

Title	関係代数の表現可能性に関する研究
Author(s)	田中, 寛次
Citation	
Issue Date	2005-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1913
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 修士

関係代数の表現可能性に関する研究

田中 覚次 (310064)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2005 年 2 月 10 日

キーワード: 二項関係, 関係代数, プロパー関係代数, 表現可能性, McKenzie 代数.

1. 研究の背景

二項関係の理論はド・モルガン、パース、シュレーダーによって発展した。二項関係とは集合の要素間の関係のことである。それは、数学的な関係や、血族関係や親類関係などを表現するのに使われる。集合論的には、二項関係は、ある集合の直積の中集合の要素とみなすことができる。関係計算に対するさまざまな体系が導入され研究された。特に、代数的な観点で研究されてきた。半世紀前には、アルフレッド・タルスキが関係計算の多くの部分に対して、等式による公理化を提案した。これが、関係代数の始まりである。

この論文は、関係代数における主要な結果を表現可能性を中心に整理し、紹介することを目的としている。ここでは、関係計算の基礎としての関係代数をタルスキ流に導入する。このために、まず関係代数の土台としてのブール代数を導入する。そして、関係代数と二項関係との関係について述べる。また、関係代数のいくつかの代数的性質についても触れる。

次に、関係代数の表現可能性について論じる。タルスキによって関係代数は二項関係の代数に同型かということが問題にされてきた。残念なことに、リンドンがこの問題に対して否定的な回答を、複雑な反例によって与えた。近年、より具体的な表現不可能な関係代数が見つかった。それは、しかも有限のものである。

一方で、いくつかの表現可能な関係代数も見つかっている。これらの結果が、この論文の後半で紹介される。

2. 研究内容

(a) 二項関係から関係代数へ

まず、二項関係を紹介する。集合的には、二項関係はある集合の直積の部分集合として表される。そこで、ブール代数、特に、集合ブールは二項関係の基礎として考えられる。

ブール演算以外にも、全ての二項関係の集合には、他の多くの演算が定義でき

る。これらのうちもっとも基本的な演算は関係の合成と逆関係である。更に、個別の二項関係を表すために恒等関係が二項関係において重要である。ブール演算に加えて、二項関係上のこれらの演算を用いることで、新たな代数が得られる。そのようなものとして、次のプロパー関係代数がある。

Definition 1 (プロパー関係代数 (PRA))

三つの集合 S と B と U に対して、代数 $S = (S, \cup, \cap, \setminus, \emptyset, U, Id_B, |, ^{-1})$ が、次の条件をみたす時、基集合 B とユニット U 上のプロパー関係代数という。

- (1) $S \neq \emptyset$
- (2) $S \subseteq \wp(B \times B)$
- (3) $(S, \cup, \cap, \setminus, \emptyset, U)$ は集合体
- (4) $Id_B = \{(b, b) | b \in B\} \in S$
- (5) $s \in S \Rightarrow s^{-1} = \{(c, b) | (b, c) \in s\} \in S$
- (6) $r, s \in S \Rightarrow r|s = \{(b, c) | \exists d((b, d) \in r \text{ and } (d, c) \in s)\} \in S$

次に二項関係を代数的な観点から捉えた代数系である、関係代数を論じる。この代数は、二項関係の代数を公理化できないかという問いから生まれたものである。

Definition 2 (関係代数 (RA))

代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \check{\cdot}, \check{\cdot})$ が次の条件をみたす時、関係代数 (RA) という。

- (1) $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ はブール代数
- (2) $(x; y); z = x; (y; z)$
- (3) $(x + y); z = x; z + y; z$
- (4) $x; 1' = x$
- (5) $\check{\check{x}} = x$
- (6) $(x + y)\check{\cdot} = \check{x} + \check{y}$
- (7) $(x; y)\check{\cdot} = \check{y}; \check{x}$
- (8) $(x; -(\check{x}; y)) + y = y$

また、関係代数のいくつかの代数的性質についても調べる。

(b) 関係代数の表現

更に、関係代数の表現可能性について述べる。関係代数が表現可能であるとは、関係代数があるプロパー関係代数に同型であることをいう。それは全ての関係代数がプロパー関係代数に同型かというタルスキによって問題によって提起された。この問題は、全てのブール代数が集合体に同型であるというブール代数の表現定理に由来する。

しかし、リンドンが一般的に否定的であるという回答を、複雑な反例によって示した。後に、マッケンジーが最小の表現不能な関係代数を見つけた。この代数は、McKenzie 代数と呼ばれ、4つの原子からなる。これに加えて、表現可能な関係代数のクラスは有限個の等式によって公理化できないことが示された。

次に、表現可能な関係代数について紹介する。Mckenzie 代数と関係代数における代数的概念を付き合わせることで、表現可能な関係代数を考えるために、二項関係固有の性質に注目することが必要であると考えられる。その観点から特に、関数の他対一関係を抽象した関数的元と原子との関係に注目することよいことが知られている。特に、全ての原子が関数的元である原子的關係代数は表現可能である。また、最大元が有限個からなる関数的元の和で表される関係代数は表現可能であることも知られている。これら二つの事実において関数的元は、ポイント元や、部分恒等元に置き換えても良いことがわかる。ポイント元は、恒等関係の一元集合を関係代数上に抽象したものであり、部分恒等元は恒等関係の部分集合を抽象したものである。

今後は、関係代数の以上にあげたような特別な元によって生成される関係代数の表現可能性を考えること、或いは、表現不可能なクラスや、公理の条件を弱めた関係代数の表現可能性を検討し、ここにあげた関係代数と比較することが課題としてあげられる。