JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	アウェアネスの論理によるエージェントの知識状態の記述
Author(s)	久保埜，雄大
Citation	
Issue Date	2023-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/18310
Rights	
Description	Supervisor: 東条 敏，先端科学技術研究科，修士(情報科学)

JAIST
JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

修士論文

アウェアネスの論理によるエージェントの知識状態の記述

久保埜　雄大

主指導教員 東条　敏

北陸先端科学技術大学院大学
先端科学技術研究科
（情報科学）

令和 5 年 3 月

Abstract

An agent refers to a system that autonomously infers under their knowledge or belief. To analyze a realistic agent's reasoning, it matters to focus on available knowledge instead of holding knowledge. For example, if we could activate inference on all holding knowledge, such as $1 + 1 = 2$, then we could immediately calculate 6^6. However, our actual capacity to activate inference is restricted to available knowledge. The aim of this study is to build a logical system that can describe each agent's inference in situations where multiple agents consider the opponents' knowledge and reasoning by using their available knowledge. Our logic can work as a foundation in an analysis of game situations or formalization of interaction between each agent by communication. For example, in game theory, players make their own decisions by guessing other players' reasoning. It is based on specific decision criteria, such as the best strategy to a dominant strategy. Whether player b is aware of actions that player a can take affects b's inference to find an equilibrium. In this sense, our logic is supposed to be useful in its application to game theory.

Epistemic logic has been used in a logical description of inference concerning knowledge or belief. Although this kind of logic indicates general logic treating knowledge or belief, logic based on modal logic has spread in the field of epistemic logic. Modal logic is a kind of non-classical logic that describes the quality called modality that represents 'how propositions are correct.' Epistemic logic is logic that interpret a modality operator in modal logic as a knowledge or belief operator. The semantics of modal logic is given by possible worlds semantics called Kripke semantics. Kripke semantics is composed of a tuple $\langle W, R_i, V \rangle$, where W is a set of possible worlds which represent possibility; R_i is a binary relation on W that labeled by i; V is a valuation, which is a function that takes a proposition and returns a set of possible worlds. It is supposed that we denote by φ an arbitrary logical formula and read $K_i\varphi$ as 'an agent i knows φ,' and may write anonymously $K\varphi$. When there are some accessible worlds on R whose different truth value for φ, he/she does not know whether or not φ is true, that is $\neg K\varphi$. On the contrary, if all accessible worlds on R have the same truth value for φ, he/she knows φ, that is $K\varphi$.

In epistemic logic, an ideal inference capacity to activate inference on all holding knowledge, as I touched on at the beginning, is called logical omniscience. In ordinary logic, we employ *Modus Ponens* (MP) for logical inference that is from φ and $\varphi \to \psi$,

we conclude ψ. When one knows φ and $\varphi \to \psi$, i.e., $K\varphi$ and $K(\varphi \to \psi)$, respectively, $K\psi$ would necessarily be inferred in his/her knowledge if we adopt the axiom K: $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$. However, such exhaustive reasoning is unrealistic for human model.

To avoid logical omniscience, logic of awareness has been explored mainly in the field of philosophy, computer science, and economics. This logic is a kind of epistemic logic incorporating the notion of awareness, and the notion has been given the interpretation such as 'he/she pays attention to things' or 'things are under his/her consciousness.

Awareness logic (Fagin and Halpern, 1988) is an early study in the field and proposed components that represent agents' state of awareness called an *awareness set* and incorporated it into epistemic logic. This logic distinguishes the knowledge that the agents cannot use for their reasoning, called *implicit knowledge*, from that they can, called *explicit knowledge*. The former, implicit knowledge, represents unaware information. The idea of (Fagin and Halpern, 1988) is to classify knowledge into implicit or explicit knowledge according to whether an agent is aware of the proposition.

However, we argue that awareness should also affect the distinction of possible worlds in addition to propositions. When an agent is unaware of a certain proposition, he/she must not also be aware of the distinction between two possible worlds whose different valuations. This indistinction plays an important role when agents make inferences about other agents' knowledge states, as shown in our illustrative example in Chapter 3. Since in the previous study, awareness only concerns the propositions, it is not possible to fully handle knowledge and reasoning in such situations.

Therefore, in this paper, our study develops this idea, and we propose a logic $\mathcal{ALP}$ incorporating an idea that being aware of propositions itself affects an agent's width of reasoning. Specifically, we introduce course partitions of a set of possible worlds reflecting an agent's width of reasoning. We introduce the axiom system **ALP** based on **S5** and prove its soundness and completeness. Finally, we outline an idea to incorporate some basic epistemic actions with dynamic operators that change the state of awareness.

目次

第 1 章　序論 1
1.1　研究の目的 1
1.2　研究の背景 1
1.3　本稿の構成 3

第 2 章　準備 4
2.1　認識論理 4
2.2　アウェアネス論理 12
2.3　公開告知論理 19

第 3 章　本論 25
3.1　動機付けの例 26
3.2　分割付きアウェアネス論理 29
3.3　分割付きアウェアネス論理を使用した例の記述 38
3.4　分割付き動的アウェアネス論理 39

第 4 章　関連研究 42

第 5 章　結論 44

図目次

2.1 例 2.1 の知識状態に対応するクリプキモデル. 6
2.2 例 2.2 の知識状態に対応するクリプキモデル 7
2.3 アウェアネス集合を使った意識下にある知識と意識下にない知識の区別. . 15
2.4 例 2.3 の知識状態に対応するアウェアネス構造. 16
2.5 右: 例 2.4 の情報の公開前の知識状態に対応するクリプキモデル. 左: 例 2.4 の情報の公開後の知識状態に対応するクリプキモデル 21

3.1 アウェアネス論理と本論理の比較 26
3.2 例 3.1 の各エージェントの知識および思考. 27
3.3 オーナー a の知識および思考に対応するクリプキモデル. 28
3.4 オーナー b の知識および思考に対応するクリプキモデル. 29
3.5 例 3.1 の各エージェントの知識状態に対応するアウェアネス付き認識モデル. 38
3.6 オーナー b のアウェアネスの状態の変化によって, 更新されたアウェアネス付き認識モデル. 41

表目次

2.1 認識論理のヒルベルト流公理系 **S5**. 8
2.2 アウェアネス論理の公理系 $\mathbf{AL}^{gpp,ka}$. 17
2.3 公開告知論理のヒルベルト流公理系 **PAL**. 22

3.1 分割付きアウェアネス論理の公理系 **ALP**. 32

第 1 章

序論

1.1 研究の目的

エージェントとは、自身の知識や信念などに基づいて自律的に推論を行うシステムを指す。よりリアリスティックなエージェントの思考を分析するにあたっては、そのエージェントが保持している情報ではなく, 推論に使用できる情報を定式化することが重要である。本研究の目的は, 複数のエージェントが互いの知識や思考を推測し合う状況において、各エージェントの推論を形式的に表現する論理を構築することである.

1.2 研究の背景

知識や信念を含む推論の論理的表現には認識論理 (epistemic logic) が使われてきた. 認識論理は厳密には知識や信念を取り扱う論理一般を指すが, 様相論理 (modal logic) の一種としての認識論理が最も普及している. これはアリストテレスによって提示された必然性や偶然性をベースとして, 一般にヒンティッカやクリプキによって整備された可能世界意味論によって解釈を与える論理で, 様相演算子を知識・信念演算子と解釈したものが認識論理として使用される. 以後, φ, ψ を任意の論理式, K_i を知識演算子とする. $K_i\varphi$ で「エージェント i は φ を知っている」と読み, 特に混乱がなければエージェントを示す添え字である i は省略して, $K\varphi$ とかく. 様相論理の意味論は, 可能性を表現するもので命題に対して異なる真理値をもつ可能世界 (possible world) の集合と, 可能世界間の関係, 付値関数の組 $\langle W, R, V \rangle$ から成るクリプキモデル (Kripke model) によって与えられる. エージェントが φ について異なる真理値をもつ可能世界に R 上で到達可能な場合, そのエージェントは φ が真かどうかが分からないことを意味し, つまり $\neg K\varphi$ である.

認識論理において論理的全能性 (logical omniscience) を排除した現実の思考に近い推論の表現が重要な課題の一つとなっている．論理的全能性とは, エージェントが保持している情報と論理的推論から得られる情報を全て保持しているという性質のことで, K: $K(\varphi \to \psi) \to K\varphi \to K\psi$ や RN: $\vdash \varphi \to \vdash K\varphi$ などの複数の公理によって特徴づけられる．例えば, 「φ と $\varphi \to \psi$ を知っている」とき, つまり $K\varphi \wedge K(\varphi \to \psi)$ が成立しているとき, 論理的推論の表現として組み込まれているモーダス・ポネンス (MP: Modus Ponens) と K によって, $K\psi$ が導かれる．つまり「ψ を知っている」．しかしながら, このような推論は人間の推論として現実的ではない.

アウェアネスの論理 (logic of awareness) は, この問題の回避を目的に提案された認識論理の一種であり, コンピュータサイエンス・経済学・哲学の各領域に跨って発展してきた (Shchipper, 2015)．ここでアウェアネスとは「対象に気づく」や「対象へ意識を向ける」といった解釈が当てられる概念である．アウェアネスの状態にある命題の集合を表現するアウェアネス集合 (awareness set) を使用し, 意識下にある知識とそうでない知識, つまり推論に使用できる知識とそうでない知識を区別することで, アウェアネスの状態にない命題を使った推論を制限することができる (Fagin and Halpern, 1988)．多くの研究はアウェアネスの表現にこの研究のアイデアを採用しており, アウェアネスの論理的表現の主要なアプローチとなっている (Sillari, 2008; Walker, 2014; Halpern and Piermont, 2020).

しかしながらアウェアネスの状態は命題だけでなく, そのエージェントの可能世界の区別にも影響を与える．エージェントは気づいていない命題のみが異なる真理値をもつ, 二つの可能世界の区別が認識できない．アウェアネス論理は命題に対してのみ注目しており, この種の区別については表現できない．そしてこのことは, この後導入する例で見るように他のエージェントの思考の推測を含むような複雑な知識を表現する際に問題となる．そこで本研究では, 命題が意識下にあるということ自体がエージェントが考えることのできる可能世界の認識に影響を与えること, つまりエージェントの思考の幅に影響を及ぼすことを組み込むため, アウェアネスの状態に連動した可能世界間の無区別関係 (indistinguishable relation) を導入し, エージェントの思考の幅を反映した可能世界の集合の分割を既存のものより粗くした論理 $\mathcal{ALP}$ を提案する．認識論理の公理系 **S5** にいくつかの新たな様相演算子を加えた公理系 **ALP** を導入し, 健全性および完全性が成立していることを示す．その後, アウェアネスの状態の変更を記述できるように拡張した $\mathcal{DALP}$ を提案する.

本論理は複数のエージェントが存在する状況において, 他のエージェントがどのような知識を持っているかについての推論を正しく扱うことを可能にするため, 複数の意思決定

者におけるゲーム的状況の分析や, コミュニケーションによるエージェント同士の相互作用の形式化などの基礎として働くことが期待できる。例えば, ゲーム理論では他のプレイヤーの思考の推測に基づいてゲームの解が決定される．そのためプレイヤーが他のプレイヤーの取り得る選択肢に気づいているか否かは解の成立に大きな影響を与える．こういったアウェアネスの欠けがあるようなゲームは不完備アウェアネスゲーム (game with incomplete awareness) とよばれ, 複数の定式化が提案されている (Copic and Galeotti, 2006; Perea, 2022). 本論理を使用して, このようなプレイヤーに仮定されている認識構造を明らかにすることによって, 限定合理性の理論を通してゲーム理論への貢献ができると考えられる.

1.3 本稿の構成

2 章では準備として本研究に必要となる予備知識を述べる．認識論理およびアウェアネス論理は静的な知識状態の記述を扱い, 公開告知論理は動的な情報の変化の記述を行うものである．これらの論理を下敷きに 3 章で静的なものを扱う分割付きアウェアネス論理と, 動的なアウェアネスの状態の変化の記述を行う分割付き動的アウェアネス論理を提案する．4 章では本論理に関連する論理や考え方について述べる．最後に本稿のまとめに加え, 今後の発展の方向性について述べる.

第 2 章

準備

2.1 認識論理

認識論理とは知識や信念を取り扱う論理一般のことを指すが, 様相論理の必然性を意味する演算子 $\Box$ の解釈を知識や信念としたものが普及している. 様相論理は様相とよばれる「命題がどのように正しいのか」ということを記述できる非古典論理の一種であり, ルイスやラングフォードによって証明論的形式化が行われた後, ヒンティッカやクリプキによって可能世界意味論が整備された. ある種の必然性や偶然性を保持する概念の記述や分析に使用され, 今回焦点を当てる知識や信念を扱う認識論理の他, 「常に」や「いつか」を扱う時相論理などが様相論理に基づいていた論理である. 本節では認識論理の中でも知識の論理に焦点を当て, その定義と基本的な性質について述べる.

2.1.1 構文論

$\mathcal{P}$ を原子命題の可算集合, $\mathcal{G}$ をエージェントの可算集合としたとき, 認識論理の言語 $\mathcal{L}^{\mathrm{EL}}$ は以下の文法によって生成される論理式の集合である.

$$\mathcal{L}^{\mathrm{EL}} \ni \varphi ::= \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid K_i\varphi,$$

ただし $p \in \mathcal{P}$ であり, $i \in \mathcal{G}$ である. また常に偽となる特殊な論理式 $\bot$ はある原子命題 p を使って $\neg(p \to p)$ の略記として定義する. 論理演算子 $\vee$, $\to$ については通常のとおり, $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \to \psi$ を, それぞれ $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ と $\varphi \wedge \neg\psi$ の略記として定義する.

K_i は知識演算子といい, $K_i\varphi$ は「エージェント i は φ を知っている.」と読む. なお様相論理では必然性については $\Box$, 可能性は $\Diamond$ といった演算子で表すが, 後者については必

然性の双対, すなわち「可能であるということ」は「必然的にそうでないというわけではない」と一致するとの考えの下, $\Diamond\varphi$ を $\neg\Box\neg\varphi$ の略記として定義する. しかし本節では認識論理に焦点を合わせるため, ここでは導入しない.

2.1.2 意味論

認識論理の意味論は可能世界の集合 W、それ上の関係 R_i、付値関数 V の組で構成されるクリプキモデルによって与えられる.

Definition 2.1. クリプキモデル M は組 $\langle W, \{R_i\}_{i\in\mathcal{G}}, V\rangle$ である. ただし,

- W は空でない可能世界の集合;
- $R_i \subseteq W \times W$ は W 上の同値関係;
- $V : \mathcal{P} \to 2^W$ は付値関数.

なお集合 X について, 2^X で X のべき集合を指す. また付値関数 V を除いた組 $\langle W, \{R_i\}_{i\in\mathcal{G}}\rangle$ をクリプキフレームという. 可能世界とは可能性を表現する手法の一つであり, 一つの可能世界が一つの可能な世界の在り方を指す. 例えば「東京で雨が降っている可能性がある」という文は, 東京で雨が降っている可能世界によって表現される. 可能世界間の二項関係 R_i は, 到達可能性関係 (accessibility relation) とよばれ, 認識論理においてはエージェントの思考の幅を表現するものと解釈される. 例えば $(w, v) \in R_i$ のとき, エージェント i は w からは v の在り方を考えることができるという意味に解釈される.

充足可能関係 (satisfaction relation) はクリプキモデル $M = \langle W, \{R_i\}_{i\in\mathcal{G}}, V\rangle$ と, 可能世界 $w \in W$ のペア (M, w) について, 以下のとおり定義される.

- $M, w \vDash p :\Leftrightarrow w \in V(p)$ となる;
- $M, w \vDash \neg\varphi :\Leftrightarrow M, w \nvDash \varphi$ となる;
- $M, w \vDash \varphi \wedge \psi :\Leftrightarrow M, w \vDash \varphi$ かつ $M, w \vDash \psi$となる;
- $M, w \vDash K_i\varphi :\Leftrightarrow (w, v) \in R$ となる全ての v について, $M, v \vDash \varphi$ となる.

なお $:\Leftrightarrow$ および $:=$ は「以下によって定義される.」の略記とする.

知識演算子はその可能世界から到達可能な全ての可能世界上で命題の評価を要求する演算子となっている. ある可能世界 w から到達可能な全ての可能世界はエージェントが w にいるときに考えることができる全ての可能性を意味するため, $K_i\varphi$ はエージェントが考え得る全てのケースで φ が成立しているということである.

このように到達可能性関係は様相のついた論理式の真偽に影響を与えるため, 様相演算子の解釈に応じて設定される. 知識の論理では同値関係が与えられるが, 信念を扱う場合は反射性 (reflexivity) の代わりに継起性 (seriality) を加えた関係である継起的, 推移的 (transitivity) , かつ対称的 (symmetricity) な関係が与えられる. これはある世界で信じている命題は必ずしもその世界で成立している命題とは限らないからであり, 知識と信念の論理的な差異として取り上げられる.

また特定の到達可能性関係をもつクリプキモデルのクラスを関係を表すローマ字を使用し, $C(\cdot)$ で指し示すこととする. 例えば同値関係 (equivalence relation) をもつクリプキモデルのクラスは $C(E)$ と表記する.

次に妥当性について定義をする.

Definition 2.2. 任意の論理式 φ がモデル M で妥当とは, φ が全ての $w \in W$ について $M, w \vDash \varphi$ であることをいい, $M \vDash \varphi$ とかく. また全ての M について φ がモデルで妥当であるとき, φ を妥当といい, $\vDash \varphi$ とかく. またクリプキモデルのクラス $C(\cdot)$ について, クラスに属する全てのモデルで妥当であるとき, クラスについて妥当であるといい, $C \vDash \varphi$ とかく.

2.1.3 認識論理による知識の記述

認識論理によって知識がどのように表現されるのかを示す.

Example 2.1. 現在東京と大阪で雨が降っている. a は東京で雨が降っていることは知っているが, 大阪で雨が降っていることは知らない.

命題「東京で雨が降っている」を p, 「大阪で雨が降っている」を q とする. また可能世界をノード, 到達可能性関係をエッジ, 各可能世界で真となる命題をノードへのラベルとすれば, クリプキモデルは図 2.1 のようなラベル付きのグラフとして記述できる.

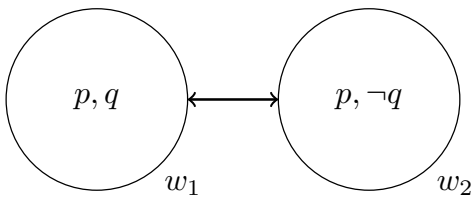

図 2.1　例 2.1 の知識状態に対応するクリプキモデル.

なお図では視認性の観点から, 到達可能性関係の反射性は省略されている.

実際の世界は w_1 であり, この世界から到達可能な世界は w_1 と w_2 で, その両方で p は真である. しかしながら w_2 で q は偽であり, a は「大阪で雨が降っていない」可能性にも到達可能である. よって $M \vDash K_a p \wedge \neg K_a q$ が成立している, つまり「a は東京で雨が降っていることは知っているが, 大阪で雨が降っていることは知らない.」

Example 2.2. i は東京の一室におり, 部屋の窓を見れば雨が降っているかどうかは一目瞭然であるため, 外で雨が降っているかを知ることができる. しかし大阪で雨が降っているかどうかを知ることはできない.

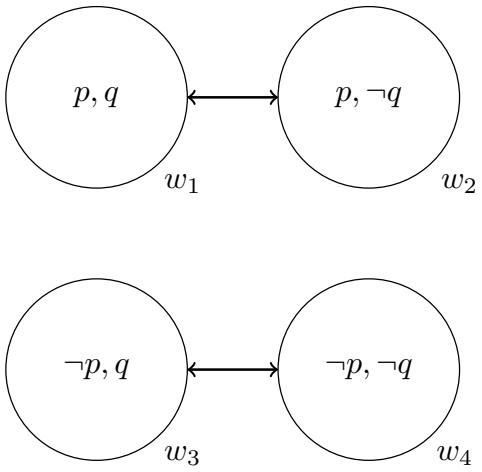

図 2.2　例 2.2 の知識状態に対応するクリプキモデル

この例では「ある事象が起きているか, もしくは起きていないか知ることができる」を表現するために, 図 2.2 のように到達可能性関係によって形成される可能世界の全体集合の分割を複数個考える.

w_1 と w_2 で構成される同値類では p, w_3 と w_4 で構成される同値類では $\neg p$ が成立している. a が窓を見る前までは p か $\neg p$ が確定しないが, どちらの場合であっても, $K_a p$ もしくは $K_a \neg p$ が成立する. よって a は「雨が降っているかどうか」を知ることができるといえる. 一方で $\neg K_a q \wedge \neg K_a \neg q$ がモデルで妥当であるため, a は大阪の天気がどのような場合でもあってもそのことを知らない, つまり「大阪で雨が降っているかどうかを知ることはできない.」

2.1.4 ヒルベルト流公理系

命題の正しさを規定する意味論と証明について定義する証明論は, 完全性定理によって互いに関連付けられる. 証明の定義の方法は複数存在するが, 今回はヒルベルト流の公理系を使っておこなう. この証明体系は推論規則を最低限とし, 論理の特徴の大部分を公理をもって表現することを目指すものである.

まず証明を以下のように定義する.

Definition 2.3. 任意の論理式 φ と公理系 Σ に対して, $\varphi \in \Sigma$ となる φ を Σ の定理とよび, $\vdash_\Sigma \varphi$ と表記する. またこのとき体系 Σ において φ の証明があるという. なお Σ が指す体系が明らかである場合は, 省略を許す. $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ は, ある有限個の論理式 $\psi_1, \cdots, \psi_n \in \Gamma$ に対して, $\vdash_\Sigma \bigwedge_1^n \psi_n \to \varphi$ であることの略記とする. またこのとき体系 Σ において φ は Γ から演繹可能という.

表 2.1 認識論理のヒルベルト流公理系 **S5**.

公理	
TAUT	全ての古典命題論理のトートロジー
K	$K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$
T	$\vdash K_i\varphi \to \varphi$
5	$\vdash \neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i\varphi$
推論規則	
MP	If $\vdash \varphi$ and $\vdash \varphi \to \psi$, then $\vdash \psi$
KG	If $\vdash \varphi$ then $\vdash K_i\varphi$

公理 K は知識演算子の分配ができるということである. 公理 T はある命題が知識であるとき, エージェントがいる可能世界においても, その命題が成立していることを求めるものである. 公理 5 は負の内省性 (negative introspection) とよばれ, 常に自分が知らないことを知っていることを意味する. これは完璧な思考を行うエージェントでない限りは保持していない性質で, 推論規則 RN と合わせ, 論理的全能性を特徴づける論理式の一つとなっている. 推論規則 RN は常に正しい命題は知識であることを意味している.

S5 のように公理 TAUT と推論規則 MP をもつ古典命題論理の公理系に加え, 公理 K と推論規則 KG をもつ公理系を正規な様相論理 (normal modal logic) という. 最小の正

規な様相論理は **S5** から公理 T,5 を除いた体系 **K** であり, この体系は任意の関係をもつクリプキモデルのクラスと完全である. **K** に特定の公理を追加することで, 特定の到達可能性関係をもつクリプキモデルのクラスに対応した公理系が得られ, こういった到達可能性関係とそれに対応する論理式についての理論は対応理論と呼ばれ, 詳細な研究が進んでいるが, 趣旨から逸れるため深くは立ち入らず, 代表的なもののみを以下に示す.

- R が反射的である $\Leftrightarrow \vdash K_i\varphi \to \varphi$ (T);
- R が継起的である $\Leftrightarrow \vdash K_i\varphi \to \neg K_i\neg\varphi$ (D);
- R が対称的である $\Leftrightarrow \vdash \varphi \to K_i\neg K_i\neg\varphi$ (B);
- R が推移的である $\Leftrightarrow \vdash K_i\varphi \to K_iK_i\varphi$ (4);
- R がユークリッド的である $\Leftrightarrow \vdash \neg K_i\neg\varphi \to K_i\neg K_i\neg\varphi$ (5).

なお関係 R がユークリッド的であるとは任意の可能世界 w, v, u について, $(w, v) \in R$ かつ $(w, u) \in R$ であるならば $(v, u) \in R$ であることをいう.

2.1.2 節で述べたように, 信念の論理では知識の論理のように同値関係でなく, 継起的かつ推移的かつ対称的なクリプキモデルが与えられるが, これは反射性に対応する T が信念の性質にそぐわないためである.

知識の論理は同値関係をもつクリプキモデルが与えられるため, 対応する公理系は **KTB4** である. また反射的かつユークリッド的な二項関係は同値関係と一致することから, **KTB4** も **KT5** と一致し, その歴史的経緯から特別に **S5** と表記される.

2.1.5 完全性定理

完全性定理とは意味論で定義される充足可能性と, 公理系によって規定される証明可能性が一致するという定理である. 意味論と証明論が関連付けられることで, 一方で証明した結果をもう片方に持ち込むことができる. 一般に意味論において, 全てのモデルについて調べる必要があるため, ある論理式の妥当性を証明することは困難であるが, その論理式が証明可能なことを示すことは比較的容易である. 反対にある論理式の証明不可能性を示すことは容易ではないが, その論理式の否定が充足可能であることを示すことは容易である.

充足可能性と証明可能性の一致を示すためには, 証明のある論理式が妥当なものであり, かつ妥当な論理式に証明があることを示せばよく, 前者を健全性, 後者を完全性とよぶ. 健全性についての証明は比較的容易であるが, 完全性については, いくつかの新たな概念を導入する必要がある. 本セクションではカノニカルモデルを使った証明を行う (Chellas,

1980).

Definition 2.4 (無矛盾)**.** ある論理式の集合 Γ が無矛盾であるとは, $\Gamma \nvdash \bot$ であることをいう.

Definition 2.5 (極大無矛盾)**.** ある論理式の集合 Γ が極大無矛盾であるとは, Γ が無矛盾であり, かつ任意の論理式 φ について, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ が無矛盾ならば $\varphi \in \Gamma$ であることをいう.

無矛盾集合については, 以下の三つの補題が成立する.

Lemma 2.1 (無矛盾集合のコンパクト性)**.** Γ が無矛盾集合であるとき, またそのときに限り Γ の任意の有限部分集合 Γ' も無矛盾である.

Proof. 対偶をとって証明を行う。すなわち $\Gamma \vdash \bot$ であるとき, またそのときに限り, ある Γ' があって $\Gamma' \vdash \bot$ である. □

Lemma 2.2 (リンデンバウムの補題)**.** ある無矛盾集合 Γ があるならば, $\Gamma \subseteq \Delta$ となる極大無矛盾集合 Δ が存在する.

Proof. Γ を無矛盾と仮定する. $\mathcal{L}^{\mathrm{EL}}$ は可算無限であるため, これに属する論理式を $\varphi_1, \cdot, \varphi_n$ のように列挙することができる. この列を使って論理式の集合 Δ_n を以下のように定義する.

1. $\Delta_0 \coloneqq \Gamma$;
2. $\Delta_k \coloneqq \begin{cases} \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\} & \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\} \text{ が無矛盾であるとき} \\ \Delta_k & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$

Δ を $\Delta \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ と定義すると, 無矛盾集合のコンパクト性が成立するため, Δ は無矛盾である.
続いて, 任意の論理式 φ について $\Delta \cup \{\varphi\}$ が無矛盾であると仮定する. φ は論理式の列の中に必ず現れているため, 仮に φ_k とおく. 無矛盾集合のコンパクト性から $\Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}$ は無矛盾である. $\Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\} = \Delta_k$ であり, $\Delta_k \subseteq \Delta$ であるため, $\varphi_k \in \Delta$. よって $\Gamma \subseteq \Delta$ となる Δ について, Δ は無矛盾であり, かつ $\Delta \cup \{\varphi\}$ ならば $\varphi \in \Delta$ であるため, Δ は極大無矛盾集合である. したがって Γ が無矛盾であるならば, $\Gamma \subseteq \Delta$ となる極大無矛盾集合 Δ が存在する.

□

Lemma 2.3. 任意の論理式 φ および, 無矛盾集合のコンパクト性が成立する任意の公理系 Σ について, 全ての極大無矛盾集合 Δ で $\varphi \in \Delta$ ならば $\vdash_\Sigma \varphi$.

Proof. 対偶をとって証明を行う. $\nvdash_\Sigma \varphi$ を仮定すると, $\{\neg\varphi\} \nvdash_\Sigma \bot$. リンデンバウムの補題より $\{\neg\varphi\} \subseteq \Delta$ となる極大無矛盾集合 Δ があって, $\varphi \notin \Delta$. □

続いて, カノニカルモデルを定義する.

Definition 2.6. カノニカルモデル $C(M)$ は組 $\langle C(W), \{C(R_i)\}_{i\in\mathcal{G}}, C(V)\rangle$ である. ただし,

- $C(W)$ は空でない極大無矛盾集合の族;
- $C(R_i)$ は $C(W)$ 上の二項関係であり, $(w, v) \in C(R_i)$ のとき, またそのときに限り $\{\varphi \mid K_i\varphi \in w\} \subseteq v$;
- $C(V) : \mathcal{P} \to 2^{C(W)}$ は付値関数であり, $w \in C(V)(p)$ のとき, またそのときに限り $p \in w$.

Lemma 2.4. ***S5*** のカノニカルモデルは $C(E)$ に含まれる.

Proof. $C(R_i)$ が同値関係であることを示せばよい. まず $C(R_i)$ が反射性を満たすことを示す. 任意の w について, 公理 T より $K_i\varphi \in w$ ならば $\varphi \in w$. 次に $C(R_i)$ が対称性を満たすことを示す. $(w, v) \in C(R_i)$ および $\varphi \in w$ から, $\neg K_i\neg\varphi \in v$ を導けばよい. よって, $\varphi \in v$. 公理 T,5 より, $\neg K_i\neg\varphi \in v$. 最後に推移性を満たすことを示す. $(w, v) \in C(R_i)$, $(v, u) \in C(R_i)$, $K_i\varphi \in w$ を仮定する. 公理 K,T,5,KG より, $K_i\varphi \to K_iK_i\varphi$. よって, $\varphi \in u$. □

Lemma 2.5. 任意の論理式 φ について, $C(M), w \vDash \varphi$ ならば $\varphi \in w$.

Proof. 論理式の構成に関する帰納法を使って証明を行う.

- 原子命題 p について, $C(W), w \vdash p$ を仮定し, 定義より直ちに $p \in w$ が導ける.
- 二項演算子についても, 定義から直ちに導けるため略す.
- 知識演算子について, $C(M), w \vDash K_i\varphi$ を仮定する. $C(R_i)$ 上で到達可能な全ての v で $C(M), v \vDash \varphi$. 帰納法の仮定から $\varphi \in v$. $C(R_i)$ の定義より $K_i\varphi \in w$.

□

前件と後件を入れ替えた命題も成立するが, 完全性の証明を考える場合は証明の必要はない. なお両方の向きを合わせた命題を真理補題とよぶ.

Theorem 2.1 (完全性定理)**.** 任意の論理式 φ について, $C(E) \vDash \varphi$ のとき, またそのときに限り $\vdash_{\mathbf{S5}} \varphi$ が成立する.

Proof. ($\Rightarrow$) 全ての公理が妥当な論理式であり, かつ推論規則について前提が妥当な論理式であるとき, 結論の論理式も妥当であることを示せばよい. 公理 5 についてのみ示し, 後は略す.

- 任意の M と w について, $M, w \vDash \neg K_i\varphi$ とすると, w から到達可能なある v が存在し, $M, v \vDash \neg\varphi$. このとき w から到達可能な全ての u から到達可能なある t が存在して, $M, u \vDash \neg\varphi$ であるため, $M, w \vDash K_i\neg K_i\varphi$

($\Leftarrow$) 補題 2.4 より $C(M) \vDash \varphi$. 補題 2.5 より任意の w について $\varphi \in w$. 補題 2.3 より $\vdash_{\mathbf{S5}} \varphi$. □

2.2 アウェアネス論理

アウェアネスの論理は論理的全能性の回避を目的として提案された認識論理の一種であり, コンピュータサイエンス・経済学・哲学の各領域に跨って発展してきた. ここではアウェアネスは「対象に気づく」や「対象へ意識を向ける」といった解釈を当てられる概念であり, 様相演算子の解釈としての知識とは区別される. 前節でみたように様相演算子としての知識は単にエージェントのスコープ内で常に真な命題のことであるが, ある命題に対するアウェアネスに命題の真理値は関わらない. より直観的に考えるならば, 例えば車内ライトを付けたまま駐車してしまいバッテリーが上がってしまったという状況を考える. エージェントは車内ライトが点いていることを知らなかったわけではなく, 知っていたがそのことを失念していたといえる. この「失念」を表現する概念がアウェアネスである. エージェントが知識を忘れないということ, つまり保持している全ての情報を推論に使用できるとすることが論理的全能性を引き起こしている.

アウェアネスの最初の論理的形式化はアウェアネス論理 (awareness logic) (Fagin and Halpern, 1988) によって行われた. なお, アウェアネス論理はアウェアネスの論理 (logic of awareness) とは区別され, 具体的な論理であることを念のため強調しておく. アウェアネス論理ではアウェアネス集合 (awareness set) と呼ばれる意識下にある命題の集合を組

み込み, 意識下にある知識とそうでない知識を区別しており, このアイデアはアウェアネスの論理における主要なアプローチとなっており, 多くの論理で使用されている (Sillari, 2008; Walker, 2014; Halpern and Piermont, 2020). 本節では (Shchipper, 2015) を参考にし, アウェアネス論理の説明を行う.

2.2.1 構文論

$\mathcal{P}$ を原子命題の可算集合, $\mathcal{G}$ をエージェントの可算集合とする. アウェアネス論理の言語 $\mathcal{L}^{\mathrm{AL}}$ は以下の文法によって生成される論理式の集合である.

$$\mathcal{L}^{\mathrm{AL}} \ni \varphi ::= \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid A_i\varphi \mid L_i\varphi \mid K_i\varphi,$$

ただし $p \in \mathcal{P}$ であり, $i \in \mathcal{G}$ である. 特殊な論理式 $\bot$ や二項演算子 $\vee$, $\to$ については認識論理と同様に定義される.

新しい様相演算子は三つである.

- $A_i\varphi$ で「i は φ に気づいている」を意味する.
- $L_i\varphi$ で「φ は i の意識下にない知識である」を意味する.
- $K_i\varphi$「φ は i の意識下にある知識である」を意味する.

以後, 意識下にない知識のことを非明示的知識 (implicit knowledge) , 意識下にある知識を明示的知識 (explicit knowledge) とよぶこととする. 非明示的知識について, 通常 'implicit knowledge' の訳語としては暗黙知が当てられるが, 'implicit knowledge' が指し示す概念とはニュアンスが異なるため, 暗黙知という訳語は採用しなかった.

2.2.2 意味論

アウェアネス論理の意味論はクリプキモデルにアウェアネス集合についての写像を加えたアウェアネス構造 (awareness structure) によって与えられる.

Definition 2.7. アウェアネス構造 M は組 $\langle W, \{R_i\}_{i\in\mathcal{G}}, \{\mathscr{A}_i\}_{i\in\mathcal{G}}, V\rangle$ である. ただし,

- W は空でない可能世界の集合;
- $R_i \subseteq W \times W$ は可能世界上の同値関係;
- $\mathscr{A}_i : W \to 2^{\mathcal{L}^{\mathrm{AL}}}$ は可能世界を引数として論理式の集合を返す写像;
- $V : \mathcal{P} \to 2^W$ は付値関数.

$\mathscr{A}_i(w)$ を w のアウェアネス集合といい, w でエージェント i が気づいている命題の集合を表す.

例えば, w_1 でエージェント a が p に気づいていることを表現する場合は, $p \in \mathscr{A}_a(w_1)$ となる. アウェアネス集合が含む論理式に関する制限はないため, $\varphi \wedge \psi \in \mathscr{A}_i(w)$ であって, $\psi \wedge \varphi \notin \mathscr{A}_i(w)$ というようなアウェアネス集合を考えることも可能である. これが意味するのは「東京で雨が降っている、もしくは大阪で雨が降っている」ことに気づいているが,「大阪で雨が降っている、もしくは東京で雨が降っている」ことには気づいていないという状況である. しかし, アウェアネスという概念の性質を考えると上記のようなケースは不合理であり, アウェアネス集合から除外されるべきである. アウェアネス集合に対する制限はいくつか考案されており, そのうち代表的な二つを以下に挙げる (Halpern, 2001).

- gpp (awareness is generated by premitive propositions): 任意の $i \in \mathcal{P}$ と $w \in W$ について, $\varphi \in \mathscr{A}_i(w)$ であるならば, またそのときに限り $At(\varphi) \subseteq \mathscr{A}_i(w)$. ただし At は論理式を取って, その論理式に登場する原子命題を返す写像.
- ka (agents know what they are aware of): 任意の $i \in \mathcal{P}$ について, $(w, v) \in R_i$ ならば $\mathscr{A}_i(w) = \mathscr{A}_i(v)$.

条件 gpp はいくつかの原子命題で構成されるような命題に気づいているときは, その命題を構成する原子命題にも気づいており, また原子命題に気づいているときは, その原子命題が構成する命題にも気づいているという意味である. この条件によって, 先ほどのような「東京で雨が降っている、もしくは大阪で雨が降っている」ことに気づいているが,「大阪で雨が降っている、もしくは東京で雨が降っている」ことには気づいていないというアウェアネスの状態は排除される. 条件 ka はエージェントが考え得る可能世界のグループ内では, アウェアネスの状態は一定であることを意味している. これは例えばある事象に対して a, b の二つの可能性が考えられるとき, 状態 a で気づいていることと, 状態 b で気づいていることは同じであるはずという直観に基づく制限である. どちらもリアリスティックなアウェアネスがもつ性質といえる.

したがって, 以後はアウェアネス構造の定義に条件 gpp および ka を加えたものを念頭に置いて, 議論を行うこととする.

Definition 2.8. 条件 gpp, ka を満たすアウェアネス構造 $M^{gpp,ka}$ は組 $\langle W, \{R_i\}_{i\in\mathcal{G}}, \{\mathscr{A}_i\}_{i\in\mathcal{G}}, V\rangle$ である. ただし,

- W は空でない可能世界の集合;

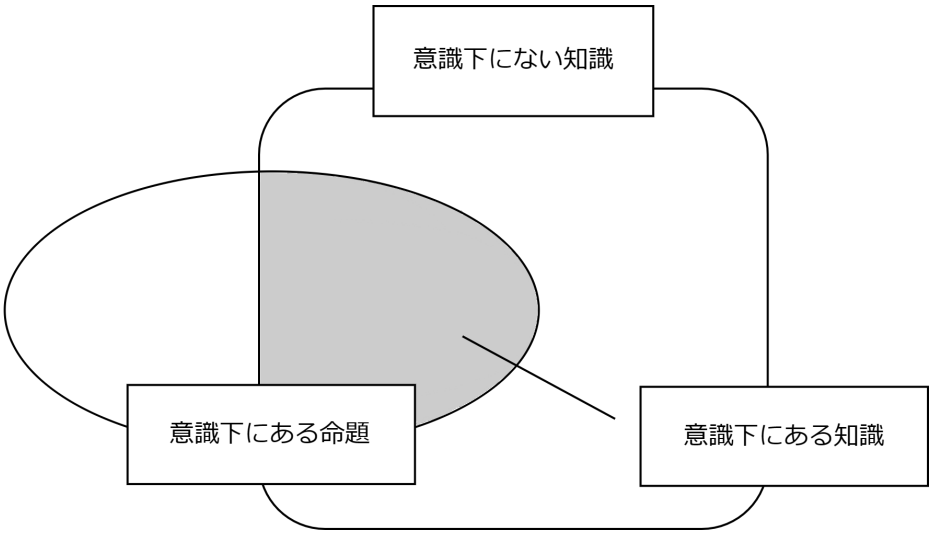

図 2.3　アウェアネス集合を使った意識下にある知識と意識下にない知識の区別.

- $R_i \subseteq W \times W$ は可能世界上の同値関係;
- $\mathscr{A}_i : W \to 2^{\mathcal{L}^{\mathrm{AL}}}$ は可能世界を引数として論理式の集合を返す写像. ただし $\mathscr{A}_i(w)$ は gpp と ka を満たす;
- $V : \mathcal{P} \to 2^W$ は付値関数.

また $M^{gpp,ka}$ のクラスを $C(GK)$ とかくこととする.

充足可能関係はアウェアネス構造と可能世界 $w \in W$ のペア (M, w) について, 以下のとおり定義される.

- $M, w \vDash p :\Leftrightarrow w \in V(p)$ となる.
- $M, w \vDash \neg\varphi :\Leftrightarrow M, w \nvDash \varphi$ となる.
- $M, w \vDash \varphi \wedge \psi :\Leftrightarrow M, w \vDash \varphi$ かつ $M, w \vDash \psi$となる.
- $M, w \vDash A_i\varphi :\Leftrightarrow \varphi \in \mathscr{A}_i(w)$ である.
- $M, w \vDash L_i\varphi :\Leftrightarrow (w, v) \in R_i$となる全ての v について, $M, v \vDash \varphi$ となる.
- $M, w \vDash K_i\varphi :\Leftrightarrow M, w \vDash A_i\varphi$, かつ $M, w \vDash L_i\varphi$ となる.

$K_i\varphi$ で表す明示的知識は, 非明示的知識であって, かつ φ に気づいているときに成立すると定義される. 図 2.3 はこの考え方を図示したもので, 灰色に色付けされている部分が意識下にある知識, すなわち明示的知識である.

2.2.3 アウェアネス構造による知識の記述

アウェアネス構造を使って, 具体的に明示的知識と非明示的知識がどのように表現されるのかを示す. 認識論理のときと同様に可能世界をノード, 到達可能性関係をエッジ, 各可能世界で真となる命題をノードへのラベルとし, またアウェアネス集合に含まれる命題を四角で囲んで表現する. なお視認性の観点から, 到達可能性関係の反射性は省略する.

原子命題 p_{open} を「新規出店をする」, p_{new} を「新たな調達ルートが存在する」とする.

Example 2.3. a はコンビニのオーナーで, 店舗の新規出店を考えている. しかし商品をより調達ルートの改善のことは意識に上っていない.

a は新規出店することを決定した場合と, しないことを決定した場合のいずれの場合でも, そのことを知ることができ, かつ意識下にあるため, $K_a p_{open}$ が成立する同値類と $K_a \neg p_{open}$ が成立する同値類が存在する. しかし調達ルートへは意識を向けていないため, p_{new} および $\neg p_{new}$ は四角で囲まれず, すなわち $\neg A_a p_{new} \wedge \neg A_a \neg p_{new}$. また調達ルートについて関心を払っていたとしても, 実際に存在するかどうかについては分からないため, p_{new} が成立している w_1, w_3 からは $\neg p_{new}$ が成立している w_2, w_4 がそれぞれ到達可能であり, $\neg L_a p_{new} \wedge \neg L_a \neg p_{new}$ が常に成立する.

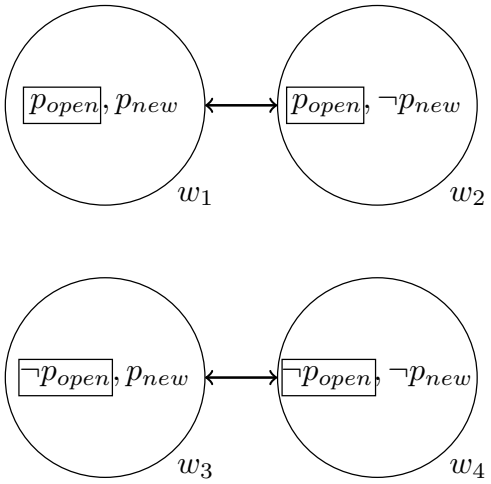

図 2.4　例 2.3 の知識状態に対応するアウェアネス構造.

2.2.4 ヒルベルト流公理系

アウェアネス構造のクラス $C(GK)$ に対応するヒルベルト流の公理系を与える

表 2.2 アウェアネス論理の公理系 $\mathbf{AL}^{gpp,ka}$.

公理	
TAUT	全ての古典命題論理のトートロジー
K	$L_i(\varphi \to \psi) \to (L_i\varphi \to L_i\psi)$
T	$L_i\varphi \to \varphi$
5	$\neg L_i\varphi \to L_i\neg L_i\varphi$
KL	$K_i\varphi \leftrightarrow A_i\varphi \wedge L_i\varphi$
AS	$A_i\varphi \leftrightarrow A_i\neg\varphi$
AC	$A_i(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow A_i\varphi \wedge A_i\psi$
AR	$A_i\varphi \leftrightarrow A_iA_i\varphi$
ALR	$A_i\varphi \leftrightarrow A_iL_i\varphi$
AKR	$A_i\varphi \leftrightarrow A_iK_i\varphi$
AI	$A_i\varphi \to L_iA_i\varphi$
UAI	$\neg A_i\varphi \to L_i\neg A_i\varphi$
推論規則	
MP	If $\vdash \varphi$ and $\vdash \varphi \to \psi$, then $\vdash \psi$
RN	If $\vdash \varphi$ then $\vdash L_i\varphi$

S5 をベースにアウェアネスの性質を規定する公理をいくつか加えたものになっている. L_i 演算子が **S5** における知識演算子に対応しており, K_i 演算子は公理 KL によって, 非明示的知識であって, かつ気づいている命題を表す演算子とされる. 公理 AS (Awareness Symmetry), AC (Awareness Conjunction), AR (Awareness Reflection), ALR (Awareness Implicit Knowledge Refection), AKR (Awareness Explicit Knowledge Refection) は条件 gpp が意味するアウェアネスの性質, AI (Awareness Introspection) および UAI (UnAwareness Introspection) は条件 ka が意味する性質を反映した公理である.

2.2.5 完全性定理

S5 と同様に $C(GK)$ と $\mathbf{AL}^{gpp,ka}$ についての完全性定理が成立する．意味論を与える構造の形の類似性から, 証明には **S5** と同じ戦略が使えるが, アウェアネス集合が追加された分, カノニカルモデルの更新やそれに伴う補題の証明が必要となる．

まずカノニカルモデルの定義を更新する．

Definition 2.9. カノニカルモデル $C(M)$ は組 $\langle C(W), \{C(R_i)\}_{i\in\mathcal{P}}, \{C(\mathscr{A}_i)\}_{i\in\mathcal{P}}, C(V)\rangle$ である．ただし,

- $C(W)$ は空でない極大無矛盾集合の族;
- $C(R_i)$ は $C(W)$ 上の二項関係であり, $(w,v) \in C(R)$ のとき, またそのときに限り $\{\varphi \mid L_i\varphi \in w\} \subseteq v$;
- $C(\mathscr{A}_i)(w) = \{\varphi \mid A_i\varphi \in w\}$;
- $C(V) : \mathcal{P} \to 2^{C(W)}$ は付値関数であり, $w \in C(V)(p)$ のとき, またそのときに限り $p \in w$.

Lemma 2.6. $\mathbf{AL}^{gpp,ka}$ のカノニカルモデルは $C(GK)$ に含まれる．

Proof. 条件 gpp について, 論理式の構成に関する帰納法を使って証明を行う．

- 原子論理式について, $p \in C(\mathscr{A}_i)(w)$ のとき, $At(p) = \{p\}$ であるため, 条件 gpp を満たす．
- $\varphi \wedge \psi$ の形をした論理式の場合, $\varphi \wedge \psi \in C(\mathscr{A}_i)(w)$ を仮定すると, $A_i(\varphi \wedge \psi) \in w$. w は $\mathbf{AL}^{gpp,ka}$ の極大無矛盾集合であるため, 公理 AR から $A_i(\varphi \wedge \psi)C(\mathscr{A}_i)(w)$.
- それ以外のケースについても, それぞれ対応する公理を使って証明できる．

続いて条件 ka について証明する．$(w,v) \in R_i$ と $\varphi \in C(\mathscr{A}_i)(w)$ を仮定する．よって $A_i\varphi \in w$．公理 AI より $L_iA_i\varphi \in w$．$C(R_i)$ の定義より, $A_i\varphi \in v$．したがって $\varphi \in C(\mathscr{A}_i)(v)$．次に $(w,v) \in R_i$ と $\varphi \notin C(\mathscr{A}_i)(w)$ を仮定する．公理 UAI より $\neg\varphi \notin C(\mathscr{A}_i)(v)$. したがって $(w,v) \in R_i$ ならば $C(\mathscr{A}_i)(v) = C(\mathscr{A}_i)(v)$. □

Lemma 2.7. 任意の論理式 φ について, $C(M), w \vDash \varphi$ ならば $\varphi \in w$.

Proof. 論理式の構成に関する帰納法を使って証明を行う．A_i, K_i 演算子以外については **S5** のとおり。

- A_i 演算子について, $C(M), w \vDash A_i\varphi$ を仮定する. $\varphi \in C(\mathscr{A}_i)(w)$ であるため、$A_i\varphi \in w$.
- K_i 演算子について, $C(M), w \vDash K_i\varphi$ を仮定する. $C(M), w \vDash A_i\varphi$ かつ $C(M), w \vDash L_i\varphi$ であり, $A_i\varphi \in w$ かつ $L_i\varphi \in w$. w は極大無矛盾集合であるため, $K_i\varphi \in w$.

□

Theorem 2.2 (完全性定理)**.** 任意の論理式 φ について, $C(GK) \vDash \varphi$ のとき, またそのときに限り $\vdash_{\mathbf{AL}^{gpp,ka}} \varphi$ が成立する.

Proof. ($\Rightarrow$)**S5** と同様に公理系の全ての公理について妥当な論理式であることと, 推論規則について前提が妥当な論理式であるとき, 結論も妥当であることを示せばよい. 公理 UAI についてのみ示し, 後は略す.

- 任意の $M^{gpp,ka}$ と w について, $M^{gpp,ka}, w \vDash \neg A_i\varphi$ を仮定すると, $\varphi \notin \mathscr{A}_i(w)$. 条件 ka より全ての w から到達可能な v で $\varphi \notin \mathscr{A}_i(v)$ よって $M^{gpp,ka}, w \vDash L_i\neg A_i\varphi$.

($\Leftarrow$) 補題 2.6 より任意の $w \in W$ について, $C(M), w \vDash \varphi$. 補題 2.7 より $\varphi \in w$. 補題 2.3 より $\vdash_{\mathbf{AL}^{gpp,ka}} \varphi$. □

2.3 公開告知論理

公開告知論理 (PAL: Public Announcement Logic) (Plaza, 1989) は動的認識論理の一種であり, これは観察やコミュニケーションによるエージェントが保持する情報の変化による知識状態の更新の記述や分析を行う論理全般を指す. 公開告知論理は全てのエージェントに対し公開される情報を取り扱う. 各エージェントに対して別々の情報が与えられるような複雑な情報の伝達に比べると, ある意味で粗い情報の変化を扱うため, 動的認識論理の中でも基本的な形式的体系といえる. 本研究はアウェアネスに関する認識的行為の記述は主軸とはしておらず, 基本的な動的演算子を導入するに留まっているため, 公開告知論理がもつ道具立ては十分機能する. 本節では (van Ditmarsch et al., 2007) を参考にし, 公開告知論理の説明を行う.

2.3.1 構文論

$\mathcal{P}$ を原子命題の可算集合, $\mathcal{G}$ をエージェントの可算集合としたとき, 公開告知論理の言語 $\mathcal{L}^{\mathrm{PAL}}$ は以下の文法によって生成される論理式の集合である.

$$\mathcal{L}^{\mathrm{PAL}} \ni \varphi ::= \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid K_i\varphi \mid [\varphi]\varphi,$$

ただし $p \in \mathcal{P}$ であり, $i \in \mathcal{G}$ である. 特殊な論理式 $\bot$ や二項演算子 $\vee$, $\rightarrow$ については認識論理と同様に定義される.

$[\varphi]$ は公開告知演算子といい, $[\varphi]\psi$ で「φ がアナウンスされた後に ψ が成り立つ.」を意味する. この演算子によって, ある命題が真であるという情報が全てのエージェントに伝わった後の知識状態が記述される.

2.3.2 意味論

公開告知論理の意味論はクリプキモデルによって与えられるが, 公開告知演算子の解釈に際してモデルの更新を行うため, その定義をする必要がある.

Definition 2.10. クリプキモデル $M = \langle W, \{R_i\}_{i\in\mathcal{G}}, V\rangle$ について, φ によって更新されたクリプキモデル $M[\varphi]$ は組 $\langle W', \{R'_i\}_{i\in\mathcal{G}}, V'\rangle$ である. ただし

- $W' \coloneqq W \cap \{w \mid M, w \vDash \varphi\}$;
- $R'_i \coloneqq R_i \cap (W' \times W')$ は可能世界上の同値関係;
- $V'(p) \coloneqq V(p) \cap W'$.

$M[\varphi]$ は φ が真となる可能世界に制限されたクリプキモデルであり, 情報 φ が公開された後で, 全てのエージェントが φ が偽である可能世界を考えなくなった状況を表している. これは例えば「東京で雨が降っている」という情報が公開された後では, 「東京で雨が降っていない」という可能性を思考から除外することを意味する.

充足可能関係はクリプキモデル $M = \langle W, \{R_i\}_{i\in\mathcal{G}}, V\rangle$ と可能世界 $w \in W$ のペア (M, w) について, 更新されたモデルを使って以下のとおり定義される.

- $M, w \vDash p :\Leftrightarrow w \in V(p)$ となる.
- $M, w \vDash \neg\varphi :\Leftrightarrow M, w \nvDash \varphi$ となる.
- $M, w \vDash \varphi \wedge \psi :\Leftrightarrow M, w \vDash \varphi$ かつ $M, w \vDash \psi$となる.

- $M, w \vDash K_i\varphi :\Leftrightarrow (w, v) \in R$ となる全ての v について, $M, v \vDash \varphi$ となる.
- $M, w \vDash [\varphi]\psi :\Leftrightarrow M, w \vDash \varphi$ ならば $M[\varphi], w \vDash \psi$となる.

2.3.3 公開告知論理による情報の公開とその後の知識の記述

Example 2.4. a は東京で雨が降っていることを知っているが, 大阪で雨が降っていることは知らない. その後, テレビによって大阪で雨が降っていることが知らされた.

命題「東京で雨が降っている」を p, 「大阪で雨が降っている」を q とする. また 2.1 節と同様に可能世界をノード, 到達可能性関係をエッジ, 各可能世界で真となる命題をノードへのラベルとする. なお視認性の観点から, 到達可能性関係の反射性は省略する.

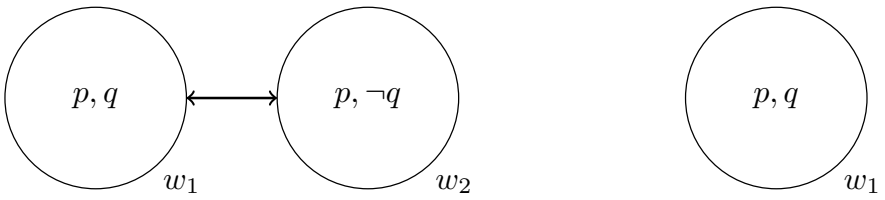

図 2.5　右: 例 2.4 の情報の公開前の知識状態に対応するクリプキモデル. 左: 例 2.4 の情報の公開後の知識状態に対応するクリプキモデル

情報の公開前の世界では図 2.1 と同じように, 実際の世界は w_1 であり, この世界から到達可能な世界は w_1 と w_2 で, その両方で p は真である. しかしながら w_2 で q は偽で, a は「大阪で雨が降っていない」可能性にも到達可能である. よって $M \vDash K_a p \wedge \neg K_a q$ が成立している, しかしながら q が真という情報が公開されたため, w_2 はモデルから排除され, w_1 のみが可能性として残る. この情報の公開は公開告知演算子によってかかれ, $M, w_1 \vDash [q]K_a(p \wedge q)$ である.

2.3.4 ヒルベルト流公理系

公開告知論理に対するヒルベルト流の公理系を与える.

公理 AP (Atomic Permanence) は, φ という情報の公開が行われた後, p が真ということは φ ならば p ということを意味する. ACM (Announcement Composition) によって, φ に続いて ψ が公開されるということは, φ の公開と φ の後で ψ という情報を公開するという情報が公開されることであるとされる. これらに加え, AN (Announcement Negation), ACN (Announcement Conjunction), AK (Announcement Knowledge) か

表 2.3　公開告知論理のヒルベルト流公理系 **PAL**.

公理	
TAUT	全ての古典命題論理のトートロジー
K	$K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$
T	$\vdash K_i\varphi \to \varphi$
5	$\vdash \neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i\varphi$
AP	$[\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$
AN	$[\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[\varphi]\psi)$
ACN	$[\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\chi)$
AK	$[\varphi]K\psi \leftrightarrow (\varphi \to K[\varphi]\psi)$
ACM	$[\varphi][\psi]\chi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\psi]\chi$
推論規則	
MP	If $\vdash \varphi$ and $\vdash \varphi \to \psi$, then $\vdash \psi$
KG	If $\vdash \varphi$ then $\vdash K_i\varphi$

ら推察されるように, 公開告知演算子がついた論理式は論理的に同値な公開告知演算子がついていない論理式に変換できる. $\mathcal{L}^{\mathrm{PAL}}$ は $\mathcal{L}^{\mathrm{EL}}$ に公開告知演算子を加えた拡張となっているため, **S5** と同様に $C(E)$ との間で完全性定理が成立する.

2.3.5　完全性定理

$\mathcal{L}^{\mathrm{PAL}}$ の論理式が $\mathcal{L}^{\mathrm{EL}}$ の論理式へと翻訳されることを示すことで **PAL** と $C(E)$ についての完全性定理の証明を行う.

まず, 公開告知演算子のついた論理式からその演算子がついていない論理式への変換を定義する.

Definition 2.11. 論理式の翻訳 $t : \mathcal{L}^{\mathrm{PAL}} \to \mathcal{L}^{\mathrm{EL}}$ は以下のように定義される.

$$
\begin{aligned}
&t(p) = p;\\
&t(\neg\varphi) = \neg t(\varphi);\\
&t(\varphi \wedge \psi) = t(\varphi) \wedge (\psi);\\
&t(K_i\varphi) = K_i t(\varphi);\\
&t([\varphi]p) = t(\varphi \to p);
\end{aligned}
$$

$t([\varphi]\neg\psi) = t(\varphi \to \neg[\varphi]\psi)$;
$t([\varphi](\psi \wedge \chi)) = t([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\chi)$;
$t([\varphi]K_i\psi) = t(\varphi \to K_i[\varphi]\psi)$;
$t([\varphi][\psi]\chi) = t([(\varphi \wedge [\varphi]\psi)]\chi)$.

続いて, 論理式の複雑性について定義をする.

Definition 2.12. 複雑性を示す関数 $c : \mathcal{L}^{\mathrm{PAL}} \to \mathbb{N}$ は以下のように定義される.

$c(p) = 1$;
$c(\neg\varphi) = 1 + c(\varphi)$;
$c(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max(c(\varphi), c(\psi))$;
$c(K_i\varphi) = 1 + c(\varphi)$;
$c([\varphi!]\psi) = (4 + c(\varphi)) \times c(\psi)$;

Lemma 2.8. 任意の論理式 $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathrm{PAL}}$ について, $\vdash_{\mathbf{PAL}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ が成立する.

Proof. $c(\varphi)$ に関する帰納法を使って証明する.

- 原子論理式 p について, $p = t(p)$ であるため, 公理 TAUT より $\vdash_{\mathbf{PAL}} p \leftrightarrow t(p)$.
- 二項演算子および知識演算子については, 同様の方法により証明できる.
- φ が $[\psi]p$ の形をしているときについて, $c([\psi]p) > c(\psi \to p)$ のため, 帰納法の仮定より $\vdash_{\mathbf{PAL}} \psi \to p \leftrightarrow t(\psi \to p)$. 公理 AP より, $\vdash_{\mathbf{PAL}} [\psi]p \leftrightarrow t([\psi]p)$.
- $[\psi]\neg\chi$, $[\psi](\chi \wedge \sigma)$, $[\psi]K_i\chi$, $[\psi][\chi]\sigma$ の形をしているときについても, 対応する公理を使って上記のケースと同様に証明できる.

□

Theorem 2.3 (完全性定理)**.** 任意の論理式 φ について, $C(E) \vDash \varphi$ のとき, またそのときに限り $\vdash_{\mathbf{PAL}} \varphi$ が成立する.

Proof. ($\Rightarrow$) **S5** と同様に公理系の全ての公理について妥当な論理式であることと, 推論規則について前提が妥当な論理式であるとき, 結論も妥当であることを示せばよい. 公理 ACM のみについて示し, 後は略す.

- 任意の M と w について, $M, w \vDash [\varphi][\psi]\chi$ は φ によって更新したモデルを M' とし, M' について ψ によって更新したモデルを M'' とすると, $M, w \vDash \varphi$ ならば $M', w \vDash \psi$ と, $M', w \vDash \psi$ ならば $M'', w \vDash \chi$ が成立するということである. 一方

で $M, w \vDash [\varphi \wedge [\varphi]\psi]\chi$ は $M, w \vDash \varphi$ かつ ($M, w \vDash \varphi$ ならば $M', w \vDash \psi$) ならば $M[\varphi \wedge [\varphi]\psi], w \vDash \chi$ を意味する. $M[\varphi \wedge [\varphi]\psi]$ は φ が真であり, かつ「φ が真ならば「φ が真ならば ψ も真」」という命題によって更新したモデルで χ が真ということである. このモデルは φ が真であり, かつ ψ が真である世界のみで構成されており, M'' と一致する. $M, w \vDash \varphi$ ならば $M', w \vDash \psi$, $M', w \vDash \psi$ ならば $M'', w \vDash \chi$, $M, w \vDash \varphi$, ($M, w \vDash \varphi$ ならば $M', w \vDash \psi$) を仮定すれば, $M'', w \vDash \chi$ が示せる. 逆方向も同様に証明できる.

($\Leftarrow$) 補題 2.8 と健全性より $\vDash \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$. 仮定より $\vDash t(\varphi)$ $t(\varphi) \in \mathcal{L}^{\mathrm{EL}}$ のため, $\vdash_{\mathbf{S5}} t(\varphi)$. **S5** は **PA** の部分集合であるため, $\vdash_{\mathbf{PAL}} t(\varphi)$. したがって $\vdash_{\mathrm{PA}} \varphi$. □

第 3 章

本論

前章で述べたアウェアネス論理が提案したアウェアネス集合と呼ばれる意識を向けている命題の集合への所属如何によって, 明示的知識と非明示的知識を分類するというアイデアは, 多くのアウェアネスの論理で採用されている. しかしながらアウェアネスの状態は命題だけでなく, そのエージェントの可能世界の区別にも影響を与える. エージェントは気づいていない命題のみが異なる真理値をもつ, 二つの可能世界の区別が認識できない. アウェアネス論理は命題に対してのみ注目しており, この種の区別については表現できない. そしてこのことは, この後導入する例で見るように他のエージェントの思考の推測を含むような複雑な知識を表現する際に問題となる. そこで本研究では, 命題が意識下にあるということ自体がエージェントが考えることのできる可能世界の認識に影響を与えること, つまりエージェントの思考の幅に影響を及ぼすことを表現するため, アウェアネスの状態に連動した可能世界間の無区別関係 (indistinguishable relation) を組み込んだ分割付きアウェアネス論理 ($\mathcal{ALP}$: Awareness Logic with Partitions) を導入する. これによって各エージェントが自身のアウェアネスの状態に基づいて推論した知識を既存のアプローチよりも正しく記述することができる.

図 3.1 は (Fagin and Halpern, 1988) のアイデアと本研究のものの比較である. エージェントは ψ に気づいているという条件 (Fagin and Halpern, 1988) では, φ には気づいていないにも関わらずそれ以外の真理値, つまり世界の在り方が同じ二つの可能世界の区別ができている. 本論理ではこの部分の修正を試み, 図 3.1 で示したように φ と χ についてのみ真理値が異なるような可能世界の区別がついていないことを表現できるようにする.

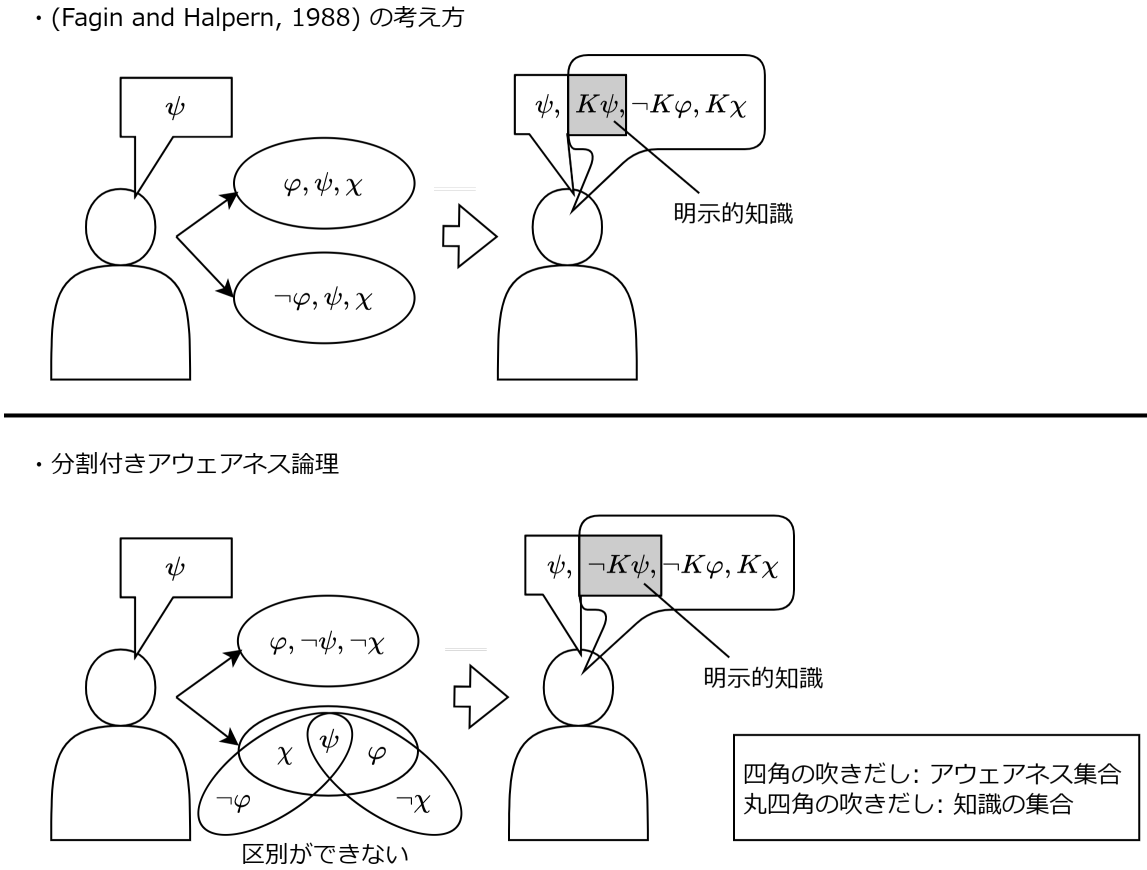

図 3.1　アウェアネス論理と本論理の比較

3.1　動機付けの例

既存のアプローチで記述しきれない状況として, 以下のコンビニエンスストアの例を与え, 本論理の導入の動機づけとする.

Example 3.1. エージェント a とエージェント b をそれぞれコンビニ A とコンビニ B のオーナーとし, 彼らは自身の店舗の新規出店を考えている. しかし商品価格が高騰しているため, 無謀な拡大は大きな損失を生む. このとき a は商品をより安く仕入れられるように調達ルートを改善することを考えているが, b がそのことを意識していないことには気づいていない. ただし, 新たな調達ルートがある場合, どのコンビニがそのルートを使うかは公開情報になるものとする.

この例ではオーナー a が b の決断を知ることは, a 自身の意思決定に有用であるため, a

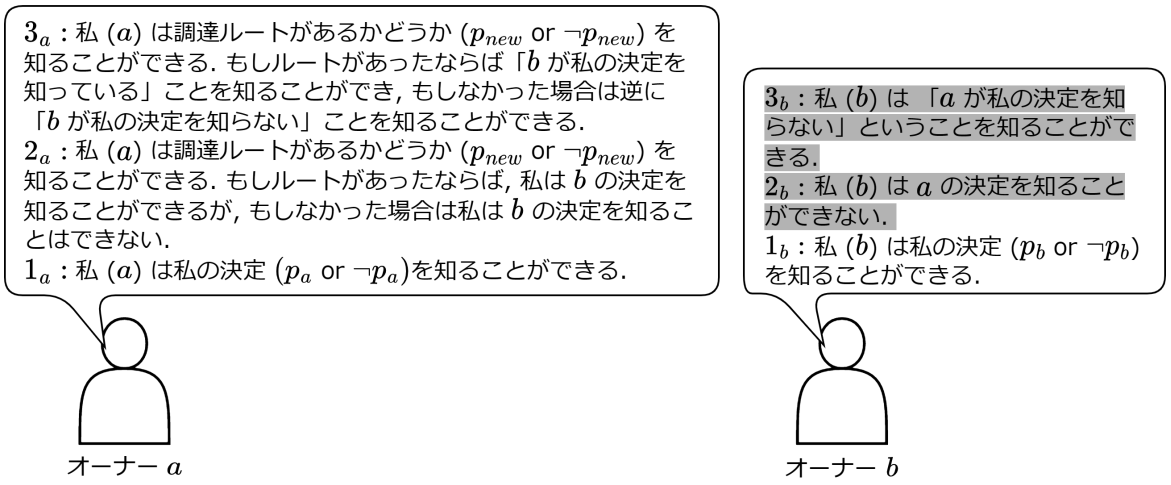

図 3.2　例 3.1 の各エージェントの知識および思考.

は b の思考を推測しようとする. 例えば b が新店舗を開くと決めた場合, a も新規出店を決定すると考えられる. そうしないと a のコンビニの市場占有率が下がり, 不利益を被る虞れがあるからである.

原子命題 p_a を「a が店を拡張する」, p_b を「b が店を拡張する」とし, p_{new} を「新たな調達ルートが存在する」とする. 明示的知識を表現する演算子をそれぞれ K_a と K_b とする.

p_{new} が真である場合, 相手方がそのルートを使って新規出店をするかどうかを知りうるため, p_{new} に気づいている a は a と b の決定を知ることができる. 一方で, b は自身の決定についてのみ知ることができる. というのも, a の知識状態についての手がかりを持たないので, b はどのような場合でも自身の選択 (p_b もしくは $\neg p_b$) しか知ることができない. それぞれのオーナーの知識および思考をまとめたものが図 3.2 である.

図 3.2 にまとめられた各エージェントの知識状態に対応するクリプキモデルの構築を試みる (図 3.3). また 2.1 節と同様に可能世界をノード, 到達可能性関係をエッジ, 各可能世界で真となる命題をノードへのラベルとし, またアウェアネス集合に含まれる命題を四角で囲んで表現する. なお視認性の観点から, 到達可能性関係の反射性は省略する.

基本的にそれぞれのオーナーは相手方の選択, b の場合は a の, a の場合は b のもの, については互いに未知である. しかし, p_{new} が成立する世界では互いの選択を知っている. したがって, p_b と p_a のそれぞれについて異なる評価を持ち, かつ p_{new} が真となるような可能世界間に到達可能性関係は存在しない. またアウェアネスの状態について, a は

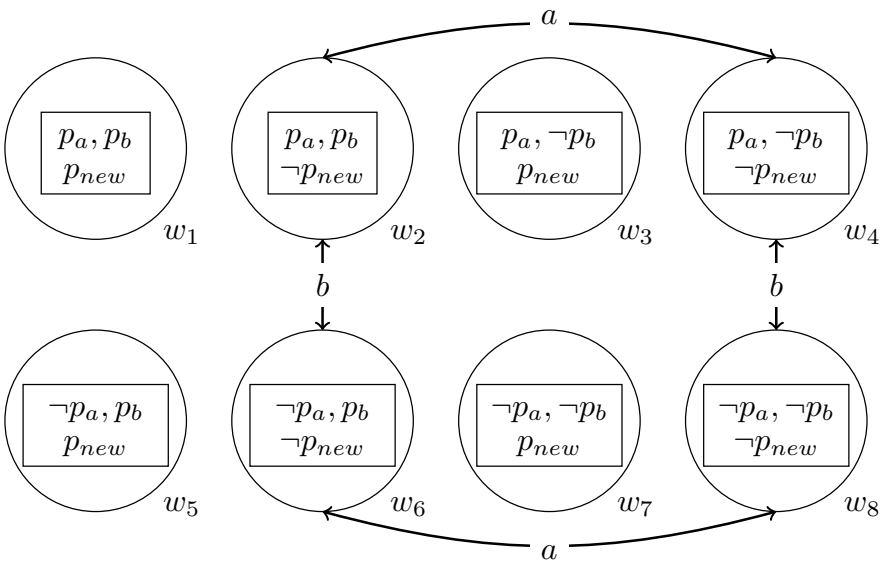

図 3.3　オーナー a の知識および思考に対応するクリプキモデル.

p_a, p_b,p_{new} に気づいているが, b は p_{new} に気づいていない. このことをアウェアネス集合を使ってまとめると, $\mathscr{A}_a = \{p_a, p_b, n\}$ と $\mathscr{A}_b = \{p_a, p_b\}$ となる.

図 3.1 の 2_b と 3_b は命題にのみ焦点を当てる既存のアプローチでは正しく表現できない. このことを示すため, 図 3.2 のクリプキモデルで論理式 $K_bK_ap_b$ の w_1 での真理値を考える.

w_1 における $K_bK_ap_b$ は, p_b が b のアウェアネス集合に含まれ, かつ w_1 から b でラベル付けされたエッジで到達できる全ての可能世界, ここでは w_1 のみ, において K_ap_b が成立することを意味する. 同じように K_ap_b は p_b が a のアウェアネス集合に含まれており, かつ p_b が a でラベル付けされたエッジ上で w_1 から到達できる全ての可能世界, ここでは w_1, において成立することを意味する. p_b は w_1 で成り立つため, この論理式は w_1 で成り立つ.

しかし, $K_bK_ap_b$ は図 3.1 の 3_b と矛盾しており, 直観的にはこの式は w_1 では成立しないはずである. これは b は p_{new} を気づいていないため, a が p_b を知る手がかりを持っているということを考えられないことによる. b が p_{new} に気づいていないということは, w_1 と w_2 のような p_{new} のみの真理値が異なる可能世界は, b の認識状態では区別がつかないということを意味する. よって, b から見たクリプキモデルは図 3.3 のような形になるはずであり, このとき $K_bK_ap_b$ は w_1', w_2', w_3' と w_4' という全ての可能世界で p_b が成立するかどうかで評価される. このクリプキモデルでは $K_bK_ap_b$ は成立しない.

図 3.3 は議論されている全ての原子命題に気づいているエージェント, つまり a の知識

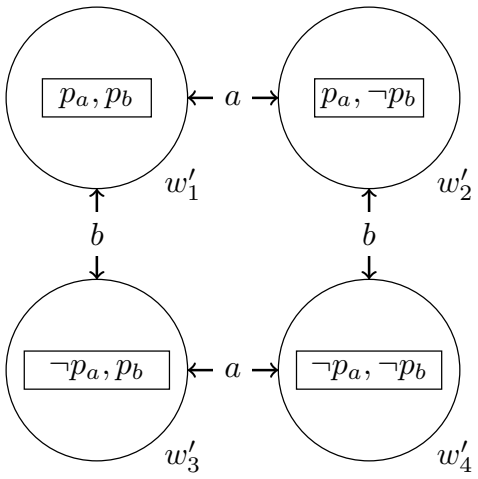

図 3.4　オーナー b の知識および思考に対応するクリプキモデル.

状態に対応するクリプキモデルで, 一方で図 3.4 は a に比べて気づきが欠けている b の知識状態に対応するクリプキモデルであり, 構造が全く異なっているため, 両者の知識状態を統一的に記述することができない.

なお, 2_b と矛盾する $K_b p_a$ という論理式も, 同じ理由で図 3.3 の w_1 で成立してしまう.

3.2　分割付きアウェアネス論理

3.2.1　構文論

$\mathcal{P}$ を原子命題の可算集合, $\mathcal{G}$ をエージェントの可算集合とする. 分割付きアウェアネス論理の言語 $\mathcal{L}^{\mathrm{ALP}}$ は以下の文法によって生成される論理式の集合である.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \ni \varphi ::= \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid A^i_j\varphi \mid L_j\varphi \mid [\equiv]^i_j\varphi \mid C^i_j\varphi \mid K^i_j\varphi,$$

ただし $p \in \mathcal{P}$ であり, $i \in \mathcal{G}$ である. 特殊な論理式 $\bot$ や二項演算子 $\vee$, $\rightarrow$ については, 認識論理と同様に定義される.

A^i_j, L_j, K^i_j は, それぞれアウェアネス演算子, 非明示的知識演算子, 明示的知識演算子である. ただし, 上付きの添え字はエージェントの視点を意味し, 下付きの添え字は気づきもしくは知識の主体を示す. 例えば, $A^i_j\varphi$ は「i の視点で j は φ に気づいている.」を意味する. i の視点の形式的な定義については後述する. $[\equiv]^i_j$ と C^i_j については, 明示的知識を定義するために導入する特殊な演算子であり, 完全性定理の証明の際に効果を発揮する. それぞれの意味としては, $[\equiv]^i_j$ は i の視点からみた j のアウェアネスの状態で真となる命

題を示し, C_j^i は i の視点からみた j の非明示的知識の一種で, L_j よりも強い概念である. すなわち $C_j^i\varphi$ ならば $L_j\varphi$ となる.

3.2.2 意味論

分割付きアウェアネス論理の意味論はクリプキモデルをベースとした, アウェアネス付き認識モデル (epistemic model with awareness) によって与えられる.

Definition 3.1. アウェアネス付き認識モデル M は組 $\langle W, \{R_i\}_{i\in\mathcal{G}}, V, \{\mathscr{A}_j^i\}_{i,j\in\mathcal{G}}, \{\equiv_j^i\}_{i,j\in\mathcal{G}}\rangle$ である. ただし,

- W は空でない可能世界の集合;
- $R_i \subseteq W \times W$ は可能世界上の同値関係;
- $V : \mathcal{P} \to 2^W$ は付値関数;
- $\mathscr{A}_j^i$ は空でなく原子命題の集合. ただし $\mathscr{A}_j^i \subseteq \mathscr{A}_i^i$;
- $(w, v) \in \equiv_j^i$ となるのは, 全ての $p \in \mathscr{A}_j^i$ に関して $w \in V(p)$ のとき, またそのときに限り $v \in V(p)$ が成立するときである.

$\mathscr{A}_j^i$ は i 視点の j に関するアウェアネス集合であり, i 視点の j が気づいている原子命題の集合を意味する. アウェアネス論理では命題の集合をとったが, モデルの定義の段階で原子命題の集合をとることで, 条件 gpp に対応するアウェアネスの性質, すなわち原子命題に気づいていることと, それらによって構成できる複雑な命題にも気づいていることが同値となること, を追加の条件を付与することなく反映することができる. $\equiv_j^i$ はある命題に気づいていないがゆえに, 区別がついていない可能世界の間に引かれる同値関係である. 直観的にはアウェアネスの欠けによって, 思考が制限されることを反映したものである. この関係 $\equiv_j^i$ を無区別関係とよぶこととする. エージェント i の視点とは, i が考える各エージェントの知識状態に対応する認識構造のことを指し, これは上付きの添え字が i に制限されたアウェアネス付き認識モデル $M = \langle W, \{R_j\}_{j\in\mathcal{G}}, V, \{\mathscr{A}_j^i\}_{j\in\mathcal{G}}, \{\equiv_j^i\}_{j\in\mathcal{G}}\rangle$ である.

アウェアネス集合の定義には, ローカルな定義とグローバルな定義がある. 前者はアウェアネス論理のように, $\mathscr{A}_i$ を可能世界ごとにアウェアネス集合の要素を変更する写像としてを定義するもので, 後者はアウェアネス集合を全ての可能世界で同じものとして定義するものである.

一般にアウェアネスの状態は, エージェントのスコープ内で固定されるものと考えられ,

これがアウェアネス論理の条件 ka が提案された理由でもあった. したがって, 一人のエージェントのみを考えるケースなどの特定のエージェントのスコープの外に関する議論をしない場合はグローバルな定義が採用される. 一方, ローカルな定義はエージェントのスコープの外におけるそのエージェントのアウェアネスの状態を表現することができる. これにより, エージェントのスコープ内でのアウェアネスの状態と, そのスコープから外れた他のエージェントのスコープ内でのそのアウェアネスの状態が異なる状態を表現することができるため, 複数のエージェントを扱う場合に採用される.

本論理はグローバルな定義を採用している. なぜならグローバルな定義であっても, 本論理の特性上, アウェアネスの状態を各エージェントの視点から各エージェントごとに個別に設定することができ, ローカルな定義のメリットを享受することができるためである.

充足可能関係はアウェアネス付き認識モデルと可能世界 $w \in W$ のペア (M, w) について, 以下のとおり定義される.

- $M, w \vDash p :\Leftrightarrow w \in V(p)$ となる.
- $M, w \vDash \neg\varphi :\Leftrightarrow M, w \nvDash \varphi$ となる.
- $M, w \vDash \varphi \wedge \psi :\Leftrightarrow M, w \vDash \varphi$ かつ $M, w \vDash \psi$となる.
- $M, w \vDash A_i\varphi :\Leftrightarrow \varphi \in \mathscr{A}_i(w)$ である.
- $M, w \vDash L_i\varphi :\Leftrightarrow (w, v) \in R_i$となる全ての v について, $M, v \vDash \varphi$ となる.
- $M, w \vDash K_i\varphi :\Leftrightarrow M, w \vDash A_i\varphi$, かつ $M, w \vDash L_i\varphi$ となる.
- $M, w \vDash [\equiv]^i_j\varphi :\Leftrightarrow (w, v) \in \equiv^i_j$ となる全ての v について, $M, v \vDash \varphi$ となる.
- $M, w \vDash C^i_j\varphi :\Leftrightarrow (w, v) \in (R_j \circ \equiv^i_j)^+$となる全ての v について, $M, v \vDash \varphi$ となる.
- $M, w \vDash K^i_j\varphi :\Leftrightarrow M, w \vDash A^i_j\varphi$, かつ $M, w \vDash C^i_j\varphi$ となる.

なお, ある二項関係 R の推移閉包 R^+ は, R を含み, かつ推移的である最小の関係である. また R と R' の合成 $R \circ R'$ は, $\{(x, y) \mid$ ある z が存在して, $(x, z) \in R'$かつ $(z, y) \in R\}$ と定義する.

無区別関係 $\equiv^i_j$ と到達可能性関係 R_j が両方とも同値関係として定義されているため, $(R_j \circ \equiv^i_j)^+$ も同値関係となる. これは逆方向であっても, 順方向に比べて余分なステップの消費はあるものの到達可能であるためである. $R_j \subseteq (R_j \circ \equiv^i_j)^+$ であるため, $(R_j \circ \equiv^i_j)^+$ は可能世界の粗い分割を与え, アウェアネスの欠けによって区別ができない可能世界群は同値類として潰される. これによって「エージェント a は「エージェント b が p を知っている」ことを知っている」のような知識を, 気づきによる思考の幅の縮小の影響を加味した上で正しく扱うことができるようになる. また, 定義から $[\equiv]^i_j L_j\varphi$ が $R_j \circ \equiv^i_j$ に対応することが分かるが, これは推移閉包とは異なり, 同値関係とはならない.

3.2.3 ヒルベルト流公理系

分割付きアウェアネス論理に対応するヒルベルト流公理系 **ALP** を与える.

表 3.1 分割付きアウェアネス論理の公理系 **ALP**.

公理	
TAUT	全ての古典命題論理のトートロジー
AN	$\vdash A^i_j\varphi \leftrightarrow A^i_j\neg\varphi$
ACN	$\vdash A^i_j(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow A^i_j\varphi \wedge A^i_j\psi$
AA	$\vdash A^i_j\varphi \leftrightarrow A^i_jA^k_l\varphi$
A[≡]	$\vdash A^i_j\varphi \leftrightarrow A^i_j[\equiv]^k_l\varphi$
ACM	$\vdash A^i_j\varphi \leftrightarrow A^i_jC^k_l\varphi$
AL	$\vdash A^i_j\varphi \leftrightarrow A^i_jL_k\varphi$
AK	$\vdash A^i_j\varphi \leftrightarrow A^i_jK^k_l\varphi$
AN[≡]	$\vdash A^i_j\varphi \wedge \varphi \rightarrow [\equiv]^i_j\varphi$
$\mathrm{K_L}$	$\vdash L_j(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (L_j\varphi \rightarrow L_j\psi)$
$\mathrm{T_L}$	$\vdash L_j\varphi \rightarrow \varphi$
5_{L}	$\vdash \neg L_j\varphi \rightarrow L_j\neg L_j\varphi$
$\mathrm{K}_{[\equiv]}$	$\vdash [\equiv]^i_j(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ([\equiv]^i_j\varphi \rightarrow [\equiv]^i_j\psi)$
$\mathrm{T}_{[\equiv]}$	$\vdash [\equiv]^i_j\varphi \rightarrow \varphi$
$5_{[\equiv]}$	$\vdash \neg[\equiv]^i_j\varphi \rightarrow [\equiv]^i_j\neg[\equiv]^i_j\varphi$
$\mathrm{K_C}$	$\vdash C^i_j(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (C^i_j\varphi \rightarrow C^i_j\psi)$
MIX	$\vdash C^i_j\varphi \rightarrow \varphi \wedge [\equiv]^i_jL_jC^i_j\varphi$
IND	$\vdash C^i_j(\varphi \rightarrow [\equiv]^i_jL_j\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow C^i_j\varphi)$
KAC	$\vdash K^i_j\varphi \leftrightarrow A^i_j\varphi \wedge C^i_j\varphi$
推論規則	
MP	If $\vdash \varphi$ and $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, then $\vdash \psi$
LG	If $\vdash \varphi$ then $\vdash L_j\varphi$
[≡]G	If $\vdash \varphi$ then $\vdash [\equiv]^i_j\varphi$
CG	If $\vdash \varphi$ then $\vdash C^i_j\varphi$

$\mathbf{AL}^{gpp,ka}$ をベースに, 新たに追加した $[\equiv^i_j]$ と C^i_j 演算子に対して公理および推論規則

を追加したものとなっている. 公理 AN, ACN, AA, A[≡], ACM, AL, AK は条件 gpp が意味するアウェアネスの性質を反映した公理である. $\mathrm{K_L}, \mathrm{T_L}, 5_\mathrm{L}, \mathrm{K}_{[\equiv]}, \mathrm{T}_{[\equiv]}, 5_{[\equiv]}$ は, 認識論理における K, T, 5 を採用する. 認識論理において負の内省性とよばれる $mathrm5_L$ について, 本論理ではほとんどのアウェアネスの論理と同様に, K_j^i 演算子では成立しない. 代わりに, $\neg K_j^i\varphi \wedge A_j^i\neg K_j^i \rightarrow K_j^i\neg\varphi$ が成立する. これは前件にアウェアネス演算子を加えることで, 知らないことを知っているのは, その命題に気づいているときに限るという条件を加えた論理式である. 公理 $\mathrm{K_C}$, IND, MIX は, 共通知識 (common knowledge) 演算子をもつ論理体系の公理に基づいている (van Ditmarsch et al., 2007). これは共通知識の定義が本論理と同様に推移閉包を使って定義されるためである. また K_j^i 演算子は公理 KAC によって, C_j^i が示す強い非明示的知識であって, かつ気づいている命題を表す演算子とされる.

3.2.4 完全性定理

健全性の証明

Theorem 3.1 (健全性)**.** 任意の論理式 $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathrm{ALP}}$ について, $\vdash \varphi$ ならば $\vDash \varphi$.

Proof. **S5** と同様に全ての公理が妥当な論理式であり, かつ推論規則について前提が妥当な論理式であるとき, 結論も妥当であることを示せばよい. 二項演算子, L_j, $[\equiv]_j^i$ および推論規則については, **S5** と同様の手法で証明できる. A_j^i と K_j^i は $\mathbf{AL}^{gpp,ka}$ と同様の手法で導ける.

- $\mathrm{K_C}$ について, $M, w \vDash C_j^i(\varphi \rightarrow \psi)$ と $M, w \vDash C_j^i\varphi$ を仮定する. 全ての $(w, v) \in (R_j \circ \equiv_j^i)^+$ となるような v で, $M, v \vDash \varphi \rightarrow \psi$ および $M, v \vDash \varphi$ なので, $M, v \vDash \psi$. よって $M, w \vDash C_j^i\psi$.
- MIX について, $M, w \vDash C_j^i\varphi$ を仮定する. $(R_j \circ \equiv_j^i)^+$ は同値関係であり, 推移閉包であるため, $M, w \vDash \varphi \wedge [\equiv]_j^i L_j C_j^i\varphi$.
- IND について, $M, w \vDash C_j^i(\varphi \rightarrow [\equiv]_j^i L_j\varphi)$, and $M, w \vDash \varphi$ を仮定すると, 全ての $(w, v) \in (R_j \circ \equiv_j^i)^+$ となる v で, $M, v \vDash \varphi \rightarrow [\equiv]_j^i L_j\varphi$. よって $M, w \vDash [\equiv]_j^i L_j\varphi$. つまり φ が $R_j \circ \equiv_j^i$ 上で w から到達可能な全ての可能世界で成立し, かつ $[\equiv]_j^i L_j\varphi$ も同じ世界で成立することを意味する. したがって $M, w \vDash \varphi \rightarrow C_j^i\varphi$.

□

完全性の証明

本論理でも前章のようにカノニカルモデルを使った完全性の証明を行う．しかしながら **ALP** は, $\Phi = \{([\equiv]^i_j L_j)^n \varphi \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg C^i_j \varphi\}$ のような論理式の集合が取れるため, 無矛盾集合のコンパクト性は失われている．ただし $([\equiv]^i_j L_j)^n$ は $[\equiv]^i_j L_j$ の n 回の繰り返しを意味する．このため **S5** の証明と同様のテクニックは使用できないため, 推移閉包についての様相をもつ論理で使われる有限個に制限された論理式の集合に対するカノニカルモデルを新たに定義する必要がある (van Ditmarsch et al., 2007).

まず有限個に制限された論理式の集合として閉包を定義する．

Definition 3.2. $cl : \mathcal{L} \to 2^{\mathcal{L}}$ を任意の論理式 $\varphi \in \mathcal{L}$ について, 以下の条件を満たす最小の集合とする．

1. $\varphi \in cl(\varphi)$;
2. $\psi \in cl(\varphi)$ ならば $sub(\psi) \subseteq cl(\varphi)$. ただし $sub(\psi)$ は ψ の部分論理式の集合;
3. $\psi \in cl(\varphi)$ かつ ψ が否定の形をしていないならば, $\neg\psi \in cl(\varphi)$;
4. $C^i_j \psi \in cl(\varphi)$, ならば $[\equiv]^i_j L_j C^i_j \psi \in cl(\varphi)$.

このように作られた閉包 $cl(\varphi)$ を φ の閉包とよぶ.

Lemma 3.1 (閉包の有限性)**.** 任意の φ について, $cl(\varphi)$ は有限集合である．

Proof. φ の構成に関する帰納法を使って直ちに導ける． □

Definition 3.3 (閉包上の極大無矛盾集合)**.** Φ を閉包とする．Γ が Φ 上の極大無矛盾集合であるとは,

1. $\Gamma \subseteq \Phi$;
2. $\Gamma \nvdash \bot$;
3. $\Gamma \subset \Gamma'$ かつ $\Gamma' \nvdash \bot$ となるような Γ' が存在しない.

が成立するときである．

Lemma 3.2. Φ を閉包とする．Γ が Φ 上の無矛盾集合であるならば, $\Gamma \subseteq \Delta$ となるような極大無矛盾集合 Δ が存在する．

Proof. Φ の有限性とリンデンバウムの補題で使用した極大無矛盾集合の構成方法を使って証明できる． □

次に閉包についてのカノニカルモデルを定義する.

Definition 3.4. Φ を閉包とする. Φ についてのカノニカルモデル $C(\mathrm{ALP})$ は組 $\langle C(W), \{C(R_j)\}_{j\in\mathcal{G}}, C(V), \{C(\mathscr{A}_j^i)\}_{i,j\in\mathcal{G}}, \{C(\equiv_j^i)\}_{i,j\in\mathcal{G}}\rangle$ である. ただし,

- $C(W) \coloneqq \{\Gamma \mid \Gamma$は$\Phi$上の極大無矛盾集合 $\}$;
- $(w,v) \in C(R_j)$ となるのは, $\{\varphi \mid L_j\varphi \in w\} \subseteq v$ が成り立つときである;
- $C(V)(p) \coloneqq \{\Gamma \mid p \in \Gamma\}$;
- $C(\mathscr{A}_j^i) \coloneqq \{p \mid$ 全ての $w \in W$ について, $A_i^i p \wedge A_j^i p \in w\}$;
- $(w,v) \in C(\equiv_j^i)$ となるのは, $\{\varphi \mid [\equiv]_j^i \varphi \in w\} \subseteq v$ が成り立つときである.

Lemma 3.3. 任意の論理式 φ について, φ の閉包についてのカノニカルモデルは, アウェアネス付き認識モデルである.

Proof. φ の閉包についてのカノニカルモデルが, アウェアネス付き認識モデルの定義を満たすことを示せばよい.

- $C(R_i)$ については, **S5** と同じ戦略で証明できるため略す.
- $C(\mathscr{A}_j^i)$ について, $p \in C(\mathscr{A}_j^i)$ ならば, 任意の論理式 $p \in \mathcal{P}$ について, $p \in C(\mathscr{A}_i^i)$ であることを証明すればよい. $p \in C(\mathscr{A}_j^i)$ を仮定すると, 全ての $w \in C(W)$ について, $A_i^i p \wedge A_j^i p \in w$ である. よって, 全ての $w \in C(W)$ で $A_i^i p \wedge A_i^i p \in w$.
- $C(\equiv_j^i)$ について, 任意の $(w,v) \in C(\equiv_j^i)$ と $p \in C(\mathscr{A}_j^i)$ について, $w \in C(V)(p)$ であるならば, $v \in C(V)(p)$ であり, かつ逆も成立することを示せばよい. 順方向について, 任意の論理式 $p \in C(\mathscr{A}_j^i)$ について, $w \in C(V)(p)$ を仮定すると, $p \in w$ かつ $A_j^i p \in w$ がいえ, AN[$\equiv$] より, $p \in v$. 逆方向も同様に証明ができる.

□

続いて, カノニカルモデル上の C_j^i パスを定義する.

Definition 3.5. Φ を閉包とする. Γ からの C_j^i パスは $0 \leq k \leq n$ となる全ての k について, $(\Gamma_k, \Gamma_{k+1}) \in C(R_j) \circ C(\equiv_j^i)$ となる Φ 上の極大無矛盾集合の列 $\Gamma_0, \cdots, \Gamma_n$ である. ただし $\Gamma_0 = \Gamma$ である. 列 $\Gamma_0, \cdots, \Gamma_n$ の長さは n とする. φ パスは $0 \leq k \leq n$ となる全ての k について, $\varphi \in \Gamma_k$ となる Φ 上の極大無矛盾集合の列 $\Gamma_0, \cdots, \Gamma_n$ である.

Lemma 3.4. Φ を閉包とし, Γ, Δ を Φ 上の極大無矛盾集合とする. 集合 $\bigwedge\Gamma \wedge \neg[\equiv]_j^i L_j \neg \bigwedge\Delta$ が無矛盾集合であるならば, $(\Gamma, \Delta) \in (C(R_j) \circ C(\equiv_j^i))$ が成立する.

Proof. 集合 $\bigwedge\Gamma \wedge \neg[\equiv]^i_j L_j \neg \bigwedge\Delta$ が無矛盾とし, 任意の論理式 φ について $[\equiv]^i_j L_j\varphi \in \Gamma$ であるとする. よって, $[\equiv]^i_j L_j\varphi \wedge \neg[\equiv]^i_j L_j \neg \bigwedge\Delta$ は無矛盾集合. $\varphi \notin \Delta$ を仮定すると, $\neg\varphi \in \Delta$ である. これにより集合 $[\equiv]^i_j L_j\varphi \wedge \neg[\equiv]^i_j L_j\varphi$ が無矛盾であることが導かれるが, この論理式は前提と矛盾する. したがって $\varphi \in \Delta$. □

Lemma 3.5. Φ を閉包とし, Γ, Δ を Φ 上の極大無矛盾集合とする. $C^i_j\varphi \in \Phi$ ならば $C^i_j\varphi \in \Gamma$ であるとき, またそのときに限り, 全ての Γ からの C^i_j パスは φ パスである.

Proof. ($\Rightarrow$) C^i_j パスの長さに関する帰納法で証明する.

- ベースケースについて, C^i_j パスの長さを 0 とし, また $C^i_j\varphi \in \Phi$, かつ $C^i_j\varphi \in \Gamma$ であるとする. よって $\Gamma = \Gamma_0 = \Gamma_n$. 公理 MIX により, $\varphi \in \Gamma$ がいえる.
- 帰納的ステップについて, C^i_j パスの長さを $k{+}1$ とし, また $C^i_j\varphi \in \Phi$, かつ $C^i_j\varphi \in \Gamma$ であるとする. 帰納法の仮定から, $C^i_j\varphi \in \Gamma_k$ がいえる. 公理 MIX と $C(R_j)$ および $C(\equiv^i_j)$ の定義から, $\varphi \in \Gamma_{k+1}$ である.

($\Leftarrow$) $S(C^i_j, \varphi)$ をその集合からの C^i_j パスが全て φ パスとなっているような Φ 上の極大無矛盾集合 Δ の族とする. また以下の論理式を導入する:

$$\chi = \bigvee_{\Delta \in S(C^i_j,\varphi)} \bigwedge \Delta.$$

Γ からの全ての C^i_j パスが φ パスであるとする. まず以下の三つの論理式が定理であることを証明する:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \textstyle\bigwedge\Gamma \to \chi;\\
&(2)\ \chi \to \varphi;\\
&(3)\ \chi \to [\equiv]^i_j L_j \chi.
\end{aligned}$$

- (1) について, 仮定より $\Gamma \in S(C^i_j, \varphi)$. よって $\vdash \bigwedge\Gamma \to \chi$.
- (2) について, Δ からの全ての C^i_j パスが φ パスであるため, 全ての $\Delta \in S(C^i_j, \varphi)$ となる Δ について, $\varphi \in \Delta$. よって, φ は χ から導かれる.
- (3) について, 対偶をとって証明を行う. 集合 $\chi \wedge \neg[\equiv]^i_j L_j\chi$ が無矛盾であるとする. χ の構成上, $\bigwedge\Delta \wedge \neg[\equiv]^i_j L_j\chi$ が無矛盾集合となるような Δ が存在する. それ以外の組み合わせの論理和の補集合は, χ によって表現されている特定の組み合わせの集合を示すものであるため, 集合 $\neg\bigvee_{\Theta \in C(W)\setminus S(C^i_j,\varphi)} \bigwedge\Theta$ は χ と同値となる. したがって, $\bigwedge\Delta \wedge \neg[\equiv]^i_j L_j \neg\bigvee_{\Theta \in C(W)\setminus S(C^i_j,\varphi)} \bigwedge\Theta$ は無矛盾集合であ

り, $\bigwedge\Delta \wedge \neg[\equiv]^i_j L_j \neg \bigwedge\Theta$ が無矛盾であるような Θ も存在する. 補題 3.4 より, $(\Delta, \Theta) \in C(R_j) \circ C(\equiv^i_j)$ である. よって Δ からの C^i_j パスの中で φ パスでないものが存在する. これは前提と矛盾する. よって $\vdash \chi \to [\equiv]^i_j L_j \chi$ である.

(3) と公理 CG より, $\vdash C^i_j(\chi \to [\equiv]^i_j L_j \chi)$ である. $\vdash \chi \to C^i_j \chi$ が公理 IND より導かれる. (1) と (2) より, $\vdash \bigwedge\Gamma \to C^i_j \varphi$ である. したがって $C^i_j \varphi \in \Gamma$ がいえる. □

Lemma 3.6. Φ を閉包とし, $C(\mathrm{ALP})$ を Φ についてのカノニカルモデルとする. 全ての $w \in C(W)$ と任意の $\varphi \in \Phi$ について, $C(\mathrm{ALP}), w \vDash \varphi$ ならば $\varphi \in w$ である.

Proof. 論理式の構成に関する帰納法を使って証明を行う. A^i_j, L_j, C^i_j 以外のケースについてはベースケースも含めて, 自明であるため, ここではこれらについてのみ示す.

- 原子論理式 p について, $C(\mathrm{ALP}), w \vDash p$ を仮定すると, $w \in C(V)(p)$. よって $p \in w$.
- 二項演算子については, **S5** と同様に直ちに証明できる.
- アウェアネス演算子について, φ の構成に関する帰納法を使って証明する. $C(\mathrm{ALP}), w \vDash A^i_j \varphi$ とすると, $At(\varphi) \subseteq C(\mathscr{A}^i_j)$ である. つまり任意の原子論理式 $p \in \mathcal{P}$ と, 全ての $v \in C(W)$ について, $p \in At(\varphi)$ ならば $A^i_i p \wedge A^i_j p \in v$.
  - 原子論理式 p について, $p = At(p)$ であるので, 全ての $v \in C(W)$ について, $A^i_j p \in v$. よって, $A^i_j p \in w$ である.
  - 二項演算子および他の演算子については, 帰納法の仮定および公理 AN, ACN, AA, A[≡], ACM, AL, AK といった対応する公理を使って証明できる.
- 非明示的知識演算子ついて, 対偶をとって証明を行う. $L_j \varphi \notin w$ とする. $C(R_j)$ の定義より, $(w, v) \in C(R_j)$ となる全ての v について, $\varphi \notin v$. よって, $C(\mathrm{ALP}), w \nvDash L_j \varphi$ である.
- $[\equiv]^i_j$ 演算子について, 対偶をとって証明を行う. $[\equiv]^i_j \varphi \notin w$ とする. $C(\equiv^i_j)$ の定義より, $(w, v) \in C(\equiv^i_j)$ となる全ての v について, $\varphi \notin v$. よって, $C(\mathrm{ALP}), w \nvDash [\equiv]^i_j \varphi$ である.
- C^i_j 演算子について, $C(\mathrm{ALP}), w \vDash C^i_j \varphi$ とする. よって $(w, v) \in (C(R_j) \circ C(\equiv^i_j))^+$ となる全ての v について, $C(\mathrm{ALP}), v \vDash \varphi$. つまり w からの全ての C^i_j パスが φ パスということであり, 補題 5 より $C^i_j \varphi \in w$ がいえる.
- K^i_j については, $\mathbf{AL}^{gpp,ka}$ のとおり.

□

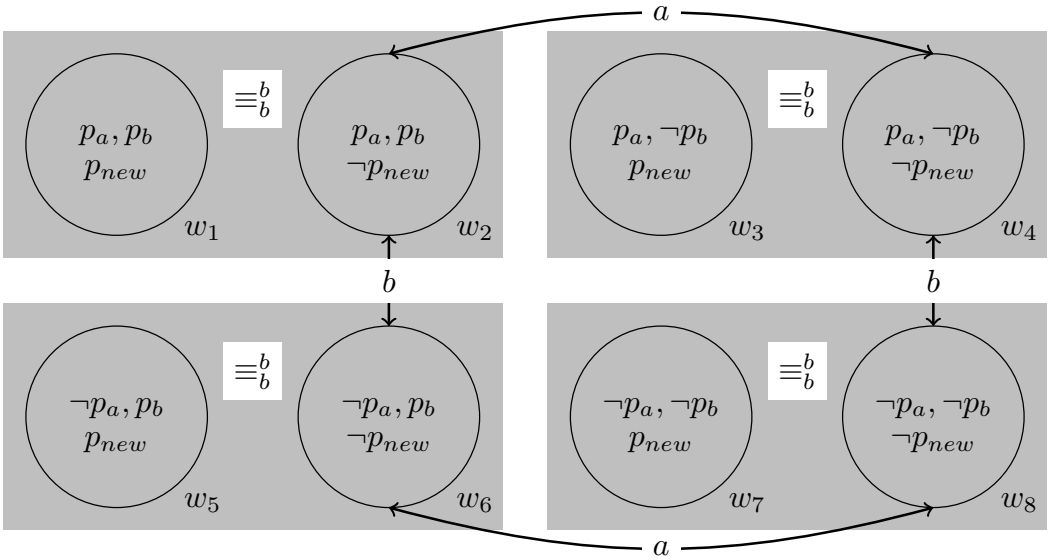

図 3.5　例 3.1 の各エージェントの知識状態に対応するアウェアネス付き認識モデル.

Lemma 3.7. Φ を閉包, Γ を Φ 上の極大無矛盾集合とする. 任意の $\varphi \in \Phi$ および極大無矛盾集合 Γ について, $\varphi \in \Gamma$ ならば $\vdash \varphi$ である.

Proof. 対偶をとって証明を行う. $\nvdash \varphi$ と仮定する. これはどの **ALP** の極大無矛盾集合も φ を含まないという意味であるため, $\varphi \notin \Gamma$. □

Theorem 3.2 (完全性)**.** 任意の論理式 φ について, $\vDash \varphi$ ならば $\vdash \varphi$ である.

Proof. $\vDash \varphi$ とすると, 補題 3.3 より φ の閉包について $C(M), w \vDash \varphi$. 補題 3.6 より $\varphi \in w$. 補題 3.7 より $\vdash \varphi$ である. □

3.3　分割付きアウェアネス論理を使用した例の記述

分割付きアウェアネス論理を用いて, 図 3.2 で図示された各エージェントの知識および思考に対応するアウェアネス付き認識モデルを構築する (図 3.5).

オーナー b は原子命題 p_{new} に気づいていないため, w_1 と w_2 のような p_{new} についての真理値のみが異なるような可能世界間には b でラベル付けされた無区別関係 $\equiv_b^b$ が存在する. 一方で a はこの例で議論されている全ての原子命題に気づいているため, 無区別関係 $\equiv_a^a$ および $\equiv_b^a$ は到達可能性関係と一致する. つまり $\equiv_a^a$ および $\equiv_b^a$ は, それぞれ $\emptyset$ となり, $\equiv_a^b$ と $\equiv_b^b$ は

$\{(w_5, w_6), (w_7, w_8), (w_2, w_1), (w_4, w_3), (w_6, w_5), (w_8, w_7), (w_1, w_1), \cdots, (w_8, w_8)\}$ となる.

さて再び $K_bK_ap_b$ の真理値を考える. 分割付きアウェアネス論理ではエージェントの視点が導入されており, 図 3.2 の 3_b との対応を考えると, $K_bK_ap_b$ は $K_b^bK_a^bp_b$ の形にかき直される. この論理式は $\equiv_b^b$, R_b, $\equiv_a^b$, R_a 上の全ての到達可能な可能世界で p_b が成り立つかどうかで評価される. 図 3.5 によれば, この論理式はいくつかの世界では偽であるため w_1 で成立せず, 図 3.2 の 3_b との矛盾は発生しない. また 3_b と整合的である $K_b^b\neg K_a^bp_b$, つまり「b は a が p_b を知らないことを知っている」はモデルで妥当となる. 2_b と整合的な $\neg K_b^bp_a$ についてもモデルで妥当となる. したがって, 図 3.5 のアウェアネス付き認識モデルは例 3.1 の各エージェントがもつ知識および思考を統一的に表現する認識構造といえる.

その他の論理式について, 例えば $K_a^bK_b^b\neg K_a^bp_b$ などについても直観と一致する. これは b の視点では「「a が p_b を知らない」ことを b が知っている」ことを a が知っている」という意味であり, モデルで妥当な論理式である. 一方で a の視点から見た同じ意味をもつ論理式 $K_a^aK_b^a\neg K_a^ap_b$ はモデルで妥当な論理式とはならず, これは p_{new} の存在に気づいている a の視点では, p_{new} が成立している場合は p_b が真であることは a も b も知っているはずであることを反映した論理式である.

例 3.1 では a は b が調達ルートの改善については意識下にないことに気づいていないという前提があったが, そのことに a が気づいているという状況も, アウェアネス集合を $\mathscr{A}_b^a = \{p_a, p_b\}$ とすることで表現できる. このとき $K_a^aK_b^a\neg K_a^ap_b$ はモデルで妥当な論理式で, a は b が a に関する誤った推論をしていることを把握している.

図 3.5 では, 無区別関係 $\equiv_b^b$ の同値類を灰色の背景で表している. この同値類を b の視点からみた一つの可能世界と解釈することで, 図 3.5 は図 3.4 のクリプキモデルとノードの数やエッジに関して同じグラフである. 本論理はアウェアネスの状態と連動する新たな分割を導入することで, 異なる複数の認識構造を一つの構造に押し込めたものといえる.

3.4 分割付き動的アウェアネス論理

コミュニケーションによるエージェント同士の相互作用などの複雑な認識的行為 (epistemic action) を組み込むための準備として, 単純なアウェアネスの状態の更新を行う操作を導入する. (van Benthem and Velázquez-Quesada, 2010) にならい, 「意識する」(becomeing aware of) と「意識しない」(becoming unaware of) を示す二つの動的演算子を加えた分割付き動的アウェアネス論理 ($\mathcal{DALP}$: Dynamic Awareness Logic with

Partitions) を提案する. 認識論理では認識的行為を記述する方法は複数存在するが, ここでは単純な情報の変化を記述する形式的体系である公開告知論理の考え方を使う.

まず各エージェント $i, j \in \mathcal{G}$ について, $[+\varphi]^i_j$ and $[-\varphi]^i_j$ の二つの演算子を分割付きアウェアネス論理の文法に加える. すなわち $\mathcal{P}$ を原子命題の可算集合, $\mathcal{G}$ をエージェントの可算集合としたとき, 分割付き動的アウェアネス論理の言語 $\mathcal{L}^{DALP}_{\mathcal{P}}$ は以下の文法によって生成される論理式の集合で,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \ni \varphi ::= \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid A^i_j\varphi \mid L_j\varphi \mid [\equiv]^i_j\varphi \mid C^i_j\varphi \mid K^i_j\varphi \mid [+\varphi]^i_j \mid [-\varphi]^i_j,$$

ただし $p \in \mathcal{P}$ であり, $i \in \mathcal{G}$ である. それぞれ $[+\varphi]^i_j\psi$ は「i の視点では j が φ に気づくようになった」, $[-\varphi]^i_j\psi$ は「i の視点では j の φ への気づきが失われた」と読む.

次に分割付きアウェアネス論理の充足可能関係を以下のように拡張する.

- $M, w \vDash [+\varphi]^i_j\varphi$ *iff* $M[+\varphi]^i_j, w \vDash \varphi$;
- $M, w \vDash [-\varphi]^i_j\varphi$ *iff* $M[-\varphi]^i_j, w \vDash \varphi$.

公開告知論理と同様に, 動的演算子が付いた論理式は $M[+\varphi]^i_j$ および $M[-\varphi]^i_j$ といった更新されたモデルを使って評価する.

Definition 3.6. $M[+\varphi]^i_j$ は組 $\langle W, \{R_k\}_{k\in\mathcal{G}}, V, \{\mathscr{A}[+\varphi]^k_l\}_{k,l\in\mathcal{G}}, \{\equiv^k_l\}_{k,l\in\mathcal{G}}\rangle$ で, アウェアネス付き認識モデルである. ただし,

- $\mathscr{A}[+\varphi]^k_l := \begin{cases} \mathscr{A}^k_l \cup \{At(\varphi)\} & k = i \ \ and \ \ l = j, \\ \mathscr{A}^k_l & otherwise. \end{cases}$

$M[-\varphi]^i_j$ は組 $\langle W, \{R_k\}_{k\in\mathcal{G}}, V, \{\mathscr{A}[-\varphi]^k_l\}_{k,l\in\mathcal{G}}, \{\equiv^k_l\}_{k,l\in\mathcal{G}}\rangle$ で, アウェアネス付き認識モデルである. ただし,

- $\mathscr{A}[-\varphi]^k_l := \begin{cases} \mathscr{A}^k_l \setminus \{At(\varphi)\} & k = i \ and \ l = j, \\ \mathscr{A}^k_l & otherwise. \end{cases}$

例 3.1 において, $[+p_{new}]^b_b$ の操作によって更新されたアウェアネス付き認識モデル $M[+n]^b_b$ は図 4.1 のように図示される. 2.1 節と同様に可能世界をノード, 到達可能性関係をエッジ, 各可能世界で真となる命題をノードへのラベルとする. なお視認性の観点から, 到達可能性関係の反射性は省略する.

灰色の背景は図 3.5 と同様に $\equiv^b_b$ による同値類を示している. $[+p_{new}]^b_b$ は b が p_{new} に気づいたことを意味し, そのあとで「b は「a が p_b を知っている」ことを知っている」を

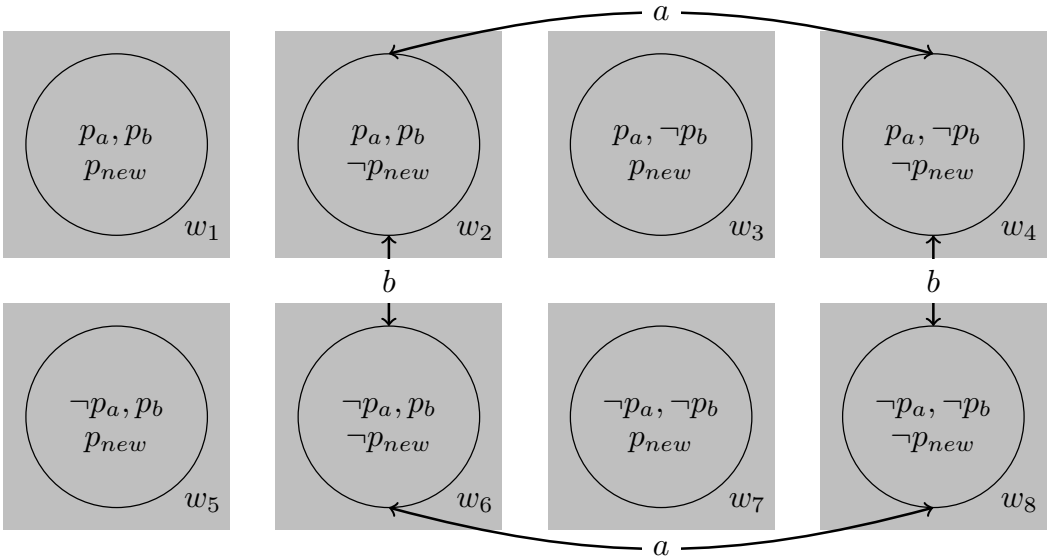

図 3.6　オーナー b のアウェアネスの状態の変化によって, 更新されたアウェアネス付き認識モデル.

意味する論理式 $[+p_{new}]^b_b K^b_b K^b_a p_b$ は図 4.1 の w_1 で真となる. $\equiv^b_b$ による同値類の要素が一つの可能世界となったことは, b のアウェアネスの状態が a と同等となり, a と同じ認識能力を保持するようになったことを意味する. このアウェアネスの状態の更新よって, a の視点のみ成立していた論理式が b の視点でも成立するようになった.

分割付き動的アウェアネス論理に対応する公理系は公開告知論理で使用した完全性定理の証明のテクニックを使用して構築できると考えられる. 例えば非明示的知識演算子について, $[+\varphi]L_j\psi \leftrightarrow L_j[+\varphi]\psi$ が成立する. このように動的演算子を含まない論理式へと書き換え, 非動的な分割付きアウェアネス論理の完全性を経由することで, 動的に拡張した論理の完全性定理を証明する. $[\equiv]^i_j$, C^i_j 演算子については, 更新されたアウェアネス集合の原子命題について, 同じ真理値をもつ可能世界を論理的に特定する必要があるが, これには (Grossi et al., 2015) の研究が参考になると考えられる. (Grossi et al., 2015) は, 特定の原子命題の集合の全ての要素に対して同じ真理値をもつ可能世界である命題が成立することを表す演算子を組み込んだ論理を提案している. この部分については将来の課題として残しておく.

第 4 章

関連研究

本研究に関連するいくつかの論理や考え方を紹介する。

(van Ditmarsch and French, 2009; van Ditmarsch and French, 2011) はエージェントのアウェアネスの状態と可能世界の区別を結びつけるという, 本研究と同様の発想に基づいている. 本論理との大きな違いとしては、本論理では可能世界の区別だけでなく, その区別に従った可能世界の探索をも表現できる点である. これらの論理は論理式の評価に際して, エージェントが気づいていない命題に対して異なる真理値をもつ可能世界も探索するが, それらの可能世界から到達可能な世界については探索範囲外である. また依存論理 (dependence logic) で使われる語意味論 (term semantics) (Sano and Virtema, 2015) も、ある特定の可能世界のグループの中で真になる論理式という同様の考え方を使用する。これは可能世界の部分集合として定義される語が, ある論理式を支持するという構造をもっている.

哲学の分野では, より正確な状況の表現を求めて, 'awareness of' と 'awareness that' を区別できるモデルが提案されている (Fernández-Fernández and Velázquez-Quesada, 2021; Grossi and Velázquez-Quesada, 2015). 'Awareness of' は情報を参照できるという意味でのアウェアネスを指し, 例えば「東京で雨が降っている」という命題にこの意味で気づいているとき, この命題を使って「東京で雨が降っているなら, 東京の人は傘を指しているはずだ」のような, より複雑な命題を構成することができる. このとき「東京で雨が降っている」ことが正しいかどうかは問題にならず, その命題を自分の思考の材料として使うことができるという意味であり, 2.2 節のアウェアネス論理や本論理はこちらの意味でのアウェアネスを記述する. 一方で 'awareness that' は, 推論や観察によって, その情報が真実であることを認めるという意味でのアウェアネスを指す. 「東京で雨が降っている」という命題にこの意味で気づいているとき, 「東京で雨が降っている」という事

実を, 窓の外を見るという観察や友人との電話などによって確認したという意味になる. 'Awareness of' とは異なり, その命題が真であることが要請される. 両者は似た概念であるが, 異なる性質を持っているため, (Fernández-Fernández and Velázquez-Quesada, 2021; Grossi and Velázquez-Quesada, 2015) では, この二つの概念を組み合わせることで明示的知識の定義を行う.

アウェアネスの形式的表現は, (Fagin and Halpern, 1988) の構文論的アプローチだけでなく, 意味論的アプローチがあり, こちらは経済学の分野で活発に行われている。これは事象に基づくアプローチ (event-based approach) とよばれ, 可能世界の集合である事象という概念を導入して, 知識を事象を使って表現するものである. (Modica and Rustichini, 1994) で提案された論理がこのアプローチによる初期の成果であり, 2.2 節で述べた条件 gpp, ka を満たすアウェアネス論理と等価であることが, (Halpern, 2001) によって示された。経済学の領域では (Modica and Rustichini, 1999) 以降, アンアウェアネス (unawareness) の概念の形式化に焦点を当てている (Heifetz et al., 2006; Heifetz et al., 2008).

アウェアネスに関する認識的行為については, 公開告知論理の考え方を用いた研究がいくつかある. (Grossi and Velázquez-Quesada, 2015; Fernández-Fernández and Velázquez-Quesada, 2021) は, 推論によるアウェアネスの状態の変化を定式化し, リアリスティックな認識的行為を組み込んだ論理を提案した. また認識論理において, 複雑な認識的行為を記述するために, アクションモデル (Baltag et al., 1998) が提案されている. これはエージェントの知識を特定するクリプキモデルとは別の構造体であるアクションモデルを使って, 情報の変化を引き起こす行為を制御する. この考え方を使うことで, 私的な情報取得に関する誤解といった複雑な情報の伝達を形式化することができる. 私的な情報取得に関する誤解とは, 例えば, あるエージェント a が p が真であると密告されたが、他のエージェントは a が p は偽であるという情報を密かに受け取ったと誤解するという一連の情報伝達のことである.

第 5 章

結論

本研究は既存の論理に可能世界の粗い分割を組み込むことで, 意識下にある命題とそうでない命題の区別だけでなく, その区別が可能世界に与える影響も反映させた論理, 分割付きアウェアネス論理 ($\mathcal{ALP}$) を導入した. 本論理によって, エージェントのアウェアネスの状態をそれらの知識および推論に適切に反映させ, 互いに相手の思考を推測し合うような状況の論理的分析を可能とした. またこのフレームワークを用いて, 各エージェントの知識および思考が論理的に記述および分析できる例を示した.

本論理の貢献は二つである. 論理的な観点からは, 分割付きアウェアネス論理の意味論と証明論を導入して, その完全性を示した. 実世界への適用の観点からは, 社会における合理的なエージェントの戦略的行動や実用的なエージェントコミュニケーションを説明するための基礎的な認識構造を示した.

今後の発展の方向性としては, いくつか考えられる. 概念的な面では, より複雑な認識的行為や共通知識などの概念を取り入れ, 実用的なエージェント同士のコミュニケーションの表現を行うことである。技術的な面としては, 4 章で述べた分割付き動的アウェアネス論理 ($\mathcal{DALP}$) の公理系を構築することが将来の課題として残っている. また認識論理はゲーム的状況における人間の推論の論理的分析に応用されており (Kaneko and Suzuki, 2002), また戦略に対する気づきを考慮したゲーム (不完備アウェアネスゲーム (game with incomplete awareness/unawareness)) の記述や分析も行われている (Feinberg, 2005). この領域への本論理の応用も発展の方向性の一つである.

謝辞

本研究に取り組むにあたって, 豊富な知識と経験の下, 終始熱心にご指導してくださった東条敏教授, および多くの有益な助言をくださいました Teeradaj Racharak 講師に心から感謝の意を表します.

また議論を通じて多くの知識や示唆を頂戴いたしました先輩である高木翼氏, そして多くの助言や激励をくださいました東条研究室の先輩および同期の皆様に深く御礼申し上げます.

参考文献

Baltag, A., Moss, L. S., and Solecki, S. (1998). The logic of public announcements, common knowledge, and private suspicions. In *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK VII)*, pages 43–56. Morgan Kaufmann Publishers.

Chellas, B. F. (1980). *Modal logic: an introduction*. Cambridge University Press.

Copic, J. and Galeotti, A. (2006). Awareness as an equilibrium notion: Normal-form games. Economics discussion papers, University of Essex, Department of Economics.

Fagin, R. and Halpern, J. Y. (1988). Belief, awareness, and limited reasoning. *Artificial Intelligence*, 34:39–76.

Feinberg, Y. (2005). Games with incomplete awareness. Technical report, Technical Report Resarch Paper Series# 1894, Stanford Graduate School of Business.

Fernández-Fernández, C. and Velázquez-Quesada, F. R. (2021). Awareness of and awareness that: their combination and dynamics. *Logic Journal of the IGPL*, 29(4):601–626.

Grossi, D., Lorini, E., and Schwarzentruber, F. (2015). The ceteris paribus structure of logics of game forms. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 53:91–126.

Grossi, D. and Velázquez-Quesada, F. R. (2015). Syntactic awareness in logical dynamics. *Synthese*, 192(12):4071–4105.

Halpern, J. Y. (2001). Alternative semantics for unawareness. *Games and Economic Behavior*, 37(2):321–339.

Halpern, J. Y. and Piermont, E. (2020). Dynamic awareness. In *Proceedings of the Seventeenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2020)*.

Heifetz, A., Meier, M., and Schipper, B. C. (2006). Interactive unawareness. *Journal of Economic Theory*, 130(1):78–94.

Heifetz, A., Meier, M., and Schipper, B. C. (2008). A canonical model for interactive unawareness. *Games and Economic Behavior*, 62:304–324.

Kaneko, M. and Suzuki, N.-Y. (2002). Bounded interpersonal inferences and decision making. *Economic Theory*, 19(1):63–103.

Modica, S. and Rustichini, A. (1994). Awareness and partitional information structures. *Theory and Decision*, 37(1):107–124.

Modica, S. and Rustichini, A. (1999). Unawareness and partitional information structures. *Games and Economic Behavior*, 27(2):265–298.

Perea, A. (2022). Common belief in rationality in games with unawareness. *Mathematical Social Sciences*, 119:11–30.

Plaza, J. (1989). Logics of public communications. In *Proceedings of the fourth international symposium on methodologies for intelligent systems: Poster session program*, volume 158, pages 201–216. Oak Ridge National Laboratory.

Sano, K. and Virtema, J. (2015). Axiomatizing Propositional Dependence Logics. In Kreutzer, S., editor, *24th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2015)*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), pages 292–307, Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.

Shchipper, B. C. (2015). *Awareness*. College Publications.

Sillari, G. (2008). Models of awareness. In *Proceedings of the 7th conference on logic and the foundations of game and decision theory (LOFT)*, number 2006, pages 209–240.

van Benthem, J. and Velázquez-Quesada, F. R. (2010). The dynamics of awareness. *Synthese*, 177(1):5–27.

van Ditmarsch, H. and French, T. (2009). Awareness and forgetting of facts and agents. In *2009 IEEE/WIC/ACM International Joint Conference on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology*, pages 478–483. IEEE.

van Ditmarsch, H. and French, T. (2011). Becoming aware of propositional variables. In Banerjee, M. and Seth, A., editors, *Logic and Its Applications*, pages 204–218. Springer.

van Ditmarsch, H., van Der Hoek, W., and Kooi, B. (2007). *Dynamic Epistemic*

Logic. Springer Science & Business Media.

Walker, O. (2014). Unawareness with "possible" possible worlds. *Mathematical Social Sciences*, 70:23–33.

本研究に関する発表論文

Kubono, Y., Racharak, T., and Tojo, S. (2023). Logic of awareness in agent's reasoning. In *Proceedings of the 15th International Conference on Agents and Artificial Intelligence*. forthcoming.

久保埜雄大 (2023). 「不完備アウェアネスゲームにおける均衡の論理的分析」『新進研究者 Research Notes』, 投稿中.