

Title	多面体と多角形の間の折りと展開に関する研究
Author(s)	鎌田, 斗南
Citation	
Issue Date	2023-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	ETD
URL	http://hdl.handle.net/10119/18417
Rights	
Description	Supervisor:上原 隆平, 先端科学技術研究科, 博士

氏名	鎌田 斗南		
学位の種類	博士 (情報科学)		
学位記番号	博情第 491 号		
学位授与年月日	令和 5 年 3 月 24 日		
論文題目	Research on Folding and Unfolding between Polygons and Polyhedra		
論文審査委員	上原 隆平	北陸先端科学技術大学院大学	教授
	金子 峰雄	同	教授
	緒方 和博	同	教授
	廣川 直	同	准教授
	堀山 貴史	北海道大学	教授
	舘 知宏	東京大学	教授

論文の内容の要旨

This paper aims to clarify the folding/unfolding relation between polygons and polyhedra. A polyhedron Q is called unfoldable into a polygon P if we obtain P by cutting a certain set of line segments (not limited to edges) on the surface of Q . Inversely, a polygon P is called foldable into a polyhedron Q if Q is unfoldable into P . The first part of the thesis is a folding problem that inquires whether a polygon P is foldable into a polyhedron Q for given P and Q . An efficient algorithm for this problem when Q is a box was recently developed. We extend this idea to a class of convex polyhedra. We develop two algorithms for the problem. The first algorithm solves the folding problem for a certain class of convex polyhedra, with a unit length and a unit angle, except for tetramonohedra. The second algorithm handles the exceptional case for the class of tetramonohedra. Combining these algorithms, we can conclude that the folding problem can be solved in pseudo-polynomial time when Q is a polyhedron in a certain class of convex polyhedra, which includes Platonic solids. The second part of this thesis is a reconfiguration problem on refolding. We show that any pair of polyhedra in several classes of polyhedra is joined by a sequence of $O(1)$ refolding steps, where each refolding step unfolds the current polyhedron into a polygon that is foldable into the next polyhedron. In other words, a polyhedron is refoldable into another polyhedron if they share a common unfolding. Specifically, we prove that (1) any two tetramonohedra are refoldable into each other, (2) any doubly covered triangle is refoldable into a tetramonohedron, (3) any tetrahedron has a 3-step refolding sequence to a tetramonohedron, (4) any (augmented) regular prismatoid and doubly covered regular polygon are refoldable into tetramonohedra, and (5) the regular dodecahedron has a 4-step refolding sequence to a tetramonohedron. In particular, we obtain a 6-step refolding sequence between any pair of Platonic solids, applying (5) for the dodecahedron and (1) and/or (2) for all other Platonic solids. The third part of this thesis is about the nonexistence of common unfoldings. We show that the existence of common unfoldings can be reduced to the existence of standard-form common unfoldings under a certain condition. We also develop an algorithm that checks the existence of standard-form common unfoldings, and we implement it on some specific polyhedral class. We obtain the fact that there is

no common unfolding with k vertices within $k < 300$ between any strongly-independent and algebraic doubly covered triangles.

Keywords: Computational geometry, Computational origami, Unfolding of polyhedra, Common unfolding, Refolding, Reconfiguration problem.

論文審査の結果の要旨

本論文で申請者は、計算幾何学の一分野である計算折り紙において、多面体とその展開図の関係についての研究を行った。多面体の表面に沿って切り開いて得られる展開図、あるいは逆に多角形を折ることで得られる多面体については、今でもわかっていることはあまりなく、非常に新規性の高い研究テーマである。本論文の内容は大きく3つに分けることができる。

まず、与えられた多角形 P と凸多面体 Q において、 P から Q が折れるかどうかを判定する擬多項式時間アルゴリズムを示した。この問題は、それまで直方体についてしか解かれていなかった。それに対して、本研究では正多面体を含む、非常に幅広い凸多面体に対して多項式時間アルゴリズムが存在することを初めて示した結果である。また、既存の直方体に限定された場合に比べても大幅な計算の効率化が達成されている。

次に、凸多面体間の再折り遷移可能性についての結果を示した。凸多面体 Q を展開して得られた多角形 P に対して、別の折り方を施して、別の凸多面体 Q' が得られるとき、多面体 Q は Q' に再折り可能であると考えられる。別の言い方をすれば、二つの凸多面体 Q と Q' は共通の展開図を持つ。こうした再折り遷移可能性については、先行研究はほとんど存在しない。本研究では、正多面体を含む多くの凸多面体のクラスにおいて、それらの間に短い再折り遷移の列が存在することを初めて示した。特に、これまでほとんど他の立体との関係がわかっていなかった正12面体に対して構成的な解を構築した点は高く評価できる。

最後に、2つの多面体間に共通の展開図が存在しないことを部分的に示した。具体的には、3角形2面体という最も単純な多面体を取り上げ、これら2つの3角形2面体の間に、少なくとも300頂点以下の範囲では共通の展開図が存在しないことをコンピュータを用いた計算で証明した。この問題は難問であり、これまでどんな多面体の間であれ、共通の展開図が存在しないことを示した研究は存在しない。本研究では、この問題を離散的な問題に還元して、コンピュータを用いて解くことができるようにした。これは結果もさることながら、新たな技法を開拓した点が優れている。

以上、本論文は、計算折り紙の分野において展開図と多面体の関係性について先駆的かつ画期的な結果を複数示しており、学術的に貢献するところが極めて大きい。よって博士（情報科学）の学位論文として十分価値あるものと認めた。