

Title	複雑ネットワークにおける次数分布およびモジュール構造と最短ループ長の関係
Author(s)	河戸, 幾利
Citation	
Issue Date	2026-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	https://hdl.handle.net/10119/20356
Rights	
Description	Supervisor:林 幸雄, 先端科学技術研究科, 修士(融合科学)

複雑ネットワークにおける 次数分布およびモジュール構造と最短ループ長の関係 Relations among the length of the shortest loop, degree distribution and modular structure in complex networks

北陸先端科学技術大学院大学 学生番号 2550002

氏名 河戸 幾利

主任研究指導教員氏名 林 幸雄

1. はじめに

現代社会は、通信網、電力網、インターネット、SNS、サプライチェーン、経済システムなど、多様なネットワークによって支えられている。これらが相互に結合することで高い利便性や効率性をもたらす一方、局所的な障害が広範囲に連鎖・拡大するリスクも高まっており、結合の頑健性を考慮した新しいネットワーク設計が求められる。そこで、異なるシステムを共通の「つながりの構造」として抽象化して扱える点で、ネットワーク科学は有力な枠組みである。21世紀初頭のネットワーク科学の成果として、多くの現実ネットワークにおいて次数分布がべき乗則に従うスケールフリー(SF)構造を持つことが明らかになった。SFネットワークは、少数のハブノードにリンクが集中した不平等な構造を持ち、利得や効率性を重視して形成されるが、高次数ノードを標的とした意図的攻撃に対して極めて脆弱である。

これまでの研究でわかったこととして、結合の頑健性を高めるヒューリスティックな手法として、ループ強化によって次数分布の幅が狭まり、頑健性が向上する[1]。また、次数分布の分散が小さいほど、ハブ攻撃や最悪のループ破壊攻撃に対して高い頑健性を示す[2]。さらに、リンク追加では短いループよりも長いループが効果的に頑健性を高める[3]。しかしながら、既存研究の多くは最短ループの中でも最小の三角形に焦点を当てており、より長い最短ループが頑健性に与える影響は未解明である。また、最短ループ長の累積分布の近似解法も提案されているが[4]、頑健性との関係は明らかでない。さらに、現実ネットワークはモジュール(コミュニティ)構造を持つが、強いモジュール構造は結合を脆弱化させることが近年報告されている[5]。そこで本研究では、頑健性に影響を与える次数分布の分散[2]およびモジュール構造の強さ[5]に加えて、最短ループ長との関係を網羅的に調査する。

2. 研究方法

2.1 連続変化させた次数分布を持つネットワークの生成

次数分布 $P(k)$ とは次数 k を持つノード数の頻度分布であり、ネットワーク構造を特徴づける基本的な指標である。網羅的な調査をするために、Growing Network(GN)モデルとInverse Preferential Attachment(IPA)モデルを用いて、次数分布を連続的に変化させたネットワークを生成する。これらのモデルでは、順次追加される新規ノードが、次数 k_i を持つ既存ノード i に対して k_i^ν に比例した確率で接続され、接続パラメータ ν に応じて異なる次数分布 $P(k)$ が得られる。接続パラメータ ν が小さいほど、次数分布 $P(k)$ の幅は狭くなる。

ただし、 $\nu \ll 0$ では鎖状構造が現れるため、そうした複数ノードの次数の相互作用の影響を除いて次数分布 $P(k)$ の純粋な影響を調べる目的で、Configurationモデルによるランダム化を施し、これらの特殊構造を除去する。具体的には、生成したネットワークの各リンクを自由端に切断した後、自由端同士をランダムに接続することで、与えられた次数分布 $P(k)$ を維持したまま特殊構造を取り除く。

2.2 リンク再配線によるモジュール構造の導入

生成したネットワークに対して、リンク再配線により人工的にモジュール構造を導入する。各ノードにモジュール番号 $1, \dots, m_0$ をランダムに割り当てた後、再配線確率 w に応じてインターリンクを同一モジュール内へ再接続することで、モジュール構造の強さを制御する。具体的には、次数分布を保ち、自己ループと多重リンクを禁止しながら、ランダムに選択したインターリンクを自由端に切断して、可能な限り同一モジュール内で再接続する。同一モジュール内で接続できない自由端は、例外的に異なるモジュール間で接続する。

2.3 最短ループ長の計算方法

ネットワークに含まれる「穴」を表す最短ループの長さを求める。ここで、最短ループの内部には他のノードやリンクは含まれない。各リンクについて、そのリンクを除外した状態での両端点間の最短経路長に1を加えることで、当該リンクが属する最短ループ長 l を求める。すべてのリンクに対して行い、その頻度を求めることで、最短ループ長 l の分布 $P(l)$ を得る。すなわち、 $P(l)$ は任意のリンクが属する最短ループ(穴)の長さが l である確率を表す。最短ループの平均長は $\langle l \rangle = \sum_l l P(l)$ で定義される。

3. 結果と考察

図1に示すように、現実的なSFネットワーク(金色点の $\nu=1$)から、全ノードが同次数のレギュラーネットワーク(赤色点の $\nu=-100$)へと、接続パラメータ ν を減少させて次数分布の分散 σ^2 が小さくなるほど、最短ループの平均長 $\langle l \rangle$ は増加する。これは、頑健性向上の順序[2]と対応する。また、モジュール構造が強まるにつれて(実線から破線、一点鎖線、点線へ)、 $\sigma^2 - \langle l \rangle$ 曲線は短い最短ループ側へシフトし、小さい穴の増加を示す。これは、モジュール構造の強化による頑健性低下[5]と対応する。以上により、次数分布の分散が小さいほど穴は大きくなり頑健性が向上する一方で、モジュール構造の強化は逆の効果をもたらす。

ところで、純粋数学において、 d -レギュラーグラフの特殊な場合であるラマヌジャングラフは二分割に対する耐性が高く、グラフ内のループの最小長によって定義される内周が $O(\log_{d-1} N)$ を示すことが知られている。さらに、ランダム化されたレギュラーネットワークは、サイズ $N \rightarrow \infty$ においてラマヌジャングラフに漸近する。図2は、 $\nu \ll 0$ での $\langle l \rangle \approx O(\log_{d-1} N)$ を示している。レギュラーネットワーク(赤色線の $\nu = -100$)では、 N が増加するにつれて最短ループが長くなり、そのスケールはラマヌジャングラフの場合と一致する。したがって、 $O(\log_{d-1} N)$ 程度の穴こそが、意図的攻撃に対する結合維持に有効であると言える。

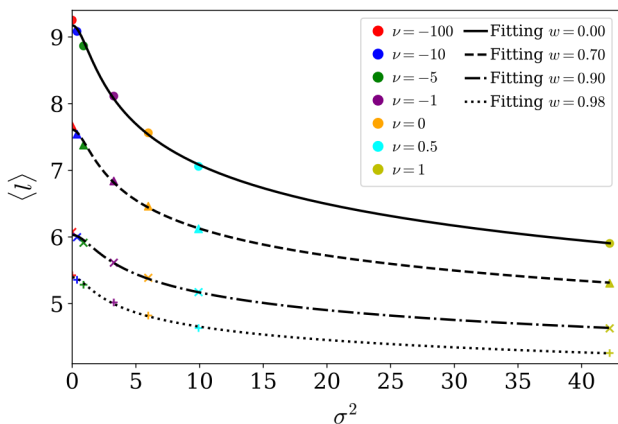


図1 次数分布 $P(k)$ の分散 σ^2 に対する最短ループの平均長 $\langle l \rangle$ の単調減少と、モジュール構造強化によるシフト

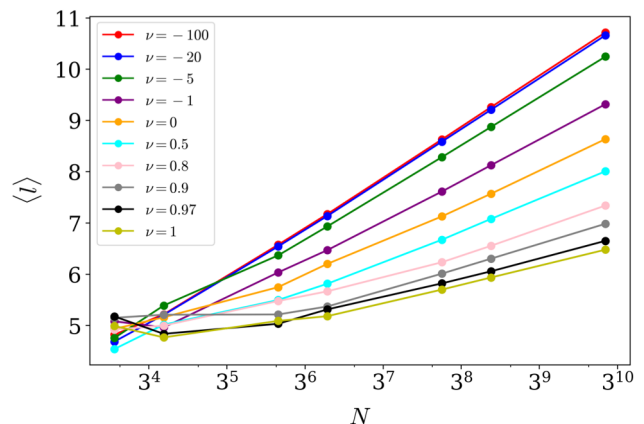


図2 サイズ N に対する最短ループの平均長 $\langle l \rangle$ の増加

4. まとめ

本研究では、結合の頑健性向上の観点から、次数分布の分散とモジュール構造の強さ、および最短ループ長の関係を網羅的に調べた。得られた結果から、次数分布が狭いほど最短ループ長が長くなり、モジュール構造が強まると短くなることが明らかになった。これらは、次数分布の分散が小さいほど頑健性が向上する一方で[2]、モジュール構造の強化が脆弱化させること[5]と対応する。さらに、「大きな穴(長い最短ループ)」と「強い結合」の組み合わせは矛盾するように思えるが、新事実として最短ループの平均長 $\langle l \rangle \approx O(\log_{d-1} N)$ は意図的な攻撃に対しても結合を維持するには大きすぎないことを示している。その理由として、ラマヌジャングラフが二つの部分に分割されにくい特性を持つことが挙げられる。したがって、 $O(\log_{d-1} N)$ の長いループを構築することで結合の頑健性を向上できることが分かった。

参考文献 (最大 5 件)

- [1] M. Chujyo and Y. Hayashi, "A loop enhancement strategy for network robustness," Appl. Netw. Sci., Vol. 6, 3, 2021.
- [2] M. Chujyo and Y. Hayashi, "Optimal network robustness in continuously changing degree distributions," in Proc. Int. Conf. Complex Networks and Their Applications XI, Stud. Comput. Intell., Vol. 1078, Springer, pp. 395–406, 2023.
- [3] M. Chujyo and Y. Hayashi, "Adding links on minimum degree and longest distance strategies for improving network robustness and efficiency," PLOS ONE, Vol. 17, e0276733, 2022.
- [4] H. Bonneau, A. Hassid, O. Biham, R. Kühn, and E. Katzav, "Distribution of shortest cycle lengths in random networks," Phys. Rev. E, Vol. 96, 062307, 2017.
- [5] Y. Hayashi and T. Ogawa, "Universal vulnerability in strong modular networks with various degree distributions from inequality to equality," Sci. Rep., Vol. 15, No. 33129, 2025.

論文・口頭発表

- K. Kawato and Y. Hayashi, "Larger holes as narrower degree distributions in complex networks," Physica A, Vol. 681, 131072, 2026.
- K. Kawato and Y. Hayashi, "Strong communities weaken the better connectivity based on large holes," in Proc. Int. Conf. Complex Networks and Their Applications XIX, Springer, 2026 (to appear).