Title	Dynamic LogicとEpistemic Logicの統合に向かって
Author(s)	元井，幸一
Citation	
Issue Date	2006-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/1967
Rights	
Description	Supervisor:小野　寛晰，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

Dynamic LogicとEpistemic Logicの統合に向かって

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

元井 幸一

2006年3月

修 士 論 文

Dynamic LogicとEpistemic Logicの統合に向かって

指導教官　小野寛晰 教授

審査委員主査　小野寛晰 教授
審査委員　石原哉 助教授
審査委員　東条敏 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

410122 元井 幸一

提出年月: 2006 年 2 月

目 次

第1章　はじめに

1.1　背景

様相論理は、古典命題論理では十分に説明することができない日常的な推論を扱うために、様々な様相記号を加えてその表現力を増した論理である。様相論理はアリストテレスにより体系的な研究が始められた。それを現代的観点から整理したのが C.I. Lewis と C.H. Langford である。初期の様相論理では必然性や可能性が中心に研究されたが、最近では注目を浴びているエージェントの理論で重要な役割を持つ知識や信念の論理なども行われている。

プログラムの検証に関わる研究は 1960 年代に始められた。プログラムの部分的正当性や停止性を表現するために、1976 年に Pratt は様相論理の枠組みを使って Dynamic logic を導入した。Dynamic logic はソフトウェア科学への応用可能性から論理学と計算機科学の両分野からの研究が行われている。Epistemic logic については 1962 年の J.Hintikka による *Knowledge and Belief* が出されて以来具体的な研究が始められた。現在は人工知能論や経済学やゲーム理論との関わりにおいて注目され、特にマルチエージェント研究の重要な一部となっている。

本研究では、行為と知識の変遷が記述できる Dynamic Logic と Epistemic Logic の統合した体系を構築することを目標とする。そこで、具体的には何が必要でどのように形式化したらよいのかを考えた上で、本研究では事例研究としてエースとエイトというゲームを実際に二つの論理の公理や推論規則を導入した体系を用いて形式化する。さらに、このゲームで行われた推論を形式的に表現し、これらの推論にどのような仮定が用いられているのか明らかにする。本研究では、まず知識のみを考慮した体系で解析を試み、その後に知識と行為を考慮した体系で解析を試みた。

1.2 本論文の構成

本論文の構成について述べる。第２章で本研究の準備として、[?, ?] を基にして基本的な多様相論理、Dynamic Logic や Epistemic Logic の概要を述べ、第３章では本研究の目標について例を挙げて説明を述べる。第４章では事例研究として扱ったゲームの説明を述べ、第５章、第６章でそのゲームの解析を行う。しかし、第５章では知識のみを考慮した体系を用いて解析を行い、第６章では第５章の体系に行為の公理等を加えた体系で解析を行う。

第2章 Dynamic LogicとEpistemic Logic

本章では、まず基本的な多様相論理の概要について述べ、本研究で用いるDynamic LogicとEpistemic Logicに関しての概要を述べることにする。

2.1 多様相論理

様相論理は古典命題論理を拡張した論理で、「必然」や「可能性」といった様相概念を表す演算子を導入しその表現力が増したものである。この演算子に関してはいろいろな解釈が可能であり、様々な論理体系が存在している。Dynamic LogicとEpistemic Logicもそれらの体系の一つであり、複数の様相演算を持つ多様相論理として形式化されている。

2.1.1 シンタクス

多様相論理におけるシンタクスは以下のように定義される。

- 命題変数全体の集合をP、命題変数を$p, q, \ldots$等と表現する。
- 記号全体の集合をI、記号を$i \ldots$等と表現する。
- PとIから生成される論理式全体の集合を$Fma(P, I)$、論理式を$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ 等と表現する。

$$\varphi ::= p| \perp |\varphi_1 \supset \varphi_2|[i]\varphi$$

また、論理結合子$\wedge$、$\vee$、$\neg$を用いた論理式の定義は$\perp$、$\varphi_1 \supset \varphi_2$により定義される。

2.1.2 セマンティクス

多様相論理におけるセマンティクスに関しては、次のクリプキモデルにより定められる。

$$M = (S, V, \{R_i : i \in I\})$$

S は、空でない可能世界の集合
V は、それぞれの $p(\in P)$ に対し $V(p) \subseteq S$ となるような写像
R_i は、それぞれの記号 i に対する S 上の二項関係

可能世界と論理式の関係“ 論理式 φ がモデル M の可能世界 $s(\in S)$ で真（成り立つ）” というのは、次のように示す。

$$(M, s) \models \varphi$$

この関係は次のように帰納的に定義される。命題変数 p に関しては

$$(M, s) \models p \Leftrightarrow s \in V(p)$$

と定義される。論理演算子を含んだ論理式や論理式 $[i]\varphi$ については、

$(M, s) \not\models \perp$　　$((M, s) \models \perp$ ではないことを表す。)
$(M, s) \models \varphi_1 \supset \varphi_2 \Leftrightarrow (M, s) \models \varphi_1$ ならば、$(M, s) \models \varphi_2$
$(M, s) \models \neg\varphi$　　$\Leftrightarrow (M, s) \models \varphi$ ではない。
$(M, s) \models [i]\varphi$　　$\Leftrightarrow (s, t) \in R_i$ となるすべての t に対して、$(M, t) \models \varphi$

と定義される。

2.2 Dynamic Logic

Dynamic Logic は、プログラムごとにその実行後の状態を表す様相演算子を導入した体系であり、実行前後の関係を記述できることから、プログラムの正当性の検証等のために用いられている。

本研究においては、基本的な Dynamic Logic である Propositional Dynamic Logic(PDL) を用いる。また、プログラムの実行の代わりに人の行為として考える。

2.2.1 シンタクス

Dynamic Logic PDL で導入される演算子には、論理式に関する論理結合子 $(\wedge, \vee, \neg, \supset)$、行為に関する逐次実行 (;)、非決定的選択 $(\cup)$、非決定的繰り返し (*)、論理式と行為の双方に関する必然 ([ ])、テスト (?) がある。

Dynamic Logic において、論理式 (formula) と行為 (action) は以下のように帰納的に定義される。

- 命題変数全体の集合を P、命題変数を $p, q, \ldots$ 等と表現する。
- 基本行為全体の集合を Π、基本行為を $\pi, \pi_1, \ldots$ 等と表現する。

- P と Π から生成される論理式全体の集合を $Fma(P,\Pi)$、論理式を $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ 等と表現する。
- P と Π から生成される行為全体の集合を $Act(p,\Pi)$、行為を $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ 等と表現する。

$\varphi ::= p | \perp | \varphi_1 \supset \varphi_2 | [\alpha]\varphi$
$\alpha ::= \pi | \alpha_1 ; \alpha_2 | \alpha_1 \cup \alpha_2 | \alpha^* | \varphi ?$

論理式の定義の中に $[\alpha]\varphi$ という形が現れるので行為の定義に依存し、行為の定義の中に $\varphi?$ という形が現れるので論理式の定義に依存するので、別々に定義することができないことを注意しておく。また、論理結合子 $\wedge$、$\vee$、$\neg$ を用いた論理式の定義は $\perp$、$\varphi_1 \supset \varphi_2$ により定義される。

主な論理式と行為の直観的な意味は以下のようになる。

$[\alpha]\varphi$:	行為 α のすべての実行後、φ が成立する。
$\alpha;\beta$:	行為 α を実行し、引き続き行為 β を実行する。
$\alpha \cup \beta$:	行為 α か β を非決定的に選択して実行する。
α^*:	行為 α を有限回 (0 回以上) 繰り返して実行する。
$\varphi?$:	φ をテストする。φ が真ならばテストを終了する。偽ならば終了しない。

可能性演算子を $\langle\alpha\rangle\varphi \Leftrightarrow \neg[\alpha]\neg\varphi$ と定義する。

2.2.2 標準モデル

PDL におけるセマンティクスは様相論理に由来する。モデルは次のように与えられる。

$$M = (S, V, \{R_\alpha : \alpha \in Act(P,\Pi)\})$$

S は、空でない可能世界の集合
V は、それぞれの $p(\in P)$ に対し $V(p) \subseteq S$ となるような写像
R_α は、それぞれの行為 α に対する S 上の二項関係

可能世界と論理式の関係に関しては、

$$(M,s) \models p \Leftrightarrow p(\in P) \text{ に対して } s \in V(p)$$

と定義され、論理演算子を含んだ論理式も帰納的に定義される。また、論理式 $[\alpha]\varphi$ については、

$$(M,s) \models [\alpha]\varphi \Leftrightarrow sR_\alpha t \text{ となるすべての } t \text{ に対して } (M,t) \models \varphi$$

と定義される。

モデルの定義では R_α は任意の二項関係としたが、これだけでは行為間の関係を十分に表現していない。そこで、行為の直観的な意味を表現するようなモデルに注目し、それを標準モデルということにする。正確には、標準モデルとは次の条件を満たすことである。

$$
\begin{aligned}
&R_{\alpha;\beta} = R_\alpha \circ R_\beta = \{(s,t) : \exists u(sR_\alpha u \& uR_\beta t)\}\\
&R_{\alpha\cup\beta} = R_\alpha \cup R_\beta\\
&R_{\alpha^*} = (R_\alpha)^* = R_\alpha \text{ の反射推移閉包}\\
&R_{\varphi?} = \{(s,s) : (M,s) \models \varphi\}
\end{aligned}
$$

PDL を特徴付ける公理として、以下のものをとる。

$$
\begin{aligned}
&Comp: && [\alpha;\beta]\varphi \equiv [\alpha][\beta]\varphi\\
&Alt: && [\alpha\cup\beta]\varphi \equiv [\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi\\
&Mix: && [\alpha^*]\varphi \supset (\varphi \wedge [\alpha][\alpha^*]\varphi)\\
&Ind: && [\alpha^*](\varphi \supset [\alpha]\varphi) \supset (\varphi \supset [\alpha^*]\varphi)\\
&Test: && [\varphi?]\psi \equiv (\varphi \supset \psi)
\end{aligned}
$$

特に、Mix と Ind は R_{α^*} が R_α の反射推移閉包であることに対応している。

公理のうち $Comp$ と Ind について標準モデルにおいて成り立つことを示す。

補題 1. PDL の公理はすべて標準モデルで成立する。

証明

1. $Comp$ について
   $s(\in S)$ を任意にとる。すると
   $$
   \begin{aligned}
   (M,s) \models [\alpha;\beta]\varphi &\Leftrightarrow sR_{\alpha;\beta}t \text{ ならば、} (M,t) \models \varphi\\
   &\Leftrightarrow (sR_\alpha u \text{ かつ } uR_\beta t) \text{ ならば、} (M,t) \models \varphi\\
   &\Leftrightarrow sR_\alpha u \text{ ならば、} (uR_\beta t \text{ ならば、} (M,t) \models \varphi)\\
   &\Leftrightarrow sR_\alpha u \text{ ならば、} (M,u) \models [\beta]\varphi\\
   &\Leftrightarrow (M,s) \models [\alpha][\beta]\varphi
   \end{aligned}
   $$

2. Ind について
   $s(\in S)$ を任意にとる。すると
   $$
   \begin{aligned}
   (M,s) \models [\alpha^*](\varphi \supset [\alpha]\varphi) &\Leftrightarrow sR_{\alpha^*}t \text{ ならば、} (M,t) \models \varphi \supset [\alpha]\varphi\\
   &\Leftrightarrow sR_{\alpha^*}t \text{ ならば、} ((M,t) \models \varphi \text{ ならば、} (M,t) \models [\alpha]\varphi)\\
   &\Leftrightarrow sR_{\alpha^*}t \text{ ならば、} ((M,t) \models \varphi \text{ ならば、}
   \end{aligned}
   $$

$$
\begin{aligned}
&\quad (tR_\alpha u \text{ ならば、} (M,u) \models \varphi))\\
&\Leftrightarrow (sR_{\alpha^*}t \text{ かつ } (M,t) \models \varphi \text{ かつ } tR_\alpha u) \text{ ならば、} (M,u) \models \varphi\\
&\Rightarrow (sR_{\alpha^*}s \text{ かつ } (M,s) \models \varphi \text{ かつ } sR_\alpha u) \text{ ならば、} (M,u) \models \varphi\\
&\Rightarrow (sR_{\alpha^*}u \text{ かつ } (M,s) \models \varphi) \text{ ならば、} (M,u) \models \varphi\\
&\Leftrightarrow (M,s) \models \varphi \text{ ならば、} (sR_{\alpha^*}u \text{ ならば、} (M,u) \models \varphi)\\
&\Leftrightarrow (M,s) \models \varphi \text{ ならば、} (M,s) \models [\alpha^*]\varphi\\
&\Leftrightarrow (M,s) \models \varphi \supset [\alpha^*]\varphi
\end{aligned}
$$

2.2.3 カノニカルモデル

本節と次節では、PDL の標準モデルに関する完全性の準備として、カノニカルモデルと Filtration について説明を行う。

カノニカルモデルについて説明する。まず、論理 Λ に対するカノニカル Λ-モデルを次のように構成する。

$$M^\Lambda = (S^\Lambda, V^\Lambda, \{{R_i}^\Lambda : i \in I\})$$

S^Λ は、$\Lambda - maximal$ の集合である。このことについて説明する。論理式全体の集合を $Fma(P)$ とし、その部分集合を Γ としたとき、もし、Γ において、

$$\vdash_\Lambda \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \supset \bot$$

となる有限個の論理式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が存在するならば、Γ は $\Lambda - inconsistent$ という。
ここで、論理式 φ に対して $\vdash_\Lambda \varphi$ の表す意味は、Λ において φ は証明可能ということである。つまり、

$$\vdash_\Lambda \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Lambda$$

と定める。もし、Γ が $\Lambda - inconsistent$ でないときは、$\Lambda - consistent$ という。さらに、Γ が $\Lambda - maximal$ であるとは Γ が次の二つ条件を満たしていることとする。

- Γ は $\Lambda - consistent$ である。
- $Fma(P)$ におけるどの φ に対しても、$\varphi \in \Gamma$ か $\neg\varphi \in \Gamma$ となる。

このとき、S^Λ は次のように定義できる。

$$S^\Lambda = \{\Gamma \subseteq Fma(P) : \Gamma \text{ は } \Lambda - maximal\}$$

V^Λ、${R_i}^\Lambda$ は次のように定義される。

$$V^{\Lambda}(p) = \{s \in S^{\Lambda} : p \in s\}$$
$$sR_i{}^{\Lambda}t \Leftrightarrow \{\varphi \in Fma(P) : [i]\varphi \in s\} \subseteq t$$

このとき、どの $s(\in S^{\Lambda})$、またどの $\psi(\in Fma(P))$ に対しても、

$$[i]\psi \in s \Leftrightarrow \text{すべての } t(\in S^{\Lambda}) \text{ に対して、} sR_i{}^{\Lambda}t \text{ ならば、} \psi \in t$$

という性質が成り立つことを示すことができる。

補題 2. $Fma(P)$ におけるどの φ、また S^{Λ} におけるどの s に対しても、

$$(M^{\Lambda}, s) \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in s$$

証明
φ の構成に関する帰納法で証明する。
(Base case)
V^{Λ} の定義より明らかである。実際
$p \in s \Leftrightarrow s \in V^{\Lambda}(p) \Leftrightarrow (M^{\Lambda}, s) \models p$
(Induction step)
$\varphi =\perp$、$\varphi_1 \supset \varphi_2$ の時。

$\perp \notin s \Leftrightarrow s \notin V^{\Lambda}(\perp) \Leftrightarrow (M^{\Lambda}, s) \not\models \perp$
$\varphi_1 \supset \varphi_2 \in s \Leftrightarrow \varphi_1 \in s$ ならば、$\varphi_2 \in s \Leftrightarrow (M^{\Lambda}, s) \models \varphi_1$ ならば、$(M^{\Lambda}, s) \models \varphi_2$
$\Leftrightarrow (M^{\Lambda}, s) \models \varphi_1 \supset \varphi_2$

$\varphi = [i]\psi$ の時。

$[i]\psi \in s \Leftrightarrow$ すべての $t(\in S^{\Lambda})$ において、$sR_i{}^{\Lambda}t$ ならば、$\psi \in t$
$\Leftrightarrow$ すべての $t(\in S^{\Lambda})$ において、$sR_i{}^{\Lambda}t$ ならば、$(M^{\Lambda}, t) \models \psi$
$\Leftrightarrow (M^{\Lambda}, s) \models [i]\psi$

さらに、一般的に“ $\vdash_{\Lambda} \varphi \Leftrightarrow \varphi$ がすべての $\Lambda - maximal$ の集合に属している ”ことが言えるので、

$$\vdash_{\Lambda} \varphi \Leftrightarrow M^{\Lambda} \models \varphi$$

が成り立つ。ただし、$M^{\Lambda} \models \varphi$ は、M^{Λ} におけるすべての可能世界において φ が真であるときに行う。

2.2.4 Filtration

Filtration について説明する。まず、論理式 φ の部分論理式の集合 $Sf(\varphi)$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} Sf(p) &= \{p\} \qquad \text{ただし、} p \in P \text{ の時} \\ Sf(\bot) &= \{\bot\} \\ Sf(\varphi_1 \to \varphi_2) &= \{\varphi_1 \to \varphi_2\} \cup Sf(\varphi_1) \cup Sf(\varphi_2) \\ Sf([i]\varphi) &= \{[i]\varphi\} \cup Sf(\varphi) \end{aligned}$$

今、論理 Λ をとり、さらに部分論理式で閉じている集合 $\Gamma(\subseteq Fma(P))$ を固定する。つまり、

$$\varphi \in \Gamma \text{ ならば、} Sf(\varphi) \subseteq \Gamma$$

が成り立つ。次に、S^Λ 上の同値関係 $\sim_\Gamma$ を定義する。

$$\begin{aligned} s \sim_\Gamma t &\Leftrightarrow s \cap \Gamma = t \cap \Gamma \\ &\Leftrightarrow \text{すべての } \varphi(\in \Gamma) \text{ に対して、} \varphi \in s \Leftrightarrow \varphi \in t \end{aligned}$$

次に、$|s| = \{t \in S^\Lambda : s \sim_\Gamma t\}$ を s の $\sim_\Gamma$ に関する同値類する。さらに

$$S_\Gamma = \{|s| : s \in S^\Lambda\}$$

を同値類のすべての集合であると定義する。

ここで、$I_\Gamma = \{i \in I : \Gamma \text{ で出現する } [i]\}$、$P_\Gamma = P \cap \Gamma$ とする。今、$p \in P_\Gamma$ に対し、$|s| \in V_\Gamma(p) \Leftrightarrow p \in s$ により、P_Γ から S_Γ の部分集合全体への写像 V_Γ を定義する。

以下のような $P_\Gamma - model\ M_\Gamma$ を考える。

$$M_\Gamma = (S_\Gamma, V_\Gamma, \{R_i : i \in I_\Gamma\})$$

S_Γ 上の二項関係 R_i が、

(F1) もし $s{R_i}^\Lambda t$ の時、$|s|R_i|t|$
(F2) もし $|s|R_i|t|$ の時、$\{\varphi : [i]\varphi \in s \cap \Gamma\} \subseteq t$

を満たすとき、R_i は ${R_i}^\Lambda$ の $\Gamma - filtration$ と呼ばれる。

(F1)、(F2) を満たす R_i により定まる $P_\Gamma - model\ M_\Gamma = (S_\Gamma, V_\Gamma, \{R_i : i \in I_\Gamma\})$ は M^Λ の $\Gamma - filtration$ と呼ぶ。そのような M_Γ の重要な性質は次の補題で示される。

補題 3. もし $\varphi \in \Gamma$ の時、どの $s(\in S^{\Lambda})$ においても、

$$(M_{\Gamma}, |s|) \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in s$$

が成り立つ。

証明
φ の構成に関する帰納法で証明する。
(Base case)$p \in P_{\Gamma}$

$p \in s \Leftrightarrow |s| \in V_{\Gamma}(p) \Leftrightarrow (M_{\Gamma}, |s|) \models p$

(Induction step)
$\varphi = \varphi_1 \supset \varphi_2$ の時。

$\varphi_1 \supset \varphi_2 \in s \Leftrightarrow \varphi_1 \in s$ ならば、$\varphi_2 \in s$
$\Leftrightarrow (M_{\Gamma}, |s|) \models \varphi_1$ ならば、$(M_{\Gamma}, |s|) \models \varphi_2$
$\Leftrightarrow (M_{\Gamma}, |s|) \models \varphi_1 \supset \varphi_2$

$A = [i]\psi$ の時。

$[i]\psi \notin s \Leftrightarrow$ ある $t(\in S^{\Lambda})$ において、$s{R_i}^{\Lambda}t$ かつ、$\psi \notin t$
$\Rightarrow$ ある $|t|(\in S_{\Gamma})$ において、$|s|R_i|t|$ かつ、$\psi \notin t$
$\Rightarrow$ ある $|t|(\in S_{\Gamma})$ において、$|s|R_i|t|$ かつ、$(M_{\Gamma}, |t|) \not\models \psi$
$\Leftrightarrow (M_{\Gamma}, |s|) \notin [i]\psi$

$(M_{\Gamma}, |s|) \not\models [i]\psi \Leftrightarrow$ ある $|t|(\in S_{\Gamma})$ において、$|s|R_i|t|$ かつ、$(M_{\Gamma}, |t|) \not\models \psi$
$\Leftrightarrow$ ある $t(\in S^{\Lambda})$ において、$|s|R_i|t|$ かつ、$(M_{\Gamma}, |t|) \not\models \psi$
$\Leftrightarrow$ ある $t(\in S^{\Lambda})$ において、$|s|R_i|t|$ かつ、$\psi \notin t$
$\Rightarrow$ ある $t(\in S^{\Lambda})$ において、$\{\varphi(\in Fma(P)) : [i]\varphi \in s \cap \Gamma\} \subseteq t$ かつ、$\psi \notin t$
$\Leftrightarrow$ ある $t(\in S^{\Lambda})$ において、$\forall \varphi \in Fma(P)([i]\varphi \in s \cap \Gamma$ ならば、$\varphi \in t)$ かつ、$\psi \notin t$
$\Rightarrow$ ある $t(\in S^{\Lambda})$ において、$([i]\psi \in s \cap \Gamma)$ ならば、$\psi \in t)$ かつ、$\psi \notin t$
$\Leftrightarrow$ ある $t(\in S^{\Lambda})$ において、$(\psi \notin t$ ならば、$[i]\psi \notin s \cap \Gamma)$ かつ、$\psi \notin t$
$\Rightarrow$ ある $t(\in S^{\Lambda})$ において、$[i]\psi \notin s \cap \Gamma$
$\Rightarrow [i]\psi \notin s \cap \Gamma$
$\Leftrightarrow [i]\psi \notin s$ または、$[i]\psi \notin \Gamma$
$\Rightarrow [i]\psi \notin s$

2.2.5 PDL の完全性

PDL の標準モデルに関する完全性が成り立つことの概略を簡単に紹介する。まず、カノニカル PDL-モデルを次のように与える。

$$M^p = (S^p, V^p, \{{R_\alpha}^p : \alpha \in Act(P, \Pi)\})$$

S^p:PDL-maximal set の集合
$V^p(k) = \{s \in S^p : k \in s\}$
$s{R_\alpha}^p t \Leftrightarrow \{\varphi : [\alpha]\varphi \in s\} \subseteq t$

定理 4. M^p は ${R_{\alpha^*}}^p \subseteq ({R_\alpha}^p)^*$ 以外の標準モデルの条件のすべてを満たしている。

上の定理より、M^p において ${R_{\alpha^*}}^p$ が ${R_\alpha}^p$ の反射推移閉包になっているとは限らないので、M^p は標準モデルの条件を満たしているとは言えない。

今、論理式 φ を PDL において証明不可能なものとする。φ を偽にする標準モデルを求めるため、φ を含むある論理式の集合 Γ を用いる。

今、Γ が次の条件を満たすとき、Γ は closed であるという。

- •Γ は部分論理式の下で閉じている。
- •$[\varphi?]D \in \Gamma$ ならば $\varphi \in \Gamma$
- •$[\alpha;\beta]\varphi \in \Gamma$ ならば $[\alpha][\beta]\varphi \in \Gamma$
- •$[\alpha \cup \beta]\varphi \in \Gamma$ ならば $[\alpha]\varphi$、$[\beta]\varphi \in \Gamma$
- •$[\alpha^*]\varphi \in \Gamma$ ならば $[\alpha][\alpha^*]\varphi \in \Gamma$

補題 5. 与えられた φ を含む最小の closed な集合を Γ とすると、Γ は有限である。

つまり φ から出発し、上で与えられたすべての条件に関して閉じるようにするとき、高々有限個の新しい論理式が生成される。

以上より、Γ は φ を含む最小の closed な集合であり、有限であるとわかるので、M^p の $\Gamma - filtration$ を行う。

P_Γ と Act_Γ を次のように定義する。

- •$P_\Gamma = P \cap \Gamma$
- •Act_Γ は、Γ の要素の中に現れるすべての atomic action や test$\varphi?$ を含み、;、$\cup$、$*$ で閉じた最小の集合とする。

モデルを定義する。

$$M_\Gamma = (S_\Gamma, V_\Gamma, \{R_\alpha : \alpha \in Act_\Gamma\})$$

$S_\Gamma = \{|s| : s \in S^p\}$
$V_\Gamma(k) = \{|s| \in S_\Gamma : k \in s\}$
R_π:${R_\pi}^p$ の $\Gamma - filtration \qquad (\pi \in \Pi)$
$R_{\varphi?} = \{(|s|, |s|) : (M^p, s) \models \varphi\}$
その他の R_α は α の標準モデルの条件によって、帰納的に与えられる。

定理 6. M_Γ は M^p の $\Gamma - filtration$ である。

証明
α の構成に関する帰納法で証明する。$\alpha \in Act_\Gamma$ の時は、いつでも R_α は ${R_\alpha}^p$ の $\Gamma - filtration$ であることを示す。α が基本行為の場合は定義より明らかである。

次に $Test\ \varphi?$ について考えてみる。
$s{R_{\varphi?}}^p t$ とする。そのとき、もし $\psi \in s$ ならば、$(\varphi \supset \psi) \in s.$ したがって $Test$ の公理より $[\varphi?]\psi \in s$ したがって、$\psi \in t$ となる。よって $s \subseteq t$ となり、s が $maximal$ なので $s = t.$
その上、$Test$ならば、$\vdash_{PDL} [\varphi?]\varphi$ より、$[\varphi]\varphi \in s.$　したがって ${R_{\varphi?}}^p$ の定義より、$\varphi \in t = s.$
したがって、$s = t$ かつ $(M^p, s) \models \varphi$ より、$R_{\varphi?}$ の定義から $|s|R_{\varphi?}|t|$ といえる。以上より、(F1) は $\varphi?$ に対して成り立つ。

$|s|R_{\varphi?}|t|$ を仮定する。このとき、$|s| = |t|$ かつ $(M^p, s) \models \varphi$　したがって、もし $[\varphi?]\psi \in \Gamma$ かつ $(M^p, s) \models [\varphi?]\psi$ のとき、$M^p \models Test$ なので、$(M^p, s) \models \varphi \supset \psi.$　だから、$(M^p, s) \models \psi.$
しかしこのとき、$s \sim_\Gamma t$ かつ $\psi \in \Gamma$ より、$(M^p, t) \models \psi.$　以上より (F2) に対しても成り立つ。

Induction step における (F1) の証明は、次の考えを使う。
与えられた $s (\in S^p)$ に対して、φ_s を

$$\varphi_s \in t \Leftrightarrow |s|R_\alpha|t|$$

が任意の t に対して成り立つような論理式とする。（証明は略すが、実際にこのような φ_s を求めることができる。）今、証明したいのは、$s{R_\alpha}^p t$ ならば $|s|R_\alpha|t|$ であるが、そのためには $s{R_\alpha}^p t$ ならば $\varphi_s \in t$ を示せばよい。

　ここでは、α が $Iteration$ の場合についてのみこのことを証明する。
(F1)
$\alpha^* \in Act_\Gamma$ を仮定する。R_α を ${R_\alpha}^p$ を $\Gamma - filtration$ とする。
φ_s を $\varphi_s \in u \Leftrightarrow |s|R_{\alpha^*}|u|$ となる論理式とする。
まず、

$$[\alpha^*](\varphi_s \supset [\alpha]\varphi_s) \in s$$

を示す。
$sR_{\alpha^*}{}^p t'$ かつ $\varphi_s \in t'$ を仮定する。ここで、$[\alpha]\varphi_s \in t'$ が必要になるが、φ_s の定義から $|s|R_{\alpha^*}|t'|$ となる。よって、$|s|R_\alpha{}^n|t'|$ となるある $n(\geq 0)$ が存在する。

このとき、もし $t'R_\alpha{}^p u'$ ならば、$|t'|R_\alpha|u'|$ となり、$|s|R_\alpha{}^{n+1}|u'|$　よって $\varphi_s \in u'$.　だから、$t'R_\alpha{}^p u'$ ならば、$\varphi_s \in u'$ なので、$[\alpha]\varphi_s \in t'$.

公理 Ind と以上より、$(\varphi_s \supset [\alpha^*]\varphi_s) \in s$.
特に、$|s|R_{\alpha^*}|s|$ より、$\varphi_s \in s$ なので、$[\alpha^*]\varphi_s \in s$.

この場合、(F2) は次のようになる。

もし、$|s|R_{\alpha^*}|t|$ ならば、すべての ψ に対して、
もし、$[\alpha^*]\psi \in \Gamma$ かつ $(M^p, s) \models [\alpha^*]\psi$ ならば、$(M^p, t) \models \psi$.

しかし、R_α が $R_\alpha{}^p$ の $\Gamma - filtration$ であれば、すべての $n(\geq 0)$ に対して、

もし、$|s|R_\alpha{}^n|t|$ ならば、すべての ψ に対して、
もし、$[\alpha^*]\psi \in \Gamma$ かつ $(M^p, s) \models [\alpha^*]\psi$ ならば、$(M^p, t) \models [\alpha^*]\psi$.

となることを示すことができる。実際
$n = 0$ の時、$|s| = |t|$ となり、$s \cap \Gamma = t \cap \Gamma$ なので明らか。
$n = k + 1$ の時、$|s|R_\alpha{}^{k+1}|t|$ と仮定する。ここで、上のことが $n \leq k$ となる n については成立しているとする。このとき、$|s|R_\alpha{}^k|u|$ かつ $|u|R_\alpha|t|$ となるある $|u|$ が存在する。

したがって帰納法の仮定より、もし $[\alpha^*]\psi \in \Gamma$ かつ $(M^p, s) \models [\alpha^*]\psi$ ならば、$(M^p, u) \models [\alpha^*]\psi$.
だから、公理 Mix より $(M^p, u) \models [\alpha][\alpha^*]\psi$. さらに Γ の定義より、$[\alpha][\alpha^*]\psi \in \Gamma$.

このとき、R_α が $R_\alpha{}^p$ の $\Gamma - filtration$ なので、$(M^p, t) \models [\alpha^*]\psi$

さて、もし $|s|R_{\alpha^*}|t|$ ならば、ある $n(\geq 0)$ に対して $|s|R_\alpha{}^n|t|$ となる。したがって、もし $[\alpha^*]\psi \in \Gamma$ かつ $(M^p, s) \models [\alpha^*]\psi$ ならば、以上のことから $(M^p, t) \models [\alpha^*]\psi$.　そして公理 Mix より、$(M^p, t) \models \psi$.

また、次の補題が成り立つ。

補題 7. すべての $\varphi(\in \Gamma)$ に対して、$(M^p, s) \models \varphi \Leftrightarrow (M_\Gamma, |s|) \models B$

この補題と $R_{\varphi?}$ の定義より、標準モデルの条件のうち唯一満たされていなかった条件

$$R_{\varphi?} = \{(x, x) : (M_\Gamma, x) \models \varphi\}$$

が成り立つことになる。したがって M_Γ が標準モデルであることが明らかになるので、よって完全性の証明は得られる。

2.3 Epistemic Logic

Epistemic Logic は様相論理の一種であり、「知っている」「信じている」を様相演算子として導入した体系である。このような知識の研究は計算機の分散システムの問題にも有効に用いられている。

2.3.1 シンタクス

Epistemic Logic におけるシンタクスは以下のように定義される。

- 命題変数全体の集合を P、命題変数を $p, q, \ldots$ 等と表現する。
- エージェント全体の集合を Ag、エージェントを $1, \ldots, i, \ldots, m$ 等と表現する。
- P と Ag から生成される論理式全体の集合を $Fma(P, Ag)$、論理式を $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ 等と表現する。

$\varphi ::= p | \perp | \varphi_1 \supset \varphi_2 | K_i\varphi$

また、論理式 $K_i\varphi$ の直観的な意味は、“ エージェント i は φ を知っている ”と解釈される。

2.3.2 セマンティクス

Epistemic Logic におけるセマンティクスは、クリプキモデルで表現される。

$$M = (S, V, R_1, \ldots, R_m)$$

S、V に関しては、Dynamic Logic の標準モデルと同様に定義され、R_i は、それぞれのエージェント i に対する S 上の二項関係である。

可能世界と論理式の関係に関しては、

$$(M, s) \models p \Leftrightarrow p(\in P) \text{ に対して } s \in V(p)$$

と定義され、論理結合子を含んだ論理式も帰納的に定義される。また、論理式 $K_i\varphi$ については、

$$(M, s) \models K_i\varphi \Leftrightarrow sR_it \text{ となるすべての } t \text{ に対して } (M, t) \models \varphi$$

と定義される。

命題 8.
(1) $\models (K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \supset \psi)) \supset K_i\psi$
(2) もし $\models \varphi$ ならば、$\models K_i\varphi$

証明
(1) 任意のクリプキモデル $M = (S, V, R_1, \ldots, R_m)$ と可能世界 $s \in S$ に対して、$(M, s) \models (K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \supset \psi)) \supset K_i\varphi$、つまりもし $(M, s) \models K_i\varphi$ かつ $(M, s) \models K_i(\varphi \supset \psi)$ となるとき、$(M, s) \models K_i\psi$ となることを証明する。そこで、$(M, s) \models K_i\varphi$ と $(M, s) \models K_i(\varphi \supset \psi)$ を仮定する。これは sR_it となるすべての t に対して、$(M, t) \models \varphi$ かつ $(M, t) \models \varphi \supset \psi$ が成り立つことである。よって、sR_it となるすべての t に対して $(M, t) \models \psi$ となり、したがって $(M, s) \models K_i\psi.$
(2)$\models \varphi$ を仮定する。これはすべてのクリプキモデル M とその可能世界 s において $(M, s) \models \varphi$ ということである。そこで、任意のクリプキモデル N と、その N において tR_iu という関係にある可能世界 t と u をとる。$\models \varphi$ なので、当然 $(N, u) \models \varphi$ となり、これは $(N, t) \models K_i\varphi$ を証明する。よって、クリプキモデル N とその可能世界 t と u は任意に選ばれているので、$\models K_i\varphi.$

2.3.3 知識の体系 $K_{(m)}$

ここでは、Epistemic Logic における主な体系について紹介する。
エージェント $Ag = \{1, \ldots, m\}$ に関する知識の体系 $K_{(m)}$ は、以下の公理と推論規則を持っている。
公理:

(A1) すべての命題トートロジー
(A2) $i = 1, \ldots, m$ に対して、$(K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \supset \psi)) \supset K_i\psi$

推論規則:

$$\text{(R1)}\frac{\varphi \quad \varphi \supset \psi}{\psi}, \quad \text{(R2)}\frac{\varphi}{K_i\varphi}Necessitation$$

また、次の (A3)~(A5) の公理とその直観的な意味が存在する。

(A3) $K_i\varphi \supset \varphi$ “ 知っていることは正しい ”
(A4) $K_i\varphi \supset K_iK_i\varphi$ “ 知っていることを知っている ”
(A5) $\neg K_i\varphi \supset K_i\neg K_i\varphi$ “ 知らないことを知っている ”

このとき体系 $K_{(m)}$ に対して、公理 (A3)~(A5) を付け加えることにより体系 $T_{(m)}$、$S4_{(m)}$、$S5_{(m)}$ が形成される。

•$T_{(m)} = K_{(m)}$+(A3)
•$S4_{(m)} = T_{(m)}$+(A4)
•$S5_{(m)} = S4_{(m)}$+(A5)

定理 9. $K_{(m)}$、$T_{(m)}$、$S4_{(m)}$、$S5_{(m)}$ のクリプキモデルに関する完全性が成り立つ。

これは、カノニカルモデルを用いることにより証明される。

2.3.4 共通知識

Epistemic Logic において、「共通知識」という概念が存在する。

論理式 $E\varphi$、$C\varphi$ の定義と直観的な意味は以下のようになる。

$E\varphi = K_1\varphi \wedge \ldots \wedge K_m\varphi$ “ みんなが φ を知っている ”
$C\varphi = \varphi \wedge E\varphi \wedge EE\varphi \wedge EEE\varphi \wedge \ldots = \bigwedge_{i\geq 0} E^i\varphi$ “ φ は共通知識である ”

$C\varphi$ の右辺は無限の conjunction を含むが、これは直観的な意味として等しいことを表す。つまり、「共通知識」は「すべてのエージェントが知っている」、「そしてそのことをすべてのエージェントが知っている」ということを繰り返して得られる知識を指す。

可能世界と論理式の関係は、

$(M, s) \models E\varphi \Leftrightarrow s(R_1 \cup \ldots \cup R_m)t$ となるすべての t に対して $(M, t) \models \varphi$
$(M, s) \models C\varphi \Leftrightarrow sR_{i^*}t$ となるすべての t に対して $(M, t) \models \varphi$
(R_{i^*} は R_i の反射推移閉包)

と定義される。

共通知識に関する公理として以下のものがある。

(A6) $E\varphi \equiv K_1\varphi \wedge \ldots \wedge K_m\varphi$
(A7) $C\varphi \supset \varphi$
(A8) $C\varphi \supset EC\varphi$
(A9) $(C\varphi \wedge C(\varphi \supset \psi)) \supset C\psi$
(A10) $C(\varphi \supset E\varphi) \supset (\varphi \supset C\varphi)$
(R3)$\dfrac{\varphi}{C\varphi}$

公理 (A3)~(A5) を体系 $K_{(m)}$等に付け加えることにより体系 $KEC_{(m)}$ 等が定義される。

•$KEC_{(m)} = K_{(m)}$+(A6) (A10)+(R3)
•$TEC_{(m)} = T_{(m)}$+(A6) (A10)+(R3)
•$S4EC_{(m)} = S4_{(m)}$+(A6) (A10)+(R3)
•$S5EC_{(m)} = S5_{(m)}$+(A6) (A10)+(R3)

定理 10. $KEC_{(m)}$、$TEC_{(m)}$、$S4EC_{(m)}$、$S5EC_{(m)}$ のクリプキモデルに関する完全性が成り立つ。

カノニカルモデルと Filtration を用いることにより完全性が証明される。

第3章　Dynamic Logic と Epistemic Logic の結合に向かって

本研究は、最初で述べたように前章で説明した Dynamic Logic と Epistemic Logic を統合した体系を構築する事が目標である。この二つの論理を結合することにより、日常の生活に存在する知識と行為の変遷を記述できると考えられる。つまり、エージェントの持つ知識が行為によって更新される様子を記述できることになる。

このことを、知識と行為の関係から具体例をあげて説明する。

就職活動中の太郎とその弟である次郎の兄弟の家に、太郎宛で企業から手紙が届いたとする。その内容は企業の内定通知か不採用通知であり、その内容がどちらかであると二人とも知っているとする。

そこで、Atomic formula p を次のように定める。

p :　企業からの内定通知
$\neg p$: 企業からの不採用通知

今回は、p は真であると仮定する。ここで、兄弟二人で家のポストに手紙を取りに行ってからの行為のシナリオを二つ考える。

シナリオ１:太郎が大声を出して、次郎に聞こえるように手紙の内容を読む。
シナリオ２:太郎は声を出さずに手紙を読み、次郎は太郎が手紙を読んでいる姿を見ている。

シナリオ１では、手紙の内容が二人にとっての共通知識になる。また、シナリオ２においては、太郎が手紙の内容を知っていることが二人にとっての共通知識となる。つまり、太郎の近くに次郎がいて、太郎には次郎が自分を見ているのが分かっており、次郎には自分が見ていることを太郎が知っているということが分かっているということである。よって、以下のような論理式を得ることができる。

シナリオ１の後の共通知識 $\Rightarrow Cp$
シナリオ２の後の共通知識 $\Rightarrow C(K_{\text{太郎}}p \vee K_{\text{太郎}}\neg p)$

ここで、参考にした参考にした Dynamic Logic と Epistemic Logic を用いた事例研究 [?] について簡単に述べる。

この事例研究は、*muddy children puzzle* を用いて行われている。ここではその概要までは述べないが、用いられた体系の中で重要だと思われる公理について紹介する。

$$K_i[\alpha]\varphi \supset [\alpha]K_i\varphi$$

i はエージェント、α は行為、φ は論理式である。これは直観的な意味として“ もし i が α が行われた後に φ が成り立つことを知っていたら、α が行われた後に i は φ が成り立つことを知っている ”を持つ。この公理一般的な Epistemic Dynamic の公理とされており、この公理のおかげでパズルの中でプレーヤーが行う推論の形式化を可能にしている。本研究の事例研究においてもエースとエイトというゲームを取り上げ、様々な公理を導入した体系で解析し形式化を試みる。

第4章　エースとエイト

本章では、本研究で行った事例研究について説明する。Dynamic Logic と Epistemic Logic を用いた事例研究は、前の章でも登場した有名な *muddy children puzzle* 等で行われており、本研究ではエースとエイト (*Aces and Eights game*) を用いて、それを論理的に解析したものをどの程度知識と行為の論理で表現できるかを試みた。

4.1　エースとエイトについて

今節では、事例研究として扱ったエースとエイトについて説明する。
エースとエイトは、知識についていくつか複雑な推論を含んだ簡単なゲームである。このゲームで用意されるのは、トランプのエースが４枚、エイトが４枚、そしてこのゲームを行うプレーヤー３人である。

エースとエイトを合わせた８枚のカードから６枚を、３人のプレーヤーに２枚ずつ配布し、残りの２枚は裏にして置いておく。もちろん、３人ともこれらのカードがエースとエイトのうちの６枚であることはあらかじめ知らされている。どのプレーヤーもカードの内容を見ることは許されないが、他の２人のプレーヤーには見えるようにする。したがって、自分のカードは他の２人のプレーヤーは見ることができるが、自分はそれを見ることができない。このとき、３人のプレーヤーは交代で自分の持っているカードは何かを考えて当てようとし、また自分が考える時は改めて他の２人のプレーヤーを見ることにする。もし、プレーヤーが自分の持っているカードが分からなかったら、そのプレーヤーは自分の手を挙げなければならない。そしてそのときに他の２人は手を挙げたことを知る。

ここでは、このゲームを行うプレーヤーを簡単に、A、B、C とする。また、前提として誰も嘘はつかず、またプレーヤーは完全な推論ができる者とする。

これから、３種類のゲームの進行の仕方を紹介し、次にその解説を行う。

(a) まず、A が他の２人を見た後に手を挙げる。次に B も同じように手を挙げる。C は A と B の２人を見て、A はエース２枚、B はエイト２枚を持っていることと２人とも手を挙げているのを知る。このとき、C は自分のカードが何であるか知ることができるだろうか。実際、C は自分のカードがエースとエイトの１枚づつであることを知ることができる。

これは、C がもしエイトを２枚持っていたら、A が B と C で４枚のエイトを見ることになるから、自分が２枚のエースを持っていることを知るはずである。また、同様に C がエースを２枚持っていたら、B は自分が２枚のエイトを持っていることがわかるはずである。しかし、２人共に手を挙げた。したがって、C は自分がエースとエイトを持っていると推論できるのである。

(b) 次は A に視点をおく。まず、A は他の２人を見て、B はエース２枚、C はエースとエイトを持っていることを知るが、自分のカードがわからないので手を挙げる。次に B も他の２人を見た後に手を挙げる。引き続き、C も手を挙げる。そして、再び A が他の２人を見て、２人とも手を挙げているのを知る。このとき、A は自分のカードが何であるか知ることができるだろうか。実際、A は自分のカードがエースとエイトの１枚づつであることを知ることができる。

まず、A は B と C の２人を見て２人で３枚のエイトがあるのを知ることができる。よって、このゲームで用意されているエイトは４枚であることから、A は自分の持っているカードは２枚のエースか、エースとエイトを１枚づつのどちらかであることを知る。このとき、A がもし２枚のエースを持っていたらパターン (a) と同じ状況になり、C は自分がエースとエイトを持っていることを知るはずである。しかし、C は手を挙げた。したがって、A は自分が Ace と $Eight$ を持っていることを推論できるのである。

(c) 今回は B に視点をおく。まず、A が他の２人を見た後に手を挙げる。次に B は他の２人を見て、A も C もエースとエイトを１枚づつ持っていることを知るが、自分のカードがわからないので手を挙げる。引き続き、C も他の２人を見た後に手を挙げる。さらに、再び A が他の２人を見た後に手を挙げる。そして、B が他の２人を見て、２人とも手を挙げているのを知る。このとき、B は自分のカードが何であるか知ることができるだろうか。実際、B は自分のカードがエースとエイトの１枚づつであることを知ることができる。

この場合は、パターン (a) とパターン (b) の状況を考えたとき、もし B が２枚のエイトを持っていたら、A は自分がエースとエイトを持っていることを知るはずである。しかし、A は手を挙げた。したがって、B は２枚のエイトを持っていないことを知る。また、パターン (a) とパターン (b) においてエースとエイトの役割は対称的だから、B は２枚のエースを持っていないことを知る。。ゆえに、B は自分がエースとエイトを持っていることが推論できるのである。

4.2 エースとエイトの解析について

この問題を Dynamic Logic と Epistemic Logic を結合した体系において形式化し、さらにこれらの問題でプレーヤーが行った推論を形式的に表現し、どのような仮定がこれらの推論の中で用いられているかを明らかにする。

本研究における証明については、ゲンツェン流の sequent 計算で行った。まず、その基本となる命題論理の体系 LK について説明する。

体系 LK における基本的な表現は式 (sequent) と呼ばれる。式は、

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \to \psi_1, \ldots, \psi_n$$

という形の表現である。ここで m や n は 0 でもよい。この式の直観的な意味は、「φ_1 から φ_m までを仮定すると、論理式 $\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n$ が導かれる」ということである。LK の推論規則は一般に、

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

の形をしている。ここで、S_1、S_2 および S は式である。この推論規則を I とすると、S_1 と S_2 を I の上式、S は I の下式と言われる。また、推論規則においては式の構造に関する推論規則と、論理結合子の役割を示す推論規則がある。以下では、有限個 (0 個でもよい) の論理式を並べた列を、Γ、Δ、Θ、Σ のギリシャ語の大文字で表す。体系 LK の始式 (initial sequent) と推論規則を以下にあげる。

• 始式

$\varphi \to \varphi$ という形の式である。ここで、φ は任意の論理式

また、命題定数 $\top$ や $\bot$ を使う場合は、始式としてさらに

$$\to \top \qquad \text{および} \qquad \bot \to$$

をつけ加えておくことにする。本研究ではこれらの式を加えた体系で議論を行う。

• 構造に関する推論規則

(weakening)

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\varphi, \Gamma \to \Delta}\ (\text{weak. 左}) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \varphi}\ (\text{weak. 右})$$

(contraction)

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \to \Delta}{\varphi, \Gamma \to \Delta}\ (\text{cont. 左}) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \to \Delta, \varphi}\ (\text{cont. 右})$$

(exchange)

$$\frac{\Gamma,\varphi,\psi,\Theta\rightarrow\Delta}{\Gamma,\psi,\varphi,\Theta\rightarrow\Delta}\ (\text{ex. 左}) \qquad \frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi,\psi,\Sigma}{\Gamma\rightarrow\Delta,\psi,\varphi\Sigma}\ (\text{ex. 右})$$

(cut)

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi \quad \varphi,\Theta\rightarrow\Sigma}{\Gamma,\Theta\rightarrow\Delta,\Sigma}\ (\text{cut})$$

• 論理結合子に関する推論規則

$$\frac{\varphi,\Gamma\rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\rightarrow\Delta}\ (\wedge.\ \text{左}\ 1) \qquad \frac{\psi,\Gamma\rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi}\ (\wedge.\ \text{左}\ 2)$$

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi \quad \Gamma\rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi}\ (\wedge.\ \text{右}) \qquad \frac{\varphi,\Gamma\rightarrow\Delta \quad \psi,\Gamma\rightarrow\Delta}{\varphi\vee\psi,\Gamma\rightarrow\Delta}\ (\vee.\ \text{左})$$

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi}{\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}\ (\vee.\ \text{右}\ 1) \qquad \frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}\ (\vee.\ \text{右}\ 2)$$

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi \quad \psi,\Theta\rightarrow\Sigma}{\varphi\supset\psi,\Gamma,\Theta\rightarrow\Delta,\Sigma}\ (\supset.\ \text{左}) \qquad \frac{\varphi,\Gamma\rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi\supset\psi}\ (\supset.\ \text{右})$$

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Delta,\varphi}{\neg\varphi,\Gamma\rightarrow\Delta}\ (\neg.\ \text{左}) \qquad \frac{\varphi,\Gamma\rightarrow\Delta}{\Gamma\rightarrow\Delta,\neg\varphi}\ (\neg.\ \text{右})$$

始式から始めて、それに推論規則を適用していく過程を記述したものを証明図という。証明図およびその証明図の終式を次のように帰納的に定義する。

(1) 始式はそれだけで証明図であり、その証明図の終式でもある。
(2) 式 P_1、P_2 は S_1、S_2 をその終式とする証明図とする。

さらに、

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

が LK の推論規則の一つであれば、

$$\frac{P_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{P_1 \quad P_2}{S}$$

は証明図であり、その終式は S である。また、式 S を終式とするような証明図が存在するとき、S は LK で証明可能であるという。

本研究では、この LK に行為と知識に関する推論規則を加え、公理は始式として加えた体系で証明を行った。つまり例えば、知識の公理 $K_i\varphi \to \varphi$ を

$$\to K_i\varphi \supset \varphi$$

として、この式を始式として加えた体系である。また、この定義は便宜的なものであるので、実際に sequent 計算での証明を行う時は、

$$K_i\varphi \to \varphi$$

を始式として加えた体系を用いる。

第5章　知識のみを考慮した解析

本研究では、初めにエースとエイトについて知識のみを考慮して、つまり LK に対して Epistemic Logic の推論規則や公理を始式として加えた体系で形式化を試みた。まず、本節と次節を通して用いる論理式 A_p、A_q、A_r 等について説明する。それぞれの論理式とそれが表現する命題の関係は次のように定義する。

•A_p : プレーヤー A がエースを２枚持っている
•A_q : プレーヤー A がエイトを２枚持っている
•A_r : プレーヤー A がエースとエイトを持っている
また、プレーヤー B、C に対しても、B_p, C_q 等を同様に定義する。

LK に加える知識に関する始式と推論規則は、

$$K_i\varphi \to \varphi \qquad\qquad \frac{\Gamma \to \psi}{K_i\Gamma \to K_i\psi}$$

である。ただし、Γ が $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ のとき $K_i\Gamma$ は $K_i\varphi_1, \ldots, K_i\varphi_m$ を表すものとする。また、このゲームに関する公理として以下の式を始式として加える。（公理の下に、その直観的な意味を述べておく）

(1)$X_i \to K_Y X_i \qquad (X, Y \in \{A, B, C\} \quad X \neq Y \quad i \in \{p, q, r\})$
あるプレーヤーのカードを他のプレーヤーは知ることができる。

(2)$X_p, Y_p \to Z_q \qquad X_q, Y_q \to Z_p \qquad (X, Y, Z \in \{A, B, C\} \quad X, Y, Z$ は互いに異なる$)$
２人のプレーヤーがエースを２枚づつ持っているか又はエイトを２枚づつ持っているとき、残りのプレーヤーはエイトを２枚持っている、ないしエースを２枚持っていることになることを表す。

(3)$X_p, Y_r \to Z_r, Z_q \quad X_q, Y_r \to Z_r, Z_p \quad (X, Y, Z \in \{A, B, C\} \quad X, Y, Z$ は互いに異なる$)$
２人のプレーヤーがエースを２枚とエース、エイト（又はエイトを２枚とエース、エイト）を持っているとき、残りのプレーヤーはエースを２枚かエース、エイト（又はエイト

を２枚かエース、エイト）を持っていることになることを表す。

(4)$\to X_p, X_q, X_r \qquad\qquad (X \in \{A, B, C\})$
プレーヤーのカードの内容は３種類である。よって、どのプレーヤーも２種類が違うのならば、残り１種類のカードを持っていることを表す。

これから、エースとエイトの３つの進行のパターン (a)、(b)、(c) についての論理的解析を行う。

(a)
$B_q, C_q \to K_A A_p$ と $A_p, C_p \to K_B B_q$ は証明可能である。直観的な意味として、前者は B と C がエイトを２枚づつ持っていたら A は自分がエースを２枚持っていることを知り、後者は A と C がエースを２枚づつ持っていたら B はエイトを２枚持っていることを知ることを表している。このことは実際に次のようにして確かめられる。

LK において、$B_q, C_q \to B_q \wedge C_q$ が証明可能なので、
(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_q, C_q \to B_q \wedge C_q}{K_A B_q, K_A C_q \to K_A(B_q \wedge C_q)}}{((\wedge.\text{左})\text{ と }(\text{ex. 左}))}}{K_A B_q \wedge K_A C_q, K_A B_q \wedge K_A C_q \to K_A(B_q \wedge C_q)}}{K_A B_q \wedge K_A C_q \to K_A(B_q \wedge C_q)}$$

(2)

$$\dfrac{\dfrac{B_q \wedge C_q \to B_q \wedge C_q \qquad \dfrac{\dfrac{B_q, C_q \to A_p}{(\wedge.\text{左})\text{ と }(\text{ex. 左})}}{B_q \wedge C_q \to A_p}}{B_q \wedge C_q \to A_p}}{K_A(B_q \wedge C_q) \to K_A A_p}$$

よって (1)、(2) を用いると次のようにして $B_q, C_q \to K_A A_p$ が証明可能であることがわかる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_q \to K_A B_q}{C_q, B_q \to K_A B_q}}{B_q, C_q \to K_A B_q} \qquad \dfrac{C_q \to K_A C_q}{B_q, C_q \to K_A C_q}}{B_q, C_q \to K_A B_q \wedge K_A C_q} \qquad K_A B_q \wedge K_A C_q \to K_A(B_q \wedge C_q)}{B_q, C_q \to K_A(B_q \wedge C_q)} \qquad K_A(B_q \wedge C_q) \to K_A A_p}{B_q, C_q \to K_A A_p}$$

同様にして、$A_p, C_p \to K_B B_q$ も証明可能である。よって $B_q, C_q \to K_A A_p$ と $A_p, C_p \to K_B B_q$ を用いて、

(3)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_q, C_q \to K_A A_p}{\neg K_A A_p, B_q \to \neg C_q}}{((\text{weak. 左})\text{ と }(\text{ex. 左}))}}{\neg K_A A_p, \neg K_B B_q, A_p, B_q \to \neg C_q}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_p, C_p \to K_B B_q}{\neg K_B B_p, A_p \to \neg C_p}}{((\text{weak. 左})\text{ と }(\text{ex. 左}))}}{\neg K_A A_p, \neg K_B B_q, A_p, B_q \to \neg C_p}
}{\neg K_A A_p, \neg K_B B_q, A_p, B_q \to \neg C_p \wedge \neg C_q}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to C_p, C_q, C_r}{\neg C_p, \neg C_q \to C_r}}{(\wedge.\text{ 左})\text{ と }(\text{ex. 左})\text{ と }(\text{cont. 左})}}{\neg C_p \wedge \neg C_q \to C_r}
}{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg K_A A_p, \neg K_B B_q, A_p, B_q \to C_r}{(\text{ex. 左})\text{ と }(\wedge.\text{ 左})\text{ と }(\text{cont. 左})}}{\neg K_A A_p, \neg K_B B_q, A_p \wedge B_q \to C_r}}{K_C \neg K_A A_p, K_C \neg K_B B_q, K_C(A_p \wedge B_q) \to K_C C_r}
}
$$

となる。他方

(4)

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\neg K_A A_p \to \neg K_A A_p}{\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q \to \neg K_A A_p}}{K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q) \to K_C \neg K_A A_p}
\quad
\dfrac{\dfrac{\neg K_B B_q \to \neg K_B B_q}{\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q \to \neg K_B B_q}}{K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q) \to K_C \neg K_B B_q}
}{K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q) \to K_C \neg K_A A_p \wedge K_C \neg K_B B_q}
$$

となり、$K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q) \to K_C \neg K_A A_p \wedge K_C \neg K_B B_q$ は証明可能である。(3)、(4) より

$$
\dfrac{
\begin{array}{c} K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q) \to \\ K_C \neg K_A A_p \wedge K_C \neg K_B B_q \end{array}
\quad
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} K_C \neg K_A A_p, K_C \neg K_B B_q, \\ K_C(A_p \wedge B_q) \to K_C C_r \end{array}}{(\wedge.\text{ 左})\text{ と }(\text{ex. 左})\text{ と }(\text{cont. 左})}}{\begin{array}{c} K_C \neg K_A A_p \wedge K_C \neg K_B B_q, \\ K_C(A_p \wedge B_q) \to K_C C_r \end{array}}
}{K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q), K_C(A_p \wedge B_q) \to K_C C_r}
$$

よって、以下の式が証明可能になる。

$$K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q), K_C(A_p \wedge B_q) \to K_C C_r$$

この式は、“ 仮定として C は A と B が手を挙げたことを見て知り、さらに C は A がエースを２枚 B がエイトを２枚持っていることを見て知っているので、自分がエースとエイトを持っていることを知る ”ことを表しているから、パターン (a) の C が自分のカードの

内容を知る推論過程を表現できたことになる。

(b)

パターン (a) で証明された式と、パターン (a) における証明の途中で証明された $B_q, C_q \to K_A(B_q \wedge C_q)$ と同様にして示される式 $A_p, B_q \to K_C(A_p \wedge B_q)$ を仮定として用いて、次のような推論を行う。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_p, B_q \to K_C(A_p \wedge B_q) \qquad \dfrac{K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q), K_C(A_p \wedge B_q) \to K_C C_r}{K_C(A_p \wedge B_q), K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q) \to K_C C_r}}{A_p, B_q, K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q) \to K_C C_r}}{A_p, K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q), \neg K_C C_r, B_q \to}}{\dfrac{(\wedge.\text{左}) \text{ と } (\text{ex.}\,\text{左})}{A_p, K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q), \neg K_C C_r, B_q \wedge C_r, \to}}}{K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q), \neg K_C C_r, B_q \wedge C_r, \to \neg A_p}
$$

公理である $B_q, C_r \to A_r, A_p$ を用いて

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q), \\ \neg K_C C_r, B_q \wedge C_r \to \neg A_p \end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B_q, C_r \to A_r, A_p}{(\wedge.\text{左}) \text{ と } (\text{ex.}\,\text{左}) \text{ と } (\text{cont.}\,\text{左})}}{B_q \wedge C_r \to A_r, A_p}}{\neg A_p, B_q \wedge C_r \to A_r}}{\dfrac{(\text{cut}) \text{ と } (\text{cont.}\,\text{左})}{\begin{array}{c} K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q), \neg K_C C_r, \\ B_q \wedge C_r \to A_r \end{array}}}}{K_A K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q), K_A \neg K_C C_r, K_A(B_q \wedge C_r) \to K_A A_r}
$$

よって、以下の式が証明可能になる。

$$
K_A K_C(\neg K_A A_p \wedge \neg K_B B_q), K_A \neg K_C C_r, K_A(B_q \wedge C_r) \to K_A A_r
$$

この式は、“ 仮定として A は A と B が手を挙げたことを C が知っていることを知っており、さらに A は C も手を挙げたこと、そして B がエイトを２枚、C がエースとエイトを持っていることを知っている場合、A は自分がエースとエイトを持っていることを知る ” ことを表している。したがってパターン (b) の A が自分のカードの内容を知る推論過程を表現できたことになる。

(c)

パターン (b) で証明された式と、パターン (a) の証明の途中で得られた式 $B_q, C_q \to K_A(B_q \wedge C_q)$ と同様にして示される式 $B_q, C_r \to K_A(B_q \wedge C_r)$ を用いて、次のような推論を行う。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_q, C_r \to K_A(B_q \land C_r) \qquad \dfrac{K_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), K_A\neg K_CC_r, K_A(B_q \land C_r) \to K_AA_r}{K_A(B_q \land C_r), K_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), K_A\neg K_CC_r \to K_AA_r}}{B_q, C_r, K_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), K_A\neg K_CC_r \to K_AA_r}}{\text{(ex. 左) と (¬. 左) と (¬. 右)}}}{K_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), K_A\neg K_CC_r, \neg K_AA_r, C_r \to \neg B_q}}{K_AK_C(\neg K_AA_q \land \neg K_BB_p), K_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), K_A\neg K_CC_r, \neg K_AA_r, C_r \to \neg B_q}}{K_AK_C(\neg K_AA_q \land \neg K_BB_p), K_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), K_A\neg K_CC_r, \neg K_AA_r, A_r \land C_r \to \neg B_q}
$$

上の最後の式の一番左の論理式と二番目の論理式の p, q の現れ方の違いに注意してほしい。ところがパターン (a) と (b) におけるエースとエイトの役割は対称的だから、ここまでで証明した式

$$
\begin{gathered}
K_AK_C(\neg K_AA_q \land \neg K_BB_p), K_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), \\
K_A\neg K_CC_r, \neg K_AA_r, A_r \land C_r \to \neg B_q
\end{gathered}
$$

における p と q を置き換えた式も証明可能なはずである。それら二つを用い、また公理である $\to B_p, B_q, B_r$ より、

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{gathered}K_AK_C(\neg K_AA_q \land \neg K_BB_p), K_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), \\ K_A\neg K_CC_r, \neg K_AA_r, A_r \land C_r \to \neg B_q \land \neg B_p\end{gathered} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\to B_p, B_q, B_r}{\neg B_q, \neg B_p \to B_r}}{\begin{gathered}\text{(∧. 左) と (ex. 左) と} \\ \text{(cont. 左)}\end{gathered}}}{\neg B_q \land \neg B_p \to B_r}}{\begin{gathered}K_AK_C(\neg K_AA_q \land \neg K_BB_p), K_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), \\ K_A\neg K_CC_r, \neg K_AA_r, A_r \land C_r \to B_r\end{gathered}}}{\begin{gathered}K_BK_AK_C(\neg K_AA_q \land \neg K_BB_p), K_BK_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), \\ K_BK_A\neg K_CC_r, K_B\neg K_AA_r, K_B(A_r \land C_r) \to K_BB_r\end{gathered}}
$$

よって、以下の式が証明可能になる。

$$
\begin{gathered}
K_BK_AK_C(\neg K_AA_q \land \neg K_BB_p), K_BK_AK_C(\neg K_AA_p \land \neg K_BB_q), \\
K_BK_A\neg K_CC_r, K_B\neg K_AA_r, K_B(A_r \land C_r) \to K_BB_r
\end{gathered}
$$

この式は、

1. 「A は A と B が手を挙げたことを C が知っていることを知っている」ということを B が知っている。

2. 「A は C が手を挙げたこと」と「A が二回目も手を挙げたこと」、そして「A と C が共にエースとエイトを持っていること」の 3 つを B が知っている。

   という場合に

3. B は自分がエースとエイトを持っていることを知る。

ということを表している。したがってパターン (c) の B が自分のカードの内容を知る推論過程を表現できたことになる。

第6章　知識と行為を考慮した解析

前節では、知識のみを考慮してエースとエイトの解析を行った。しかし、例えばパターン(c) の証明の終式において、B は A が手を挙げたことを知っているという仮定が二度登場するが、どちらが一回目の挙手でどちらが二回目の挙手なのかが上手く表現されていない。よって、行為の順序や時間的経過も考慮することによって、各々のパターンをより正確に表現できると考えられる。そこで前節の体系に Dynamic Logic の推論規則や公理を始式として加え、さらに行為と知識の様相演算子を含んだ公理を用いて形式化を試みた。本節における論理式 A_p、A_q、A_r 等は前節と同じ定義とする。

行為の定義として、

- α :プレーヤー A がプレーヤー B と C を見る
- β :プレーヤー B がプレーヤー A と C を見る
- γ :プレーヤー C がプレーヤー A と B を見る

この行為は、プレーヤーが自分のカードを考えて当てようとする時に再度他の 2 人を見る行為である。

前節の体系に加える行為に関する始式と推論規則は、

$$[\alpha;\beta]\varphi \to [\alpha][\beta]\varphi \qquad [\alpha][\beta]\varphi \to [\alpha;\beta]\varphi \qquad \frac{\Gamma\to\psi}{[\alpha]\Gamma\to[\alpha]\psi}$$

である。ただし、Γ が $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ のとき $[\alpha]\Gamma$ は $[\alpha]\varphi_1,\ldots,[\alpha]\varphi_m$ を表すものとする。そして、前節で用いたゲームに関する公理 (2)〜(4) は本節においても始式として加えるが、(1) は (1)' に変更し (5) と (6) を始式として加える。

(1)' $V_i \to [\tau]K_X V_i$
($V, X \in \{A,B,C\}$　$V \neq X$　$i \in \{p,q,r\}$　τ は任意の行為)
あるプレーヤーのカードを、行為が行われた後に他のプレーヤーが知ることができる。

(5) $[\tau']K_X V_i \to K_X V_i$
(τ' は任意の行為　$V, X \in \{A,B,C\}$　$V \neq X$　$i \in \{p,q,r\}$)
行為が行われた後にあるプレーヤーが他のプレーヤーのカードを知るならば、行為が行わ

れる前からそのプレーヤーはそれを知っている。

(6) $[\tau']\neg K_X V_i \to \neg K_X V_i$
(τ' は任意の行為　$V, X \in \{A, B, C\} \quad i \in \{p, q, r\}$)
行為が行われた後にあるプレーヤーがカードの内容を知らないなら、行為が行われる前からそのプレーヤーはそれを知らない。

また、公理 (1)' から $V_i \to [\tau]V_i$ が次のようにして証明される。

$$\frac{V_i \to [\tau]K_X V_i \qquad \dfrac{K_X V_i \to V_i}{[\tau]K_X V_i \to [\tau]V_i}}{V_i \to [\tau]V_i}$$

以下で、エースとエイトの３つの進行のパターン (a)、(b)、(c) についての論理的解析を行う。

(a)
公理である $B_q, C_q \to A_p$ を用いて
(1)

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B_q, C_q \to A_p}{K_A B_q, K_A C_q \to K_A A_p}}{\neg K_A A_p, K_A B_q, K_A C_q \to}}{\neg K_A A_p, K_A B_q, K_A C_q \to \bot}}{[\alpha]\neg K_A A_p, [\alpha]K_A B_q, [\alpha]K_A C_q \to [\alpha]\bot} \qquad [\alpha]\bot \to \bot}{[\alpha]\neg K_A A_p, [\alpha]K_A B_q, [\alpha]K_A C_q \to \bot}}{[\alpha]K_A B_q, [\alpha]K_A C_q \to [\alpha]\neg K_A A_p \supset \bot} \qquad \dfrac{\dfrac{[\alpha]\neg K_A A_p \to [\alpha]\neg K_A A_p \qquad \bot \to}{[\alpha]\neg K_A A_p, [\alpha]\neg K_A A_p \supset \bot \to}}{[\alpha]\neg K_A A_p \supset \bot \to \neg[\alpha]\neg K_A A_p}}{[\alpha]K_A B_q, [\alpha]K_A C_q \to \neg[\alpha]\neg K_A A_p}$$

さらに公理 (1)' より $B_q \to [\alpha]K_A B_q$ と $C_q \to [\alpha]K_A C_q$ を用いて
(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_q \to [\alpha]K_A C_q \qquad \dfrac{\dfrac{B_q \to [\alpha]K_A B_q \qquad [\alpha]K_A B_q, [\alpha]K_A C_q \to \neg[\alpha]\neg K_A A_p}{B_q, [\alpha]K_A C_q \to \neg[\alpha]\neg K_A A_p}}{[\alpha]K_A C_q, B_q \to \neg[\alpha]\neg K_A A_p}}{C_q, B_q \to \neg[\alpha]\neg K_A A_p}}{(\neg.\text{右})\text{ と }(\text{ex.右})\text{ と }(\neg.\text{左})}}{[\alpha]\neg K_A A_p, B_q \to \neg C_q}}{[\alpha]\neg K_A A_p, A_p \wedge B_q \to \neg C_q}$$

公理である $A_p \to [\beta]K_BA_p$ と $A_p \to [\alpha]A_p$ を用いて
(3)

$$\dfrac{\dfrac{A_p \to [\alpha]A_p \qquad \dfrac{A_p \to [\beta]K_BA_p}{[\alpha]A_p \to [\alpha][\beta]K_BA_p}}{A_p \to [\alpha][\beta]K_BA_p} \qquad [\alpha][\beta]K_BA_p \to [\alpha;\beta]K_BA_p}{A_p \to [\alpha;\beta]K_BA_p}$$

同様にして $C_p \to [\alpha;\beta]K_BC_p$ も示される。そこで、(1) で証明された $[\alpha]K_AB_q, [\alpha]K_AC_q \to \neg[\alpha]\neg K_AA_p$ と同様にして示される式 $[\alpha;\beta]K_BA_p, [\alpha;\beta]K_BC_p \to \neg[\alpha;\beta]\neg K_BB_p$ を用いて
(4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_p \to [\alpha;\beta]K_BC_p \qquad \dfrac{\dfrac{A_p \to [\alpha;\beta]K_BA_p \qquad [\alpha;\beta]K_BA_p, [\alpha;\beta]K_BC_p \to \neg[\alpha;\beta]\neg K_BB_p}{A_p, [\alpha;\beta]K_BC_p \to \neg[\alpha;\beta]\neg K_BB_p}}{[\alpha;\beta]K_BC_p, A_p \to \neg[\alpha;\beta]\neg K_BB_p}}{C_p, A_p \to \neg[\alpha;\beta]\neg K_BB_p}}{\text{(¬. 右) と (ex. 右) と (¬. 左)}}}{[\alpha;\beta]\neg K_BB_p, A_p \to \neg C_p}}{[\alpha;\beta]\neg K_BB_p, A_p \wedge B_q \to \neg C_p}$$

(2)、(4) より

$$\dfrac{\dfrac{[\alpha;\beta]\neg K_BB_q, A_p \wedge B_q \to \neg C_p}{[\alpha]\neg K_AA_p, [\alpha;\beta]\neg K_BB_q, A_p \wedge B_q \to \neg C_p} \qquad \dfrac{[\alpha]\neg K_AA_p, A_p \wedge B_q \to \neg C_q}{[\alpha]\neg K_AA_p, [\alpha;\beta]\neg K_BB_q, A_p \wedge B_q \to \neg C_q}}{[\alpha]\neg K_AA_p, [\alpha;\beta]\neg K_BB_q, A_p \wedge B_q \to \neg C_p \wedge \neg C_q}$$

そして、公理である $\to C_p, C_q, C_r$ より

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]\neg K_AA_p, [\alpha;\beta]\neg K_BB_q, A_p \wedge B_q \to \neg C_p \wedge \neg C_q \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\to C_p, C_q, C_r}{\neg C_p, \neg C_q \to C_r}}{\text{(∧. 左) と (ex. 左) と (cont. 左)}}}{\neg C_p \wedge \neg C_q \to C_r}}{[\alpha]\neg K_AA_p, [\alpha;\beta]\neg K_BB_q, A_p \wedge B_q \to C_r}}{\text{(∧. 左) と (ex. 左) と (cont. 左)}}}{[\alpha]\neg K_AA_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_BB_q, A_p \wedge B_q \to C_r}}{K_C([\alpha]\neg K_AA_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_BB_q), K_C(A_p \wedge B_q) \to K_CC_r}$$

以上より、次の式が証明可能になる。

$$K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q), K_C(A_p \wedge B_q) \to K_C C_r$$

この式は、“ 仮定として C は A が他の２人を見た後に手を挙げた、そしてその後 B が他の２人を見た後に手を挙げたことを知り、さらに C は A がエースを２枚 B がエイトを２枚持っていることを知っているので、自分がエースとエイトを持っていることを知る ” ことを表しているから、パターン (a) の C が自分のカードの内容を知る推論過程を表現できたことになる。

(b)

パターン (a) で証明された式を用いるが、その前に $A_p, B_q \to K_C(A_p \wedge B_q)$ を証明する。まず、公理 (5) より $[\gamma]K_C A_p \to K_C A_p$ と $[\gamma]K_C B_q \to K_C B_q$、LK で証明可能な式 $A_p, B_q \to A_p \wedge B_q$ を用いて

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\gamma]K_C B_q \to K_C B_q \qquad \dfrac{\dfrac{[\gamma]K_C A_p \to K_C A_p \qquad \dfrac{A_p, B_q \to A_p \wedge B_q}{K_C A_p, K_C B_q \to K_C(A_p \wedge B_q)}}{[\gamma]K_C A_p, K_C B_q \to K_C(A_p \wedge B_q)}}{K_C B_q, [\gamma]K_C A_p \to K_C(A_p \wedge B_q)}}{[\gamma]K_C B_q, [\gamma]K_C A_p \to K_C(A_p \wedge B_q)}}{(\wedge.\text{左})\text{ と }(\text{ex.}\ \text{左})\text{ と }(\text{cont.}\ \text{左})}}{[\gamma]K_C A_p \wedge [\gamma]K_C B_q \to K_C(A_p \wedge B_q)}$$

公理 (1)’ より $A_p \to [\gamma]K_C A_p$ と $B_q \to [\gamma]K_C B_q$ を用いて

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_p \to [\gamma]K_C A_p}{A_p, B_q \to [\gamma]K_C A_p} \qquad \dfrac{B_q \to [\gamma]K_C B_q}{A_p, B_q \to [\gamma]K_C B_q}}{A_p, B_q \to [\gamma]K_C A_p \wedge [\gamma]K_C B_q} \qquad [\gamma]K_C A_p \wedge [\gamma]K_C B_q \to K_C(A_p \wedge B_q)}{A_p, B_q \to K_C(A_p \wedge B_q)}$$

パターン (a) で証明された式を用いて

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_p, B_q \to K_C(A_p \wedge B_q) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q),\\ K_C(A_p \wedge B_q) \to K_C C_r\end{array}}{\begin{array}{c}K_C(A_p \wedge B_q),\\ K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q) \to K_C C_r\end{array}}}{A_p, B_q, K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q) \to K_C C_r}}{(\neg.\text{左})\text{ と }(\text{ex.}\ \text{左})\text{ と }(\neg.\text{右})}}{\neg K_C C_r, K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q), B_q \to \neg A_p}$$

また、公理 (6) より $[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_C C_r \to \neg K_C C_r$ を用いて

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_C C_r \to \neg K_C C_r \qquad \neg K_C C_r, K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q), B_q \to \neg A_p}{[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_C C_r, K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q), B_q \to \neg A_p}}{K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q), [\alpha;\beta;\gamma]\neg K_C C_r, B_q \to \neg A_p}}{K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q), [\alpha;\beta;\gamma]\neg K_C C_r, B_q \wedge C_r \to \neg A_p}$$

そして、公理である $B_q, C_r \to A_r, A_p$ を用いて

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q),\\ [\alpha;\beta;\gamma]\neg K_C C_r, B_q \wedge C_r \to \neg A_p\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B_q, C_r \to A_r, A_p}{(\wedge.\text{左})\text{ と }(\text{ex.}\text{左})\text{ と }(\text{cont.}\text{左})}}{B_q \wedge C_r \to A_r, A_p}}{\neg A_p, B_q \wedge C_r \to A_r}}{(\text{cut})\text{ と }(\text{cont.}\text{左})}}{K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q), [\alpha;\beta;\gamma]\neg K_C C_r, B_q \wedge C_r \to A_r}}{K_A K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q), K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_C C_r, K_A(B_q \wedge C_r) \to K_A A_r}$$

以上より、次の式が証明可能になる。

$$K_A K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q), K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_C C_r, K_A(B_q \wedge C_r) \to K_A A_r$$

この式は、“ 仮定として A は A が他の 2 人を見た後に手を挙げた、そしてその後 B が他の 2 人を見た後に手を挙げたことを C が知っているを知っており、さらに A は A、B に続いて C が他の 2 人を見た後に手を挙げたこと、そして B がエイトを 2 枚、C がエースとエイトを持っていることを知っている場合、A は自分がエースとエイトを持っていることを知る ”ことを表している。したがってパターン (b) の A が自分のカードの内容を知る推論過程を表現できたことになる。

(c)

パターン (b) で証明された式と、パターン (b) の証明の途中で得られた式 $A_p, B_q \to K_C(A_p \wedge B_q)$ と同様にして示される式 $B_q, C_r \to K_A(B_q \wedge C_r)$、また公理 (6) より $[\alpha;\beta;\gamma;\alpha]\neg K_A A_r \to \neg K_A A_r$ を用いて

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}[\alpha;\beta;\gamma;\alpha]\neg K_AA_r\\ \to \neg K_AA_r\end{array}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}B_q, C_r \to\\ K_A(B_q\wedge C_r)\end{array}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c}K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_p\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_q),\\ K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_CC_r, K_A(B_q\wedge C_r)\to K_AA_r\end{array}}{\begin{array}{c}K_A(B_q\wedge C_r), K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_CC_r,\\ K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_p\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_q)\to K_AA_r\end{array}}
}{
\begin{array}{c}B_q, C_r, K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_CC_r,\\ K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_p\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_q)\to K_AA_r\end{array}
}
}{
\text{(ex. 左) と (¬. 右) と (¬. 左)}
}
}{
\begin{array}{c}\neg K_AA_r, K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_p\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_q),\\ K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_CC_r, C_r\to\neg B_q\end{array}
}
}{
\dfrac{
\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha;\beta;\gamma;\alpha]\neg K_AA_r, K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_p\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_q),\\ K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_CC_r, C_r\to\neg B_q\end{array}}{\text{(ex. 左) と (weak. 左) と (∧. 左)}}
}{
\begin{array}{c}K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_p\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_q), K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_q\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_p),\\ K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_CC_r, [\alpha;\beta;\gamma;\alpha]\neg K_AA_r, A_r\wedge C_r\to\neg B_q\end{array}
}
}
$$

知識のみを考慮して行った解析におけるパターン (c) の時と同様に、パターン (a) とパターン (b) におけるエースとエイトの役割は対称的だから、ここまで証明した式

$$
\begin{array}{c}K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_p\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_q), K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_q\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_p),\\ K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_CC_r, [\alpha;\beta;\gamma;\alpha]\neg K_AA_r, A_r\wedge C_r\to\neg B_q\end{array}
$$

における p と q を置き換えた式も証明可能なはずである。それらの二つの式を用い、また公理である $\to B_p, B_q, B_r$ より

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_p\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_q),\\ K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_q\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_p),\\ K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_CC_r, [\alpha;\beta;\gamma;\alpha]\neg K_AA_r, A_r\wedge C_r\to\neg B_q\wedge\neg B_p\end{array}
\quad
\dfrac{\dfrac{\to B_p, B_q, B_r}{\neg B_q, \neg B_p\to B_r}}{\begin{array}{c}\text{(∧. 左) と (ex. 左)}\\ \text{と (cont. 左)}\end{array}}
}{
\begin{array}{c}K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_p\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_q),\\ K_AK_C([\alpha]\neg K_AA_q\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_p),\\ K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_CC_r, [\alpha;\beta;\gamma;\alpha]\neg K_AA_r, A_r\wedge C_r\to B_r\end{array}
}
}{
\begin{array}{c}K_BK_AK_C([\alpha]\neg K_AA_p\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_q),\\ K_BK_AK_C([\alpha]\neg K_AA_q\wedge[\alpha;\beta]\neg K_BB_p),\\ K_BK_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_CC_r, K_B[\alpha;\beta;\gamma;\alpha]\neg K_AA_r,\\ K_B(A_r\wedge C_r)\to K_BB_r\end{array}
}
$$

以上より、次の式が証明可能になる。

$$K_B K_A K_C([\alpha]\neg K_A A_p \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_q),$$
$$K_B K_A K_C([\alpha]\neg K_A A_q \wedge [\alpha;\beta]\neg K_B B_p),$$
$$K_B K_A[\alpha;\beta;\gamma]\neg K_C C_r, K_B[\alpha;\beta;\gamma;\alpha]\neg K_A A_r,$$
$$K_B(A_r \wedge C_r) \rightarrow K_B B_r$$

この式は、

1. 「A は A が他の 2 人を見た後に手を挙げた、さらにその後 B が他の 2 人を見た後に手を挙げたことを C が知っていることを知っている」ということを B が知っている。
2. 「A は C が A、B に続いて他の 2 人を見た後に手を挙げたこと」と「A が二回目も手を挙げたこと」、そして「A と C が共にエースとエイトを持っていること」の 3 つを B が知っている。

   という場合に

3. B は自分がエースとエイトを持っていることを知る。

ということを表している。したがってパターン (c) の B が自分のカードの内容を知る推論過程を表現できたことになる。

ここで改めて本章で用いた主な公理についてと、本章のまとめをしておく。
- 公理 (1)' について

この公理は、ゲームのルール上カードが配られた直後から各プレーヤーは自分以外のカード知ることになるので、だれが改めて見るという行為を行ってもあるプレーヤーのカードを他の 2 人は知ることができることを表している。

- 公理 (5) について

上の (1)' についてと同様に、改めて見るという行為が行われた後にあるプレーヤーが他のプレーヤーのカードを知っていたら、それは結局カードが配られた直後からそれを知っていることになる。したがって、公理 (5) はこのことを表している。

- 公理 (6) について

公理 (5) では、行為が行われた後にあるプレーヤーが自分のカードを知ったら、行為が行われる前からそれを知っていたことは認めていない。これは、知らなかったことが、行為が行われることによって知ることが考えられるからである。ただし、このゲームでは行為が行われることによって、知っていることが知らなくなることはない。したがって、公理 (6) はそのことを表している。

- 本章のまとめ

本章では、行為と知識の公理や推論規則を導入して解析を試みたが、まず知識のみを考慮

して解析を行った場合に比べて、行為の順序は表現できた。しかし、行為と知識の関係においては「行為を行った後に知識を得る」等のような公理を導入できず、その関係は形式化できなかった。よって、本研究における行為の位置づけとしては、行為の順序を表すものとし、したがって行為を時間の順と見なすこともできる。

第 7 章　結論

本研究では、エースとエイトというゲームでプレーヤーが行った推論を形式的に表現するために、知識のみを考慮した体系を用いた場合と知識と行為を考慮した体系を用いた場合の二つの方法でこのゲームの解析を行った。さらに、二つの方法を比べることにより知識と行為を考慮した体系を用いた方が、行為の順序を表現できることからゲームの進行により正確に則した推論を形式化できることを確認できた。また、ゲームの解説を読むことによりこのゲームの進行を簡単に理解できると思われるが、実際に形式化を行おうとすると様々な仮定が必要であることが分かった。しかし、本研究における行為は、その行為を行うと知識が変化するという知識と直接的な関係のものではなく、行為の順序を表すものとして導入した。今後の課題としては、行為に様々な定義を与えて事例研究を行うことが挙げられ、その結果として知識と行為の関係を考察することが、Dynamic Logic と Epistemic Logic の統合した体系を構築するための手がかりとなると思われる。

参考文献

[1] A. Baltag, L.S. Moss and S. Solecki, The Logic of Public Announcements, Common Knowledge, and Private Suspicions, Presented at TARK, (1998), pp. 43-56.

[2] H. van Ditmarsch,W. van der Hoek and B. Kooi, Concurrent dynamic epistemic logic for MAS, Proceeding of the Second International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS), (2003), pp. 201-208.

[3] R. Fagin, J.Y. Halpern, Y. Moses and M.Y. Vardi, *Reasoning about knowledge*, MIT Press, Cambridge MA, 1995.

[4] R. Goldblatt,, Logics of Time and Computation 2nd ed., rev.and expanded, CSLI Lecture Notes ; no.7, 1992.

[5] D. Harel, D. Kozen and J. Tiuryn, *Dynamic Logic*, MIT Press, 2000.

[6] J.-J. Meyer and W. van der Hoek, *Epistemic Logic for AI and Computer Science*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 41. Cambridge University Press,Cambridge, 1995.

[7] 小野 寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.

[8] J. Puisségur, *Eléments de construction d'une logique épistémique et dynamique*, Rapport de Stage de Licence de l'École Normale Supérieure de Lyon (2005).

謝辞

本研究を行う上で、日頃から丁寧なご指導をしてくださいました小野 寛晰教授に深く感謝致します。また、論理学の基礎的な部分を指導してくださいました浜野 正浩 助手と木原 均さん、さらに研究全体を支えてくださいました研究室の皆様と生活を支えてくださいました家族、仲間に厚くお礼を申し上げます。