarrow \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } pr_\lambda(x) \rightleftharpoons_\lambda pr_\lambda(x')$$

と定める. すると, $\rightleftharpoons$ は M と M' との間の全面的な topo-bisimulation となる.

ただし, pr_λ は $X \to X_\lambda$ または, $X' \to X'_\lambda$ の射影であるとする. このことから, 全面的 bi-simulatin の関係が直積へと拡張できることがわかった.

次に $g : O \to O'$ に対して, 以下のことを定める. 任意の $y \in X$ を固定し,

$$A = \{P \in Prop \mid y \in \nu(P)\},$$
$$D = \{v \in O \mid y \in v\}$$

としたとき,

$$E(y) := \bigcap_{P \in A} \nu'(P) \cap \bigcap_{P \notin A} \nu'(P)^c \cap \bigcap_{v \in D} g(v) \cap \bigcap_{v \notin D} g(v)^c.$$

任意の $y' \in X'$ を固定し,

$$A' = \{P \in Prop \mid y' \in \nu'(P)\},$$
$$D' = \{v \in O \mid y' \in g(v)\}$$

としたとき,

$$E'(y') := \bigcap_{P \in A'} \nu(P) \cap \bigcap_{P \notin A'} \nu(P)^c \cap \bigcap_{v \in D'} v \cap \bigcap_{v \notin D'} v^c$$

と定める.

そして, X と X' の間の関係 $\rightleftharpoons$ として, $x \rightleftharpoons x'$ であることを

すべての $P \in Prop$ に対し $x \in \nu(P) \Leftrightarrow x' \in \nu'(P)$ であり,
任意の $v \in O$ に対し $x \in v \Leftrightarrow x' \in g(v)$

と定めると, 次の Proposition が成り立つ.

Proposition 5.2. *$g : O \to O'$ を全射であるとする. 任意の $y \in X$ および, 任意の $y' \in X'$ に対し, $E(y)$, $E'(y') \neq \emptyset$ とする. このとき, $\rightleftharpoons$ は全面的な topo-bisimulation なる.*

g が X から X' への位相同型写像であるときこの Proposition 5.2 の仮定を満たす. しかし, 位相同型写像の条件から単射の条件を除いた写像である g が全射であり連続開写像であるときには, 仮定 (条件) を満足しない.

また, これにより bi-simulation が開集合と付値による集合との交叉関係に影響を受けていることが明らかになった.

最後に連続写像の考察に関する結論を述べる.

$$O'_F := \{u \cap F \mid u \in O'\}$$
$$Ante(u) := \{v \in O \mid v \subseteq u\}$$

としておく.

Proposition 5.3. *$\langle X, O\rangle$, $\langle X', O'\rangle$ を位相空間とする. 与えられた $F \subseteq X'$ に対し或る $D \subseteq O$ が存在し, $\langle D, \subseteq\rangle$ が束であり, O'_F が集合を要素として有限かつ $\emptyset \in D$ であること. さらに或る g が存在し $g : D \to O'_F$ かつ束の同型写像であり, 任意の $u \in D$ に対し $\#(u \backslash \cup Ante(u)) \geq \#(g(u) \backslash \cup Ante(g(u)))$ を満たしているとする. このとき,*

$\cup D$ から F への連続写像 f が存在し, $f(\cup D) = F$ である.

ただし, 集合 A に対して $\#A$ を A の濃度とする.

これを示すに当たり, 像が有限集合である様な連続写像は開集合間の束構造と濃度とに深い関係をもつことが明確になった.

参考文献

[1] M.Aiello. Spatial Reasoning: Theory and Practice, Ph. D thesis, University of Amsterdam, 2002.

[2] A.Dabrowski,L.S.Moss, R.Parikh. Topological reasoning and the logic of knowledge, Annals of Pure and Applied Logic 78 (73-110), 1996.

[3] R.Goldblatt. Mathematics of Modality, 1993.

[4] 小野寛晰, 情報科学における論理, 1994.

[5] 田中俊一, 位相と論理, 2000.

[6] 矢野公一, 距離空間と位相構造, 1997.

[7] 岩波辞典第３版, 1985.