Title	関係代数の表現可能性に関する研究
Author(s)	田中，覚次
Citation	
Issue Date	2005-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1913
Rights	
Description	Supervisor:小野　寛晰，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

関係代数の表現可能性に関する研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

田中 覚次

2005 年 3 月

修 士 論 文

関係代数の表現可能性に関する研究

指導教官　小野 寛晰 教授

審査委員主査　小野 寛晰 教授
審査委員　大堀 淳 教授
審査委員　浅野 哲夫 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

310064 田中 覚次

提出年月: 2005 年 2 月

概 要

本稿では、二項関係の全体を表す代数ある関係代数の表現について調査する。そのために、関係代数の背景にふれ、その土台となる数学的構造であるブール代数についての表現について概観し、関係代数よりも一般的な代数構造である演算子付きブール代数、いわゆる BAO を紹介する。これらの内容をふまえて、関係代数の代数的特徴と表現可能性に触れていく。実際は、関係代数はどんなものでも表現可能であるわけではない。しかも、有限の要素からなる関係代数で表現可能でないものがある。表現可能で無い場合は関係代数のどの部分クラスに属しているのかを調べ、どのよう条件が関係代数に課されれば表現可能となるのかを具体的に考察する。このことを考察するのに、まず、有限で表現可能でない代数を調べる。次に、関係代数の最小元の直後の元である原子が、関係代数の特別な元である場合を考察する。実際、この時、表現可能なものが見つけられている。関係代数が最小元以外は必ずそれ以下の原子をもつという原子的なる性質に特別な条件がついた場合に表現可能となる場合を考える。これを考える時、関係代数は巾集合の上には表現できないが、ブール代数同様に完備で原子的な関係代数に表現できることが示される。

目 次

第1章　序章

1.1　はじめに

　関係の理論はアリストテレスが論理学のなかでふれたのが始まりと考えられる。その後、近世においてラムベルトがこれに着手したが、主題として取り上げげたのはド・モルガン、パース、ブールらである。関係を考察する素朴な例としては、親子関係などがあるが、素朴な例をもとに代数的な考察が生まれていった。代数的な概念を、近代的な形式で代数的な公理化を行ったのがタルスキである。これが一般に関係代数と呼ばれる。
関係代数は、二項関係の演算の大部分を抽象的に公理化したものである。集合の巾集合に対してブール代数を考えることを、二項関係からなる直積集合の巾集合に対して考えたものということができる。そのような公理系はいくつか考案されているが、タルスキの考案した関係代数の公理系が基本的であるので、これをもとに考察をする。
当初は、この関係代数が通常の二項関係の演算のなす代数を忠実に表しているかという表現がに問題であった。なお、二項関係は、二つのモノの間の大小関係のようなものである。数学的には普通、二項関係は集合の直積の部分集合として表される。単項関係は集合の部分集合として表される。
現在では、タルスキの関係代数は二項関係のなす代数を忠実に表現できないことが知られている。更に、公理を有限個加えても上手くいかないことが知られている。そこで、どの様な条件下で、忠実に表現できるかであったり、二項関係のなす代数の一部は忠実に表現できるか、表現可能な関係代数が課された条件ごとにどの様な代数的性質をもつかが問題にされている。

本稿は、6 つの章からなり、上の問題に対する様々な結果を紹介する。そのために、まず、2 章で、関係代数の土台となる、ブール代数の基本的な性質を確認し、3 章で、問題とする関係代数を導入し、代数的な性質を含めて概観する。
4 章以降が本題である。関係代数の表現についてふれ、表現できない関係代数、特に有限の例をあげる。5 章では、表現可能な関係代数について述べる。そして、6 章で、現在までの研究の経緯にふれ、今後の課題を検討する。

1.2　ノーテーション等について

空でない集合とその上の演算と定数の対を代数という。代数上でもとにしている集合を台集合という。集合 A 上の代数を以下のように表す。
　$\mathcal{A} = (A, f_1, \ldots, f_n)$ 但し、対の並びの先頭は台集合であるものとし、$f_1, \ldots, f_n$ は、定数か、演算を表す演算子の列からなるものとする。また、等号は明記していなくても全ての代数に定義されているものとする。位相空間や順序集合なども対で表現するが、ここに述べた代数とは、異

なるので注意が必要である。代数 $\mathcal{A}$ の台集合 A の要素を、単に $\mathcal{A}$ の要素という。

代数の部分集合と、その部分集合に制限された全ての演算が、その部分集合の中で閉じていて、定項もその部分集合に含まれる時、部分集合を台とする、制限された演算と、定項の対を、元の代数の部分代数という。

二つの代数 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ と $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への写像がある時、代数 $\mathcal{A}$ の定項を含む全ての演算を写像が保存する時、この写像を準同型写像という。単射準同型写像が存在するとき、$\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ に埋め込まれるという。特に、準同型が全単射の時、同型写像という。

また、一個の要素からなる代数を退化した代数という。

本稿では、定数は、$1, 0, 1'$ の数字と、$U, Id_A, \emptyset$ 等の代数を表す対の先頭以下の字母記号のまとまりを用いて表すものし、字母記号以外からなる記号のまとまりは演算に対する演算子を表すものとする。ここでは演算子は単項か二項演算のものを取り扱い、特に単項演算子は以下のものを用いる。　$-, ^{-1}, \breve{}, ;, \backslash$

第2章　ブール代数

この章ではブール代数の基本的な定義や性質を主に証明なしで述べる。詳しくは、主に文献 [13]、[6] による。訳語は主に、文献 [14] によった。

2.1　ブール代数の定義

一般に或る集合上の二項関係は同一集合上の要素間における集合演算を想定することが多い。その際、代数構造としてブール代数を考えることが基本的である。以下に述べるブール代数の公理系は集合演算のみたす規則の代表的なものを反映するものである。

Definition 2.1.1 (Huntington)
代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ が、次の等式を満たす時、ブール代数という。

$(B1)$　$x \cdot y = y \cdot x\,,\ \ x + y = y + x$　(交換律)

$(B2)$　$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$　(分配律)

$(B3)$　$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$　(分配律)

$(B4)$　$x + 0 = x\,,\ \ x \cdot 1 = x$

$(B5)$　$x + (-x) = 1\,,\ \ x \cdot (-x) = 0$

以下において、ブール代数 $\mathcal{B}$ はこの定義の演算子と定数をもつものとする。$+$ に対する演算を和、$\cdot$ については積、$-$ については補演算という。

集合 S の巾集合の全体 $\wp(\mathcal{S}) = (\wp(S), \cup, \cap, \setminus, \emptyset, S)$ はブール代数をなす。これを S の巾集合代数という。

Definition 2.1.2
$X \subseteq \wp(S)$ が、$\emptyset, S \in X$ であり、X が演算 $\cup, \cap, \setminus$ に関して閉じている時、X はブール代数をなす。このようなブール代数を S を基集合とする集合体といい、$\mathcal{F}_S$ と表記する。

Definition 2.1.3
ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ において、以下のように B 上の二項関係 $\leq$、$<$ を定義する。

$x \leq y \Leftrightarrow x \cdot y = x$

$x < y \Leftrightarrow x \cdot y = x \ \ and\ \ x \neq y$

明らかに $\mathcal{B}$ 上の二項関係 $\leq$ は順序関係である。すなわち、以下をみたす。

$(Ord1)$　$x \leq x$

$(Ord2)$　$x \leq y \ \ and\ \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$(Ord3)$　$x \leq y \ \ and\ \ y \leq z \Rightarrow x = y$

Theorem 2.1.1

ブール代数 $\mathcal{B}$ の順序関係 $\leq$ において、以下が成り立つ。

① $x \leq y \Leftrightarrow x \cdot -y = 0 \Leftrightarrow x + \ y = y \Leftrightarrow (-x) + y = 1$

② $0 \leq x \leq 1$ (0 の最小性、1 の最大性)

③ $x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$

Theorem 2.1.2

① $1 + x = 1\,,\ 0 \cdot x = 0$

② $(x + y) + z = x + (y + z)\,,\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (結合律)

③ $x + x = x\,,\ x \cdot x = x$ (巾等律)

④ $x \cdot (x + y) = x\,,\ x + (x \cdot y) = x$ (吸収律)

⑤ $-(-x) = x$ (反転)

⑥ $-1 = 0\,,\ -0 = 1$

⑦ $z + x = z + y\ \ and\ \ z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y$

⑧ $-(x + y) = -x \cdot -y\,,\ -(x \cdot y) = (-x) + (-y)$ (ド・モルガン律)

⑨ $x = x \cdot (-y) + x \cdot y$

2.2　ブール代数の原子

ブール代数を考える際、原子という特別な要素に注目することが重要であることが知られている。また、有限な関係代数を考える際、また、4、5 章で、関係代数を特徴づけるのに有効に用いられる。

Definition 2.2.1

ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ において、順序に関する 0 でない極小元を $\mathcal{B}$ の原子という。$\mathcal{B}$ の原子全体の集合を $At(B)$ と表す。0 でない任意の B の要素 b に対して、b 以下の原子が存在する時、$\mathcal{B}$ を原子的であるという。

Theorem 2.2.1

ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ の要素 a に対して、次の条件は互いに同値である。

① $a \in At(B)$

② $0 < a \leq b\ \ or\ \ 0 < a \leq -b$

③ $0 < a \leq b + c \Rightarrow a \leq b\ \ or\ \ a \leq c$

ブール代数の任意の部分集合 S に対して、その上限が存在する時、それを $\sum S$ と表す。S の下限が存在する時、$\prod S$ と表す。有限部分集合の場合、その上限は、有限部分集合の全ての要素の和、下限は有限部分集合の全ての要素の積に一致する。但し、$\sum \emptyset = 0$、及び $\prod \emptyset = 1$ であることに注意する。

Theorem 2.2.2

ブール代数 $\mathcal{B}$ の原子 a に対して次が成り立つ。

$$\forall S \subseteq B \exists s \in B((s = \textstyle\sum S\ \ and\ \ a \leq s) \Leftrightarrow \exists t \in S(a \leq t))$$

Theorem 2.2.3

ブール代数 $\mathcal{B}$ に対して次の条件は互いに同値である。

① $\mathcal{B}$ が原子的である

② $\sum At(B) = 1$

③ $x = \sum\{a \in At(B) | a \leq x\}$

以下においてブール代数のフィルターを考察する。これは、ブール代数の表現定理を示す際に、一般的な手法であり、また、5 章で、関係代数が完備で (後述) 原子的な関係代数に埋め込めることを示す際に有効に用いられる。

Definition 2.2.2

ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ において、B の空でない部分集合 M が次の条件をみたす時、M は有限交差性を持つという。

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \exists \{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq B[\{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq M \Rightarrow m_1 \cdot \ldots \cdot m_n \neq 0]$$

Definition 2.2.3

ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ において、B の部分集合 F が次をみたす時、F を $\mathcal{B}$ 上のフィルターという。$\mathcal{B}$ 上のフィルター全体の集合を $Filt(\mathcal{B})$ と表す。

$(F0)$ $F \subseteq B$

$(F1)$ $F \neq \emptyset$

$(F2)$ $x, y \in F \Rightarrow x \cdot y \in F$

$(F3)$ $x \in F \ and \ x \leq y \Rightarrow y \in F$

更に、$\mathcal{B}$ 上のフィルター F が 0 を要素に持たない時、F はプロパーであるといい、プロパーフィルターであって集合の包含関係に関して極大であるものを極大フィルターという。

また、$\mathcal{B}$ 上のプロパーフィルター F が次の条件をみたす時、素であるという。

(PF) $x + y \in F \Rightarrow x \in F \ or \ y \in F$

更に、$\mathcal{B}$ 上のプロパーフィルター F が次の条件をみたす時、F はウルトラフィルターという。

(UF) $x \in F \ or \ -x \in F$

$\mathcal{B}$ 上のウルトラフィルター全体の集合を $Ult(\mathcal{B})$ と表す。

Theorem 2.2.4

ブール代数 $\mathcal{B}$ のフィルターの全体の集合 $Filt(B)$ に対して、$Filt(B)$ の全順序部分集合 $\mathcal{P}$ の和集合 $\cup\mathcal{P}$ はフィルターである。

Definition 2.2.4

ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ において、B の空でない部分集合 M に対して、次の集合 F_M を集合 M によって生成される $\mathcal{B}$ 上のフィルターという。

$$F_M = \{x \in B | \exists n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \exists e_1 \ldots \exists e_n \in M(e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \leq x)\}$$

Theorem 2.2.5

ブール代数 $\mathcal{B}$ の空でない部分集合 M に対して、M によって生成される $\mathcal{B}$ 上のフィルター F_M は M を部分集合に含む最小のフィルターであり、次の条件は互いに同値となる。

① M が有限交差性を持つ

② F_M はプロパーフィルターである

Definition 2.2.5
ブール代数 $\mathcal{B}$ において、B の要素 z に対して、次の集合 F_z を z によって生成された $\mathcal{B}$ 上の単項フィルターという。

$F_z = \{x \in B | x \leq z\}$

単に F が単項フィルターという時は、$\mathcal{B}$ のある要素 z があって z から生成される単項フィルターに F が一致することとする。

Theorem 2.2.6
ブール代数上のフィルターに対して次の条件は互いに同値である。
① フィルターが極大フィルターである
② フィルターがウルトラフィルターである
③ フィルターが素である

Theorem 2.2.7
ブール代数の空でない部分集合 M に対して次の条件は同値である。
① M が有限交差性を持つ
② M を部分集合に持つウルトラフィルターが存在する

2.3 ブール代数の表現定理

ブール代数の表現定理は、関係代数の表現定理を考える際の主な動機の一つである。

Theorem 2.3.1 (Stone,1936)
全てのブール代数は或る集合体に同型である。

これをブール代数の表現定理と呼ぶ。

Definition 2.3.1
二つのブール代数 $\mathcal{A} = (A, +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, 1_A)$、$\mathcal{B} = (B, +_B, \cdot_B, -_B, 0_B, 1_B)$ において、代数間の写像 $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が次をみたす時、h を準同型写像という。

$(BH1)$ $h(x \cdot_A y) = h(x) \cdot_B h(y)$

$(BH2)$ $h(-_A x) = -_B h(x)$

準同型写像が全単射である時、同型写像という。

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の間に同型写像が存在する時、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は同型であるといい、$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ と表現する。

一般に、ブール代数から巾集合代数への単射準同型ををブール代数の表現という。特に、表現の像集合は、巾集合代数の集合体をなす。つまり、ブール代数の表現は、ある基集合の集合代数への同型写像でもある。この基集合を X とする時、基集合を明示的にするために集合体 $\mathcal{F}_X$ への表現とも表現する。

S 上の単項関係は S の部分集合である。故にブール代数の表現は、その要素と単項演算との対応を表している。

ブール代数 $\mathcal{B}$ において、B の任意の部分集合が上限と下限を持つ場合、$\mathcal{B}$ を完備ブール代数という。巾集合代数は完備原子的ブール代数である。

ブール代数の表現定理は、ブール代数が完備原子的ブール代数に埋め込まれるという側面をもつ。5 章でこれに対応する関係代数の結果が示される。

Theorem 2.3.2

二つのブール代数 $\mathcal{A} = (A, +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, 1_A)$、$\mathcal{B} = (B, +_B, \cdot_B, -_B, 0_B, 1_B)$ において、代数間の準同型写像 $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は次をみたす。

$(BH3)$　　$h(x +_A y) = h(x) +_B h(y)$

$(BH4)$　　$h(0_A) = 0_B$

$(BH5)$　　$h(1_A) = 1_B$

Definition 2.3.2

ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ において、B 上の写像 $st : \mathcal{B} \to \wp(Ult(\mathcal{B}))$ が、次の対応によって与えられる時、写像 st を $\mathcal{B}$ 上のストーン写像という。

$x \mapsto \{F \in Ult(\mathcal{B}) | x \in F\}$

Theorem 2.3.3

ブール代数上のストーン写像は単射準同型である。

ストーン写像の像はブール代数のウルトラフィルターの巾集合代数の集合体になるので、この定理からブール代数の表現定理が得られる。更に、ストーン写像はブール代数上の表現である。

2.4 完備ブール代数

ここでは、完備ブール代数がもつ性質を確認し、ブール代数の表現が上限や下限を保存する場合を考える。

Theorem 2.4.1

ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ と集合 $M = \{m_i | i \in I\}$ に対して、 $\mathcal{B}$ で M の上限や下限が存在する時次が成り立つ。但し、③、④については左辺が $\mathcal{B}$ で定義される時、かつその時に限り右辺が $\mathcal{B}$ で定義され、その時には、左辺 = 右辺がなりたつことを表す。

① $b \in B$ $b \cdot \sum M = \sum_{i \in I} (b \cdot m_i)$

② $b \in B$ $b + \prod M = \prod_{i \in I} (b + m_i)$

③ $-\sum M = \prod_{i \in I} (-m_i)$

④ $-\prod M = \sum_{i \in I} (-m_i)$

次に、ブール代数上の表現が、ブール代数の上限や下限を保存する表現を考える。

Definition 2.4.1

ブール代数 $\mathcal{B}$ 上の表現 h が完備表現であるとは、次をみたす時にいう。

$\forall S \subseteq B \exists u \in B(u = \sum S \Rightarrow h(\sum S) = \cup\{h(s) | s \in S\})$

Theorem 2.4.2

ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ 上の表現 h が完備表現である時、次が成り立つ。

$\forall S \subseteq B \exists u \in B(u = \prod S \Rightarrow h(\prod S) = \cap\{h(s) | s \in S\})$

Proof
B の部分集合 S が下限 $\prod S$ をもつとする。$-S$ を $\{-s|s \in S\}$ とおく。今、h は表現であり完備であることと、定理 *2.11* より次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} h(\Pi S) &= h(--\Pi S) \\ &= X \setminus h(-\Pi S) \\ &= X \setminus h(\Sigma - S) \\ &= X \setminus \cup\{h(-s)|s \in S\} \\ &= \cap\{X \setminus h(-s)|s \in S\} \\ &= \cap\{h(s)|s \in S\} \end{aligned}$$

■

ブール代数上の表現が完備であることは、原子的であることと関係が深い。このことを見るために次の準備を行う。

Definition 2.4.2
ブール代数 $\mathcal{B}$ 上の表現 h が原子的表現であるとは、表現の値域である集合体の基集合を X として次をみたす時にいう。

$$\forall x \in X\ \exists a \in At(B) \quad x \in h(a)$$

ブール代数 $\mathcal{B}$ 上の 原子的表現は、$\mathcal{B}$ が原子的であることと関連が深いことが以下に明らかになる。表現の基集合 X から B の巾集合への次の写像 h^* を考えてみる。

$$\forall x \in B \quad h^*(x) = \{b|x \in h(b)\}$$

Lemma 2.4.3
ブール代数 $\mathcal{B}$ 上、基集合 X 上の集合体への表現 h について、X の任意の要素 x に対し、$h^*(x) = \{b \in B|x \in h(b)\}$ はウルトラフィルターである。

Theorem 2.4.4
ブール代数 $\mathcal{B}$ 上の基集合 X の集合体への表現 h について、次は同値である。
① X の任意の要素 x に対して、フィルター $h^*(x) = \{b|x \in h(b)\}$ は単項フィルターである
② $\mathcal{B}$ が原子的である
③ h が原子的である
④ $\forall b \in B \quad h(b) = \cup\{h(a)|a \in At(\mathcal{B})\ \ and\ \ a \leq b\}$

Theorem 2.4.5
ブール代数 $\mathcal{B}$ 上の表現 h において原子的表現であることと完備表現であることは同値である。

2.5 ストーン空間位相

ブール代数の表現定理は位相を用いても表される。これを次に確認しておく。まず、位相空間の必要事項を確認しておく。

Definition 2.5.1
集合 X において X の部分集合族 $\mathcal{O}$ が以下の条件をみたす時、対 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という。
$(O1)$ $\quad X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$

$(O2)$ $\quad G_1, G_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{O}$

$(O3)$ $\quad \forall\lambda \in \Lambda\ (G_\lambda \in \mathcal{O}) \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \in \mathcal{O}$

また、$\mathcal{O}$ を X の開集合系という。$\mathcal{O}$ の要素を X の開集合という。$\mathcal{O}$ の要素の補集合を X の閉集合という。開集合であり閉集合である X の部分集合を開閉集合という。X 上の開閉集合の全体の集合を $Clop(X)$ と表す。

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開閉集合全体の集合 $Clop(X)$ は、集合の演算によりブール代数をなす。これを開閉集合代数という。

$Clop(\mathcal{X}) = (Clop(X), \cap, \cap, \setminus, \emptyset, X)$

Definition 2.5.2

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において、X の部分集合の族$\mathcal{U}$ が次の条件をみたす時、$\mathcal{U}$ を $(X, \mathcal{O})$ の (開) 基底という。

$(OB1)$ $\quad \mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$

$(OB2)$ $\quad O \in \mathcal{O} \Rightarrow\ O \subseteq \cap\{V \in \mathcal{U} | V \subseteq O\}$

Theorem 2.5.1

集合 X において、X の部分集合の族 $\mathcal{U}$ が次の条件をみたす時、$\mathcal{O}$ を $\mathcal{O} = \{\cup\mathcal{V} | \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}\}$、とおけば、対 $(X, \mathcal{O})$ は位相空間をなす。

$(B1)$ $\quad X \subseteq \cup\mathcal{U}$

$(B2)$ $\quad B_1, B_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \subseteq \cup\{V \in \mathcal{U} | V \subseteq B_1 \cup B_2\}$

Definition 2.5.3

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたす時、ハウスドルフ空間という。

(T_2) $\quad \forall x \forall y \in X[x \neq y \Rightarrow \exists O_1 \exists O_2 \in \mathcal{O}(x \in O_1, y \in O_2\ \ and\ \ O_1 \cap O_2 = \emptyset)]$

また、次をみたす時、完全分離空間という。

(TD) $\quad \forall x \forall y \in X[x \neq y \Rightarrow \exists C \in Clop(X)(x \in C\ \ and\ \ y \notin C)]$

Theorem 2.5.2

完全分離空間はハウスドルフ空間である。

Definition 2.5.4

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と X の部分集合 S に対して、X の部分集合からなる集合族$\mathcal{U}$ が $S = \cup\mathcal{U}$ を満たす時、$\mathcal{U}$ を S の被覆と呼び、$\mathcal{U}$ が X の開集合からなる時、開被覆、 $\mathcal{U}$ が有限個の要素からなる時、有限被覆と呼ぶ。$\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ が S の被覆で $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ をみたす時、$\mathcal{V}$ を$\mathcal{U}$ の部分被覆という。S の任意の開被覆が S の有限な部分被覆を持つ時、S を $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合という。

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は X 自身の任意の開被覆が有限な部分被覆を持つ時、コンパクト空間という。

Definition 2.5.5

開閉集合全体の集合が開基底をなす位相空間をゼロ次元空間という。

コンパクトハウスドルフゼロ次元位相空間をブール空間という。

Theorem 2.5.3

コンパクト空間の閉部分集合はコンパクト集合である。

Theorem 2.5.4

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ について、$(X,\mathcal{O})$ がコンパクトであることは $(X,\mathcal{O})$ の任意の閉集合の族 $\mathcal{F}$ に対して、$\mathcal{F}$ の任意の有限個の要素 $F_1,\ldots,F_n$ について $\bigcap_{i=0}^{n} F_i \neq \emptyset$ ならば $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ をみたすことと同値である。

Theorem 2.5.5

コンパクト完全分離空間であることとブール空間であることは同値である。

この定理を示すために、定理 2.5.3 を用いる。

Definition 2.5.6

ブール代数 $\mathcal{B}$ について、次の集合族 $\mathcal{T} = \{\cup\mathcal{U} | \mathcal{U} \subseteq st[B]\}$ と $\mathcal{B}$ 上のウルトラフィルター全体の集合の対 $(Ult(\mathcal{B}),\mathcal{T})$ を $\mathcal{B}$ 上のストーン空間といい、$\mathcal{T}$ を $\mathcal{B}$ 上のストーン空間位相と呼ぶ。

Theorem 2.5.6

ブール代数 $\mathcal{B}$ 上のストーン写像の像は $\mathcal{B}$ のストーン空間の開基底であり次をみたす。

$st[B] = Clop(Ult(\mathcal{B}))$

Theorem 2.5.7 (Stone)

ブール代数は或るブール空間の開閉集合代数に同型である。

これは、ブール代数の表現定理の位相空間論的ないいかえである。

2.6 パーフェクト拡大

ブール代数の表現定理を集合論的なものから、代数的なものに置き換えたものが次のパーフェクト拡大である。

Definition 2.6.1

二つのブール代数 $\mathcal{B} = (B,+,\cdot,-,0,1)$、$\mathcal{A} = (A,+,\cdot,-,0,1)$ に対して、$\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ のパーフェクト拡大であるとは次をみたすときに言う。

$(PE1)$ $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ の部分代数

$(PE2)$ $\mathcal{A}$ が原子的で完備

$(PE3)$ $\{x_i | i \in I\} \subseteq B[\sum_{i\in I}^{\mathcal{A}} x_i = 1 \Rightarrow \exists J(J \subseteq I, |J| < \aleph_0 \ \ and \ \ \sum_{j\in J} x_j = 1)]$

$(PE4)$ $\forall u \forall v \in At(\mathcal{A})[u \neq v \Rightarrow \exists b \in B(u \leq_A b \ \ and \ \ v \cdot b = 0)]$

Theorem 2.6.1

任意のブール代数は、パーフェクト拡大である完備原子的ブール代数をもつようなブール代数に埋め込まれる。

Proof

かってなブール代数を $\mathcal{B}$ とする。$\mathcal{B}$ 上のストーン写像をとれば $\mathcal{B}$ 上のウルトラフィルターの巾集合代数 $\wp(Ult(\mathcal{B}))$ に埋め込むことができる。$\wp(Ult(\mathcal{B}))$ はストーン写像の像 $st[B]$ という部分代数のパーフェクト拡大であることが確かめられる。 ■

このことからパーフェクト拡大はブール代数の表現定理と同等であることがわかる。

Theorem 2.6.2
ブール代数 $\mathcal{A}$ がブール代数 $\mathcal{B}$ のパーフェクト拡大である時、代数 B は巾集合代数 $\wp(At(\mathcal{A}))$ の部分代数に同型となる。

Proof
$F(x) = \{p \in At(\mathcal{A}) | p \leq x\}$ $(x \in B)$ なる $\mathcal{B}$ 上の写像を考えると単射準同型写像になる。その像 $F[B]$ は巾集合代数 $\wp(At\mathcal{A})$ の部分代数になる。 ■

Theorem 2.6.3
ブール空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して X の巾集合代数 $\wp(X)$ は X の開閉集合代数 $Clop(X)$ のパーフェクト拡大である。

次の定理は、パーフェクト拡大とストーン位相による表現定理との関係の一部を表すものである。

Definition 2.6.2
二つのブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$、$\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1)$ に対して、$\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ のパーフェクト拡大である時、$\mathcal{A}$ の要素 X が開であるとは、$x = \sum_{x \geq y \in B}^{\mathcal{A}} y$ をみたす時にいう。X が閉であるとは、$x = \prod_{x \leq y \in B}^{\mathcal{A}} y$ をみたす時にいう。

Theorem 2.6.4
二つのブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$、$\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1)$ に対して、$\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ のパーフェクト拡大である時、次が成り立つ。
① $x \in A$ 　x は開 $\Rightarrow -x$ は閉
② $x \in A$ 　x は開かつ閉 $\Rightarrow x \in B$
③ $u \in At(\mathcal{B}) \Rightarrow u \in At(\mathcal{A})$

但し、③は、 $\mathcal{B}$ が完備原子的 $\mathcal{A}$ の部分代数でありさえすれば成り立つことに注意する。定理 5.2.5 の証明で用いられる。

2.7 BAO

今後考察する関係代数は少なくとも、土台がブール代数であることを想定するが、特に、演算子付きブール代数の全体の一部でもある。そこで、演算子付きブール代数としての BAO についてここで、少し、触れておくことにする。この理論の詳細は、文献 [7]、[4] と [6] に詳しい。

Definition 2.7.1
$\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ をブール代数とする。この時、B 上の n 項演算 f が加法的であるとは、次をみたすことである。

$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x \forall x' \in B \;\; and \;\; \forall i < n$

$f(x_1, \ldots, x_i, (x + x'), \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i, x, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_i, x', \ldots, x_n)$

また、B 上の n 項演算 f がノーマルであるとは、次をみたすことである。

$\forall x_1 \ldots \forall x_n \in B \;\; and \;\; \forall i < n \quad x_i = 0 \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 0$

Definition 2.7.2

ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ と集合 Λ に対して、B 上の演算の集合 $\Omega = \{\Omega_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ に対して (0 項演算を含み、有限項の演算からなるとする)、代数 $\mathcal{B}' = (B, +, \cdot, -, 0, 1, \{\Omega_\lambda\}_\lambda)$ が BAO であるとは、Ω の各要素 Ω_λ が加法的でノーマルな演算である時をいう。

また、BAO $\mathcal{B}'$ に対して、土台となるブール代数 $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ のことを、ブールリダクトと呼ぶ。

定義から 0 項演算である定項も無意味に加法的でノーマルとなる。また、Λ が空集合の時はブール代数そのものである。

BAO は文献 [7] によって最初に与えられたが、その定義では、ノーマルという条件がいれられていない。ここでは、文献 [6] の定義に合わせた。以下に述べる関係代数のいくつかの部分は、BAO に対して一般に成り立つ事実の特別な場合である。今回述べる表現の理論は、BAO 上で成り立つ事実をもとに示された経緯があることを断っておく。

Theorem 2.7.1

BAO $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1, \{\Omega_\lambda | \lambda \in \Lambda\})$ に対して、次が成り立つ。

$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x \forall x' \in B \ \ and \ \forall i < n$

$x \leq x' \Rightarrow \Omega_\lambda(x_1, \ldots, x_i, x, \ldots, x_n) \leq \Omega_\lambda(x_1, \ldots, x_i, x', \ldots, x_n)$

第3章　関係代数

この章では、これまでの章の準備を元に、二項関係との関わりにふれつつ関係代数を導入する。この部分の記述は主に、文献 [6]、[1] 及び [8] によっている。

3.1　二項関係と関係代数

二項関係上の演算では関係の合成や、逆関係、等号関係を考えることが基本的である。この考察をもとに関係代数が定められる。ここではまず、一つの集合上の二項関係について考える。

集合 U 上の二項関係の全体を $Re(U)$ と表そう。この時、$Re(U)$ の二元を R、S とする時、これらの間に集合論的な交わりと結びを定めることができる。更に、これらに補集合をそれぞれ定義できる。これに空な関係 $\emptyset$、最大の二項関係 $U \times U$ を含めて $Re(U)$ は $U \times U$ 上の巾集合代数をなす。

写像 (関数) は、関係の特別な場合である。写像の合成や逆写像を考えることから、関係の逆関係や合成関係が考えられることが自然である。そこで、逆関係や合成関係を次のように定める。

$R^{-1} = \{(t,s)|(s,t) \in U \times U\}$

$R \circ S = \{(p,q)|\exists r \in U((p,r) \in U \ \ and \ \ (r,q) \in U)\}$

また、U 上の恒等関係もあった方が都合が良い。これを、 Id_U とおく。

$Id_U = \{(s,s)|s \in U\}$

以上をまとめた代数 $Re(\mathcal{U}) = (Re(U), \cap, \cap, \setminus, \emptyset, U \times U, \circ, ^{-1}, Id_U)$ が二項関係を概ね表していると考えられる。実際にこれまで用意したことから以下の様なことが言える。

Theorem 3.1.1

集合 U 上の同値関係 E は次をみたすことにほかならない。

① $Id_U \subseteq E$ (反射律)

② $E^{-1} \subseteq E$ (対称律)

③ $E \circ E \subseteq E$ (推移律)

Theorem 3.1.2

U 上の順序関係 W は、次をみたすことにほかならない。

① $Id_U \subseteq W$ (反射律)

② $W \cap W^{-1} \subseteq Id_U$ (反対称律)

③ $W \circ W \subseteq W$ (推移律)

Theorem 3.1.3

集合 U 上の集合の直積の形の二項関係 $G \times H$ について次のことが成り立つ。

① $(G \times H)^{-1} = H \times G$

② $(G \times H) \circ (G \times H) \subseteq G \times H$

Theorem 3.1.4

　空でない集合 U 上の二項関係 f について次のことが成り立つ。

f が U から U への写像である $\Leftrightarrow f^{-1} \circ f \subseteq Id_U \ \ and \ \ U \times U = f \circ (U \times U)$

Proof

$(\Rightarrow)$ 　f を U 上の写像とする。まず、一つ目の条件を確かめる。

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in f^{-1} \circ f \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z[(x,z) \in f^{-1} \ \ and \ \ (z,y) \in f] \qquad (\because U \neq \emptyset) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z[(z,x) \in f \ \ and \ \ (z,y) \in f] \\
\Longrightarrow\ & x = y \\
\Longleftrightarrow\ & (x,y) \in Id_U
\end{aligned}
$$

　したがって、 $f^{-1} \circ f \subseteq Id_U$ が成り立つ。

　次に、二つ目の条件を示す。$f \circ (U \times U) \subseteq U \times U$ は明白。逆の包含関係を示す。

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in U \times U \\
\Longleftrightarrow\ & x \in U \ \ and \ \ y \in U \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z \in U((x,z) \in f) \ \ and \ \ y \in U \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z \in U[(x,z) \in f \ \ and \ \ y \in U] \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z \in U[(x,z) \in f \ \ and \ \ (z \in U \ \ and \ \ y \in U)] \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z \in U[(x,z) \in f \ \ and \ \ (z,y) \in U \times U] \\
\Longleftrightarrow\ & (x,y) \in f \circ (U \times U)
\end{aligned}
$$

　したがって、$U \times U \subseteq f \circ (U \times U)$ が成り立つ。

$(\Leftarrow)$ 　$f^{-1} \circ f \subseteq Id_U$ の仮定から次のことが成り立つ。

$$
\begin{aligned}
& \exists z[(z,x) \in f \ \ and \ \ (z,y) \in f] \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z[(x,z) \in f^{-1} \ \ and \ \ (z,y) \in f] \\
\Longrightarrow\ & (x,y) \in f^{-1} \circ f \\
\Longrightarrow\ & (x,y) \in Id_U
\end{aligned}
$$

　したがって、$\forall z[(z,x) \in f \ \ and \ \ (z,y) \in f \Rightarrow x = y]$ となる。

　次に、仮定 $f \circ (U \times U) = U \times U$ より次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
& x \in U \\
\Longleftrightarrow\ & (x,x) \in U \times U \\
\Longleftrightarrow\ & (x,x) \in f \circ (U \times U) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y[(x,y) \in f \ \ and \ \ (y,x) \in U \times U] \\
\Longrightarrow\ & \exists y((x,y) \in f)
\end{aligned}
$$

　したがって、$\forall x \in U \exists y \in U((x,y) \in f)$ となる。

　以上から、f は写像である。 ■

　明らかに、Id_U は写像である。また、ここで述べた写像の特徴は、後の章で、一般の関係代数において注目されることになる。次の二つの定理とそれらの証明は、今述べた写像の特徴を踏まえたものである。

Theorem 3.1.5

　空でない U 上の二項関係 f が写像である時、次のことが成り立つ。

　f が単射である $\Leftrightarrow \exists g \in Re(U)[f \circ g = Id_U \ , \ \ g^{-1} \circ g \subseteq Id_U \ \ and \ \ U \times U = g \circ (U \times U)]$

Proof

$(\Rightarrow)$　f を U 上の単射とする。$U \neq \emptyset$ なので、U の元は一つは存在する。よって、集合 $f[U] = \{y | \exists x \ (x,y) \in f\}$ は空でない。f が全射でなければ、$U \setminus f[U]$ をみたす要素が存在する。この内の一つを x_0 として固定する。そして、以下のように写像 g を構成する。

$$(y,x) \in g \Leftrightarrow \begin{cases} (y,x) \in g & (x,y) \in f \\ (y,x_0) \in g & (x,y) \notin f \end{cases}$$

f が単射であるから、g は写像であることが分かる。g の写像の定義と写像 g の定め方から $f \circ g \subseteq Id_U$ が得られる。f の写像の定義と、写像 g の定め方から、$Id_U \subseteq f \circ g$ が得られる。

f が全射の時は、g の構成の仕方において、$(x,y) \notin f$ の場合を省いておけば、g は写像で、$Id_U \subseteq f \circ g$ が得られる。

$(\Leftarrow)$　必要条件がなりたつものとする。まず、次のことに注意する。

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in f \\
\Longleftrightarrow\ & (x,y) \in f \ \ and \ \ (x,x) \in Id_U = f \circ g \\
\Longleftrightarrow\ & (x,y) \in f \ \ and \ \ \exists z[(x,z) \in f \ \ and \ \ (z,x) \in g] \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z \ [(x,y) \in f \ \ and \ \ (x,z) \in f \ \ and \ \ (z,x) \in g] \\
\Longrightarrow\ & \exists z \ [(x,y) \in f \ \ and \ \ y = z \ \ and \ \ (z,x) \in g] \\
\Longrightarrow\ & (x,y) \in f \ \ and \ \ (y,x) \in g
\end{aligned}$$

このことから、次をえる。

$$\begin{aligned}
& (p,y) \in f \ \ and \ \ (q,y) \in f \\
\Longrightarrow\ & \{(p,y) \in f \ \ and \ \ (y,p) \in g\} \ \ and \ \ \{(q,y) \in f \ \ and \ \ (y,q) \in g\} \\
\Longrightarrow\ & (y,p) \in g \ \ and \ \ (y,q) \in g \\
\Longrightarrow\ & p = q
\end{aligned}$$

■

Theorem 3.1.6

集合 U [1] 上の二項関係 f が写像である時、次が成り立つ。

f が全射である $\Leftrightarrow \exists g \in Re(U)[g \circ f = Id_U \ , \ \ g^{-1} \circ g \subseteq Id_U \ \ and \ \ U \times U = g \circ (U \times U)]$

Proof

$(\Leftarrow)$　必要条件がなりたつものとする。まず、次のことに注意する。

$$\begin{aligned}
& y \in U \\
\Longleftrightarrow\ & (y,y) \in Id_U = g \circ f \\
\Longleftrightarrow\ & \exists x \ [(y,x) \in g \ \ and \ \ (x,y) \in f] \\
\Longrightarrow\ & \exists x \ (x,y) \in f
\end{aligned}$$

よって、$\forall y \exists x \ (x,y) \in f$、つまり f は全射である。

$(\Rightarrow)$　選択公理を用いて示されるがここでは省略する。■

なお、血縁関係などを二項関係で表現する際、$U \times U \setminus Id_U$ 等という補演算を含んだ関係を用いる必要があることから補演算も大切である[2]。$U \times U \setminus Id_U$ という関係はそれ自身重要であり、相違関係とよばれる。

---

[1] 空集合であってもよい。

[2] 狭義の順序 W' は推移関係と、非反射関係 $W' \subseteq (U \times U) \setminus Id_U$ によって特徴づけられるので、補演算が数学的な側面でも現れることが知られる。

例として、人の集合上で以下のような関係を考える。但し、恒等関係を Equal、補演算子を $-$ として相違関係を $-$Equal と書くものとする。ここで、次の関係を用意する。

$(a, b) \in Parent$　　b は a の親である

$(a, b) \in Son$　　b は a の息子である

この時、補演算以外は上述の関係の演算子用いて次の関係を表現できる。

$Brother = (Parent \circ Son) \cap -Equal$

$Father = ((Parent \circ Son) \cap Equal) \circ Parent$

$Mother = Parent \circ -Father$

これらの関係演算に関する考察は、タルスキ以前のパースの論文[3]によって既に扱われていたことが知られている。

3.2　プロパー関係代数

前節では、二項関係のなす代数構造を考えたが、二項関係上の演算を集合の上に忠実に表したものとして、更に、特殊な場合として次のプロパー代数が考えられている。これは、巾集合代数に対して集合体を考えることのアナロジーである。

Definition 3.2.1 (プロパー関係代数 (PRA))

三つの集合 S と B と U に対して、代数 $\mathcal{S} = (S, \cup, \cap, \setminus, \emptyset, U, Id_B, |, ^{-1})$ が、次の条件をみたす時、基集合 B とユニット U 上のプロパー関係代数という。

$(PRA1)$　$S \neq \emptyset$

$(PRA2)$　$S \subseteq \wp(B \times B)$

$(PRA3)$　$(S, \cup, \cap, \setminus, \emptyset, U)$ は集合体

$(PRA4)$　$Id_B = \{(b, b) | b \in B\} \in S$

$(PRA5)$　$s \in S \Rightarrow s^{-1} = \{(c, b) | (b, c) \in s\} \in S$

$(PRA6)$　$r, s \in S \Rightarrow r|s = \{(b, c) | \exists d((b, d) \in r \ \ and \ \ (d, c) \in s)\} \in S$

この定義においてユニット U が $B \times B$ に等しいとは限らない。

基集合 B とユニット U 上で台集合が S のプロパー関係代数 $\mathcal{S}$ において、基集合が空集合とすると、台 S が空でないので $S = \{\emptyset\}$ でなければならない。$U = \cup S$ なので、$U = \cup\{\emptyset\} = \emptyset$。一方、$Id_B = \emptyset$ となる。したがって、この時、退化なプロパー関係代数となる。

Definition 3.2.2

基集合 B とユニット U 上のプロパー関係代数が $U = B \times B$ をみたす時、正方 $(square)$ という。

台集合 S、基集合 B のプロパー関係代数が $S = \wp(B \times B)$ をみたす時、完全 $(full)$ という。

明らかに、完全なプロパー関係代数は正方関係代数である。3.1 節で見た二項関係全体の代数は完全なプロパー関係代数である。

Theorem 3.2.1

基集合 B 上のプロパー関係代数 $\mathcal{S} = (S, \cup, \cap, \setminus, \emptyset, U, Id_B, |, ^{-1})$ において、U は B 上の同値関係である。

[3] C.S.Peirce, The Logic of Relatives, 1883、参考文献 [16] 参照のこと。

Proof

定理 *3.1.1* とのプロパー関係代数の定義から直ちに分かる。 ■

ここで、集合 B に対して 3.1 節で定めた二項関係全体の代数 $Re(\mathcal{B}) = (Re(B), \cup, \cap, \setminus, \emptyset, B \times B, Id_B, \circ, ^{-1})$ からプロパー関係代数が得られることをみておく。

二項関係の代数から以下のようにしてプロパー関係代数を構成できる。まず、U と U による演算 $^{-1}$ を以下のように定める。

(1) U は B 上の空集合でない同値関係

(2) $\forall r \in Re(B)(r^c = U \setminus r)$

この時、$S = \{R \cap U | R \in Re(B)\}$ によって、 プロパー関係代数 $\mathcal{S} = (S, \cup, \cap, ^c, \emptyset, U, Id_B, |, ^{-1})$ が得られる。

実際、代数 $(S, \cup, \cap, ^c, \emptyset, U)$ は基集合 U の集合体をなす。そして、B が空集合であっても、$\emptyset \in \wp(B \times B)$ であり、集合 U は空でないとしているので S は空集合ではない。今、S の任意の 2 元は $Re(B)$ の要素 P、Q を用いて $P \cap U$、$Q \cap U$ と表される。この二元を固定して、 $\mathcal{S}$ において合成関係と逆関係をとる演算について閉じていることをみる。まず、U は同値関係だから、定理 3.1.1 がなりたつことに注意する。

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in (P \cap U) \circ (Q \cap U) \\
\iff & \exists z[(x,z) \in P \cap U \;\; and \;\; (z,y) \in Q \cap U] \\
\iff & \exists z[\{(x,z) \in P \;\; and \;\; (x,z) \in U\} \;\; and \;\; \{(z,y) \in Q \;\; and \;\; (z,y) \in U\}] \\
\iff & \exists z[\{(x,z) \in P \;\; and \;\; (z,y) \in Q\} \;\; and \;\; \{(x,z) \in U \;\; and \;\; (z,y) \in U\}] \\
\implies & \exists z[\{(x,z) \in P \;\; and \;\; (z,y) \in Q\} \;\; and \;\; (x,y) \in U] \\
\iff & \exists z[(x,z) \in P \;\; and \;\; (z,y) \in Q] \;\; and \;\; (x,y) \in U \\
\iff & (x,y) \in P \circ Q \;\; and \;\; (x,y) \in U \\
\iff & (x,y) \in (P \circ Q) \cap U \\
\implies & (x,y) \in U
\end{aligned}
$$

よって、$(P \cap U) \circ (Q \cap U) \subseteq U$ が得られる。

したがって、$(P \cap U) \circ (Q \cap U) \in S$ となる。

次に、同様の計算と、U が対称関係であることから、$(P \cap U)^{-1} = P^{-1} \cap U^{-1} = P^{-1} \cap U \in S$ を得る (最初の等号は容易に確かめられる)。これで、$\mathcal{S}$ において合成関係と逆関係をとる演算について閉じていることがわかった。

最後に、U が反射関係であることから、$Id_B \subseteq U$ より、$Id_B \in S$ を得る。

以上から、$\mathcal{S}$ はプロパー関係代数である。

ここに述べたことから、更に以下のことがわかる。

Theorem 3.2.2

二項関係の代数 $Re(\mathcal{B}) = (Re(B), \cup, \cap, \setminus, \emptyset, B \times B, Id_B, \circ, ^{-1})$ の二項関係 P、Q、R に対して次が成り立つ。

① $(P \cap R) \circ (Q \cap R) \subseteq (P \circ Q) \cap R$

② $(P \cap Q)^{-1} = P^{-1} \cap Q^{-1}$

また、プロパー関係代数から同値関係に注目して以下のように、制限されたプロパー関係代数を考えることができる。

Definition 3.2.3 (制限されたプロパー関係代数 (PRA))

基集合 B とユニット U 上のプロパー関係代数 $\mathcal{S}=(S,\cup,\cap,\setminus,\emptyset,U,Id_B,|,^{-1})$ と集合 E に対して、次の条件をみたす代数 $\mathcal{S}\restriction_E=(S\restriction_E,\cup,\cap,\setminus_E,\emptyset,E\times E,Id_E,|,^{-1})$ を E よって制限されたプロパー関係代数であるという。

$(RPRA1)$　　$E\neq\emptyset\ and\ \exists b\in B[E=\{x|(b,x)\in U\}]$　(E は b による同値関係 U による同値類)

$(RPRA2)$　　$S\restriction_E=\{s\cap(E\times E)|s\in S\}$

$(RPRA3)$　　$\forall s\in S\restriction_E\ \ (\setminus_E(s)=(E\times E)\setminus s\ )$

Theorem 3.2.3

基集合 B とユニット U 上のプロパー関係代数に対して、ユニット U の同値類 E によって制限されたプロパー関係代数は正方プロパー関係代数である。

Proof

基集合 B とユニット U 上のプロパー関係代数を $\mathcal{S}=(S,\cup,\cap,\setminus,\emptyset,U,Id_B,|,^{-1})$ とする。U が空とすると、$\forall b\in B\{x|(b,x)\in U\}=\{x|(b,x)\in\emptyset\}=\emptyset$ だから、同値類は存在せず、制限されたプロパー関係代数は定義されない。 B が空の時も 同値類が存在せず、制限されたプロパー関係代数は定義されない。

U が空でない時、B のある元 b が存在して b の U による同値類 $E=\{x|(b,x)\in U\}$ が存在する。この場合に $\mathcal{S}\restriction_E$ が正方プロパー関係代数であることを示せばよい。

まず、U が反射関係だから $b\in E$ となる。よって、$(b,b)\in Id_E\subseteq E\times E$ となる。ところで $(b,b)\in Id_E\subseteq Id_B\in S$ となる。したがって、$\emptyset\neq Id_B\cap(E\times E)\in\mathcal{S}\restriction_E$、つまり $S\restriction_E\neq\emptyset$ を得る。

$S\restriction_E\subseteq\wp(E\times E)$ は明らか。

次に、代数 $(S\restriction_E,\cup,\cap,\setminus_E,\emptyset,E\times E)$ が集合体であることを示す。そのために、補演算について閉じていることと最大元について確かめておく。まず、明らかに、この集合代数の最大元は $U\cap(E\times E)\in S\restriction_E$ であるが、同値類 E の定義から $E\times E=U\cap(E\times E)$ となるので、$(E\times E)$ が最大元であることでもある。今度は、E に対する補演算について閉じていることを示す。$S\restriction_E$ の任意の要素をとる。これらは S の或る二元 r によって $r\cap(E\times E)$ と表される。これは以下の通り、$S\restriction_E$ 上で閉じている。

$$\begin{aligned}
&\setminus_E(r\cap(E\times E))\\
&=(E\times E)\setminus r\cap(E\times E)\\
&=(E\times E)\cap(U\setminus(r\cap(E\times E)))\\
&=(E\times E)\cap((U\setminus r)\cup(U\setminus(E\times E)))\\
&=(E\times E)\cap(U\setminus r)\in S\restriction_E
\end{aligned}$$

さらに、$Id_E=Id_B\cap(E\times E)\in S\restriction_E$ も成り立つ。そして、定理 *3.2.2* より、次のようにして逆関係の演算についても閉じていることがわかる。

$$\begin{aligned}
&(r\cap(E\times E))^{-1}\\
&=r^{-1}\cap(E\times E)^{-1}\\
&=r^{-1}\cap(E\times E)\in S\restriction_E
\end{aligned}$$

引く続き、合成関係の演算について閉じていることを示す。定理 *3.2.2* より、$r\cap(E\times E)$ と $s\cap(E\times E)$ に対して $(r,s\in S)$ 次が成り立つ。

$$(r\cap(E\times E))|(s\cap(E\times E))\subseteq(r|s)\cap(E\times E)$$

逆の包含関係を示そう。

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in (r|s) \cap (E \times E) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z \in B[(x,z) \in r\ \ and\ \ (z,y) \in s]\ \ and\ \ (x,y) \in E \times E \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z \in B[(x,z) \in r\ \ and\ \ (z,y) \in s\ \ and\ \ (x,y) \in E \times E]
\end{aligned}
$$

今、同値類の定義から $E = \{u|(x,u) \in U\} = \{u|(y,u) \in U\}$ なので、$z \notin E$ とすると $(x,z) \notin U$。一方、$(x,z) \in r \subseteq U$ なので、矛盾する。故に、$z \in E$ でなければならない。したがって、次を得る。

$$
\begin{aligned}
& \exists z \in E[(x,z) \in r\ \ and\ \ (z,y) \in s\ \ and\ \ (x,y) \in E \times E] \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z \in E[(x,z) \in r \cap (E \times E)\ \ and\ \ (z,y) \in s \cap (E \times E)] \\
\Longleftrightarrow\ & (x,y) \in (r \cap (E \times E))|(s \cap (E \times E))
\end{aligned}
$$

以上から、$(r|s) \cap (E \times E) \subseteq (r \cap (E \times E))|(s \cap (E \times E))$ 、つまり、$(r \cap (E \times E))|(s \cap (E \times E)) = (r|s) \cap (E \times E) \in S\restriction_E$ が示された。

これで $\mathcal{S}\restriction_E$ はプロパー関係代数であることが示された。

最後に、制限されたプロパー関係代数はユニットが基集合 E の直積集合 $E \times E$ であるので、当然正方である。 ■

なお、ユニット U のプロパー関係代数 $\mathcal{S}$ から得られる U の同値類 E によって制限されたプロパー関係代数は、$E \times E$ が $\mathcal{S}$ に属しないかもしれない。

Theorem 3.2.4

基集合 B 上の正方プロパー関係代数 $\mathcal{S} = (S, \cup, \cap, \backslash, \emptyset, B \times B, Id_B, |, ^{-1})$ は、次をみたす *(*この時 $\mathcal{S}$ は単純であるという*)*。

$$\forall s \in S[s \neq \emptyset \Rightarrow (B \times B)|s|(B \times B) = B \times B]$$

この証明は容易なので、省略する。

3.3 関係代数

これまでに紹介した二項関係の集合体に対して、それを的確に表す代数として、関係代数を導入する。既に触れた通り、ストーンの表現定理において集合体にブール代数が対応することに相当している。関係代数はタルスキによって導入された定義[4] を等式で書き直した以下のものが代表的である。

Definition 3.3.1 (関係代数 (RA))

代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ が次の条件をみたす時、関係代数 (RA) という。

$(RA1)$ $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ はブール代数

$(RA2)$ $(x;y);z = x;(y;z)$

$(RA3)$ $(x+y);z = x;z + y;z$

$(RA4)$ $x;1' = x$

$(RA5)$ $\breve{\breve{x}} = x$

$(RA6)$ $(x+y)\breve{} = \breve{x} + \breve{y}$

[4]参考文献 [17])
または、T．コタルビニスキー, 論理学史, 合同出版, 1971,pp．226-232.、を参照のこと。

$(RA7)$ $\quad (x;y)\breve{} = \breve{y};\breve{x}$

$(RA8)$ $\quad (x;-(\breve{x};y)) + y = y$

関係代数全体のクラスを **RA** と表す。

上の公理 $(RA8)$ は、次の不等式をみたすことと同じである。

$(RA8\text{-}1)$ $\quad (x;-(\breve{x};-y)) \leq y$

一般に、代数の集まり **A** に対して、いくつかの等式の集合 Σ が存在して、**A** のどの代数 K をとっても、K で Σ の全ての等式が成り立ち、**A** は Σ の全ての等式をみたす代数からなる時、**A** をバラェティという。Σ をバラェティ **A** の基底という。

A$= \{\ K|K$ は代数で、K において Σ の全ての等式が成り立つ $\}$

上の公理の形から **RA** はバラエティをなす[5]。すなわち、等式の公理のみで公理化できることがわかる。

Theorem 3.3.1

プロパーな関係代数は、関係代数である。

Proof

ここでは、条件 $(RA8)$ のみ確かめておく。基集合 B、ユニット U のプロパー関係代数を $\mathcal{S} = (S, \cup, \cap, \setminus, \emptyset, U, Id_B, |, ^{-1})$ としておく。$r, s \in S$ に対して、次を確認すればよい。

$r|(U \times U) \setminus (r^{-1}|(U \times U) \setminus s) \cup s = s$

そのためには、次を確認すれば十分である。

$r|(U \times U) \setminus (r^{-1}|(U \times U) \setminus s) \subseteq s$

実際、

$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in r|(U \times U) \setminus (r^{-1}|(U \times U) \setminus s) \\
\iff & \exists z[(x,z) \in r \ \ and \ \ (z,y) \in (U \times U) \setminus (r^{-1}|(U \times U) \setminus s)] \\
\iff & \exists z[(x,z) \in r \ \ and \ \ (z,y) \notin r^{-1}|(U \times U) \setminus s] \\
\iff & \exists z[(x,z) \in r \ \ and \ \ \forall w((z,w) \notin r^{-1} \ \ or \ \ (w,y) \notin (U \times U) \setminus s)] \\
\iff & \exists z[(x,z) \in r \ \ and \ \ \forall w((z,w) \notin r^{-1} \ \ or \ \ (w,y) \in s)] \\
\implies & \exists z[(x,z) \in r \ \ and \ \ ((z,x) \notin r^{-1} \ \ or \ \ (x,y) \in s)] \\
\iff & \exists z[(x,z) \in r \ \ and \ \ ((x,z) \notin r \ \ or \ \ (x,y) \in s)] \\
\iff & \exists z[(x,z) \in r \ \ and \ \ (x,y) \in s] \\
\implies & (x,y) \in s
\end{aligned}
$$

したがって、$r|(U \times U) \setminus (r^{-1}|(U \times U) \setminus s) \subseteq s$ が成り立つ。 ■

尚、関係代数において、定項 $1'$ を恒等元、二つの演算子 ; と $\breve{}$ に対する演算をそれぞれ、合成 (又は相対積)、転換という。

Theorem 3.3.2

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ において次のことが成り立つ。

① $1 = \breve{1}$

② $0 = \breve{0}$

③ $1' = \breve{1}'$

[5] バラェティを A.Tarski は、Equationally definable class といっている。

④ $1';x = x$

⑤ $1;1 = 1$

⑥ $x \leq y \Leftrightarrow \breve{x} \leq \breve{y}$

⑦ $z;(x+y) = z;x + z;y$

⑧ $x \leq y \Rightarrow x;z \leq y;z \;\; and \;\; z;x \leq z;y$

⑨ $-\breve{x} = (-x)^{\smile}$

⑩ $\breve{x} \cdot \breve{y} = (x \cdot y)^{\smile}$

Proof

以下の証明において、示された事実は順次用いていくものとする。

① $1 = 1 + \breve{1} = \breve{\breve{1}} + \breve{1} = (\breve{1} + 1)^{\smile} = (1 + \breve{1})^{\smile} = \breve{1}$

② $0 = \breve{\breve{0}} = (\breve{0} + 0)^{\smile} = (0 + \breve{0})^{\smile} = \breve{0} + \breve{\breve{0}} = \breve{0} + 0 = \breve{0}$

③ $1' = \breve{\breve{1}}' = (\breve{1}';1')^{\smile} = \breve{1}';\breve{\breve{1}}' = \breve{1}';1' = \breve{1}'$

④ $x = \breve{\breve{x}} = (\breve{x};1')^{\smile} = (\breve{x};\breve{1}')^{\smile} = \breve{\breve{1}}';\breve{\breve{x}} = 1';\breve{x}$

⑤ $1 = 1 + 1;1 = 1';1 + 1;1 = (1' + 1);1 = (1 + 1');1 = 1;1$

⑥ $\quad x \leq y$

$\Longleftrightarrow \; y = x + y$

$\Longrightarrow \; \breve{y} = (x+y)^{\smile} = \breve{x} + \breve{y}$

$\Longleftrightarrow \; \breve{x} \leq \breve{y}$

したがって、$x \leq y \Rightarrow \breve{x} \leq \breve{y}$ が成り立つ。また、次のことから、$x \leq y \Leftrightarrow \breve{x} \leq \breve{y}$ も成立する。

$\quad \breve{y} = (x+y)^{\smile}$

$\Longrightarrow \; y = \breve{\breve{y}} = (x+y)^{\smile\smile} = x + y$

⑦ $z;(x+y) = \breve{\breve{z}};(x+y)^{\smile\smile} = ((x+y)^{\smile};\breve{z})^{\smile} = ((\breve{x}+\breve{y});\breve{z})^{\smile} = (\breve{x};\breve{z} + \breve{y};\breve{z})^{\smile} = (\breve{x};\breve{z})^{\smile} + (\breve{y};\breve{z})^{\smile}$

$= (\breve{\breve{z}};\breve{\breve{x}}) + (\breve{\breve{z}};\breve{\breve{y}}) = z;x + z;y$

⑧ $\quad x \leq y$

$\Longleftrightarrow \; y = x + y$

$\Longrightarrow \; y;z = (x+y);z = x;z + y;z$

$\Longleftrightarrow \; x;z \leq y;z$

$x \leq y \Rightarrow z;x \leq z;y$ についても、同様に示される。

⑨ $-\breve{x} = -\breve{x} \cdot 1 = -\breve{x} \cdot \breve{1} = -\breve{x} \cdot (-x + x)^{\smile} = -\breve{x} \cdot ((-x)^{\smile} + \breve{x}) = -\breve{x} \cdot (-x)^{\smile} + 0 = -\breve{x} \cdot (-x)^{\smile}$

よって、$-\breve{x} \leq (-x)^{\smile}$ となる。一方、これは x が、$\breve{x}$ の時も成り立つので、次のことがいえる。

$\quad -\breve{\breve{x}} \leq (-\breve{x})^{\smile}$

$\Longleftrightarrow \; -x \leq (-\breve{x})^{\smile}$

$\Longleftrightarrow \; (-x)^{\smile} \leq (-\breve{x})^{\smile\smile}$

$\Longleftrightarrow \; (-x)^{\smile} \leq -\breve{x}$

したがって、$-\breve{x} = (-x)^{\smile}$ となる。

⑩ $\breve{x} \cdot \breve{y} = -(-\breve{x} + -\breve{y})) = -((-x)^{\smile} + (-y)^{\smile}) = -((-x + -y)^{\smile})$

$= (-(-x + -y))^{\smile} = (x \cdot y)^{\smile}$

この定理の証明では、合成演算の結合法則と公理 $(RA8)$ を用いていないことに注意する。このことは、関係代数の公理を弱めた代数を考える際に注目される事実である。

また、この定理から、関係代数は BAO であることが得られる。

3.4 パース律

関係代数の公理 $(RA8)$ は、テクニカルで、意味をつかみにくい。そこで、以下に述べるより直感的な、パース律を導入し、関係代数の理論展開の便宜をはかる。

まず、関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ において、公理 $(R8)$ と定理 3.3.2 によって、次が成り立つことに注意する。

Theorem 3.4.1

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ において、次のことが成り立つ。

(1) $\quad x;0 = 0;x = 0$

$(RA8\text{-}2)$ $\quad (y;-(\breve{y};\breve{y})) \leq -\breve{y}$

$(RA8\text{-}3)$ $\quad (\breve{x};-(x;y)) \leq -y$

Proof

ここでは、(1) のみ示す。

関係代数の公理 $(RA8)$ において、$y = 0$ として、$x;-(\breve{x};1) = 0$

をえる。このことから次のように $x;0 = 0$ が得られる。

$x;0 = \breve{\breve{x}};\breve{\breve{0}} = (\breve{0};\breve{x})^{\smile} = (0;\breve{x})^{\smile} = (0;\breve{x}+0)^{\smile} = (0;\breve{x}+\breve{0})^{\smile} = (0;\breve{x}+[x;-(\breve{x};1)]^{\smile})^{\smile}$

$= (0;\breve{x}+[-(\breve{x};1)]^{\smile};\breve{x})^{\smile} = ((0+[-(\breve{x};1)]^{\smile});\breve{x})^{\smile} = ([-(\breve{x};1)]^{\smile};\breve{x})^{\smile} = \breve{\breve{x}};[-(\breve{x};1)]^{\smile\smile} = x;-(\breve{x};1) = 0$

更に、$x;0 = 0$ から、次のようにして、$0;x = 0$ が得られる。

$0;x = \breve{\breve{0}};\breve{\breve{x}} = (\breve{x};\breve{0})^{\smile} = (\breve{x};0)^{\smile} = (\breve{x})^{\smile} = x$ ■

Theorem 3.4.2

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ において、次のパース律と呼ばれる関係が成り立つ。

(PL) $\quad (x;y) \cdot \breve{z} = 0 \Leftrightarrow (y;z) \cdot \breve{x} = 0$

Proof

定理 *3.3.2* の結果を用いることで次のことが得られる。

$(\Rightarrow)$ $\quad (x;y) \cdot \breve{z} = 0$

$\Longrightarrow$ $0 = \breve{0} = ((x;y) \cdot \breve{z})^{\smile} = (x;y)^{\smile} \cdot \breve{\breve{z}} = (\breve{y};\breve{x}) \cdot z$

$\Longrightarrow$ $z \leq -(\breve{y};\breve{x})$

$\Longrightarrow$ $y;z \leq y;-(\breve{y};\breve{x})$

$\Longrightarrow$ $y;z \leq -\breve{x}$ $\quad (\because (RA8-2))$

$\Longleftrightarrow$ $(y;z) \cdot \breve{x} = 0$

$(\Leftarrow)$ $\quad (y;z) \cdot \breve{x} = 0$

$\Longleftrightarrow$ $\breve{x} \leq -(y;z)$

$\Longrightarrow$ $\breve{y};\breve{x} \leq \breve{y};-(y;z)$

$\Longrightarrow$ $\breve{y};\breve{x} \leq -z$ $\quad (\because (RA8-3))$

$\Longleftrightarrow$ $(x;y) \cdot \breve{z} = 0$ ■

Theorem 3.4.3

関係代数と同じタイプの代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ は次の公理をみたせば、関係代数である。

$(RA1)$ $(A,+,\cdot,-,0,1)$ はブール代数
$(RA2)$ $(x;y);z = x;(y;z)$
$(RA3)$ $(x+y);z = x;z+y;z$
$(RA4)$ $x;1' = x$
$(RA5)$ $\breve{\breve{x}} = x$
$(RA6)$ $(x+y)\breve{} = \breve{x}+\breve{y}$
$(RA7)$ $(x;y)\breve{} = \breve{y};\breve{x}$
(PL) $(x;y)\cdot\breve{z} = 0 \Leftrightarrow (y;z)\cdot\breve{x} = 0$

Proof

この代数は、定理 *3.3.2* の①から⑨までをみたすことに注意する。この時次のように公理 $(RA8\text{-}1)$ が導かれる。

$$\begin{aligned} & 0 = (x;y)\breve{}\cdot -((x;y)\breve{}) = (\breve{y};\breve{x})\cdot -((x;y)\breve{}) = (\breve{y};\breve{x})\cdot(-(x;y))\breve{} \\ \Longrightarrow\ & 0 = (\breve{x};-(x;y))\cdot\breve{\breve{y}} = (\breve{x};-(x;y))\cdot y = (\breve{x};-(x;y))\cdot --y \\ \Longleftrightarrow\ & \breve{x};-(x;y) \le -y \end{aligned}$$

したがって、公理 $(RA8)$ が成り立つ。 ■

以上から、関係代数の定義は公理 $(RA8)$ を公理 (PL) におきかえられることがわかる。

また、これら二つの定理の証明と同様の方針で以下の定理をえる。

Theorem 3.4.4

関係代数 $\mathcal{A} = (A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ は次の同値関係[6] をみたす。

(PL') $(x;y)\cdot z = 0 \Leftrightarrow (\breve{x};z)\cdot y = 0 \Leftrightarrow (z;\breve{y})\cdot x = 0$

Theorem 3.4.5

関係代数と同じタイプの代数 $\mathcal{A} = (A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ は次の公理をみたせば、関係代数である。

$(RA1)$ $(A,+,\cdot,-,0,1)$ はブール代数
$(RA2)$ $(A,;,1')$ はモノイド
(PL') $(x;y)\cdot z = 0 \Leftrightarrow (\breve{x};z)\cdot y = 0 \Leftrightarrow (z;\breve{y})\cdot x = 0$

この定理の証明は省略する。和の合成に対する分配律を示すの部分が煩雑である。

条件 (PL') は、以下のように順々の並べ替えを使って表現できる。

$$(-x)\breve{}\cdot(-y)\breve{} \le z \Leftrightarrow (-y)\breve{}\cdot(-z)\breve{} \le x \Leftrightarrow (-z)\breve{}\cdot(-x)\breve{} \le y$$

さて、関係代数 $\mathcal{A} = (A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ に対して、任意に A の要素 a をとる時、次の二つの A 上の写像を定義する。

$$f(x) = a;x$$
$$\breve{f}(y) = \breve{a};y$$

これらの写像を用いると、条件 (PL) は次の関係式で表される。

$$f(x)\cdot y = 0 \Leftrightarrow x\cdot\breve{f}(y) = 0$$

この時、f と $\breve{f}$ が共役であるとよばれる。さらに、この時、$(RA8)$ は次のように表される。

[6] Schröder Equivalence

$\check{f}(-f(x)) \leq -x$

定理 3.3.2 によってこの写像は順序を保存するので、つまり、次が成り立つということである。

$y \leq -f(x) \Rightarrow \check{f}(y) \leq -x$

3.5 関係代数の算術

本節では、関係代数の演算のみたす性質と、関係代数の部分集合の上限と下限のみたす性質を概観する。

Theorem 3.5.1

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ に対して、次の不等式が成り立つ。

① $(x;y) \cdot z \leq x; \check{x}; z$

② $x \leq x; \check{x}; x$

③ $(x;y) \cdot z \leq x; [(\check{x};z) \cdot y]$

Proof

① まず、次のことが成り立つ。

$$-(\check{x};z) \leq 1$$
$$\Longrightarrow \ x; -(\check{x};z) \leq x; 1$$

一方、$(R8\text{-}2)$ より次がいえる。

$$x; -(\check{x};z) \leq -z$$

これら二つのことから次が得られる。

$$x; -(\check{x};z) \leq (x;1) \cdot -z$$

したがって、以下のように求める不等式がえられる。

$$x;y \leq x;1 = x;(-(\check{x};z) + \check{x};z) = x;(-(\check{x};z)) + x;(\check{x};z) \leq (x;1) \cdot -z + x;(\check{x};z)$$
$$\Longrightarrow \ (x;y) \cdot z \leq [(x;1) \cdot -z + x;(\check{x};z)] \cdot z = [x;(\check{x};z)] \cdot z \leq x;(\check{x};z)$$

② ①を用いることで以下のように示される。

$$x = x \cdot x = (x;1') \cdot x \leq x; \check{x}; x$$

③ まず、$(RA8)$ から次の不等式が成り立つ。

$$x; [-(\check{x};z) \cdot y] \leq x; -(\check{x};z) \leq -z$$

よって、$[x;(-(\check{x};z) \cdot y) \cdot z = 0$ となる。この式より、次のように求める不等式が得られる。

$$(x;y) \cdot z = (x;(1 \cdot y)) \cdot z = [x;\{(-(\check{x};z) + x;z) \cdot y\}] \cdot z = [x; -(\check{x};z) \cdot y + (\check{x};z) \cdot y] \cdot z$$
$$= [x;(-(\check{x};z) \cdot y)] \cdot z + [x;((\check{x};z) \cdot y)] \cdot z = [x;((\check{x};z) \cdot y)] \cdot z \leq x;((\check{x};z) \cdot y) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3.5.2

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の 3 つの要素 x、y 及び z に対して、次が成り立つ。

$x;z \leq x \ \ and \ \ x;\check{z} \leq x \Rightarrow x \cdot (y;z) = (x \cdot y);z$

Proof

まず、$x;z \leq x$ かつ $x;\check{z} \leq x$、であるとする。条件 (PL) と、関係代数の演算の性質から、次のことに注意する。

$$x;\check{z} \leq x \Leftrightarrow -x;z \leq -x \qquad \cdots (*)$$

今、$(x \cdot y);z \leq (x;z) \cdot (y;z)$、が成り立ち、仮定から次が成り立つ。

$(x \cdot y); z \leq x \cdot (y; z)$

更に、次のことが成り立つ。

$$
\begin{aligned}
& x \cdot (y; z) \\
& \leq x \cdot ((1 \cdot y); z) = x \cdot ([(-x + x) \cdot y]; z) = x \cdot ((-x \cdot y); z) + x \cdot ((x \cdot y); z) \\
& \leq x \cdot ((-x \cdot y); z) + (x \cdot y); z \leq x \cdot (-x; z) + (x \cdot y); z \leq x \cdot -x + (x \cdot y); z \qquad (\because (*)) \\
& = 0 + (x \cdot y); z = (x \cdot y); z
\end{aligned}
$$

したがって求める等式が得られた。 ■

次に、相対積と転換について、関係代数上の部分集合の上限と下限がみたす性質について述べる。

Theorem 3.5.3

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ に対して、その部分集合 $\{a_i | i \in I\}$ が上限または下限を持つとき、次のことが成り立つ。

① $(\sum_{i \in I} a_i)\breve{} = \sum_{i \in I} \breve{a}_i$

② $x; \sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} (x; a_i)$, $\sum_{i \in I} a_i; x = \sum_{i \in I} (a_i; x)$

③ $(\prod_{i \in I} a_i)\breve{} = \prod_{i \in I} \breve{a}_i$

Proof

①
$$
\begin{aligned}
& \forall i \in I \ a_i \leq \sum_{i \in I} a_i \\
\Longleftrightarrow \ & \forall i \in I \ \breve{a}_i \leq (\sum_{i \in I} a_i)\breve{}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \forall i \in I \ \breve{a}_i \leq x \\
\Longleftrightarrow \ & \forall i \in I \ a_i \leq \breve{x} \\
\Longrightarrow \ & \sum_{i \in I} a_i \leq \breve{x} \\
\Longleftrightarrow \ & (\sum_{i \in I} a_i)\breve{} \leq x
\end{aligned}
$$

したがって、 $(\sum_{i \in I} a_i)\breve{} = \sum_{i \in I} \breve{a}_i$ が成り立つ。

② 前半を示しておく。まず、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
& \forall i \in I \ a_i \leq \sum_{i \in I} a_i \\
\Longrightarrow \ & \forall i \in I \ x; a_i \leq x; (\sum_{i \in I} a_i)
\end{aligned}
$$

更に、次のことが得られる。

$$
\begin{aligned}
& \forall i \in I \ x; a_i \leq z \\
\Longleftrightarrow \ & \forall i \in I \ x; a_i \cdot -z = 0 \\
\Longleftrightarrow \ & \forall i \in I \ (a_i; (-z)\breve{}) \cdot \breve{x} = 0 \\
\Longleftrightarrow \ & \forall i \in I \ ((-z)\breve{}; x) \cdot \breve{a}_i = 0 \\
\Longleftrightarrow \ & \forall i \in I \ (\breve{x}; -z) \cdot a_i = 0 \\
\Longleftrightarrow \ & \forall i \in I \ a_i \leq -(\breve{x}; -z) \\
\Longrightarrow \ & \sum_{i \in I} a_i \leq -(\breve{x}; -z) \\
\Longleftrightarrow \ & (\breve{x}; -z) \cdot \sum_{i \in I} a_i = 0 \\
\Longleftrightarrow \ & (-z; (\sum_{i \in I} a_i)\breve{}) \cdot x = 0
\end{aligned}
$$

$$\iff ((\sum_{i\in I} a_i)\breve{}); \breve{x} \cdot (-z)\breve{} = 0$$
$$\iff (x; \sum_{i\in I} a_i) \cdot -z = 0$$
$$\iff x; \sum_{i\in I} a_i \leq z$$

したがって、 $x; \sum_{i\in I}(a_i) = \sum_{i\in I}(x; a_i)$ が成り立つ。

③ $(\prod_{i\in I} a_i)\breve{} = (-\sum_{i\in I} -a_i)\breve{} = -((\sum_{i\in I} -a_i)\breve{}) = -(\sum_{i\in I}(-a_i)\breve{}) = -(\sum_{i\in I} -((a_i)\breve{})) = \prod_{i\in I} \breve{a}_i$ ■

この結果をさして、相対積と転換の演算は、完全加法的と呼ばれる。なお、0 項演算である定項も完全加法的演算に含められる。

3.6 関係代数の代数的概念

ここでは、一般の代数学での基本的な概念を関係代数について導入するとともに、関係代数の土台となるブール代数における基本的な概念が、関係代数固有の演算や公理とおりなす性質についてふれる。また、関係代数固有の、二項関係由来の性質をもつ特別な要素のいくつかを導入する。

Definition 3.6.1

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の要素 u がブール代数における原子である時、 $\mathcal{A}$ の原子であるという。$\mathcal{A}$ の原子の集合を $At(A)$ とブール代数の場合と同じように表す。

Definition 3.6.2

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の原子 u が、$u \leq 1'$ をみたす時、恒等的原子という。また、$u \leq -1'$ をみたす時、相違的原子という。更に、u が $\breve{u} \cdot u = 0$ をみたす時、非対称的原子という。

Theorem 3.6.1

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の原子について次が成り立つ。

① $u \in At(A) \Rightarrow \breve{u} \in At(A)$

② $u \in At(A)\ [\breve{u} \leq x \Leftrightarrow x \cdot \breve{u} \neq 0]$

③ $a, b, c \in At(A)\ [a \leq b; c \Leftrightarrow b \leq a; \breve{c} \Leftrightarrow c \leq \breve{b}; a]$

④ u が非対称原子ならば相違的原子

Proof

① $u \in At(A)$ とする。$u \neq 0$ より、$\breve{u} \neq 0$ となる。更に、次が成り立つ。

$$b \leq \breve{u} \ \ and \ \ b \neq \breve{u}$$
$$\iff \breve{b} \leq u \ \ and \ \ b \neq \breve{u}$$
$$\iff \breve{b} \leq u \ \ and \ \ \breve{b} \neq u$$
$$\Longrightarrow \breve{b} = 0$$
$$\iff b = 0$$

以上から、$\breve{u} \in At(A)$ がえられる。

② ①と原子の定義から直ちにわかる。

③ 最初の必要十分条件のみ確かめておく。条件 (PL) の対偶をとることで、次のようになる。

$$a \leq b; c$$
$$\iff (b; c) \cdot a \neq 0$$

$\iff (c;\breve{a}) \cdot \breve{b} \neq 0$
$\iff \breve{b} \leq c;\breve{a}$
$\iff b \leq a;\breve{c}$

④　u が非対称原子で、相違的でないとする。つまり、$\breve{u} \cdot u = 0$ かつ $0 < u \cdot 1'$ が成り立つ。u は原子なので、相違的でないとしたことから、$u = u \cdot 1'$、つまり $u \leq 1'$ となる。このことから、$u = \breve{u}$ が得られる。すると、非対称性の条件から、$u \cdot u = 0$ となる。これは、u が零でないことに反する。したがって、u は相違的である。 ■

Definition 3.6.3

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の原子的の三つ組 (a, b, c) が $a;b \geq \breve{c}$ をみたす時、サイクル $(cycle, consistent)$ という。パース律 (PL) による、サイクルの 6 種類の変換からなる集合をサイクルセット $(cycleset)$ という。サイクル (a, b, c) のサイクルセットを $[a, b, c]$ と表す。$\mathcal{A}$ のサイクルの集合を $C(\mathcal{A})$ と表すサイクルでない原子の三つ組は、禁則 $(forbidden)$ という。

関係代数 $\mathcal{A}$ のサイクル (a, b, c) のサイクルセット $[a, b, c]$ は、具体的には以下の要素からなる。

$(a, b, c)\,,\ (b, c, a)\,,\ (c, a, b)\,,\ (\breve{a}, \breve{c}, \breve{b})\,,\ (\breve{b}, \breve{a}, \breve{c})\,,\ (\breve{c}, \breve{b}, \breve{a})$

禁則な三つ組 (a, b, c) は、$(a;b) \cdot \breve{c} = 0$ と表される。

Definition 3.6.4

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ がブール代数として原子的である時、$\mathcal{A}$ は原子的であるという。

Theorem 3.6.2

原子的関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の二つの原子 u と v について、u と v の相対積は次のように表される。

$$u;v = \sum\{w | (u, v, w) \in C(\mathcal{A})\} = \sum\{\breve{w} \in At(A) | u;v \geq \breve{w}\}$$

Proof

$M = \{\breve{w} \in At(A) | u;v \geq \breve{w}\}$ とおく。明らかに $u;v$ は M の上界である。今、或る x が存在して $\forall \breve{w} \in M \quad \breve{w} \leq x$ 、かつ $u;v \not\leq x$ と仮定する。このとき、$0 < (u;v) \cdot -x$ となる。すると $\mathcal{A}$ が原子的であることから、$\exists a \in At(A) \quad a \leq (u;v) \cdot -x$ が成り立つ。この時、$a \leq u;v$ でもあるから、x についての一番目の仮定から、$a \leq x$ となる。一方、a についての条件から、$a \leq -x$ でもある。したがって、$a = 0$ が得られる。これは、a が原子であることに反する。したがって、$u;v$ は M の最小上界であることが示された。 ■

ブール代数の性質から、有限関係代数は原子的関係代数なので、これを特徴づけるためには、原子のリストとブール演算以外の演算での原子についての演算表と、サイクルのリストが与えられれば十分であることが分かる。

Definition 3.6.5

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の要素 q が次の二つの条件をみたす時、同値元[7]という。同値元の集合を $Eq(A)$ と表しておく。

$(Trans)$　　$q;q \leq q$
$(Symm)$　　$\breve{q} \leq q$

[7]英語では、$equivalent\ element$ とよばれる。

Definition 3.6.6

関係代数 $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ の要素 r が次の条件をみたす時、反射的元という。

$(Ref)\qquad 1'\leq r$

Theorem 3.6.3

関係代数 $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ の要素 q について次の条件は互いに同値である。

① $q\in Eq(A)$

② $q=\breve{q}=q;q$

③ $q=q;\breve{q}$

④ $q;\breve{q}\leq q\ \ and\ \ \breve{q};q\leq q$

⑤ $(-q);q\leq -q\ \ and\ \ q;-q\leq -q$

Proof

① ⇒ ②　$q\in Eq(A)$ をとる。$q\leq\breve{q}$ は直ちに示されるので、$q=\breve{q}$ がいえる。今、定理 *3.5.1*①より、$q\leq q;\breve{q};q=q;q;q\leq q;q$ となるので、 $q=q;q$ も成り立つ。

② ⇒ ③　明らか。

③ ⇒ ④　$\breve{q}=(q;\breve{q})\breve{q}=\breve{\breve{q}};\breve{q}=q;\breve{q}=q$ であるから、直ちに示される。

④ ⇒ ①　④の仮定と定理 *3.5.1*①より、$\breve{q}\leq(q;\breve{q};q)\breve{}=\breve{q};q;\breve{q}\leq q;\breve{q}\leq q$ となる。よって、$q=\breve{q}$ が得られる。更に、$q;q\leq q$ も得られる。

④ ⇔ ⑤　それぞれの不等式は条件 *(PL)* と、定理 *3.3.2*⑩ *(*転換の積に関する分配性*)* から得られる。 ■

Theorem 3.6.4

関係代数 $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ の同値元について次のことが成り立つ。

① $q\in Eq(A)\quad (q;1)\cdot 1'=q\cdot 1'$

② $q\in Eq(A)\quad (q\cdot 1');1=q;1$

③ $p,q\in Eq(A)\quad (p;1)\cdot(q;1)=[((p\cdot 1');1)\cdot(q\cdot 1')];1$

④ $p,q\in Eq(A)\quad p\cdot q=0\Rightarrow p;q=0$

⑤ $x\cdot 1'\in Eq(A)$

Proof

p と q は $Eq(A)$ の要素であるとする。

①　定理 *3.6.3* と定理 *3.5.1*①より次のように示される。

$$(q;1)\cdot 1'=((q;1)\cdot 1')\cdot 1'=(q;\breve{q};1')\cdot 1'=(q;\breve{q})\cdot 1'=(q;q)\cdot 1'=q\cdot 1'$$

②　$(q;1);\breve{1}=q;1;1=q;1$ と $(q;1);1=q;(1;1)=q;1$ が成り立つので、定理 *3.5.2* より、次が成り立つ。

$$(q;1)\cdot(1';1)=((q;1)\cdot 1');1$$

よって、$(q;1)=((q;1)\cdot 1');1$ となる。

今、①より、$(q\cdot 1');1=((q;1)\cdot 1');1$ であるので、$(q\cdot 1');1=q;1$ が得られる。

③　②より次が成り立つ。

$$(p;1)\cdot(q;1)=[(p\cdot 1');1]\cdot[(q\cdot 1');1]$$

また、$(p\cdot 1');1;1=(p\cdot 1');1$ と $(p\cdot 1');1;\breve{1}=(p\cdot 1');1;1=(p\cdot 1');1$ から、定理 *3.5.2* より次の式が得られる。

$[(p\cdot 1');1]\cdot[(q\cdot 1');1]=[((p\cdot 1');1)\cdot(q\cdot 1')];1$

したがって、$(p;1)\cdot(q;1)=[((p;1');1)\cdot(q;1')];1$ となる。

④　今、定理 *3.5.1*①から、次の不等式が成り立つ。

$[(p\cdot 1');1]\cdot 1'\le(p\cdot 1');(p\cdot 1')\breve{};1'=(p\cdot 1');\breve{1'};\breve{p}=(p\cdot 1');1';\breve{p}=(p\cdot 1');\breve{p}$

そこで、次のことがなりたつ。

$$\begin{aligned}&(p;1)\cdot q\le(p;1)\cdot(q;1)\\&=([(p\cdot 1');1]\cdot(q\cdot 1'));1=[([(p\cdot 1');1]\cdot 1')\cdot q];1\\&\le([(p\cdot 1');\breve{p}]\cdot q);1\\&\le[(1';\breve{p})\cdot q];1=(\breve{p}\cdot q);1\\&\le(p\cdot q);1\end{aligned}$$

したがって、仮定から、$(p;1)\cdot q\le(p\cdot q);1=0;1=0$ が成り立つ。これに、条件 (PL) を適用することで、次がえられる。

$p;q\le\breve{q};p=(\breve{q};p)\cdot 1=(\breve{q};p)\cdot\breve{1}=0$

以上から、$p;q=0$ が得られた。

⑤　まず、次が成り立つ。

$(x\cdot 1');(x\cdot 1')\breve{}=(x\cdot 1');(\breve{x};1')\le(x\cdot 1');1'=(x\cdot 1')$

更に、定理 *3.5.1*②より、次が成り立つ。

$(x\cdot 1')\le(x\cdot 1');(x\cdot 1')\breve{};(x\cdot 1')\le(x\cdot 1');(x\cdot 1')\breve{};1'=(x\cdot 1');(x\cdot 1')\breve{}$

故に、$(x\cdot 1')=(x\cdot 1');(x\cdot 1')\breve{}$ となるので定理 *3.6.3* より、$(x\cdot 1')$ は同値元である。 ■

Theorem 3.6.5

関係代数 $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ の同値元 q に対して、集合 $A(q)=\{x\in A|x\le q\}$ 上の代数 $\mathcal{A}(q)=(A(q),+,\cdot,\neg,0,q,q\cdot 1',\breve{},;)$ は、q を最大元、$q\cdot 1'$ を恒等元とする関係代数をなす。

但し、演算 $\neg$ は $\neg x=q\cdot -x$ によって定めるものとする。

Proof

まず、$(A(q),+,\cdot,\neg,0,q)$ がブール代数であることを示す。補演算がブール代数の公理をみたすことをみれば十分。実際、$A(q)$ の要素 x に対して、次のようにに確かめられる。

$x+\neg x=(q\cdot x)+(q\cdot -x)=q\cdot(x+-x)=q\cdot 1=q$, $x\cdot\neg x=x\cdot(q\cdot -x)=(x\cdot -x)\cdot q=0\cdot q=0$

次に、q が同値元であることから、代数 $\mathcal{A}(q)$ は、相対積、転換について閉じている。また、$q\cdot 1'$ は $A(q)$ に属する。

続いて、関係代数の公理をみたすことを確かめる。恒等元に関する公理と、公理 $(R8)$ をみたすことをみれば十分である。一つ目の公理、$x;q\cdot 1'=x$ を示す。$x;(q\cdot 1')\le x$ は明らかなので、$x\le x;(q\cdot 1')$ を示せば十分である。これは、定理 *3.6.3*⑤の条件を用いて次のように得られる。

$$\begin{aligned}x&=q\cdot x=q\cdot(x;1')=q\cdot(x;(1\cdot 1'))=q\cdot[x;((-q+q)\cdot 1')]=q\cdot(x;(-q\cdot 1')+x;(q\cdot 1'))\\&\le q\cdot(x;-q+x;(q\cdot 1'))\le q\cdot(q;-q+x;(q\cdot 1'))\le q\cdot(-q+x;(q\cdot 1'))=q\cdot(x;(q\cdot 1'))\\&\le x;(q\cdot 1')\end{aligned}$$

二つ目の公理、$(R8)$ を示す。$(x;\neg(\breve{x};y))\le\neg y$ を示せば十分。それは以下のようになされる。

$x;\neg(\breve{x};y)=x;(q\cdot -(\breve{x};y))\le x;-(\breve{x};y)\le -y$

一方、次も成り立つ。

$x;\neg(\breve{x};y)=x;(q\cdot -(\breve{x};y))\le x;q\le q;q\le q$

これらのことから、$x;\neg(\breve{x};y)\le q\cdot -y=\neg y$ が得られた。

以上から、 $\mathcal{A}(q)$ は関係代数であることが示された。 ■

Definition 3.6.7

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の要素 j が次の条件をみたす時、イデアル元という。

$(Ideal)$ $\quad 1; j; 1 = j$

$\mathcal{A}$ のイデアル元からなる集合を $J(A)$ と書く。

また、j が次の条件をみたす時、右イデアル元という。

$(rIdeal)$ $\quad j; 1 = j$

左イデアル元も同様に定義される。

Theorem 3.6.6

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の要素 j について次の条件は互いに同値である。

① $j \in J(A)$

② $j, -j \in Eq(A)$

③ $j = j; 1 = 1; j$

④ $(j \cdot x); (j \cdot y) = j; (x \cdot y)$

⑤ j と $\breve{j}$ は右イデアル元

Proof

① ⇒ ② まず、定理 *3.5.1*②より次を得る。

$$\breve{j} \leq (j; \breve{j}; j)\breve{} \leq \breve{j}; j; \breve{j} \leq 1; j; 1 = j$$

次に以下のことから、j は同値元である。

$$j; j = (j; j) \cdot (j; j) \leq (j; 1) \cdot (j; j) \leq (1; j; 1) \cdot j; j = j \cdot j; j \leq j \cdot (j; 1) \leq j \cdot 1; j; 1 = j \cdot j = j$$

一方、$(j; 1) \cdot -(j; 1) = 0 \Leftrightarrow -(j; 1); 1 \leq -j$ より次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
& 0 = j \cdot -j = (1; j; 1) \cdot -j \\
\Longleftrightarrow\ & 0 = [(j; 1); (-j)\breve{}] \cdot 1 \\
\Longrightarrow\ & 0 = ((-j)\breve{}; \breve{1}) \cdot (j; 1)\breve{} = (1; -j)\breve{} \cdot (j; 1)\breve{} \\
\Longleftrightarrow\ & 0 = (1; -j) \cdot (j; 1) \\
\Longleftrightarrow\ & 1; -j \leq -(j; 1) \\
\Longrightarrow\ & 1; -j; 1 \leq -(j; 1); 1 \\
\Longrightarrow\ & 1; -j; 1 \leq -j
\end{aligned}$$

明らかに、$-j \leq 1; -j; 1$ なので、$-j = 1; -j; 1$ である。

よって $-j$ はイデアル元なので、同値元でもある。

② ⇒ ③ 定理 *3.6.4*④より、$j \cdot -j = 0$ なので、$j; -j = 0$ である。よって、仮定から、次を得る。

$$j; 1 = j; (-j + j) = j; -j + j; j = 0 + j; j = j; j \leq j$$

したがって、$j \leq j; 1$ なので、$j = j; 1$ となる。

同様にして、$j = 1; j$ も得られる。

③ ⇒ ④ $j; (j \cdot y) \leq j; 1 = j$、かつ、$j; (j \cdot y)\breve{} \leq j; 1 = j$ より、定理 *3.5.2* より、次が得られる。

$$(j \cdot x); (j \cdot y) = j \cdot (x; (j \cdot y))$$

更に、j の仮定と定理 *3.5.2* より、次を得る。

$$\breve{j} \cdot (\breve{y}; \breve{x}) = (\breve{j} \cdot \breve{y}); \breve{x}$$

したがって、次が得られる。

$$j \cdot (x; y) = x; (j \cdot y)$$

以上から、$(j \cdot x);(j \cdot y) = j \cdot (x;y)$、が成り立つ。
④ ⇒ ⑤　$0 = 0;j = (j \cdot -j);(j \cdot 1) = j \cdot (-j;1)$ が成り立つので、条件 (PL) と定理 *3.3.2* より、$j;1 = j$ が得られる。

他方、$0 = j;0 = (j \cdot 1);(j \cdot -j) = j \cdot (1;-j)$ が成り立つので、同様にして $\breve{j};1 = \breve{j}$ が得られる。
⑤ ⇒ ①　$j = j;1 = \breve{\breve{j}};1 = (\breve{j};1)\breve{};1 = \breve{1};\breve{\breve{j}};1 = 1;j;1$ ■

Theorem 3.6.7

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ のイデアル元全体の集合 $J(A)$ について以下が成り立つ。
① $i, j \in J(A) \Rightarrow j = \breve{j} = j;j$
② $j \in J(A) \Rightarrow -j \in J(A)$
③ $i, j \in J(A) \Rightarrow i + j \in J(A)$
④ $i, j \in J(A) \Rightarrow i \cdot j \in J(A)$

Proof
①　前定理よりイデアル元は同値元なので、定理 *3.6.3*②から明らかである。
②　前定理① ⇒ ②の証明の中で示された。
③　明らかである。
④　$i \cdot j = -(-i + -j)$ から、②と③ により得られる。 ■

関係代数のイデアル元の全体 $J(A)$ は、恒等元 $1'$ を含むとは限らないので、関係代数の部分ブール代数ではあるが部分関係代数とは限らない。また、次が成り立つ。

Theorem 3.6.8

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ のイデアル元 j に対して、集合 $A(j) = \{x \in A | x \leq j\}$ は次をみたす。
① $j \in A(j)$
② $x, y \in A(j) \Rightarrow x + y \in A(j)$
③ $x \in A(j)\ \ and\ \ y \in A \Rightarrow x \cdot y \in A(j)$
④ $x \in A(j)\ \ and\ \ y \in A \Rightarrow x;y, y;x \in A(j)$
⑤ $x \in A(j) \Rightarrow \breve{x} \in A(j)$

この集合は補演算に関しては閉じるとは限らず、関係代数の部分ブール代数とは限らない。また、ブール代数のイデアルになっているなど、イデアル元の集合にはない性質も持つ。

Definition 3.6.8

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の要素 s が次の条件をみたす時、部分恒等元という。
$(subId)$　　$s \leq 1'$

Theorem 3.6.9

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の部分恒等元 s と t は以下をみたす。
① $s \in Eq(A)$
② $s;t = s \cdot t$
③ $(s \cdot t);x = (s;x) \cdot (t;x)$
④ $x;(s \cdot t) = (x;s) \cdot (x;t)$
⑤ $(s;x) \cdot y = s;(x \cdot y)$

Proof

① 定理 *3.5.1*②と仮定から、次が成り立つ。

$s \le s; \breve{s}; s \le s; \breve{s}; 1' = s; \breve{s} \le 1'; \breve{s} = \breve{s}$

よって、$s \le \breve{s}$ が得られる。

次に、$s \le 1'$ より、$s; s \le s$ を得る。このことと、① より、s は同値元である。故に、定理 *3.6.3*②から $s = s; s$ が得られる。更に、$s = \breve{s}; s$ が得られる。

② $s \le 1'$ より、$s; t \le 1'; t = t$、同様に、$s; t \le s$ となる。よって、$s; t \le s \cdot t$ が得られる。

①と定理 *3.5.1*①より次が成り立つ。

$s \cdot t = (s; 1') \cdot t \le (s; \breve{s}); t \le (s; s); t \le s; t$

以上から、$s; t = s \cdot t$ が得られる。 ■

関係代数の部分恒等元の全体は、恒等元を含むが、補演算に関して閉じるとは限らないので、関係代数の部分代数でも部分ブール代数でもない。一方、ブール代数のイデアルになっている。また相対積については、下向きに閉じている。恒等元は同値元であることにも注意する。

以下では、特別な条件をみたす関係代数を考察する。条件を加えた結果ブール代数になってしまうと、関係代数のことを考える甲斐がない。ここで、条件を加えた結果ブール代数になる場合を確認しておく。

Theorem 3.6.10

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ は $1 = 1'$ である時、単にブール代数になる。

Proof

仮定と、定理 *3.6.9*②より、積と相対積が一致する。更に、定理 *3.6.9*①より転換は自己転換である。したがって、$\mathcal{A}$ は単にブール代数である。 ■

Theorem 3.6.11

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ が積が相対積と一致する時、単にブール代数になる。

Proof

仮定から、$1 = 1; 1' = 1 \cdot 1' = 1'$ が成り立つので、前定理から結論を得る。 ■

明らかに、関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ は次の場合、退化した代数である。

① $0 = 1'$

② 転換演算と補演算が一致する

③ $\exists p \forall x \forall y [x; y = p]$

④ 和が相対積と一致する

Definition 3.6.9

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ が次の条件をみたす時、単純という。

$(Smpl) \qquad x \ne 0 \Rightarrow 1; x; 1 = 1$

Theorem 3.6.12

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ に対して次の条件は同値である。

① $\mathcal{A}$ は単純

② $\mathcal{A}$ 上の任意の準同型写像が単射か退化代数への写像

③ $\mathcal{A}$ のイデアル元は 0 と 1 のみ

④ $x;1;y=0 \Rightarrow x=0$ *or* $y=0$

Proof

① ⇒ ②　$\mathcal{A}$ 上の準同型写像 ϕ をとり、その準同型像を $\mathcal{B}=(B,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ とする。この時、$\mathcal{B}$ は関係代数である。今、代数 $\mathcal{B}$ が非退化である場合を考える。この時、$\mathcal{A}$ の要素 x と y に対して、$\phi(x)=\phi(y)$ であると仮定する。$z=(x\cdot y)+(y\cdot x)$ とおくと次が成り立つ。

$$\phi(z)=\phi(x)\cdot-\phi(y)+\phi(y)\cdot-\phi(x)=\phi(x)\cdot-\phi(x)+\phi(x)\cdot-\phi(x)=0$$

すると、次のことが得られる。

$$\phi(1;z;1)=\phi(1);\phi(z);\phi(1)=1;0;1=0$$

代数 $\mathcal{B}$ は非退化であったから $0\neq 1=\phi(1)$ である。よって、$\phi(1;z;1)\neq\phi(1)$ となる。ここで、$z\neq 0$ であれば単純の定義から $1;z;1=1$ となり矛盾する。したがって、$z=0$ でなければならない。故に。$x=y$ が得られ、準同型 ϕ は単射となる。

② ⇒ ③　任意に $\mathcal{A}$ のイデアル元 j をとる。始めに、定理 *3.6.8* の集合 $A(j)$ を考える。これは j が同値元でもあることから、定理 *3.6.5* より恒等元を $j\cdot 1'$ とする関係代数 $\mathcal{A}(j)=(A(j),+,\cdot,-,0,j,j\cdot 1',\breve{},;)$ をなす。今、A 上の写像 ϕ を $\phi(x)=j\cdot x$ によって定める。すると、この写像は、$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}(j)$ への全射準同型写像になる。相対積について写像 ϕ が保存されることをみる。定理 *3.6.6*④より、次のように確かめられる。

$$\phi(x;y)=j\cdot(x;y)=(j\cdot x);(j\cdot y)=\phi(x)+\phi(y)$$

次に、転換が保存されることが以下のように確かめられる。

$$\phi(\breve{x})=j\cdot\breve{x}=\breve{j}\cdot\breve{x}=(j\cdot x)\breve{}=\phi(x)\breve{}$$

他の演算が写像 ϕ によって保存されることも直ちに分かるので、これは準同型写像である。全射であることも容易に分かる。

さて、仮定②から、この準同型写像は、単射か退化代数への写像である。そこで、単射である場合を考える。この時、次のが成り立つ。

$$\phi(1)=j\cdot 1=j=j\cdot j=\phi(j)$$

よって、$j=1$ となる。一方、写像が退化代数への写像とすると、次が成り立つ。

$$\phi(j)=j\cdot j=j=0=j\cdot 0=\phi(0)$$

よって、$j=0$ となる。

以上から、イデアル元は 0 であるか 1 であることが示された。

③ ⇒ ④　$x;1;y=0$ とする。この時、$(1;x;1);y=0$ が成り立つ。今、$1;x;1$ はイデアル元であるので、③の前提から $1;x;1=1$ であるか $1;x;1=0$ が成り立つ。前者の場合、x と y の関係式から $y\leq 1;y=0$ となる。したがって、$y=0$ となる。後者の場合、$x\leq 1;x;1=0$ より、$x=0$ となる。

故に、$x=0$ または $y=0$ が成り立つ。

④ ⇒ ⑤　公理 $(RA8)$ より、$\breve{a};-(a;b)\leq b$ が成り立つ。ここで $a=1;x$、$b=1$ とおいて次を得る。

$$\breve{x};1;-(1;x;1)=(1;x)\breve{};-((1;x);1)\leq -1=0$$

よって、$\breve{x};1;-(1;x;1)=0$ が得られ、④の前提から、$\breve{x}=0$ または $-(1;x;1)=0$ が得られる。つまり、$x=0$ または $(1;x;1)=1$ となる。したがって、$\mathcal{A}$ は単純である。■

Definition 3.6.10

関係代数 $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{\ },;)$ が次の条件をみたす時、インテグラル[8]という。

(Itg) $\quad x;y=0 \Rightarrow x=0\ or\ y=0$

Theorem 3.6.13

関係代数 $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{\ },;)$ について、次の同値関係が成り立つ。

① $\mathcal{A}$ がインテグラル

② $\mathcal{A}$ が退化代数か $1'$ が原子

③ $x\neq 0 \Rightarrow x;1=1$

④ $x\neq 0\ and\ \breve{x};x\leq 1' \Rightarrow x\in At(A)$

Proof

① ⇒ ② $\mathcal{A}$ が非退化であるとする。この時、$0\neq 1$ となる。ここで、$0=1'$ であるとすると、$0=1;0=1;1'=1$ となって矛盾するので、$0<1'$ でなければならない。今、$0<x\leq 1'$ であるとする。すると、次のことがなりたつ。

$$x;(1'\cdot -x)\leq 1';(1'\cdot -x)=1'\cdot -x\leq -x \quad , \quad x;(1'\cdot -x)\leq x;1'=x$$

よって、$x;(1'\cdot -x)\leq x\cdot -x=0$、つまり $x;(1'\cdot -x)=0$ となる。インテグラルの定義と、x が正であることから、$1'\cdot -x=0$、則ち $1'\leq x$ が成り立つ。したがって、$1'$ は原子である。

② ⇒ ③ $x\neq 0$ とする。$x=(1';x)\cdot 1$ と条件 *(PL)* より、$(x;1)\cdot 1'\neq 0$ が成り立つ。ここで、$1'$ が原子なので、$1'\leq (x;1)$ となる。よって、$1=1';1\leq x;1;1=x;1$ が得られる。したがって、$x;1=1$ となる。

③ ⇒ ① $x;y=0$ とする。$y\neq 0$ の場合、前提③より、$y;1=1$ となる。よって、次が成り立つ。

$$0=0;1=(x;y);1=x;(y;1)=x;1$$

したがって、$x\leq x;1$ より、$x=0$ が得られる。以上から、$\mathcal{A}$ はインテグラルである。

③ ⇒ ④ $x\neq 0$ が $\breve{x};x\leq 1'$ をみたすものとする。$0<z\leq x$ に対して、z は正なので、前提②と公理 $(RA8)$ より、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}1'&=1'\cdot 1=1'\cdot(z;1)=1'\cdot(z;\breve{z}+z;-\breve{z})=1'\cdot(z;\breve{z}+z;-(\breve{z};1'))\leq 1'\cdot(z;\breve{z}+(-1'))\\&=1'\cdot(z;\breve{z})\leq z;\breve{z}\end{aligned}$$

今得られた不等式 $1'\leq z;\breve{z}$ と仮定 $z\leq x$、$\breve{x};x\leq 1'$ から、次が得られる。

$$x=1';x\leq z;\breve{z};x\leq z;\breve{x};x\leq z$$

よって、$0<z\leq x$ ならば $z=x$ が成り立つ。したがって x は原子である。

④ ⇒ ② $\mathcal{A}$ は非退化とする。$1'$ は零でなく、$\breve{1}';1'\leq 1'$ なので、前提④より、$1'$ は原子である。 ■

Theorem 3.6.14

インテグラル関係代数 $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{\ },;)$ について、次が成り立つ。

① $\mathcal{A}$ の部分代数はインテグラル

② $\mathcal{A}$ は単純

Proof

① 定義から明らか。

② 定理 *3.6.13*③より、$x\neq 0$ ならば、$x;1=1$ なので、$1;x;1=1;1=1$ となる。、よって、$\mathcal{A}$ は単純である。

[8] A.Tarski をはじめ非退化であることを条件にに加えている場合があることに注意。

インテグラル関係代数において、定義とともに、それと同値な条件である定理3.6.13③も重要である。これは二項関係 R において、任意の要素 x に対して或る要素 y が存在して $(x,y)\in R$ となるものと空な関係を抽象したものである。定理 3.1.4 との関連に注意したい。

Definition 3.6.11
関係代数 $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ が次の条件をみたす時、可換という。
$(Comm)$ $\quad x;y=y;x$
また、次の条件をみたすとき対称という。
$(Symm)$ $\quad \breve{x}=x$

Theorem 3.6.15
関係代数 $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ について次のことがいえる。
① 可換関係代数は単純ならばインテグラルである。
② 対称関係代数は可換である。

Proof
① $x\neq 0$ とすると、$\mathcal{A}$ が単純なので、$1;x;1=1$ が成り立つ。$\mathcal{A}$ は可換でもあるので、$1=1;x;1=x;1;1=x;1$ となり、定理 *3.6.13*③より、$\mathcal{A}$ はインテグラルである。
② $x;y=(x;y)\breve{}=\breve{y};\breve{x}=y;x$ ■

3.7 関係代数の例

ここでは、有限関係代数の例をあげる。

Example 3.7.1
関係代数と同じタイプの代数 $\mathcal{A}=(A,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ が *2* 個の原子 $1'$、$\#$ からなり、以下の演算表をみたす時、関係代数が定まる。

;	$\#$	$1'$
$\#$	1	$\#$
$1'$	$\#$	$1'$

	$\breve{}$
$\#$	$\#$
$1'$	$1'$

但し、禁則サイクル $(1',1',\#)$ のサイクルセットのみを持ち、二つの原子 $1'$ と $\#$ をもつ時に定まる関係代数ということもできる。
実際、$(1',1,\#)$ が禁則サイクルだから、$(1';1')\cdot\breve{\#}=0$ が成り立ち、関係代数が定まる場合 $1'\cdot\breve{\#}=0$ である。$1'$ が原子だから、$\breve{\#}$ は、0 か、$\#$ でなければならない。$\breve{\#}=0$ とすれば、関係代数が定まる時 $\#=0$ でなければならない。これは、$\#$ が原子であることに反する。よって、$\breve{\#}=\#$ ということになる。相対積の演算では、$\#;\#$ がはっきりしない。$(\#,\#,\#)$ と $(\#,\#,1')$ が禁則でないサイクルなので、$\breve{\#}\leq\#;\#$ かつ $\breve{1'}\leq\#;\#$ であるから、$\#+1'\leq\#;\#$ が得られる。代数は原子的ブール代数でもなければならないので、$1\leq\#;\#$、すなわち $\#;\#=1$ となる。

原子が二つである関係代数はもう一つ定めることができる。これを次にあげる。

Example 3.7.2

関係代数と同じタイプの代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{\ }, ;)$ が 2 個の原子 $1'$、$\#$ からなり、以下の演算表をみたす時、関係代数が定まる。

;	$\#$	$1'$
$\#$	$1'$	$\#$
$1'$	$\#$	$1'$

	$\breve{\ }$
$\#$	$\#$
$1'$	1

但し今度は、二つの禁則サイクル $(1', 1', \#)$、$(\#, \#, \#)$ のサイクルセットのみを持ち、二つの原子 $1'$ と $\#$ をもつ時に定まる関係代数ということができる。

この場合は転換は最初の例と同様だが、相対積の演算において、$\#;\#$ がはっきりしない。$(\#, \#, \#)$ が禁則サイクルなので、$(\#;\#) \cdot \breve{\#} = 0$ より、$(\#;\#) \cdot \# = 0$ だから、$\#$ が原子であることを考慮して、$\#;\#$ は 0 か $1'$ となる。一方、$(\#, \#, 1')$ が禁則でないサイクルなので、$\breve{1'} \leq \#;\#$ である。すなわち、$1' \leq \#;\#$ である。したがって、$\#;\# = 1'$ でなければならない。

尚、二つの禁則サイクル $(1', 1', \#)$、$(\#, \#, 1')$ のサイクルセットのみを持ち、二つの原子 $1'$ と $\#$ をもつ時には関係代数は定まらない。実際、この時、$\#;\# = \#$ かつ $-\# = 1'$ でなければならないが、公理 (RA8-3) から次の矛盾する関係が得られ、関係代数の公理と折り合わないことが確かめられる。

$\# = \#;1' = \breve{\#};-\# = \breve{\#};-(\#;\#) \leq -\#$

以上の 2 例はいずれも対称単純関係代数である。

次は、対称でない関係代数の例である。

Example 3.7.3 (ポイント代数)

関係代数と同じタイプの代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{\ }, ;)$ が 3 個の原子 $1'$、$<$、$>$からなり、以下の演算表をみたす時、関係代数が定まる。

;	$1'$	$<$	$>$
$1'$	$1'$	$<$	$>$
$<$	$<$	$<$	1
$>$	$>$	1	$>$

	$\breve{\ }$
$1'$	$1'$
$<$	$>$
$>$	$<$

ポイント代数は、三つの禁則サイクル $(1', 1', <)$、$(1', <, <)$、$(<, <, <)$ のサイクルセットのみを持ち、三つの原子 $1'$ と$<$と$>$をもつ時に定まる関係代数である。

第4章　関係代数の表現

4.1　表現可能な関係代数

ここで本題である関係代数の表現を考える。

Definition 4.1.1 (関係代数 (RA) の表現)
関係代数 $\mathcal{A}$ が或るプロパーな関係代数と同型な時、$\mathcal{A}$ は表現可能と言い、同型写像を $\mathcal{A}$ の表現と言う。
表現可能な関係代数を RRA と書き、RRA 全体のクラスを **RRA** と表す。

RRA は有限公理化可能でないことが知られているので、関係代数に有限個の公理を加えても表現可能な関係代数を得ることはできない。さらに、次のことが知られている。

Theorem 4.1.1
RRA　を表現する公理は無限の等式で表される。

4.2　関係代数の表現不可能性

次の定理が示すように、全ての関係代数が表現可能とは限らないことが知られた。このことは、ブール代数の表現定理が二項関係に対してはうまく拡張できないことを示している。

Theorem 4.2.1 (Lyndon,1950)
$\mathbf{RRA} \subsetneq \mathbf{RA}$

もとの証明は反例に用いられた代数が大きな有限関係代数なので省略する。その後、有限な要素からなる関係代数の中で、表現可能でない最小の例 (参考文献 [12]) が与えられた。

Definition 4.2.1 (McKenzie 代数,1970)
関係代数 $\mathcal{K} = (K, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ が次をみたす時、*McKenzie* 代数であるという。
$(Mck1)$　$\mathcal{K}$ は $1'$、$<$、$>$及び $\#$ なる四つの原子をもつ
$(Mck2)$　$\mathcal{K}$ の原子は次の演算表をみたす

;	$<$	$>$	$\#$	$1'$
$<$	$<$	1	$<+\#$	$<$
$>$	1	$>$	$>+\#$	$>$
$\#$	$<+\#$	$>+\#$	$1'+<+>$	$\#$
$1'$	$<$	$>$	$\#$	$1'$

	$\breve{}$
$<$	$>$
$>$	$<$
$\#$	$\#$
$1'$	$1'$

McKenzie 代数 $\mathcal{K}$ に対して、そのサイクルセットは以下の 8 個。

$[1',1',1'],\ [1',\#,\#],\ [1',<,>],\ [<,1',>],\ [<,<,>],\ [\#,<,\#],\ [\#,<,>],\ [<,\#,>]$

Theorem 4.2.2

McKenzie 代数 $\mathcal{K}=(K,+,\cdot,-,0,1,1',\breve{},;)$ は表現不可能な関係代数である。

Proof

McKenzie 代数 $\mathcal{K}$ が確かに関係代数の公理をみたすことのチェックは、省略する。

McKenzie 代数 $\mathcal{K}$ が或るプロパーな関係代数 $\mathcal{P}$ に同型であるとする。その基集合を B、同型写像を h とする。$\# \neq 0$ より、$h(\#) \neq 0$ であるから、$h(\#)$ の要素 (x,y) が存在する。$(<,>,\#)$ がサイクルであるから、$\# \leq <;>$ より、$h(\#) \leq h(<)|h(>)$ が成り立つ。よって、或る B の元 z が存在して $(x,z) \in h(<)$、かつ $(z,y) \in h(>)$ が成り立つ。一方、$(>,<,\#)$ がサイクルだから同様にして、或る B の元 w が存在して $(x,w) \in h(>)$、かつ $(w,y) \in h(<)$ が成り立つ。今、$h(>)^{-1}=h(<)$ かつ $h(<)^{-1}=h(>)$ から、$(w,x) \in h(<)$ かつ $(y,w) \in h(>)$ が成り立つ。よって、$(z,w) \in h(>)|h(>)=h(>;>)=h(>)$。更に、$(\#,\#,<)$ がサイクルだから、$h(>) \leq h(\#;\#)$ となり、$(z,w) \in h(>)$ であるから、或る B の元 a が存在して $(z,a) \in h(\#)$ かつ $(a,w) \in h(\#)$ が成り立つ。

今、或る $\mathcal{K}$ の二つの原子 u と v が存在して、$(x,a) \in h(u)$ かつ $(y,a) \in h(v)$ が成り立つ。実際、要素 z に注目すると $(x,a) \in h(>;\#)$ であり、$\mathcal{K}$ は有限 *(*原子的*)* なので、$>;\#$ はそれ以下の原子の和として表される。サイクルの条件を考慮すると、$>;\# = >+\#$ となる。よって、$(x,a) \in h(>+\#)=h(>) \cup h(\#)$ となるので、$(x,a) \in h(>)$ または、$(x,a) \in h(\#)$ となる。他方、要素 w に注目すると $(x,a) \in h(<;\#)$ でもあり、先程と同様にして、$(x,a) \in h(<)$ または、$(x,a) \in h(\#)$ となる。したがって、$(x,a) \in h(\#)$ ということになる。同様の議論から、$(y,a) \in h(\#)$ が得られる。

ところでこのことは、以下のように矛盾を導く。$(x,a) \in h(\#)$、$(a,y) \in h(\#)^{-1}=h(\breve{\#})$ であるから、$(x,y) \in h(\#)|h(\breve{\#})=h(\#;\breve{\#})$ となる。よって、$\emptyset \neq h(\#;\breve{\#}) \cap h(\#)=h((\#;\breve{\#})\cdot\#)$ が得られる。そこで、h が単射であることから、$0 \neq (\#;\breve{\#})\cdot\#$ となる。これは、$(\#,\#,\#)$ が禁則サイクルであることに反する。

この矛盾は、プロパー関係代数への同型写像 h が存在すると仮定したためだから、$\mathcal{K}$ は表現可能でないということになる。 ■

Theorem 4.2.3

可換単純関係代数は表現可能とは限らない。

Proof

McKenzie 代数はインテグラルなので、単純である。また、可換である。 ■

McKenzie 代数を考えると、関係代数の部分クラスである、インテグラルなクラス、単純なクラス、可換なクラス、対称なクラスは表現可能でないことになる。そこで、他の条件を関係代数に課す必要がでてくる。

また、McKenzie 代数は原子的なので、原子的関係代数であっても、ブール代数のように関係代数での完備表現をもつとは限らないことがわかる。但し、完備表現と原子的表現が同等なことは確かめられる。

第5章　表現可能な特別な関係代数

本章では、既に知られている表現可能な関係代数を考察する。このような例は、文献 [8] 以降与えられ現在に至るが、ここでは、原論文を参照しながら、文献 [6] に沿って紹介していく。

5.1　関係代数の特別な元

Definition 5.1.1

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の要素 f が次の条件をみたす時、関数的元であるという。

$(Func)$　　$\breve{f}; f \leq 1'$

関数的元の集合を $Fn(A)$ と表す。

定理 3.1.4 から、これは写像の像の一意性を抽象したものとなっている。

Theorem 5.1.1

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ において、A の要素 f に対して以下の条件は同値である。

① $f \in Fn(A)$

② $f; (x \cdot y) = (f; x) \cdot (f; y)$

③ $f; -1' \leq -f$

Proof

① ⇒ ②　$f; (x \cdot y) \leq (f; x) \cdot (f; y)$ は直ちに示される。

また、定理 *3.5.1*③と関数的元の定義から、次が得られる。

$$(f; x) \cdot (f; y) \leq f; [(\breve{f}; (f; y)) \cdot x] = f; [((\breve{f}; f); y) \cdot x] \leq f; [(1'; y) \cdot x] = f; (x \cdot y)$$

以上から、 $f; (x \cdot y) = (f; x) \cdot (f; y)$ が示された。

② ⇒ ③　$(f; -1') \cdot f = (f; -1') \cdot (f; 1') = f; (-1' \cdot 1') = f; 0 = 0$

より、$f; -1' \leq -f$ となる。

③ ⇒ ①　公理 $(RA8)$ より次のようにして得られる。

$$\breve{f}; f \leq \breve{f}; -(f; -1') \leq -(-1') = 1'$$ ■

Theorem 5.1.2

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ において、以下の条件は同値である。

① $At(A) \subseteq Fn(A)$

② $u, v \in At(A) \Rightarrow u; v = 0 \ \ or \ \ u; v \in At(A)$

③ $u \in At(A) \Rightarrow \breve{u}; u \in At(A)$

Proof

① ⇒ ②　$At(A)$ の要素 u と v に対して、$0 < x \leq u; v$ であるとする。パース律 (PL) などより、次が成り立つ。

$(u;v)\cdot x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v;\breve{x})\cdot \breve{u} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x;\breve{v})\cdot u \neq 0$

今、$0 < (x;\breve{v})\cdot u \leq u$ であり、u は原子なので、$u \leq x;\breve{v}$ となる。したがって、原子が関数的元である前提から、次が得られる。

$u;v \leq (x;\breve{v});v = x;(\breve{v};v) \leq x;1' = x$

よって、x についての仮定から、$u;v = x$ となる。したがって、$u;v \in At(A)$ が得られ、$u;v = 0$、または $u;v \in At(A)$ が成り立つことが示された。

② ⇒ ③　$u \in At(A)$ とする。$u \neq 0$ なので、パース律 (PL) から、次が成り立つ。

$u\cdot u \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1';\breve{u})\cdot \breve{u} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\breve{u};u)\cdot 1' \neq 0$

ゆえに、$0 < (\breve{u};u)\cdot 1' \leq \breve{u};u$ となる。

$0 < \breve{u};u$ であり $\breve{u}$ も原子なので、②の前提から、$\breve{u};u$ は原子である。

③ ⇒ ①　$u \in At(A)$ をとる。$u \neq 0$ なので、パース律 (PL) から、$0 < (\breve{u};u)\cdot 1' \leq \breve{u};u$ が成り立つ。

さて、③の前提から、$\breve{u};u \in At(A)$ であるので、$(\breve{u};u)\cdot 1' = \breve{u};u$、すなわち、$\breve{u};u \leq 1'$ が成り立つ。

したがって、u は関数的元である。■

Theorem 5.1.3

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{\ }, ;)$ において、次が成り立つ。

$u \in Fn(A) \ \ and \ \ v \leq u \Rightarrow v \in Fn(A)$

Proof

$u \in Fn(A)$ かつ $v \leq u$ とする。次が成り立つ。

$\breve{v};v \leq \breve{u};v \leq \breve{u};u \leq 1'$

よって、$v \in Fn(A)$ となる。■

Theorem 5.1.4

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{\ }, ;)$ において、A の要素 s に対して以下の条件は同値である。

① s は関数的同値元である

② s は部分恒等元

Proof

(⇒) 定理 *3.6.3*②より次のように示される。

$s = s;s = \breve{s};s \leq 1'$

(⇐) 定理 *3.6.9*①より s が同値元なのは良い。関数的元であることは次のように示される。

$\breve{s};s \leq \breve{s};1' = \breve{s} \leq \breve{1'} = 1'$ ■

Definition 5.1.2

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{\ }, ;)$ の要素 p が次の条件をみたす時、ポイント元であるという。

(Pt)　　$0 < p \ \ and \ \ p;1;p \leq 1'$

ポイント元の集合を $Pt(A)$ と表す。

これは、空でない集合上の二項関係 R の要素 (a, b) において、次がなりたつことである。

$\exists x \exists y \quad (a, x) \in R \ \ and \ \ (y, b) \in R \Rightarrow a = b$

このことから、二項関係上のポイント元 R は $R = \{\{a, a\}\}$ と表されることが確かめられる。つまり、二項関係の集合上での、恒等関係の部分集合である一元集合を抽象したものが、ポイント元である。

Theorem 5.1.5
関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ に対して次が成り立つ。
$u \in At(A)\ \ and\ \ u \in Pt(A) \Rightarrow \breve{u}; u \le 1'\ \ and\ \ u; \breve{u} \le 1'$

Proof
$u \in At(A)$ とする時、次が成り立つ。
$u \le u; \breve{u}; u \le u; 1; u \le 1'$
同様に、$\breve{u}$ も原子となるから、$\breve{u} \le 1'$ となる。
よって、$\breve{u}; u \le \breve{u} \le 1'$ となる。
更に、$u; \breve{u} \le 1'$ が成り立つ。 ■

したがって、関係代数 $\mathcal{A}$ に対して、$At(A) \subseteq Pt(A) \Rightarrow At(A) \subseteq Fn(A)$ が成り立つ。

5.2 特別な関係代数の表現可能定理

Theorem 5.2.1 (Jónsson Tarski)
全ての原子が関数的元である原子的関係代数は表現可能である。

Proof
全ての原子が関数的元であるような原子的関係代数を $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ とする。$\mathcal{A}$ 上の写像 F を $\mathcal{A}$ の要素 x に対して、次のように定義する。
$F(x) = \{(u, v) \in At(A) \times At(A) | u \le x; v\}$
更に、$S = F[A]$、$U = F(1)$、$Id = F(1')$ とおく。$F(1') = Id_{At(A)}$ となることが直ちにわかる。そして、$F(0) = \emptyset$ でもある。この時、代数 $\mathcal{S} = (S, \cup, \cap, \setminus, \emptyset, U, Id_{At(A)}, |, ^{-1})$ がプロパー関係代数となり、写像 F がその表現となることが以下のように示される。
まず、F が単射であることを確かめる。$\mathcal{A}$ の二つの要素 x と y に対して、$F(x) = F(y)$ であるとする。$\mathcal{A}$ が原子的であることと F の定義から、次が成り立つ。
$\forall u \in At(A) \quad x; u = y; u$
$\mathcal{A}$ が原子的であることから、$1' = \sum\{a \in At(A) | a \le 1'\}$ が成り立ち、相対積が完全加法的であるから、次が成り立つ。
$x = x; 1' = x; \sum\{a \in At(A) | a \le 1'\} = \sum\{x; a \in At(A) | a \le 1'\}$
y についても同様にして、$y = \sum\{y; a \in At(A) | a \le 1'\}$ が成り立つ。
以上のことから、次のことがわかる。
$x = \sum\{x; a \in At(A) | a \le 1'\} = \sum\{y; a \in At(A) | a \le 1'\} = y$
これで、F が単射であることが示された。
次に、F が和を保存することを示す。実際、次のように示される。
$$\begin{aligned} F(x + y) &= \{(u, v) \in At(A) \times At(A) | u \le (x + y); v\} \\ &= \{(u, v) \in At(A) \times At(A) | u \le x; v\ \ or\ \ u \le y; v\} \\ &= \{(u, v) \in At(A) \times At(A) | u \le x; v\} \cup \{(u, v) \in At(A) \times At(A) | u \le y; v\} \end{aligned}$$

$= F(x) \cup F(y)$

次に、F が積を保存することを示す。今、$\mathcal{A}$ の原子 u に対して、u は関数的元と仮定しているので、定理 *5.1.2*② より、$(x \cdot y); u = (x; u) \cdot (y; u)$ が成り立つ。このことから、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} F(x \cdot y) &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | u \leq (x \cdot y); v\} \\ &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | u \leq (x; v) \cdot (y; v)\} \\ &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | u \leq (x; v)\} \cap \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | u \leq (y; v)\} \\ &= F(x) \cap F(y) \end{aligned}$$

以上より、$F(0) = F(x) \cap F(-x)$、$F(1) = F(x) \cup F(-x)$ であることから、$\mathcal{A}$ の補元の一意性より、$F(-x) = (At(A) \times At(A)) \setminus F(x)$ がいえる。

次に、F が相対積を保存することを示す。

$$\begin{aligned} F(x; y) &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | u \leq (x; y); v\} \\ &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | u \leq x; (y; v)\} \\ &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | u \leq x; \textstyle\sum\{a \in At(A) | a \leq y; v\}\} \\ &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | \exists a \in At(A) \quad u \leq x; a \ \ and \ \ a \leq y; v\} \\ &= F(x) | F(y) \end{aligned}$$

更に、F が転換を保存することを示す。

$$\begin{aligned} F(\breve{x}) &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | u \leq \breve{x}; v\} \\ &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | \breve{u} \leq \breve{v}; x\} \\ &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | (\breve{v}; x) \cdot \breve{u} \neq 0\} \\ &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | (u; \breve{v}) \cdot \breve{x} \neq 0\} \\ &= \{(u,v) \in At(A) \times At(A) | (x; u) \cdot v \neq 0\} \\ &= \{(v,u) \in At(A) \times At(A) | v \leq x; u\} \\ &= [F(x)]^{-1} \end{aligned}$$

以上から、F はプロパー関係代数 $\mathcal{S}$ への準同型写像であることが分かる。 ■

Lemma 5.2.2

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ 上のプロパーフィルター F に対して、A の要素 x と y が $x; y \in F$ をみたす時、集合族 $\mathcal{F} = \{G \in Filt(A) | 0 \notin G,\ x \in G \ \ and \ \ \forall c \in G \quad c; y \in F\}$ は極大元をもち、それはウルトラフィルターである。

Proof

集合族 $\mathcal{F}$ に対して、x によって生成された単項フィルター F_x をとる。実際、z を F_x の要素とする。$x \leq z$ から $x; y \leq z; y$ となる。更に、$x; y$ がフィルター F の要素であるから、$z; y$ は F の要素である。x は $x; y \neq 0$ から、零ではないので、$0 \notin F_x$ である。$x \in F_x$ でもあるので、$F_x \in \mathcal{F}$ となる。したがって、$\mathcal{F} \neq \emptyset$ となる。

次に、$\mathcal{F}$ の任意の全順序部分集合 $\mathcal{K}$ をとる。この時、$\cup\mathcal{K}$ は $\mathcal{K}$ の上限となる。実際、定理 *2.2.4* より、$\cup\mathcal{K}$ はフィルターとなり、明らかに、 $\cup\mathcal{K} \in \mathcal{F}$ となる。$\cup\mathcal{K} \in \mathcal{F}$ が $\mathcal{K}$ の上限であることも明らかである。

これらのことから、$Zorn$ の補題から、$\mathcal{F}$ には包含関係に関して極大元が存在する。

この極大元を改めて G とおく。これがウルトラフィルターであることを示す。$G \in \mathcal{F}$ より、プロパーフィルターであることは良い。

今、$a \notin G$ とする。H を $G \cup \{a\}$ によって生成されるフィルターとする。明らかに、$x \in H$ で

ある。ここで、次を仮定する。

$\forall b \in G \quad (a \cdot b); y \in F$

すると、生成されるフィルターの定義から H の要素 z に対して、次が成り立つ。

$\exists g_1 \ldots \exists g_n \in G \cup \{a\} \quad g_1 \cdot \ldots \cdot g_n \leq z$

よって、$(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n); y \leq z; y$ が成り立つ。一方、仮定と G の属する $\mathcal{F}$ の定義から、次を得る。

$(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n); y \in F$

よって、フィルター F の定義から、$z; y \in F$ が得られる。これで、次が得られたことになる。

$\forall z \in H \quad z; y \in F$

更に、$G \cup \{a\}$ は有限交差性をもつ。

実際、仮定と $G \in \mathcal{F}$ であることから、有限個の $g_1, \ldots, g_n \in G \cup \{a\}$ に対して $g_1 \cdot \ldots \cdot g_n = 0$ とすると、$g_1 \cdot \ldots \cdot g_n \in G \cup \{a\}$ であることと仮定から、次が得られる。

$0 = 0; y = (g_1 \cdot \ldots \cdot g_n); y \in F$

これは、F がプロパーフィルターであることに反する。

これで、$G \cup \{a\}$ は有限交差性をもつことが示された。

このことから、定理 *2.2.5* より、フィルター H はプロパーフィルターとわかる。

以上から、$H \in \mathcal{F}$ となる。しかし、これは、G の極大性に反する。したがって、仮定は否定され、次の条件がみたされなければならない。

$\exists b \in G \quad (a \cdot b); y \notin F$

ここで、この条件をみたす b について、G の任意の要素 c に対して、$(a \cdot b \cdot c); y \leq (a \cdot b); y$ なので、$(a \cdot b \cdot c); y \notin F$ が成り立つ。

一方、次が成り立つ。

$(b \cdot c); y = (a \cdot b \cdot c); y + (-a \cdot b \cdot c); y$

今、$b \cdot c \in G$ なので、$(b \cdot c); y \in F$ であるから、ウルトラフィルター F が素であることより次がえられる。

$\forall c \in G \ (-a \cdot b \cdot c); y \in F$

今度は、$G \cup \{-a\}$ によって生成されるフィルターを H' とする。$x \in H'$、かつ H' の任意の要素 c に対して $c; y \in F$ が成り立つ。

更に、$G \cup \{-a\}$ が有限交差性をもつことが、上と同様に示されるので、フィルター H' はプロパーフィルターと分かる。

以上から、$H' \in \mathcal{F}$ となる。したがって、$G \subseteq H'$ と G についての極大性から $G = H'$ となる。よって、$-a \in G$ となる

以上から、G がウルトラフィルターであることが示された。 ■

Lemma 5.2.3

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ 上のプロパーフィルター F と、定理 *5.2.2* のウルトラフィルター G に対して、A の要素 x と y が $x; y \in F$ をみたす時、集合族 $\mathcal{H}$ を次のように定める。

$\mathcal{H} = \{H \in Filt(A) | 0 \notin H, \ y \in H \ \ and \ \forall a \in G \forall b \in H \quad a; b \in F\}$

この時、$\mathcal{H}$ は極大元をもち、それはウルトラフィルターである。

Proof

y によって生成された単項フィルター F_y をとる。補題 *5.2.2* の証明と同様にして、$F_y \in \mathcal{H}$ が示される。更に、$\mathcal{H}$ に極大元 H が存在することが確かめられる。

H がウルトラフィルターであることを示す。$b \notin H$ とする。

すると補題 5.2.2 の証明と同様に $H \cup \{b\}$ によって生成されたフィルターを考えることで、次が成り立つ。

$\exists a \in G \exists c \in H \ a; (b \cdot c) \notin F$

更に、G の任意の要素 u と H の任意の要素 v に対して、次が成り立つ。

$(u \cdot a); (b \cdot c \cdot v) \notin F$

$(u \cdot a); (c \cdot v) \in F$

したがって、次が示される。

$(u \cdot a); (-b \cdot c \cdot v) \in F$

よって、$u; (-b \cdot v) \in F$ が得られる。更に、$H \cup \{-b\}$ によって生成されるフィルターを考えることにより、$-b \in H$ が得られる。 ■

以上の補題をもとに次の定理を証明する。この結果は、文献 [8] において BAO の理論を用いてはじめに示されたものをかきかえたものである (文献 [5])。

Theorem 5.2.4 (Henkin Monk Tarski)

関係代数は完備原子的関係代数に埋め込まれる。

Proof

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ をとる。$\mathcal{A}$ はブール代数でもあるので、ブール代数の意味での、$\mathcal{A}$ のウルトラフィルターの集合を $Ult(A)$ とおく。今、St をブール代数としての $\mathcal{A}$ 上のストーン写像とする。その値域の集合体 $\wp(Ult(\mathcal{A}))$ は完備ブール代数である。この集合体 $\wp(Ult(\mathcal{A}))$ 上に、M と N を $\wp(Ult(A))$ の要素として、二項演算子 $\circ$ と単項演算子 * を次のように定義する。

$M \circ N = \{F \in Ult(A) | \exists F_1 \in M \exists F_2 \in N \quad \{x; y | x \in F_1, y \in F_2\} \subseteq F\}$

$M^* = \{F \in Ult(A) | \exists F_0 \in M \quad \{\breve{x} | x \in F_0\} \subseteq F\}$

ここで、$\mathcal{U} = (\wp(Ult(\mathcal{A}), \cap, \cup, \setminus, \emptyset, Ult(A), \circ, ^*, St(1'))$ なる代数をとる。

この時、代数 $\mathcal{U}$ が完備原子的関係代数であり、ストーン写像 St は $\mathcal{U}$ への関係代数上の単射準同型写像となる。

このことを確認するために、次の二点を確認する。

一つに、転換、相対積の演算を保存すること。

二つに、代数 $\mathcal{U} = (\wp(Ult(\mathcal{A}), \cap, \cup, \setminus, \emptyset, Ult(A), \circ, ^*, St(1'))$ が完備原子的関係代数であること。

(第一段)　ストーン写像 St は転換、相対積の演算を保存する。

このことを確認するために、$F \in Ult(A)$ に対して、$F_0 = \{z \in A | \breve{z} \in F\}$ とおくと、F_0 は $\mathcal{A}$ 上のウルトラフィルターになり、$\{\breve{x} | x \in F_0\} = F$ が成り立つことに注意する。

さて、$x \in A$ をとる。$F \in St(\breve{x}) = \{F \in Ult(A) | \breve{x} \in F\}$ とする。ここで、$\breve{x} \in F$ であるから、$x \in F_0$ である。よって、$F_0 \in St(x)$ となる。したがって、$F \in (St(x))^{-1}$ が成り立つ。故に、$St(\breve{x}) \subseteq (St(x))^*$ となる。逆の包含関係も直ちに示されるので、$St(\breve{x}) = (St(x))^*$ がえられる。

次に、相対積の演算を保存することを確かめる。

$x, y \in A$ とする。$F \in St(x) \circ St(y)$ とする。演算子 $\circ$ の定義から次が成り立つ。

$\exists F_x \in St(x) \exists F_y \in St(y) \quad \{a; b | a \in F_x, b \in F_y\} \subseteq F$

今、$x \in F_x$ かつ $y \in F_y$ より、$x; y \in F$。したがって、$F \in St(x; y)$ となる。

よって、$St(x) \circ St(y) \subseteq St(x; y)$ が得られる。

今度は、$F \in St(x;y)$ とする。つまり、$x;y \in F$ かつ F はウルトラフィルターである。補題 *5.2.2*、補題 *5.2.3* より、あるウルトラフィルター G と H で、$G \in St(x)$ かつ $H \in St(y)$、更に演算子 $\circ$ の定義から、$F \in St(x) \circ St(y)$ をみたすものが存在する。よって、$St(x;y) \subseteq St(x) \circ St(y)$ となる。

以上から、 $St(x;y) = St(x) \circ St(y)$ が示された。

（第二段）　代数 $\mathcal{U}$ は完備原子的関係代数である。

代数 $\mathcal{U}$ がブール代数をなすのは明らかである。

次に、関係代数の公理 $(RA2)$ から $(RA8)$ を順に確認する。

今、M、N、P を $\wp(Ult(A))$ の三つの任意の要素とする。

一番目の公理 $(RA2)$、すなわち演算子 $\circ$ が結合的であることを確かめる。

$F \in M \circ (N \circ P)$ とする。この時、次が成り立つ。

$$\exists G \in M \exists H \in N \circ P \ \{x;y | x \in G \ \ and \ \ y \in H\} \subseteq F$$

$$\exists K \in N \exists L \in P \qquad \{z;w | z \in K \ \ and \ \ w \in L\} \subseteq H$$

この時、集合 $X = \{x;z | x \in G \ \ and \ \ z \in K\}$ は有限交差性をもつ。

実際、$a \in G$ と $b \in K$ に対して、$1 \in L$ なので、$b;1 \in H$ となる。よって、$a;b;1 \in F$ となり、F がプロパーフィルターなので、$a;b \neq 0$ でなければならない。ここで、次が得られる。

$$a_1, \ldots, a_n \in G, b_1, \ldots, b_n \in K \quad 0 \neq (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n);(b_1 \cdot \ldots \cdot b_n) \leq (a_1;b_1) \cdot \ldots \cdot (a_n;b_n)$$

ゆえに、X は有限交差性をもつ。

今、$a \in G$、$b \in K$、$c \in L$ とすると、$b;c \in H$ であり、$a;b;c \in F$ となることに注意する。

ここで、次の集合族 $\mathcal{J}$ を考える。

$$\mathcal{J} = \{J \in Filt(A) | 0 \notin J, \ \forall x \in G \forall y \in K \ x;y \in J \ \ and \ \ \forall v \in J \forall w \in L \ v;w \in F\}$$

この $\mathcal{J}$ は空でない。X が有限交差性をもつことから $\mathcal{J}$ が X から生成されるフィルターを含むからである。この時、補題 *5.2.2* の証明と同様の進め方で、$\mathcal{J}$ には包含関係について極大元 J が存在し、ウルトラフィルターになることが示される。

このことは、$F \in (M \circ N) \circ P$ であることを示している ($J \in M \circ N$)。よって次が得られる。

$$M \circ (N \circ P) \subseteq (M \circ N) \circ P$$

逆の包含関係も同様に示されるので、公理 $(RA2)$ がなりたつことがわかる。

二番目の公理 $(RA3)$ を確かめる。

$(M \cup N) \circ P = (M \circ P) \cup (N \cup P)$ を確かめればよい。それは、以下のように示される。

$$\begin{aligned}
& F \in (M \cup N) \circ N \\
\iff & \exists G \exists H \ G \in M \cup N, \ H \in P \ \ and \ \ \{x;y | x \in G \ \ and \ \ y \in H\} \subseteq F \\
\iff & \exists G \exists H \ (G \in M \ \ or \ \ G \in N), \ H \in P \ \ and \ \ \{x;y | x \in G \ \ and \ \ y \in H\} \\
\iff & \exists G \exists H \ (G \in M, \ H \in P \ \ and \ \ \{x;y | x \in G \ \ and \ \ y \in H\} \subseteq F) \ \ or \\
& \qquad\qquad (G \in N, \ H \in P \ \ and \ \ \{x;y | x \in G \ \ and \ \ y \in H\} \subseteq F) \\
\iff & \exists G \exists H \ (G \in M, \ H \in P \ \ and \ \ \{x;y | x \in G \ \ and \ \ y \in H\} \subseteq F) \ \ or \\
& \exists G \exists H \ (G \in N, \ H \in P \ \ and \ \ \{x;y | x \in G \ \ and \ \ y \in H\} \subseteq F) \\
\iff & F \in M \circ P \ \ or \ \ F \in N \circ P \\
\iff & F \in (M \circ P) \cup (N \circ P)
\end{aligned}$$

三番目の公理 $(RA4)$、右単位元の性質を示す。次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
& F \in M \circ St(1') \\
\iff & \exists G \exists H \ G \in M, \ H \in St(1') \ \ and \ \ \{x;y | x \in G \ \ and \ \ y \in H\} \subseteq F
\end{aligned}$$

$\iff \exists G \exists H\ G \in M,\ 1' \in H \quad and\ \{x;y | x \in G\ and\ y \in H\} \subseteq F$

したがって、この G と H に対して集合の包含関係と、$x;1' = x$ であることから、$G \subseteq F$ が成り立つ。特に、$F = G \in M$ が成り立つ。つまり、$M \circ St(1') \subseteq M$ がわかる。

次に、$F \in M$ とする。次の集合族 $\mathcal{H}$ を定義する。

$\mathcal{H} = \{H \in Filt(A) | 0 \notin H,\ 1' \in H\ and\ \forall x \in F \forall y \in H \quad x;y \in F\}$

$\mathcal{H}$ は $1'$ から生成されるフィルターを含み、包含関係についてウルトラフィルターの極大元 H をもつことが上述の事情からわかる。したがって、$F \in M \circ St(1')$ となる。よって、$M \subseteq M \circ St(1')$ が得られた。

四番目の公理 $(RA5)$、転換の反転を示す。

$F \in M$ に対して、$G = \{\breve{x} | x \in F\}$ とおくと、G は、第一段で触れたように、ウルトラフィルターである。この時、$\{\breve{x} | x \in G\} = F$ となる。このことから、$F \in M^{**}$ となる。逆にこの時、次が成り立つ。

$\exists G \in M^* \{\breve{x} | x \in G\} \subseteq F$

更に、この時次のことが得られる。

$\exists H \in M \{\breve{x} | x \in H\} \subseteq G$

すると、$H \subseteq F$ となり、ウルトラフィルターの性質から $H = F$ が得られる。よって $F \in M$ となる。以上から、$M = M^{**}$ が得られた。

五番目の公理 $(RA6)$ を示す。$(M \cup N)^* = M^* \cup N^*$ を示せば良いが、公理 $(RA3)$ と同様の式変形でできる。

六番目の公理 $(RA7)$ を示す。まず、$F \in (M \circ N)^*$ とする。すると、次が成り立つ。

$\exists G \in M \circ N \exists H \in M \exists K \in N\ \{x;y | x \in H, y \in K\} \subseteq G\ and\ \{\breve{x} | x \in G\} \subseteq F$

今、この H と K に対して $H' = \{\breve{x} | x \in H\}$、$K' = \{\breve{x} | x \in K\}$ とおく。H' と K' はウルトラフィルターであり、$H' \in M^*$、$K' \in N^*$ が成り立つ。

これらのことから、次のことが得られる。

$$
\begin{aligned}
& x \in H'\ and\ y \in K' \\
\iff & \breve{x} \in H\ and\ \breve{y} \in K \\
\implies & \breve{x};\breve{y} \in G \\
\implies & y;x = (\breve{x};\breve{y})\breve{} \in F
\end{aligned}
$$

よって、$F \in N^* \circ M^*$ となる。

以上から、$(M \circ N)^* \subseteq N^* \circ M^*$ が得られた。また、$M \subseteq N \Rightarrow M^* \subseteq N^*$、が直ちに得られるので、公理 $(RA5)$ より、$N^* \circ M^* \subseteq (M \circ N)^*$ も得られる。

七番目の公理 $(RA8)$ を示す。

$(M^* \circ Ult(A) \setminus (M \circ N)) \cap N = \emptyset$ を示す。

$F \in (M^* \circ Ult(A) \setminus (M \circ N)) \cap N = \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。仮定から、$F \in N$ であり、更に次をみたす。

$\exists G \in M^*\, \exists H \in Ult(A) \setminus (M \circ N)\ \{x;y | x \in G, y \in H\} \subseteq F$

この、G、H に対して、$K = \{\breve{x} | x \in G\}$ とおく。この時、$K \in M$ となる。今、$H \notin M \circ N$ なので、次のことが成り立つ。

$\exists a \in K \exists b \in F a;b \notin H$

H はウルトラフィルターだから、$-(a;b) \in H$ となる。$\breve{a} \in K$ より、$\breve{a};-(a;b) \in F$ となる。

ここで、$\breve{a};-(a;b) \leq -b$ なので、$-b \in F$ となる。したがって、$0 = b \cdot -b \in F$ となって、F が

ウルトラフィルターであることに矛盾する。

これで、$\mathcal{U}$ は関係代数であることが確かめられた。

代数 $\mathcal{U}$ は巾集合代数なので、完備で原子的でもある。

(第三段) 　代数 $\mathcal{A}$ は、代数 $\mathcal{U}$ に埋め込まれる。

第一段と第二段より、$\mathcal{A}$ 上のストーン写像は、代数 $\mathcal{U}$ への単射準同型写像となる。 ■

Theorem 5.2.5 (Jónsson Tarski)

最大元が有限個からなる関数的元の和で表される関係代数は表現可能である。

Proof

関係代数を $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ とする。最大元が有限個からなる関数的元の和で表されるとすると次のように表される。

$\exists f_1 \in Fn(A) \ldots \exists f_n \in Fn(A)\ 1 = f_1 + \cdots + f_n$

ここで、定理 *5.2.4* より、完備原子的関係代数 $\mathcal{U} = (U, +, \cdot, -, g(0), g(1), g(1'), \breve{}, ;)$ への埋め込みが存在する。その、埋め込み写像を g とする。g の像 $g[A]$ 上の代数は、$\mathcal{U}$ の部分代数となる。これを $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, -, g(0), 1, g(1'), \breve{}, ;)$ とおく。g は、$\mathcal{S}$ への同型写像である。今、埋め込み写像の性質から、次が成り立つ。

$g(1) = g(f_1) + \cdots + g(f_n)$

それから、ここで列挙した各関数元 f_i $(i = 1, \ldots, n)$ の性質から、次もいえる。

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ (g(f_i))\breve{}; g(f_i) \leq g(1')$

よって、各 $g(f_i)$ は代数 $\mathcal{S}$ 上の関数的元、特に代数 $\mathcal{U}$ 上の関数的元である。

ここで、$At(S) \subseteq At(U)$ かつ $\mathcal{U}$ は原子的であること、そして定理 *5.1.3* より、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
& \forall u \in At(S)\ u \leq g(1) \\
\Longrightarrow\ & u \in At(U)\ u \leq g(1) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists g(f_k) \in \{g(f_1), \ldots, g(f_n)\}\ u \leq g(f_k) \\
\Longrightarrow\ & u \in Fn(S)
\end{aligned}
$$

したがって、$At(S) \subseteq Fn(S)$ が成り立つ。

このことから、定理 *5.2.1* より、代数 $\mathcal{S}$ は、或るプロパー関係代数 $\mathcal{P}$ に同型である。以上から、この関係代数 $\mathcal{A}$ はプロパー関係代数 $\mathcal{P}$ に表現であることがわかる。 ■

Theorem 5.2.6 (Hodkinson)

全ての原子がポイント元である原子的関係代数は表現可能である。

Proof

定理 *5.1.5* より、関係代数の全ての原子がポイント元である時、全ての原子は関数的元である。ゆえに、関係代数が原子的でもある時、定理 *5.2.1* より、表現可能である。 ■

Theorem 5.2.7

全ての原子が部分恒等元である原子的関係代数は表現可能である。

Proof

定理 *5.1.4* より、部分恒等元は関数的元だから、全ての原子が関数的元である。したがって、定理 *5.2.1* より、表現可能である。 ■

次のことが直ちに示される。

Lemma 5.2.8

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ において、次が成り立つ。

$u \in Pt(A)\ \ and\ \ v \leq u \Rightarrow v \in Pt(A)$

Theorem 5.2.9

最大元が有限個からなるポイント元の和で表される関係代数は表現可能である。

Proof

最大元が有限個からなるポイント元の和で表される関係代数を $\mathcal{A}$ とする。定理 *5.2.5* の証明と同様にして、関係代数 $\mathcal{A}$ の完備原子的関係代数の部分代数 $\mathcal{S}$ への同型写像がとれ、補題 *5.2.8* より、$At(S) \subseteq Pt(S)$ が成り立つ。したがって、定理 *5.1.5* より、$At(S) \subseteq Fn(S)$ が成り立つ。ここで、定理 *5.2.1* より、関係代数 S は、プロパー関係代数に表現可能である。

以上から、関係代数 $\mathcal{A}$ は表現可能であることがわかる。 ■

Theorem 5.2.10

最大元が有限個からなる部分恒等元の和で表される関係代数は表現可能である。

Proof

定理 *5.2.9* の証明と同様にして得られる。 ■

また、次のことも確かめられる。

Theorem 5.2.11 (Jónsson Tarski)

全ての原子 u が $\breve{u};1;u \leq 1'$ をみたす単純で完備原子的な関係代数 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の原子の集合上の完全なプロパー関係代数に表現可能である。

この定理は、表現に次の写像を定義するとよい。

$F(x) = \{(a,b) | \exists u \in At(A) \quad u \leq x\,,\ a = u;\breve{u}\ \ and\ \ b = \breve{u};u\}$

これで、定理 5.1.1 と定理 5.1.2 とを用いて、F が表現可能なことがわかる。そして、$R \subseteq F(1)$ であるとき、R の要素 (a,b) に対して、次の集合 X を考える。

$X = \{u \in At(A) | a = u;\breve{u}\ \ and\ \ b = \breve{u};u\}$

$\mathcal{A}$ は完備代数なので、この集合 X の上限 x が存在する。この時、$F(x) = R$ となる。すなわち、F はプロパー関係代数への全射である。$\mathcal{A}$ は単純なことから、$F(1) = At(A) \times At(A)$ であること、したがって、このプロパー関係代数が完全であることが確かめられる。

第6章　まとめと展望

6.1　まとめ

以上までで、二項関係を抽象化した典型的な関係代数を紹介し、その基本的な性質を紹介した。そして関係代数が一般に表現できないこと、しかも有限な場合ですら表現できるとは限らないことを紹介した。また、原子に注目することで、表現可能な場合があることがあることもはっきりした。その副産物として、関係代数は完備原子的なブール代数に表現可能であることが、ブール代数同様に成り立つことが紹介された。

6.2　関係代数の研究の経緯と展望

前章で述べた定理は、一般化できることが知られている。定理 5.2.5 は、有限個の仮定はなくてもかまわないことが文献 [9] より知られている。

この時、特に、最大元が関数的元の和で表されるという性質は、任意の 0 でない要素に対して、それ以下の 0 でない関数的元が存在するということである。ブール代数における稠密部分集合[1] という用語を用いると、0 以外の関数的元の集合が関係代数の稠密部分集合であるということである。(原子的とは、原子の集合が関係代数の稠密部分集合であることである。)

更に、関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ が次の条件をみたす時、表現可能である (文献 [9]) ことが示された。

$1 = \sum\{\breve{p}; q | p, q$ は関数的元 $\}$

この事実は、定理 5.2.5 を一層一般化したものとなっている。

これらの結果は、関数的元によって生成される関係代数は表現可能なのではないかと期待させるものであるが、残念ながら、この予想は否定された (文献 [11])。

また、今述べたこととは別に、ポイント元に注目することで、次のような結果が得られている。これも、前章で述べたことの一般化であるといえる。まず、ポイント元の一般化であるペアー元を導入する。

Definition 6.2.1

関係代数 $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1, 1', \breve{}, ;)$ の要素 p が次の条件をみたす時ペアー元であるという。

$(Pair) \qquad 0 < p \ \ and \ \ p; 0'; p; 0'; p \leq 1'$

但し、$0' = -1'$ である。

[1] ブール代数 $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ の部分集合 D が $\mathcal{B}$ の稠密部分集合であるとは次をみたすこと。

$0 \notin D \ \ and \ \ \forall x \in B \setminus \{0\} \exists z \in D \quad z \leq x$

ペアー元は二項関係 R に対して、$R = \{\{a, a\}, \{b, b\}\}$ と表されるものである。恒等関係の一元または二元からなる部分集合を抽象した (つまり、上の R において、$a = b$ でもよい) ものである。この概念を用いて、恒等元がポイント元とペアー元の和で表される関係代数は表現可能である (文献 [10]) という結果が示されている。また、ペアー元は部分恒等元であるので、ポイント元において成り立つことを紹介した表現定理は、ポイント元をペアー元に置き換えても成り立つ。同様の考え方で、トリプル元といったものを順次考えて表現定理を得ることも可能である。

以上の表現定理を今後詳細に検討するとともに、次の二点を課題として考えている。

- 実際に表現可能なのはどんな場合かを引き続き考えること。

具体的には、表現可能な関係代数は、原子に何らかの条件を加えたものの例が与えられているが、関数的元に由来しない特別な元、例えば、順序関係に由来する元における条件を加えた場合などを考察したい。また、このような、関係代数の特別な元によって生成される関係代数で表現可能なものを見つけたい (同値元の時、関数的元の時は知られている)。

- 演算の一部を除いた写像で新たに表現を定めた場合を考えること。

代表的なものとして、プロパー関係代数のユニットが同値関係とならない場合に、それに広い意味で表現可能な関係代数と同じタイプの代数を考えるなどということがある。このケースは、既に研究されているものもあるが、表現可能なクラスがどの様な代数的性質をもつかなど、未解決の問題が残されている。

以上の課題に取り組むために、文献 [6] で述べられているように、ゲームの概念を用いたり、モデル論的手法を用いて、表現可能な関係代数のクラスについて理解を深める。

謝辞

本研究に熱心に指導をして頂いた小野寛晰教授に深く感謝致します。そして、この研究を背後で見守り支えて下さった石原哉助教授、浜野正浩助手、Felix Bou 助手ならびに小野研究室のみなさまに心から感謝致します。

参考文献

[1] L.Chin and A.Tarski, Distributive and Modular laws in the arithmetic of relation algebras, In [3], 1951, pp. 253-296.

[2] S.Givant and R.McKenzie, editors,Alfred Tarski Collected Papers Vol.2, Birkhäuser, 1986.

[3] S.Givant and R.McKenzie, editors,Alfred Tarski Collected Papers Vol.3, Birkhäuser, 1986.

[4] L.Henkin, D.Monk and A.Tarski, Cylindric algebras part I, North Holland, 1971.

[5] L.Henkin, D.Monk and A.Tarski, Cylindric algebras part II, North Holland, 1985.

[6] R.Hirsch and I.Hodkinson, Relation Algebras by Games, North-Holland, 2002.

[7] B.Jónnson and A.Tarski, Boolean algebras with operators I, In [3], 1951, pp. 371-419.

[8] B.Jónnson and A.Tarski, Boolean algebras with operators II, In [3], 1952, pp. 423-458.

[9] R.Maddux, Some sufficient conditions for the representability of relation algebras, Algebra Universalis, 1982, pp. 501-537.

[10] R.Maddux, Pair-dense relation algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 328, 1991, pp. 83-131.

[11] R.Maddux, Nonrepresentable relation algebras generated by functional elements, Algebra Universalis 52, 2004, pp. 155-165.

[12] R.Mckenzie, Representations of integral relation algebras, Michigan Mathematics Journal 17, 1970, pp. 279-287.

[13] D.Monk, Handbook of Boolean algebras Vol.1, North-Holland, 1989.

[14] 小野寛晰, 関係の代数, 教育出版, 1974.

[15] G.Schmidt and T.Ströhlein, Relations and Graphs, Springer, 1993.

[16] 末木剛博, 記号論理学ーその成立史の研究, 東京大学出版会, 1962.

[17] A.Tarski, On the calculus of relations, In [2], 1941, pp. 571-587.

[18] A.Tarski and S.Givant, A formalization of set theory without variables, Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. 41, 1987.