

Title	複雑ネットワークにおける次数分布およびモジュール構造と最短ループ長の関係
Author(s)	河戸, 幾利
Citation	
Issue Date	2026-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="https://hdl.handle.net/10119/20356">https://hdl.handle.net/10119/20356</a>
Rights	
Description	Supervisor:林 幸雄, 先端科学技術研究科, 修士(融合科学)

修士論文

複雑ネットワークにおける次数分布およびモジュール構造と最短ループ長の関係

河戸 幾利

主指導教員 林 幸雄

北陸先端科学技術大学院大学 金沢大学  
先端科学技術研究科  
(融合科学)

令和8年3月

# 複雑ネットワークにおける 次数分布およびモジュール構造と最短ループ長の関係 Relations among the length of the shortest loop, degree distribution and modular structure in complex networks

北陸先端科学技術大学院大学 学生番号 2550002

氏名 河戸 幾利

主任研究指導教員氏名 林 幸雄

## 1. はじめに

現代社会は、通信網、電力網、インターネット、SNS、サプライチェーン、経済システムなど、多様なネットワークによって支えられている。これらが相互に結合することで高い利便性や効率性をもたらす一方、局所的な障害が広範囲に連鎖・拡大するリスクも高まっており、結合の頑健性を考慮した新しいネットワーク設計が求められる。そこで、異なるシステムを共通の「つながりの構造」として抽象化して扱える点で、ネットワーク科学は有力な枠組みである。21世紀初頭のネットワーク科学の成果として、多くの現実ネットワークにおいて次数分布がべき乗則に従うスケールフリー(SF)構造を持つことが明らかになった。SFネットワークは、少数のハブノードにリンクが集中した不平等な構造を持ち、利得や効率性を重視して形成されるが、高次数ノードを標的とした意図的攻撃に対して極めて脆弱である。

これまでの研究でわかったこととして、結合の頑健性を高めるヒューリスティックな手法として、ループ強化によって次数分布の幅が狭まり、頑健性が向上する[1]。また、次数分布の分散が小さいほど、ハブ攻撃や最悪のループ破壊攻撃に対して高い頑健性を示す[2]。さらに、リンク追加では短いループよりも長いループが効果的に頑健性を高める[3]。しかしながら、既存研究の多くは最短ループの中でも最小の三角形に焦点を当てており、より長い最短ループが頑健性に与える影響は未解明である。また、最短ループ長の累積分布の近似解法も提案されているが[4]、頑健性との関係は明らかでない。さらに、現実ネットワークはモジュール(コミュニティ)構造を持つが、強いモジュール構造は結合を脆弱化させることが近年報告されている[5]。そこで本研究では、頑健性に影響を与える次数分布の分散[2]およびモジュール構造の強さ[5]に加えて、最短ループ長との関係を網羅的に調査する。

## 2. 研究方法

### 2.1 連続変化させた次数分布を持つネットワークの生成

次数分布 $P(k)$ とは次数 $k$ を持つノード数の頻度分布であり、ネットワーク構造を特徴づける基本的な指標である。網羅的な調査をするために、Growing Network(GN)モデルとInverse Preferential Attachment(IPA)モデルを用いて、次数分布を連続的に変化させたネットワークを生成する。これらのモデルでは、順次追加される新規ノードが、次数 $k_i$ を持つ既存ノード $i$ に対して $k_i^\nu$ に比例した確率で接続され、接続パラメータ $\nu$ に応じて異なる次数分布 $P(k)$ が得られる。接続パラメータ $\nu$ が小さいほど、次数分布 $P(k)$ の幅は狭くなる。

ただし、 $\nu \ll 0$ では鎖状構造が現れるため、そうした複数ノードの次数の相互作用の影響を除いて次数分布 $P(k)$ の純粋な影響を調べる目的で、Configurationモデルによるランダム化を施し、これらの特殊構造を除去する。具体的には、生成したネットワークの各リンクを自由端に切断した後、自由端同士をランダムに接続することで、与えられた次数分布 $P(k)$ を維持したまま特殊構造を取り除く。

### 2.2 リンク再配線によるモジュール構造の導入

生成したネットワークに対して、リンク再配線により人工的にモジュール構造を導入する。各ノードにモジュール番号 $1, \dots, m_0$ をランダムに割り当てた後、再配線確率 $w$ に応じてインターリンクを同一モジュール内へ再接続することで、モジュール構造の強さを制御する。具体的には、次数分布を保ち、自己ループと多重リンクを禁止しながら、ランダムに選択したインターリンクを自由端に切断して、可能な限り同一モジュール内で再接続する。同一モジュール内で接続できない自由端は、例外的に異なるモジュール間で接続する。

### 2.3 最短ループ長の計算方法

ネットワークに含まれる「穴」を表す最短ループの長さを求める。ここで、最短ループの内部には他のノードやリンクは含まれない。各リンクについて、そのリンクを除外した状態での両端点間の最短経路長に1を加えることで、当該リンクが属する最短ループ長 $l$ を求める。すべてのリンクに対して行い、その頻度を求めることで、最短ループ長 $l$ の分布 $P(l)$ を得る。すなわち、 $P(l)$ は任意のリンクが属する最短ループ(穴)の長さが $l$ である確率を表す。最短ループの平均長は $\langle l \rangle = \sum_l l P(l)$ で定義される。

### 3. 結果と考察

図1に示すように、現実的なSFネットワーク(金色点の $\nu=1$ )から、全ノードが同次数のレギュラーネットワーク(赤色点の $\nu=-100$ )へと、接続パラメータ $\nu$ を減少させて次数分布の分散 $\sigma^2$ が小さくなるほど、最短ループの平均長 $\langle l \rangle$ は増加する。これは、頑健性向上の順序[2]と対応する。また、モジュール構造が強まるにつれて(実線から破線、一点鎖線、点線へ)、 $\sigma^2 - \langle l \rangle$ 曲線は短い最短ループ側へシフトし、小さい穴の増加を示す。これは、モジュール構造の強化による頑健性低下[5]と対応する。以上により、次数分布の分散が小さいほど穴は大きくなり頑健性が向上する一方で、モジュール構造の強化は逆の効果をもたらす。

ところで、純粋数学において、 $d$ -レギュラーグラフの特殊な場合であるラマヌジャングラフは二分割に対する耐性が高く、グラフ内のループの最小長によって定義される内周が $O(\log_{d-1} N)$ を示すことが知られている。さらに、ランダム化されたレギュラーネットワークは、サイズ $N \rightarrow \infty$ においてラマヌジャングラフに漸近する。図2は、 $\nu \ll 0$ での $\langle l \rangle \approx O(\log_{d-1} N)$ を示している。レギュラーネットワーク(赤色線の $\nu = -100$ )では、 $N$ が増加するにつれて最短ループが長くなり、そのスケールはラマヌジャングラフの場合と一致する。したがって、 $O(\log_{d-1} N)$ 程度の穴こそが、意図的攻撃に対する結合維持に有効であると言える。

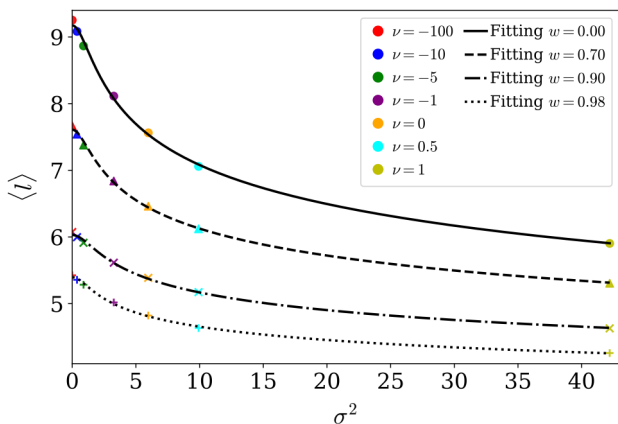


図1 次数分布 $P(k)$ の分散 $\sigma^2$ に対する最短ループの平均長 $\langle l \rangle$ の単調減少と、モジュール構造強化によるシフト

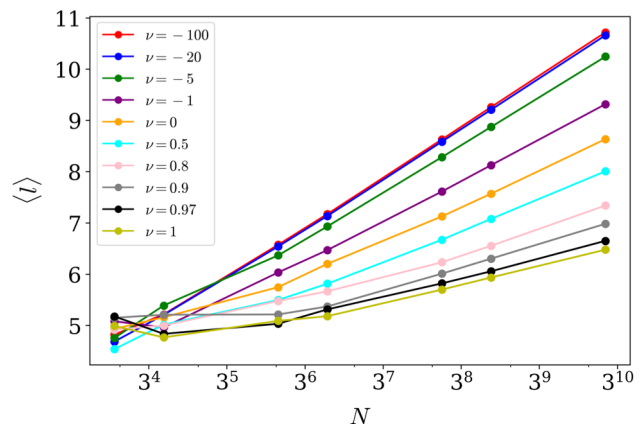


図2 サイズ $N$ に対する最短ループの平均長 $\langle l \rangle$ の増加

### 4. まとめ

本研究では、結合の頑健性向上の観点から、次数分布の分散とモジュール構造の強さ、および最短ループ長の関係を網羅的に調べた。得られた結果から、次数分布が狭いほど最短ループ長が長くなり、モジュール構造が強まると短くなることが明らかになった。これらは、次数分布の分散が小さいほど頑健性が向上する一方で[2]、モジュール構造の強化が脆弱化させること[5]と対応する。さらに、「大きな穴(長い最短ループ)」と「強い結合」の組み合わせは矛盾するように思えるが、新事実として最短ループの平均長 $\langle l \rangle \approx O(\log_{d-1} N)$ は意図的な攻撃に対しても結合を維持するには大きすぎないことを示している。その理由として、ラマヌジャングラフが二つの部分に分割されにくい特性を持つことが挙げられる。したがって、 $O(\log_{d-1} N)$ の長いループを構築することで結合の頑健性を向上できることが分かった。

### 参考文献 (最大 5 件)

- [1] M. Chujyo and Y. Hayashi, "A loop enhancement strategy for network robustness," Appl. Netw. Sci., Vol. 6, 3, 2021.
- [2] M. Chujyo and Y. Hayashi, "Optimal network robustness in continuously changing degree distributions," in Proc. Int. Conf. Complex Networks and Their Applications XI, Stud. Comput. Intell., Vol. 1078, Springer, pp. 395–406, 2023.
- [3] M. Chujyo and Y. Hayashi, "Adding links on minimum degree and longest distance strategies for improving network robustness and efficiency," PLOS ONE, Vol. 17, e0276733, 2022.
- [4] H. Bonneau, A. Hassid, O. Biham, R. Kühn, and E. Katzav, "Distribution of shortest cycle lengths in random networks," Phys. Rev. E, Vol. 96, 062307, 2017.
- [5] Y. Hayashi and T. Ogawa, "Universal vulnerability in strong modular networks with various degree distributions from inequality to equality," Sci. Rep., Vol. 15, No. 33129, 2025.

### 論文・口頭発表

- K. Kawato and Y. Hayashi, "Larger holes as narrower degree distributions in complex networks," Physica A, Vol. 681, 131072, 2026.
- K. Kawato and Y. Hayashi, "Strong communities weaken the better connectivity based on large holes," in Proc. Int. Conf. Complex Networks and Their Applications XIX, Springer, 2026 (to appear).

# 目次

<b>第1章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	ネットワークに支えられる現代社会	1
1.2	ネットワーク科学が明らかにした現代社会の脆弱性	1
<b>第2章</b>	<b>ネットワーク科学の現状と課題</b>	<b>4</b>
2.1	結合の頑健性を高める鍵となる「ループ」	4
2.2	既存研究の成果概要と課題	6
<b>第3章</b>	<b>連続変化させた次数分布とモジュール構造を持つネットワークの生成</b>	<b>8</b>
3.1	連続的に変化する次数分布を持つネットワーク	8
3.1.1	GNモデルおよびIPAモデルによるネットワーク生成	8
3.1.2	ランダム化による特殊構造の除去	9
3.1.3	ランダム摂動による次数分布の補間	11
3.2	リンク再配線によるモジュール構造の導入	13
<b>第4章</b>	<b>「穴」となる最短ループ長の網羅的調査</b>	<b>15</b>
4.1	最短ループ長の計算方法	15
4.2	長いループを調べる前段としての三角形の調査	16
4.3	モジュール構造を持たない様々なネットワークにおける最短ループ長	22
4.3.1	最短ループ長の分布	22
4.3.2	次数分布の分散に対する最短ループの平均長	23
4.4	モジュール構造を持つ様々なネットワークにおける最短ループ長	29
<b>第5章</b>	<b>結論</b>	<b>32</b>

# 目次

2.1	穴の大きさが $O(1)$ または $O(N)$ といった極端な場合では、結合の頑健性は向上しない。頑健性を高める最適な穴の大きさは、これら の中間に存在すると考えられる。 . . . . .	5
3.1	GN モデル [40] と IPA モデル [41] における逐次的なノード追加によるネットワーク生成の過程。赤線で示した新規ノードは、 $k_i^c$ に比例した接続確率で $m$ 個の既存ノードに接続される。 . . . . .	9
3.2	Configuration モデル [42] を用いたネットワークのランダム化。リンクを自由端に切断して、自由端のペアをランダムに再接続することで、次数分布 $P(k)$ を維持したまま特殊構造を除去する。 . . . . .	10
3.3	サイズ $N = 50000$ 、リンク数 $M \approx m \times N = 100000$ ( $m = 2$ ) で生成したネットワークの次数分布 $P(k)$ 。平均次数 $\langle k \rangle \approx 2 \times m = 4$ は一定である。金色、水色、橙色、紫色、緑色、青色、赤色の線は、それぞれ SF ネットワーク、ER ランダムグラフ、レギュラーネットワークに対応する $\nu = 1$ から $\nu = -100$ までの接続パラメータ $\nu$ を表す。実線と丸印、点線と四角印、破線と三角印は、それぞれ再配線率 $p = 0.0, 0.1, 0.3$ でランダム摂動を加えた分布を示す。(a) $P(k)$ の幅は、SF ネットワーク (金色線の $\nu = 1$ ) からレギュラーネットワーク (赤色線の $\nu = -100$ ) へと $\nu$ が減少するにつれて狭まる。(b) ランダム摂動により、 $P(k)$ は $\nu = -1$ (紫色線) を境界として反対方向にわずかにシフトする。 . . . . .	12
3.4	インターリンクは、再配線確率 $w$ でイントラリンクに再配線される。図中のノードの色は、3つの異なるモジュールを表す。リンクを自由端に切断する位置を赤いクロスで、再配線されたリンクを黄色線で示す。 . . . . .	14
4.1	リンク $e_{ij}$ とノード $i-j$ 間の最短経路で構成される最短ループ (赤色線)。ループの内部は空であり「穴」を意味する。 . . . . .	16

- 4.2 現実ネットワークの次数分布  $P(k)$  と、最小二乗法で推定したべき指数  $\gamma$  のフィッティング。(a) AirTraffic では  $\gamma = 1.92$ 、(b) E-mail では  $\gamma = 1.46$ 、(c) Hamster では  $\gamma = 1.39$ 、(d) UC Irvine では  $\gamma = 1.33$ 、(e) Polblogs では  $\gamma = 1.07$  である。 . . . . . 18
- 4.3 現実ネットワークとランダム化された現実ネットワークにおける、最短ループ長  $l$  の分布。AirTraffic、E-mail、Hamster、UC Irvine、Polblogs の結果は、それぞれ赤色の丸印、青色の四角印、緑色の三角印、水色のクロス、金色のひし形と実線で示されている。破線はランダム化された現実ネットワークの結果を表す。(a)(b) 分布  $P(l)$  と累積分布  $P_{SL}(L > l)$  の裾を比較すると、AirTraffic を除き、E-mail、Hamster、UC Irvine、Polblogs は短い最短ループを含む。 . . . . . 20
- 4.4 ランダム化された現実ネットワークにおける、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle_{\text{expect}}$  の減少。AirTraffic、E-mail、Hamster、UC Irvine、Polblogs の結果は、それぞれ赤色の丸印、青色の四角印、緑色の三角印、水色のクロス、金色のひし形で示されている。 $\sigma^2$  が増加するにつれて、 $\langle l \rangle_{\text{expect}}$  は小さくなる。黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。 . . . . . 21
- 4.5 サイズ  $N = 50000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  のネットワークにおける、異なる接続パラメータ  $\nu$  の最短ループ長  $l$  の分布。 $\nu$  が減少するにつれて、ネットワークに含まれる最短ループは長くなる。(a) 分布  $P(l)$  のピークは、 $\nu$  が減少するにつれて右にシフトする。これは、レギュラーネットワーク (赤色線の  $\nu = -100$ ) は SF ネットワーク (金色線の  $\nu = 1$ ) よりも長い最短ループを含み、ER ランダムグラフ (紫色線の  $\nu = -1$ ) はそれらの中間であることを示す。(b) 同様に、累積分布  $P_{SL}(L > l)$  は、 $\nu$  が減少するにつれて右にシフトする。本研究の数値結果 (白抜き丸印) は、実線の理論推定値 [27] からわずかに逸脱している。 . . . . . 25
- 4.6 サイズ  $N = 50000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  のネットワークにおける、ランダム摂動を加えた結果を含む最短ループ長  $l$  の分布。実線と丸印、点線と四角印、破線と三角印は、それぞれ再配線率  $p = 0.0, 0.1, 0.3$  でランダム摂動を加えた分布を示す。(a) ランダム摂動により、分布  $P(l)$  は  $\nu = -1$  (ER ランダムグラフ) の境界を挟んで反対方向にシフトする。(b) 累積分布  $P_{SL}(L > l)$  も同様のシフトを示す。これらのシフトは、異なる接続パラメータ  $\nu$  値間の結果 (実線と丸印) を補間している。 . . . . . 26

- 4.7 サイズ  $N = 50000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  のネットワークにおける、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の単調減少。(a)  $\sigma^2$  の値が小さいほど  $\langle l \rangle$  は大きくなる。特に  $\nu = -100$  におけるレギュラーネットワーク (赤色の丸印) のように、 $P(k)$  が狭いほど長い最短ループを含む。黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。(b) 四角印と三角印で示すランダム摂動の結果は、異なる接続パラメータ  $\nu$  値間の結果 (丸印) を滑らかな  $\sigma^2 - \langle l \rangle$  曲線で補間している。 . . . . . 27
- 4.8 サイズ  $N$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の増加。ここで、 $N = 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000, 50000$  とした。(a)  $N$  が増加するにつれて  $\langle l \rangle$  は大きくなる。特に、 $\nu = -100$  の赤色の直線 (レギュラーネットワークに対応する) のような  $\nu \ll 0$  の場合では  $\langle l \rangle \approx \log_3 N$  となる。 $\nu = 1$  (金色線) と  $\nu = -1$  (紫色線) の場合は、それぞれ SF ネットワークと ER ランダムグラフに対応する。(b) ランダム摂動により、 $\langle l \rangle$  は  $\nu = -1$  (紫色線) を境界として反対方向にシフトし、(a) での異なる  $\nu$  値間の結果を補間する。 . . . . . 28
- 4.9 サイズ  $N = 10000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  での、連続的に変化する次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の単調減少。(a) モジュール数  $m_0 = 5$ 、(b)  $m_0 = 100$  の結果。モジュラリティ  $Q$  が増加するにつれて、実線から破線、一点鎖線、点線へと  $\sigma^2 - \langle l \rangle$  曲線は下側にシフトする。丸印、三角印、クロス、十字印は、モジュール構造の強度を表すモジュラリティ  $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$  にそれぞれ対応する。黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。 . . . . . 30
- 4.10 サイズ  $N = 10000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  での、連続的に変化する次数分布の下でのモジュラリティ  $Q$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の急激な減少。(a) モジュール数  $m_0 = 5$ 、(b)  $m_0 = 100$  の結果。次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  が増加するにつれて、レギュラーネットワーク (赤色線の  $\nu = -100$ ) から SF ネットワーク (金色線の  $\nu = 1$ ) へと  $Q - \langle l \rangle$  曲線は下側にシフトする。丸印、四角印、三角印、クロス、ひし形、十字印は、モジュール構造の強度を表すモジュラリティ  $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.50, 0.70, 0.90, 0.95, 0.98$  にそれぞれ対応する。 . . . . . 31

5.1	サイズ $N = 1000$ のネットワークにおける、(a) 異なる接続パラメータ $\nu$ の最短ループ長の分布 $P(l)$ 、(b) 累積分布 $P_{SL}(L > l)$ 。 . . . .	35
5.2	サイズ $N = 5000$ のネットワークにおける、(a) 異なる接続パラメータ $\nu$ の最短ループ長の分布 $P(l)$ 、(b) 累積分布 $P_{SL}(L > l)$ 。 . . . .	36
5.3	サイズ $N = 10000$ のネットワークにおける、(a) 異なる接続パラメータ $\nu$ の最短ループ長の分布 $P(l)$ 、(b) 累積分布 $P_{SL}(L > l)$ 。 . . .	37
5.4	サイズ $N = 1000$ のネットワークにおける、次数分布 $P(k)$ の分散 $\sigma^2$ に対する最短ループの平均長 $\langle l \rangle$ の単調減少。(a) 黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ $a_1, a_2, a_3, a_4$ を用いた関数 $a_3/\log(a_1x^2 + a_2) + a_4$ のフィッティングである。(b) 四角印、三角印は、それぞれ再配線率 $p = 0.1, 0.3$ でランダム摂動を加えた結果を示す。 . . . . .	38
5.5	サイズ $N = 5000$ のネットワークにおける、次数分布 $P(k)$ の分散 $\sigma^2$ に対する最短ループの平均長 $\langle l \rangle$ の単調減少。(a) 黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ $a_1, a_2, a_3, a_4$ を用いた関数 $a_3/\log(a_1x^2 + a_2) + a_4$ のフィッティングである。(b) 四角印、三角印は、それぞれ再配線率 $p = 0.1, 0.3$ でランダム摂動を加えた結果を示す。 . . . . .	39
5.6	サイズ $N = 10000$ のネットワークにおける、次数分布 $P(k)$ の分散 $\sigma^2$ に対する最短ループの平均長 $\langle l \rangle$ の単調減少。(a) 黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ $a_1, a_2, a_3, a_4$ を用いた関数 $a_3/\log(a_1x^2 + a_2) + a_4$ のフィッティングである。(b) 四角印、三角印は、それぞれ再配線率 $p = 0.1, 0.3$ でランダム摂動を加えた結果を示す。 . . . . .	40
5.7	サイズ $N = 10000$ 、モジュール数 $m_0 = 100$ での、モジュラリティ $Q$ 増加による最短ループ長の分布 $P(l)$ のシフト。(a) $\nu = -100$ (レギュラーネットワークに対応)、(b) $\nu = -5$ の結果。丸印と実線、三角印と破線、クロスと一点鎖線、十字印と点線は、 $Q$ を制御する再配線確率 $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$ にそれぞれ対応する。 . . . . .	41
5.8	サイズ $N = 10000$ 、モジュール数 $m_0 = 100$ での、モジュラリティ $Q$ 増加による最短ループ長の分布 $P(l)$ のシフト。(a) $\nu = -1$ (ER ランダムグラフに対応)、(b) $\nu = 0$ の結果。丸印と実線、三角印と破線、クロスと一点鎖線、十字印と点線は、 $Q$ を制御する再配線確率 $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$ にそれぞれ対応する。 . . . . .	42

- 5.9 サイズ  $N = 10000$ 、モジュール数  $m_0 = 100$  での、モジュラリティ  $Q$  増加による最短ループ長の分布  $P(l)$  のシフト。(a)  $\nu = 0.5$ 、(b)  $\nu = 1$  (SF ネットワークに対応) の結果。丸印と実線、三角印と破線、クロスと一点鎖線、十字印と点線は、 $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$  にそれぞれ対応する。 . . . . . 43
- 5.10 サイズ  $N = 10000$  の (a) モジュール数  $m_0 = 10$ 、(b)  $m_0 = 50$  での、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の単調減少。丸印、三角印、クロス、十字印は、モジュラリティ  $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$  にそれぞれ対応する。黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。 . . . . . 44
- 5.11 サイズ  $N = 10000$  の (a) モジュール数  $m_0 = 10$ 、(b)  $m_0 = 50$  での、モジュラリティ  $Q$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の急激な減少。丸印、四角印、三角印、クロス、ひし形、十字印は、モジュラリティ  $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.50, 0.70, 0.90, 0.95, 0.98$  にそれぞれ対応する。 . . . . . 45

# 表 目 次

- 2.1 既存研究により、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  が小さいほどネットワークの頑健性は向上し、モジュラリティ  $Q$  が高いほど低下することが知られている。本研究では、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$ 、モジュラリティ  $Q$  に加えて、最短ループ長との関係を明らかにする。 . . . . . 7
  
- 4.1 人工ネットワークと現実ネットワークにおける、大域的クラスター係数  $C$  の平均値とその標準偏差 STD。(a) 人工ネットワークはサイズ  $N = 1500$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  で、GN モデルおよび IPA モデルを用いて生成し、Configuration モデルによりランダム化した。接続パラメータ  $\nu$  が増加するにつれて、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  と  $C$  は大きくなり、 $\nu = 1$  (SF ネットワーク) でピークとなる。(b) 現実ネットワークにおいても、分散  $\sigma^2$  の値が大きいほど  $C_{\text{expect}}$  は大きくなり、最短ループの平均長  $\langle l \rangle_{\text{expect}}$  は小さくなる。 . . . . . 19

# 第1章 序論

## 1.1 ネットワークに支えられる現代社会

我々は日常生活を送る中で、スマートフォンやパソコンを用いた通信、鉄道や航空機による移動、エアコンやエレベータの利用、知人とのメッセージのやり取り、物資の調達や電子決済といった行為をごく当たり前のものとして享受している。しかしながら、これらの活動は単独で成立しているわけではなく、その背後にある通信網、インターネット、交通網、電力網、SNS、サプライチェーン、金融システムといった多様な「つながり」が機能することによって初めて可能となる。さらに、ネットワーク同士の結合によって形成される複雑な構造が、現代社会の高い利便性と効率性を支えている。例えば、鉄道をはじめとする交通網は電力供給や情報通信システムによって安定した交通制御・運行管理を可能としており、物流は情報通信や金融システムと結びつくことで、迅速かつ大規模な物資の供給を実現している。このように、現代社会は多層的に結合したネットワークへの強い依存の上に成り立っている。

一方で、ネットワーク同士の相互依存構造は、局所的な障害が連鎖的に拡大するという新たなリスクも生み出している。実際に、2011年の東日本大震災では、交通・電力・水道といった基幹インフラが各地で停止し、それに伴う通信障害や物流・金融システムへの影響を通じて、日本全体が機能不全に陥る事態となった [1]。さらに、2024年7月に発生したクラウドストライク社のシステム障害では、航空、医療、物流、金融など複数の分野に深刻な影響が及び、世界的な混乱が引き起こされた [2]。これらの事例は、ネットワークで「つながっている」こと自体が、利便性や効率性という恩恵をもたらす一方で、深刻な脆弱性を伴うことを示している。

## 1.2 ネットワーク科学が明らかにした現代社会の脆弱性

そのような複雑な相互依存構造を理解するための有力な枠組みが、「ネットワーク科学」である。ネットワーク科学とは、対象の具体的な性質や材料の違いを越えた要素同士の関係性に着目して、それらをノード（点）とリンク（線）として抽

象化することで、システム全体の構造と振る舞いを明らかにしようとする学際的分野である。例えば、電力供給を目的とする電力網では、発電所や変電所がノード、送電線がリンクとして表される。一方、信頼関係によって結ばれた社会ネットワークでは、個人がノード、人間関係がリンクに対応する。また、生化学反応によって結びついた分子ネットワークにおいては、分子やたんぱく質がノード、それらの相互作用がリンクとして表現される。このように、材料や目的、構成要素が全く異なるシステムであっても、ネットワークという視点から抽象化することで、それらを同一の「つながりの構造」として捉え、共通の言語で記述・比較できる点にこの枠組みの意義がある。

ネットワーク科学は、数学のグラフ理論や社会学のネットワーク分析を基盤としつつ、統計物理学における確率分布の考え方や、情報科学におけるアルゴリズム的手法を融合することで発展してきた。特に、統計物理学が扱ってきた「分布」という概念は、ネットワークの構造を理解する上で重要な役割を果たしている。例えば、ネットワークの基本的な指標の一つとして「次数分布」がある。次数分布  $P(k)$  とは、リンク数  $k$  を持つノード数の頻度分布であり、ネットワークの構造的特徴を表す。ノードとリンクで抽象化して次数分布を調べることで、対象や分野の異なるネットワークに共通する普遍的なつながりの構造やその特徴を明らかにすることができる。実際に、21世紀初頭のネットワーク科学の成果として、World Wide Web、電力網、航空網、映画俳優の共演関係、論文引用ネットワーク、たんぱく質相互作用ネットワークなど、構成要素や伝達・運搬の目的が全く異なる様々な現実ネットワークにおいて、次数分布がスケールフリー（SF）構造を持つことが発見された [3, 4]。SF 構造とは、べき乗則に従う分布構造を指し、地震の規模や隕石の大きさなど、自然界のさまざまな現象にも見られることから、フラクタル物理ではよく知られている概念である。このようなべき乗分布では、分布の裾が長く伸びるロングテール構造を持ち、正規分布のように平均値が「代表的な大きさ」を表さない。すなわち、まれな存在ではあるが極端に大きな値を無視できず、分布に固有のスケールが定まらない。このような特性は、ネットワーク構造において次数の強い不均一性として現れる。すなわち、実世界の多くの SF ネットワークでは、ごく一部のノードが非常に多くのリンクを持つ一方で、大多数のノードは少数のリンクしか持たないという不平等な構造が生じている。

上記の共通構造を形成する要因として、新たにネットワークへ参加するノードが、既存のハブノードを接続先として選びやすいという優先的選択のメカニズムが理論的に導かれている [5]。すなわち、新規ノードが利得や効率を最大化しようとする利己的な選択の結果、リンクがハブノードに集中して不平等な構造が形成される。例えば、航空網では効率性の観点から新規路線がハブ空港へ優先的に接続されやすく、社会ネットワークにおいても、新たに参加した個人が業界内で影

響力の大きい人物との関係構築を志向する傾向が見られる。しかしながら、このような利得や効率を重視した構造は、ネットワーク全体がつながって機能し続けるために不可欠な「結合（連結性）の維持」を脅かす。例えば、ハブ空港や業界内の中心的な人物を経由すれば移動や情報伝達は効率化されるが、それらのハブが機能不全に陥るだけで、ネットワークは容易に分断され、全体として機能を失う。実際、SF ネットワークはテロ攻撃のような高次数ノードを標的とした意図的攻撃に対して極めて脆弱である [6, 7]。同様に、クラウドストライク社のシステム障害に見られるように [2]、単一のサービスに多くの産業が依存することで、ひとたびサービスが停止するだけで、社会全体の機能不全や麻痺へと直結する。このように、現代社会は高い効率性と引き換えに、脆弱性を内包したネットワーク構造の上に成り立っている。

ところで、ネットワークの本質的な機能は情報や物資を伝達・運搬することであり、効率性以前に、そもそも全体が結合していることを前提とする。結合が維持されていない状態で効率を議論することは無意味であり、大規模災害やテロ攻撃、システム障害といった危機に晒される現代社会においては、いかにしてネットワークの結合を維持できるかが重要な課題となる。言い換えれば、連結性と効率性は同列に議論できず、連結性の確保は効率性の議論よりも優先度が高い。さらに、優先的選択によって形成される不平等な構造は、意図的なノード除去に対する脆弱性だけでなく、障害の連鎖的拡大、相互依存による機能停止といった問題を同時に引き起こす。このような現状を考えると、ネットワーク構造そのものを見直す必要があると言える。以上の背景から、本研究では、ネットワーク構造の中でも特に結合の頑健性に注目して、障害や攻撃に対してどのような構造が分断されにくいのかを明らかにする。

# 第2章 ネットワーク科学の現状と課題

## 2.1 結合の頑健性を高める鍵となる「ループ」

現代社会を支える多くのSFネットワークは、意図的攻撃に対して非常に脆弱 [6, 7] であるため、結合の頑健性を考慮した新たなネットワーク設計の指針が求められる。その際、Dismantling 問題と Decycling 問題の等価性 [8] は重要な鍵となる。ここで、Dismantling 問題とは、ネットワークを分断するために最小数のノードを除去する問題であり、Decycling 問題とは、すべてのループを除去するために最小数のノードを取り除く問題である。これらはそれぞれ、計算機科学において NP 困難として知られるクリティカルなノード検出問題 [9] と、最小フィードバック頂点集合問題 [10] に対応する。この等価性は、最悪のノード除去が、ネットワークを木構造へと変化させることを示している。言い換えれば、最も耐性の高いネットワークを構築するには、最適解の厳密な導出が困難であっても、ループ構造の強化が重要となる [8, 9, 10]。実際に、ループをヒューリスティックに強化する種々の手法で次数分布の分散が減少して、意図的攻撃に対する結合の頑健性が高まることが共通して見つかっている [11]。また、次数分布の分散が小さいほど、次数順攻撃と、信念伝播に基づく最悪のループ破壊攻撃 [12] の両方に対して、より高い頑健性が得られることが近年発見されている [13]。したがって、次数分布が最も狭いネットワークであるレギュラーネットワークが、最適な構造と言える [14, 15]。さらに、多くのネットワークにリンク追加する場合、長いループは短いループよりも頑健性を向上させるのに効果的であることも明らかとなっている [16]。

しかしながら、ループに関する研究は難しく、多くはない。多くの理論的アプローチ（例えば母関数を用いるもの）では、結合の頑健性を解析する際に、局所木近似を仮定している [7, 17, 18, 19, 20]。木構造を仮定すると再帰計算が必要となるため、明示的な解が得られない。さらに、ループが存在する場合、再帰計算は近似解を与えるか、収束しないこともある。ベーテ格子の場合でも、パーコレーション閾値の厳密解を導くには複素積分を必要とする [21]。さらに、複雑なメッセージ伝播法を適用することで、より短い有向閉路を含まない原始有向閉路の組

み合わせを考慮して、パーコレーション（ノードやリンクの占有を通じて、つながりが全体へと浸透する過程）、グラフスペクトル（隣接行列などの固有値を用いて構造的性質を捉える手法）、コミュニティ検出（ノードの集団構造を抽出する手法）の近似解をより高精度に推定する方法が考えられてはいるが、非常に複雑な計算を要する [22]。このように、ループを含む研究には困難さが伴うものの、結合の頑健性を向上させる上で重要な役割を果たすと考えられる [11, 16]。ここで、物理学では「ループ」、計算機科学やグラフ理論では「サイクル」と呼ばれており、特に本研究で議論する内部が空のループ（最短ループ）は「穴」を意味する。しかしながら、結合の頑健性を高める上で、どの程度の大きさの穴（最短ループの長さ）が有効であるかについては、いまだ明らかになっていない。図 2.1 に示すように、明らかに、最小の穴である三角形は大域的な結合には寄与せず、最大の穴であるリングも、任意の 2 つのノードの除去によって容易に分断される。結合の頑健性を高める最適な穴の大きさは自明ではなく、二つの極端な場合である  $O(1)$  と  $O(N)$  の中間に存在すると考えられる。上記の動機に基づき、本研究では、より高い頑健性が得られる次数分布の分散 [13] と、穴の大きさとの関係を明らかにして、ネットワークの結合の頑健性向上を目指す。

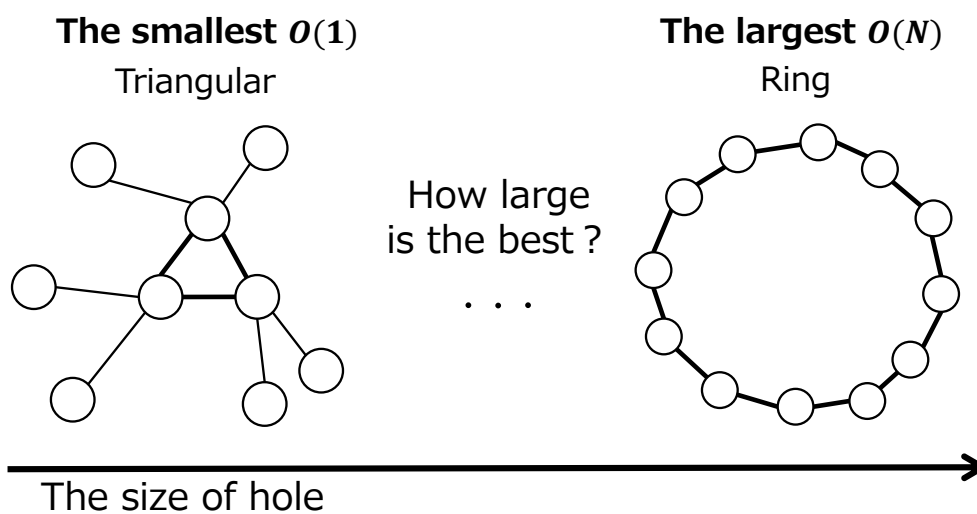


図 2.1: 穴の大きさが  $O(1)$  または  $O(N)$  といった極端な場合では、結合の頑健性は向上しない。頑健性を高める最適な穴の大きさは、これらの中間に存在すると考えられる。

## 2.2 既存研究の成果概要と課題

実世界の様々なSFネットワーク [3, 4, 20] には、多くの三角形が存在することが知られている [23, 24]。三角形のような短いループについては、ループ長が3から7に制限される場合、それらのループ数を正確に計数する手法が存在する [25, 26]。一方で、より一般的な状況として、任意の次数分布を持つネットワークに対して、任意のノードが属する最短ループ長（穴の大きさ）の累積分布を近似的に求める理論解析法もある [27]。しかしながら、この近似解法の適用は、一部のノードが極端に多くのリンクを持つ現実的なSFネットワーク [3, 5]、各リンクがランダムに接続される古典的な Erdős-Rényi (ER) ランダムグラフ [28]、そして全てのノードが同じ次数を持つレギュラーネットワークの典型的な3種類に対してのみに限られている。また、これらのネットワーク間では、サイズ（ノード数） $N$  や平均次数  $\langle k \rangle = 2M/N$ （ $M$  はリンク総数）が異なるため、数値結果を直接比較することはできない。さらに、最短ループ長（穴の大きさ）と結合の頑健性との関係については、依然として未解明である。そこで本研究では、上記の典型的な3種類を含め、連続的に変化させた次数分布を持つ様々なネットワークを対象として、次数分布の分散 [13] と最短ループ長との関係を網羅的に調べる。その結果、次数分布の違いに依存しない普遍的な性質として、次数分布の分散が小さいほど、任意のリンクが属する最短ループの平均長が長くなることを示す [Kawato-1]。この発見により、 $O(\log N)$  の大きさの穴を構築することが結合の頑健性向上に不可欠であると言える。

一方で、純粋数学における  $d$ -レギュラーグラフの特殊なケースであるラマヌジャングラフは、二分割に対する耐性が高く、グラフ内のループの最小長によって定義される内周が  $O(\log N)$  となることが知られている [29, 30]。さらに、ランダム化されたレギュラーネットワークは、サイズ  $N \rightarrow \infty$  においてラマヌジャングラフに漸近的に近づくことが示されており [31]、意図的な攻撃 [14, 15] や過負荷による連鎖的障害 [32] に対して最適な耐性を持つのはレギュラーであることも近年わかってきた。ここでランダム化されたネットワークとは、次数相関やその他の高次構造を持たず、次数分布以外の構造的特徴を持たないネットワークを指す。本研究では、ランダム化されたレギュラーネットワークにおいて、最短ループの平均長がラマヌジャングラフの場合と同様に、 $O(\log N)$  でスケールすることを示す [Kawato-1]。これは、このような大きさの穴は、意図的な攻撃に対しても結合の維持において大きすぎないことを示唆している。

ところで、実世界の多くのネットワークは、モジュール（あるいはコミュニティ）構造を持っている。例えば、社会ネットワークにおいては、友人関係や職場関係、共通の趣味を持つグループといった単位で人々が強く結びつき、同一のモジュール

(コミュニティ)内では頻繁にやり取りが行われる。また、電力網や通信網などのインフラシステムにおいても、地理的条件や用途といった制約に基づいて空間的に強い結びつきが形成される。しかしながら、普遍的な性質として、強いモジュール構造はネットワークの結合を脆弱化させることが近年報告されている [33, 34]。このような脆弱性は、平面に埋め込まれた局所モジュールを持つ地理的ネットワークにおいても生じる [35]。したがって、ネットワークの結合の頑健性を向上させるためには、次数分布や最短ループ長に加えて、モジュール構造の影響を考慮することが不可欠である。表 2.1 に、現状で明らかにされている次数分布の分散、モジュラリティ (モジュール構造の強さ) [36]、最短ループ長 (穴の大きさ) の関係を示す。モジュール構造を持たないランダム化されたネットワークでは、網羅的に連続変化させた次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$  が小さいほど、結合の頑健性が高まる [13]。特に、次数分布が最も狭いランダム化されたレギュラーネットワークは、意図的な攻撃に対して最適である [14, 15]。その一方で、モジュール構造を持つネットワークでは、モジュラリティ  $Q$  が高い場合、レギュラーネットワークであっても極めて脆弱になる [33, 34]。ここで、ループの長さは結合の頑健性と関連しており [11, 16]、従来の最短ループ長の解析は典型的な 3 種類のネットワークに限定されていたこと [27] を指摘する。そこで本研究では、典型的な 3 種類を含めた連続的に変化させた次数分布の下で、モジュール構造の有無にかかわらず、様々なネットワークにおける最短ループ長を網羅的に調査する。これにより、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  を小さくすると穴が大きくなり、モジュラリティ  $Q$  を高めると穴が小さくなることを示す [Kawato-1, Kawato-2]。これらの発見から、網羅的に連続変化させた次数分布の分散が小さいほど頑健性が向上する一方で [13]、強いモジュール構造が頑健性を著しく低下させる普遍特性 [34] に対応して穴は小さくなると結論づけられる。

表 2.1: 既存研究により、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  が小さいほどネットワークの頑健性は向上し、モジュラリティ  $Q$  が高いほど低下することが知られている。本研究では、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$ 、モジュラリティ  $Q$  に加えて、最短ループ長との関係を明らかにする。

モジュール構造	結合の頑健性	最短ループ長 (穴の大きさ)
持たない	次数分布 $P(k)$ の分散 $\sigma^2$ が小さいほど、頑健性が向上する ([13, 14, 15])	$P(k)$ の $\sigma^2$ が小さいほど、最短ループ長が長くなる ([27]、本研究 [Kawato-1])
持つ	モジュラリティ $Q$ が高いほど、頑健性が低下する ([33, 34])	$Q$ が高いほど、最短ループ長が短くなる (本研究 [Kawato-2])

# 第3章 連続変化させた次数分布とモジュール構造を持つネットワークの生成

## 3.1 連続的に変化する次数分布を持つネットワーク

### 3.1.1 GN モデルおよびIPA モデルによるネットワーク生成

ネットワークの典型的なトポロジー構造として、次数分布がべき乗則に従う現実的なスケールフリー (SF) ネットワーク [3, 5]、ポアソン分布を持つ古典的な Erdős-Rényi (ER) ランダムグラフ [28]、そして全てのノードが同一の次数である単峰性分布のレギュラーネットワークが知られている。本研究では、これらの典型的な構造を含めて、次数分布  $P(k)$  が連続的に変化するネットワークを考える。SF ネットワークの成長モデルとしては、Barabási-Albert (BA) モデル [3, 5]、Price モデル [37]、その他のモデル [38, 39] などがあり、これらのモデルではべき乗分布  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  の指数  $\gamma$  を調整できる。しかしながら、本研究の目的は SF ネットワークに限定せず、上記のような典型的な構造を含めた様々な次数分布を持つネットワークを対象とする。一方、数学的には無限に多くの次数分布の関数が考えられるが、自己ループや2ノード間の多重リンクを禁止するという制約を満たす必要がある。そこで、本研究ではこれらの制約を満たしつつ、連続的に変化する次数分布を持つネットワークを唯一生成可能な Growing Network (GN) モデル [40] と Inverse Preferential Attachment (IPA) モデル [41] を用いる。

GN モデル [40] と IPA モデル [41] は、以下に示す接続パラメータ  $\nu = 0$  で自然に統合する。まず、初期ネットワークとして、 $m$  個のノードからなる完全グラフを設定する。ここで、 $m$  はある整数である。図 3.1 に示すように、各時間ステップ  $t = 1, 2, 3, \dots$  において新しいノードが1つ追加され、 $k_i^\nu$  に比例した接続確率で  $m$  個の既存ノードに接続される。ここで、 $k_i$  はノード  $i$  の次数、 $\nu$  は接続パラメータである。この操作をサイズ (ノード数) が  $N$  に達するまで繰り返す。初期リンク数を除くリンクの総数は  $M \approx mN$  であり、平均次数は  $\langle k \rangle = 2M/N \approx 2m$  であ

る。接続パラメータ  $\nu$  の値に応じて、 $\nu \geq 0$  の GN モデルおよび  $\nu \leq 0$  の IPA モデルにおける次数分布  $P(k)$  は、以下のように連続的に変化する。

- $\nu > 0$ : 優先的接続によって次数分布の幅は広がる。 $\nu = 1$  では、SF ネットワークにおける純粋なべき乗分布になる [5]。
- $\nu = 0$ : ランダムな接続によって次数分布は指数分布になる [5]。
- $\nu = -1$ : ER ランダムグラフにおいて次数分布はほぼポアソン分布になる。
- $\nu < 0$ : 逆優先的接続によって次数分布の幅は狭まる。
- $\nu \rightarrow -\infty$ : 生成されたネットワークはレギュラーに近づくが、完全には一致しない [41]。

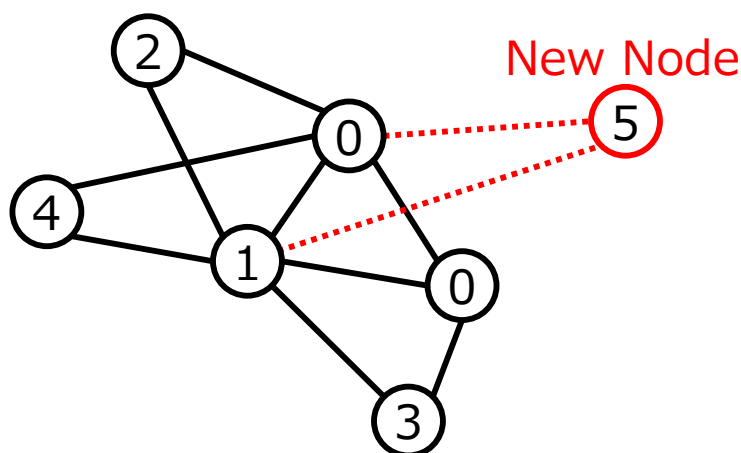


図 3.1: GN モデル [40] と IPA モデル [41] における逐次的なノード追加によるネットワーク生成の過程。赤線で示した新規ノードは、 $k_i^\nu$  に比例した接続確率で  $m$  個の既存ノードに接続される。

### 3.1.2 ランダム化による特殊構造の除去

一般に、ネットワーク構造には、一次量である次数分布  $P(k)$  に加えて、二次量である 2 ノード間の次数相関やより多くのノード間の相互作用による高次構造が存在する。IPA モデルでは、 $\nu \ll 0$  において鎖状構造が出現する [41]。これは、最小次数を持つ直前のノードが優先的に選択され続けることで、新規ノードが連鎖的に接続されるためである。このような鎖状構造や次数相関などの特殊構造を残存したまま、次数分布の分散に対する最短ループ長の影響を調べると、その影響が次数分布によるものなのか、それとも特殊構造によるものなのかを判別するこ

とが困難となる。そこで、次数分布の純粋な影響を調べるために、3.1.1節で生成したネットワークを Configuration モデル [42] を用いてランダム化して統計的に特殊構造を除去する。

まず、GN モデル [40] および IPA モデル [41] を用いてネットワークを生成した後、図 3.2 に示すように、ネットワーク内の各リンクを2つの自由端に切断する。このとき、次数  $k_i$  を持つノード  $i$  は  $k_i$  本の自由端を持つ状態となる。次に、これらの自由端のペアをランダムに選択して再接続する。この操作ではどのノードに対してもリンクの追加や除去を行わないため、GN モデルおよび IPA モデルを用いて生成したネットワークの次数分布  $P(k)$  に対して各ノードの次数は維持される。

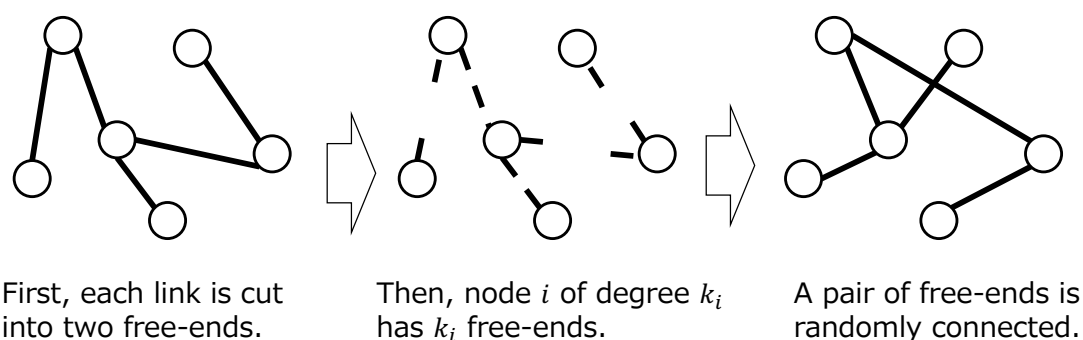


図 3.2: Configuration モデル [42] を用いたネットワークのランダム化。リンクを自由端に切断して、自由端のペアをランダムに再接続することで、次数分布  $P(k)$  を維持したまま特殊構造を除去する。

GN モデルおよび IPA モデルを用いて、サイズ  $N = 50000$ 、接続パラメータ  $\nu = 1, 0.5, 0, -1, -5, -20, -100$  のネットワークを生成して、Configuration モデルを用いてランダム化した後の次数分布  $P(k)$  を図 3.3(a) に示す。各  $\nu$  の値は、それぞれ金色、水色、橙色、紫色、緑色、青色、赤色の線で示されている。特に、図 3.3(a) における  $\nu = 1, 0, -1, -100$  の場合、次数分布はそれぞれ

$$P(k) \sim k^{-3}, \quad (3.1)$$

$$P(k) \sim e^{-k}, \quad (3.2)$$

$$P(k) \sim \frac{\langle k \rangle^k}{k!} e^{-\langle k \rangle}, \quad (3.3)$$

$$P(k) \sim \delta_{k, \langle k \rangle}. \quad (3.4)$$

で与えられる。ここで、式 (3.1) はべき乗分布 (SF ネットワーク)、式 (3.2) は指数分布、式 (3.3) はポアソン分布 (ER ランダムグラフ)、式 (3.4) は単峰性分布 (レ

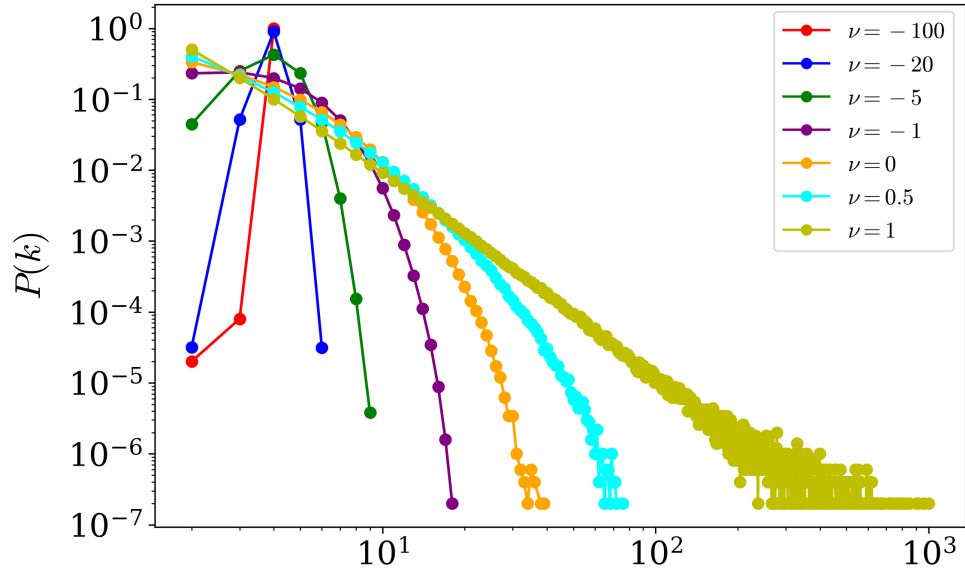
ギュラーネットワーク)に対応する。図 3.3(a)に示すように、金色線 ( $\nu = 1$  の SF ネットワーク) から赤色線 ( $\nu = -100$  のレギュラーネットワーク) へと、接続パラメータ  $\nu$  が減少するにつれて次数分布  $P(k)$  の幅は連続的に狭まる。

### 3.1.3 ランダム摂動による次数分布の補間

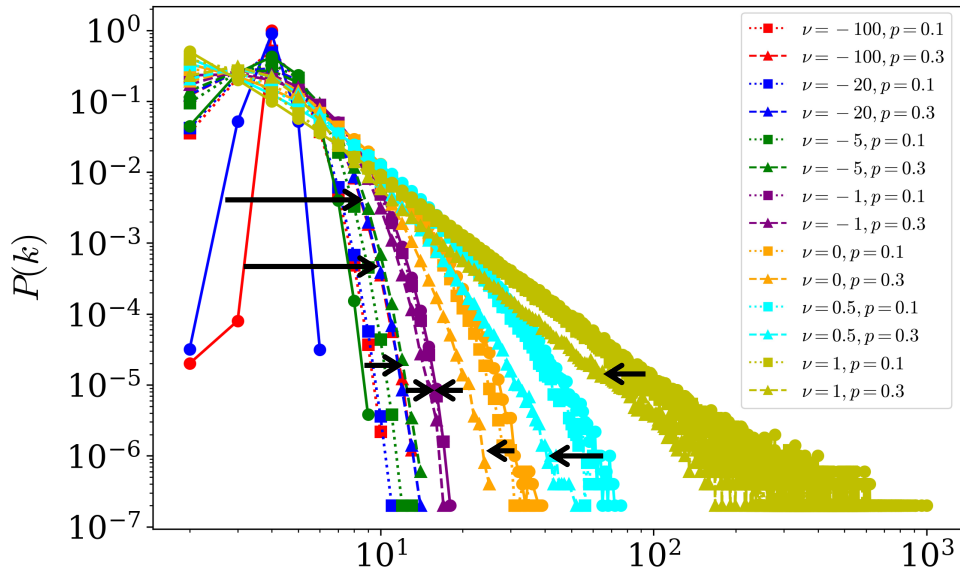
3.1.1 節および 3.1.2 節において、GN モデル [40] および IPA モデル [41] を用いてネットワークを生成して、Configuration モデル [42] を用いてランダム化した後、次数分布を連続的に補間するためにランダム摂動を加える。摂動として、全体の結合を維持しつつ、自己ループと多重リンクを禁止しながら、 $pM$  本のリンクをランダムに再配線する。ここで、 $p$  は再配線率を表す。ただし、 $p$  が大きすぎると、これらの制約を満たしながら再配線することが困難になるため、 $p$  をある程度以上大きくすることは不可能となる。図 3.3(b) に、再配線率  $p = 0.1, 0.3$  のランダム摂動を加えた次数分布  $P(k)$  を示す。これらの次数分布  $P(k)$  は、 $\nu = -1$  の境界を挟んで反対方向にシフトする。 $\nu > -1$  の場合には左側 (分布幅が狭くなる) に、 $\nu < -1$  の場合には右側 (分布幅が広がる) にシフトする。 $\nu = -1$  の場合にはほぼ ER ランダムグラフが得られるため、ランダム摂動によって次数分布に大きな偏差が生じることはない。より詳細には、与えられた次数分布にランダム摂動を加えた分布は以下のように表される。

$$\sum_{i=1}^N \left( \sum_{k+k'=k_i} \binom{k_i}{k} (1-p)^k p^{k_i-k} \times \frac{\lambda_i^{k'}}{k'!} e^{-\lambda_i} \right). \quad (3.5)$$

ここで、 $k$  と  $k'$  はそれぞれ、除去されずに残った既存リンクの数と、新たに追加されたリンクの数を表し、 $\lambda_i = 2k_i p$  で定義される。式 (3.5) における第 1 項は既存リンクの除去に対応する二項分布を、第 2 項はリンクの再配線による追加に対応するポアソン分布を表している。サイズ  $N$  が十分大きいとき、二項分布はポアソン分布に近づき、ポアソン分布同士の積は再びポアソン分布となる。したがって、もともと次数分布がほぼポアソン分布である  $\nu = -1$  の場合には、ランダム摂動を加えても式 (3.5) で与えられる分布は依然としてポアソン分布となり、次数分布の偏差が非常に小さくなる。



(a)



(b)

図 3.3: サイズ  $N = 50000$ 、リンク数  $M \approx m \times N = 100000$  ( $m = 2$ ) で生成したネットワークの次数分布  $P(k)$ 。平均次数  $\langle k \rangle \approx 2 \times m = 4$  は一定である。金色、水色、橙色、紫色、緑色、青色、赤色の線は、それぞれ SF ネットワーク、ER ランダムグラフ、レギュラーネットワークに対応する  $\nu = 1$  から  $\nu = -100$  までの接続パラメータ  $\nu$  を表す。実線と丸印、点線と四角印、破線と三角印は、それぞれ再配線率  $p = 0.0, 0.1, 0.3$  でランダム摂動を加えた分布を示す。(a)  $P(k)$  の幅は、SF ネットワーク (金色線の  $\nu = 1$ ) からレギュラーネットワーク (赤色線の  $\nu = -100$ ) へと  $\nu$  が減少するにつれて狭まる。(b) ランダム摂動により、 $P(k)$  は  $\nu = -1$  (紫色線) を境界として反対方向にわずかにシフトする。

## 3.2 リンク再配線によるモジュール構造の導入

3.1 節では、次数分布  $P(k)$  が与える純粋な影響を調べるために、次数相関や高次構造といった特殊構造を除去したネットワークの生成方法について述べた。しかしながら、モジュール構造を持つネットワークでは、結合の頑健性が低下することが報告されている [34]。したがって、頑健性向上の観点から最短ループ長を調査するために、モジュール構造が与える影響についても評価する。

そこで、3.1 節で生成したネットワークに対して、リンク再配線によって人工的にモジュール構造を導入する [34, 43, 44]。まず、各ノードに対してモジュール番号  $1, \dots, m_0$  をランダムに割り当てる。ここで、 $m_0$  はモジュール数を表し、各モジュールに含まれるノード数が等しく  $N/m_0$  になるように割り当てることで、モジュールサイズの不均一性による影響を排除する。このとき、イントラリンク（同一モジュール内のリンク）およびインターリンク（異なるモジュール間のリンク）の数は、それぞれ  $M/m_0$  および  $(1 - 1/m_0)M$  と見積もられる。これは、リンクの両端が同一モジュールに属する確率が  $1/m_0$  であることによる。モジュール構造の強さは、再配線確率  $w$  によって制御する。以下に示す手順で、同じ次数分布  $P(k)$  を保ちつつ、自己ループおよび多重リンクを禁止しながら、インターリンクの再配線を行う。これにより、図 3.4 に示すように、インターリンクはイントラリンクへと再配線されて、モジュール構造が導入される。

- Step 1.**  $(1 - 1/m_0)M \times w$  本のインターリンクをランダムに選択して、図 3.4 左に示す赤いクロスの位置で切断して自由端にする。
- Step 2.** 同一モジュール内に自由端のペアが存在する場合には、図 3.4 右に示す黄色線のように、それらをランダムに接続して可能な限りイントラリンクを形成する。
- Step 3.** 同一モジュール内で接続できない自由端が残った場合には、例外処理として、異なるモジュールに属する自由端同士をランダムに接続してインターリンクを形成する。

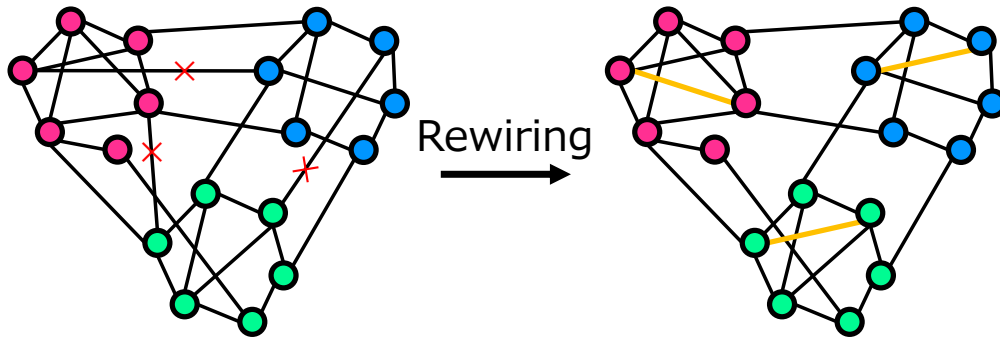


図 3.4: インターリンクは、再配線確率  $w$  でイントラリンクに再配線される。図中のノードの色は、3つの異なるモジュールを表す。リンクを自由端に切断する位置を赤いクロスで、再配線されたリンクを黄色線で示す。

モジュール構造の強さを評価するために、広く用いられている以下のモジュラリティ  $Q$  を計算する [36]。

$$Q = \frac{1}{2M} \sum_{i,j} \left( A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2M} \right) \delta_{i,j}. \quad (3.6)$$

ここで、 $A_{ij}$  は隣接行列の  $ij$  要素である (ノード  $i$  と  $j$  の間にリンクがある場合は  $A_{ij} = 1$ 、それ以外の場合は 0 である)。ノード  $i$  の次数は  $k_i$  で表され、クロネッカーのデルタ  $\delta_{i,j}$  は、ノード  $i$  と  $j$  が同じモジュールに属する場合は 1、それ以外の場合は 0 である。

# 第4章 「穴」となる最短ループ長の 網羅的調査

## 4.1 最短ループ長の計算方法

本節では、ネットワーク内の各リンクが属する最短ループの長さの計算方法について述べる。有限サイズのランダム化されたネットワークでは、サイズが大きくても長さ3の三角形が少なくとも低頻度で存在する可能性があり、同じ内周(ループの最小長によって定義される)が3となるため比較することはできない。そこで、有限サイズにおいて、連続的に変化する次数分布を持つ様々なネットワークの結合の頑健性 [13, 34] を議論するために、内周の代わりに、最短ループ長の分布とその平均長を調べる。

図 4.1 に示すように、最短ループはリンク  $e_{ij}$  と、その端ノード  $i-j$  間の最短経路で構成される。最短ループであるため、その内部には他のループを含まず、「穴」を意味する。具体的には、以下のように最短ループ長を計算する。

- Step 1. ノード  $i-j$  間のリンク  $e_{ij}$  をネットワークから一時的に除去する。
- Step 2. ノード  $i-j$  間の最短経路の長さに  $e_{ij}$  のリンク長の 1 を加えることで最短ループ長  $l$  を得る。
- Step 3. 除去したリンク  $e_{ij}$  を元のネットワークに戻す。
- Step 4. ネットワーク内のすべてのリンクについて Step 1~3 を繰り返す。

最短ループ長  $l$  の頻度を計算することで、分布  $P(l)$  を得る。最短ループの平均長は  $\langle l \rangle = \sum_l lP(l)$  で定義される。これはリンクベースの手法であり、ループはリンクごとに複数回カウントされる可能性があることに注意されたい。複数回のカウントについてはさらなる調査が必要である。さらに、ノードベースの手法 [27] も検討できる。

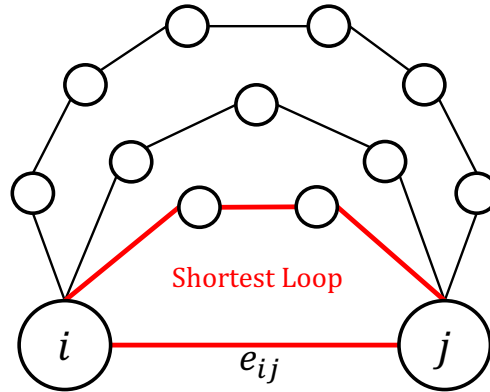


図 4.1: リンク  $e_{ij}$  とノード  $i-j$  間の最短経路で構成される最短ループ (赤色線)。ループの内部は空であり「穴」を意味する。

## 4.2 長いループを調べる前段としての三角形の調査

多くの現実ネットワークは、次数分布がべき乗則に従うスケールフリー (SF) 構造を持ち [3, 4, 20]、少数の高次数ハブと多数の低次数ノードから構成されている。さらに、現実ネットワークを含む SF ネットワークには、多数の三角形が含まれることが知られている [23, 24]。そこで、三角形よりも長い最短ループを調べる前段階として、SF ネットワークに限定せず、ER ランダムグラフおよびレギュラーネットワークを含めて、次数分布が連続的に変化する人工ネットワークにおける三角形の数を調べる。

ネットワークに含まれる三角形の多さを定量的に評価するために、以下で定義される大域的クラスター係数  $C$  [45] を計算する。

$$C_i = \frac{3 \times (\text{number of triangles})}{\text{number of connected triples of nodes } i}, \quad (4.1)$$

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i. \quad (4.2)$$

ここで、connected triple とは、A-B-C のような 3 ノードの組 (連結三重項) を指す。連結三重項の数は、次数  $k_i$  をもつノード  $i = 1, 2, \dots, N$  について  $\binom{k_i}{2}$  を足し合わせたものとして定義される。

GN モデル [40] においては接続パラメータ  $\nu = 1$  の場合にべき指数  $\gamma = 3$  を持つべき乗分布が得られるが、現実ネットワークにおいては  $\gamma \neq 3$  の場合も数多く存在する。そのため、べき指数の異なる複数の現実ネットワークについても大域的クラスター係数を調べる。ただし、現実ネットワークにはモジュール構造など

の特殊構造が含まれている。例えば、鉄道網では地域ごとに駅同士が強く結びついたグループを形成し、社会ネットワークでは共通の関心や属性を持つ人々同士が密に接続される傾向がある。このようなモジュール構造の存在は、ネットワークに含まれる三角形の多さが次数分布そのものに由来するのか、それともノードのグループ化による影響なのかの判別を困難にする。そこで、Configuration モデル [42] を用いてランダム化して、これらの構造の影響を取り除いた場合の大域的クラスター係数も調べる。式 (4.1) および式 (4.2) により計算される大域的クラスター係数について、現実ネットワークでの値を  $C_{\text{real}}$ 、ランダム化された現実ネットワークの値を  $C_{\text{expect}}$  と表記し、両者を区別する。対象とする現実ネットワークは、航空網の AirTraffic [46]、電子メールの E-mail [47]、SNS 上の社会ネットワークの Hamster [46]、大学コミュニティの社会ネットワークの UC Irvine [46, 48]、および政治ブログ間の情報ネットワークの Polblogs [49] である。なお、各ネットワークについては、元データから抽出した最大連結成分のみを分析対象としている。図 4.2 に、各ネットワークの次数分布と、最小二乗法によって推定したべき指数  $\gamma$  を示す。

表 4.1(a) に、GN モデルおよび IPA モデルを用いて生成して、Configuration モデルを用いてランダム化した  $N = 1500$  の人工ネットワークの大域的クラスター係数  $C$  を示す。これは、表 4.1(b) の現実ネットワークとほぼ同規模のサイズのネットワークでの結果である。接続パラメータ  $\nu$  の値が増加するにつれて、 $C$  は大きくなる。特に、ランダム化された SF ネットワーク ( $\nu = 1$ ) は、ER ランダムグラフ ( $\nu = -1$ ) やレギュラーネットワーク ( $\nu = -100$ ) などの他のネットワークよりも多くの三角形を含む。言い換えれば、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$  が大きいネットワークほど、より多くの三角形を含む。また、標準偏差 STD は  $\nu$  が大きくなるにつれてわずかに増加する。したがって、図 4.4 で後述するように、分散  $\sigma^2$  は最短ループの平均長  $\langle l \rangle_{\text{expect}}$  に対する  $C_{\text{expect}}$  の支配的な要因であると考えられる。さらに、表 4.1(b) に示すように、現実ネットワークでの値  $C_{\text{real}}$  は、ランダム化された現実ネットワークでの値  $C_{\text{expect}}$  よりも高い。これは、ランダム化によって次数相関やモジュール構造などが排除されることに起因すると考えられる。

図 4.3 に、現実ネットワークとランダム化された現実ネットワークにおける最短ループ長  $l$  の分布を示す。分布  $P(l)$  と累積分布  $P_{\text{SL}}(L > l)$  は、AirTraffic を除いて、E-mail、Hamster、UC Irvine、Polblogs に短いループが含まれることを示している。図 4.4 では、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  の増加に伴い、最短ループの平均長  $\langle l \rangle_{\text{expect}}$  は単調に減少する。これらの結果は、 $\sigma^2$  の値が大きいほど、 $C_{\text{expect}}$  が大きくなり  $\langle l \rangle_{\text{expect}}$  が小さくなること、すなわち小さな穴（短い最短ループ）を多く含むようになることを意味する。

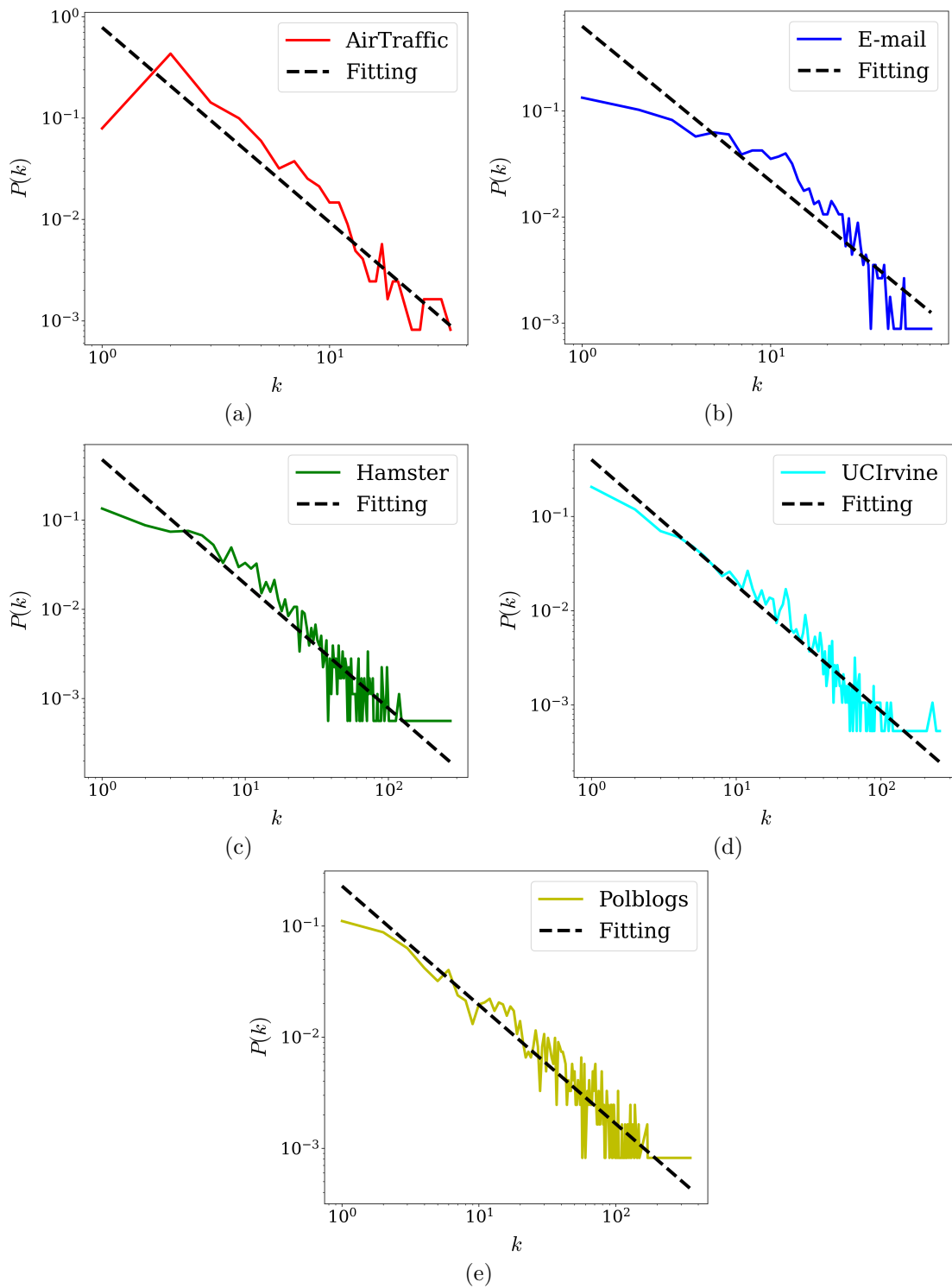


図 4.2: 現実ネットワークの次数分布  $P(k)$  と、最小二乗法で推定したべき指数  $\gamma$  のフィッティング。(a) AirTraffic では  $\gamma = 1.92$ 、(b) E-mail では  $\gamma = 1.46$ 、(c) Hamster では  $\gamma = 1.39$ 、(d) UC Irvine では  $\gamma = 1.33$ 、(e) Polblogs では  $\gamma = 1.07$  である。

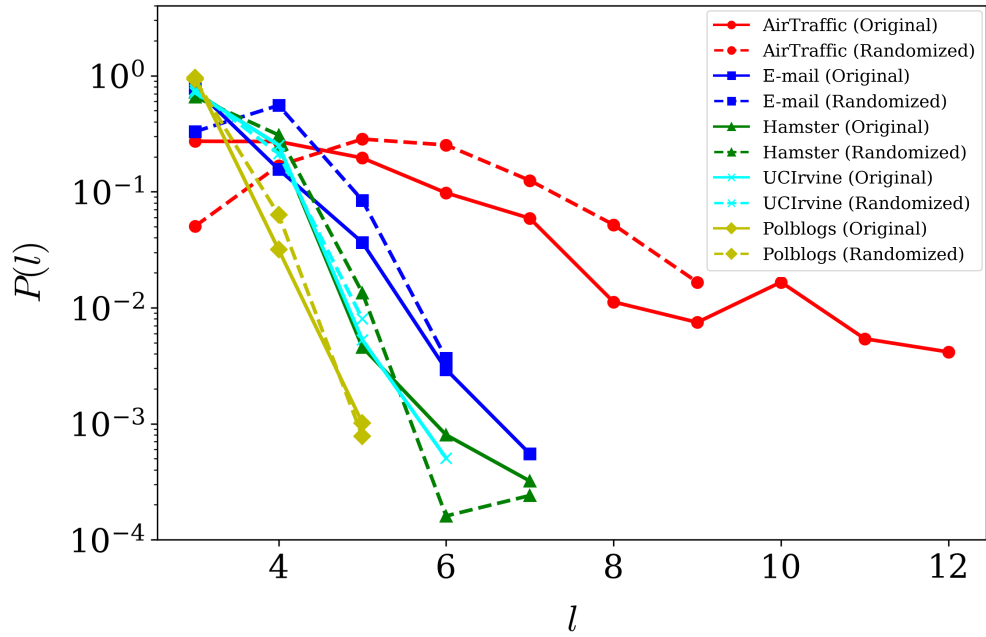
表 4.1: 人工ネットワークと現実ネットワークにおける、大域的クラスター係数  $C$  の平均値とその標準偏差 STD。(a) 人工ネットワークはサイズ  $N = 1500$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  で、GN モデルおよび IPA モデルを用いて生成し、Configuration モデルによりランダム化した。接続パラメータ  $\nu$  が増加するにつれて、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  と  $C$  は大きくなり、 $\nu = 1$  (SF ネットワーク) でピークとなる。(b) 現実ネットワークにおいても、分散  $\sigma^2$  の値が大きいほど  $C_{\text{expect}}$  は大きくなり、最短ループの平均長  $\langle l \rangle_{\text{expect}}$  は小さくなる。

(a)

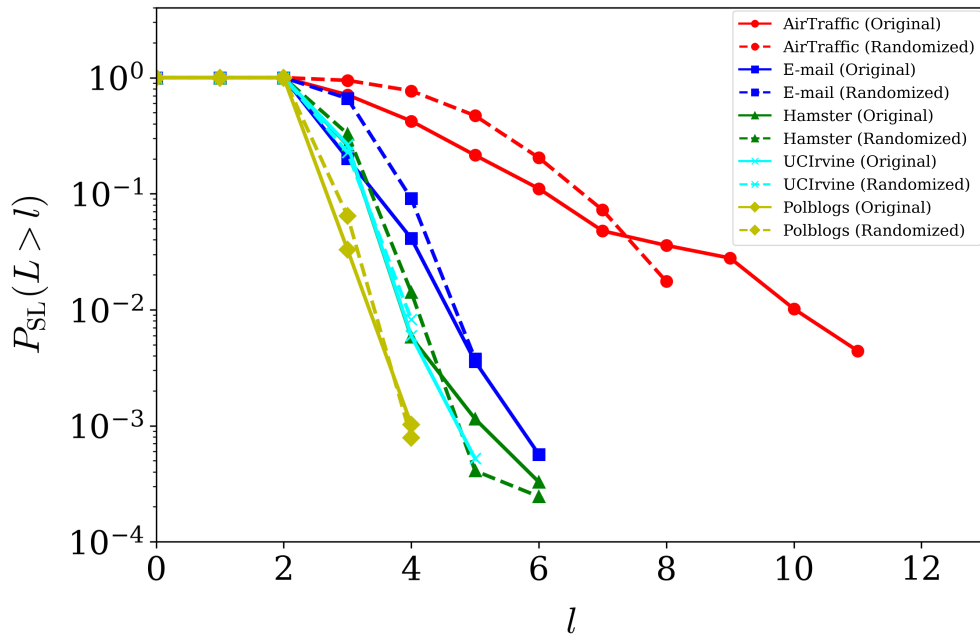
$\nu$	$\sigma^2$	$C$	STD
-100	0.01	0.0014	0.0007
-20	0.10	0.0016	0.0006
-5	0.88	0.0017	0.0008
-1	3.24	0.0025	0.0009
0	5.90	0.0033	0.0009
0.5	9.57	0.0047	0.0008
1	30.02	0.0126	0.0018

(b)

Network		$N$	$\langle k \rangle$	$\sigma^2$	$\gamma$	$C_{\text{real}}$	$\langle l \rangle_{\text{real}}$	$C_{\text{expect}}$	$\langle l \rangle_{\text{expect}}$
Technological	AirTraffic	1226	3.9	13.47	1.92	0.0639	4.30	0.0084	5.20
	E-mail	1133	9.6	87.23	1.46	0.1663	3.15	0.0274	3.65
Social	Hamster	1788	14.0	440.86	1.39	0.0904	3.20	0.0643	3.28
	UCIrvine	1893	14.6	599.57	1.33	0.0568	3.18	0.0829	3.14
	Polblogs	1222	27.4	1474.67	1.07	0.2260	3.01	0.1460	3.04



(a)



(b)

図 4.3: 現実ネットワークとランダム化された現実ネットワークにおける、最短ループ長  $l$  の分布。AirTraffic、E-mail、Hamster、UCIrvine、Polblogs の結果は、それぞれ赤色の丸印、青色の四角印、緑色の三角印、水色のクロス、金色のひし形と実線で示されている。破線はランダム化された現実ネットワークの結果を表す。(a)(b) 分布  $P(l)$  と累積分布  $P_{SL}(L > l)$  の裾を比較すると、AirTraffic を除き、E-mail、Hamster、UCIrvine、Polblogs は短い最短ループを含む。

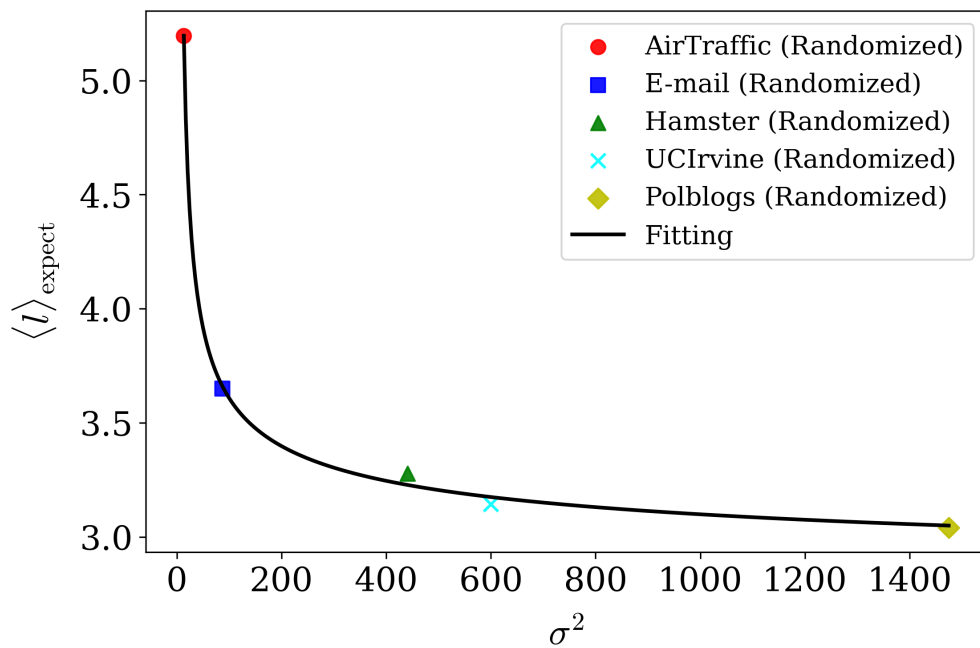


図 4.4: ランダム化された現実ネットワークにおける、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle_{\text{expect}}$  の減少。AirTraffic、E-mail、Hamster、UCIrvine、Polblogs の結果は、それぞれ赤色の丸印、青色の四角印、緑色の三角印、水色のクロス、金色のひし形で示されている。 $\sigma^2$  が増加するにつれて、 $\langle l \rangle_{\text{expect}}$  は小さくなる。黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。

## 4.3 モジュール構造を持たない様々なネットワークにおける最短ループ長

4.2節では、次数分布の分散が大きいネットワークほど、より多くの三角形（最小の穴）を含むことを示した。さらに、現実のSFネットワークにおいては、分散の増加に伴って最短ループの平均長が短くなることを示した。一方で、モジュール構造を持たないネットワークでは、次数分布の分散が小さいほど結合の頑健性が高まり [13]、モジュール構造を持つネットワークでは、同じ条件下でも脆弱になる [34]。そこで本節では、まずモジュール構造を持たないネットワークに着目して、次数分布の分散と最短ループ長との関係を網羅的に調べる。次数分布をべき乗分布からポアソン分布、さらに単峰性分布へと連続的に変化させて、モジュール構造を持つネットワークに関する結果は4.4節で述べる。以下の結果では、時間ステップあたりのノード接続数  $m = 2$ 、接続パラメータ  $\nu = 1, 0.5, 0, -1, -5, -20, -100$ 、ランダム摂動の再配線率  $p = 0.1, 0.3$  の各組み合わせについて、100回の実現結果を平均した値を示す。

### 4.3.1 最短ループ長の分布

GNモデルおよびIPAモデルを用いて生成して、Configurationモデルによってランダム化したネットワークについて、サイズ  $N = 1000, 5000, 10000, 50000$  の場合における最短ループ長の分布および平均長  $\langle l \rangle$  を数値的に調べた。ここで、最短ループとは、4.1節の図4.1で示したように、「穴」に対応する内部が空のループであることに注意されたい。図4.5に、 $N = 50000$  の場合における最短ループ長  $l$  の分布を示す。他のサイズ  $N$  に対しても同様の結果が得られており、それらの結果を付録の図5.1~5.3に示す。図4.5(a)は、接続パラメータ  $\nu$  を変化させたときの最短ループ長の分布  $P(l)$  を示している。 $\nu = 1$ （金色線）のとき、 $P(l)$  のピークは小さな  $l$ （最短ループ長が短い）に現れ、その他の水色、橙色、紫色、緑色、青色、赤色の線では、 $\nu$  が減少するにつれて大きな  $l$ （最短ループ長が長い）へシフトする。このピークのシフトは、接続パラメータ  $\nu$  の減少に伴って、ネットワークに含まれる最短ループがより長くなることを示している。すなわち、レギュラーネットワーク（赤色線の  $\nu = -100$ ）は、SFネットワーク（金色線の  $\nu = 1$ ）と比べて長い最短ループを多く含み、ERランダムグラフ（紫色線の  $\nu = -1$ ）はその中間であることを意味する。図4.5(b)は同様に、 $\nu$  の減少に伴って累積分布  $P_{SL}(L > l)$  がより大きな  $l$  の側へシフトすることを示している。これらの結果から、接続パラメータ  $\nu$  が減少するほど、すなわち次数分布  $P(k)$  が狭まるにつれて、ネットワー

クにはより大きな穴（長い最短ループ）が多く含まれると言える。また、図 4.5(b) においては、本研究の結果で得られた  $P_{SL}(L > l)$  の値（白抜き丸印）は、実線の理論推定値 [27] からわずかにずれている。本研究の結果と理論推定 [27] との違いは、前者では任意のリンクが属する最短ループを求めているのに対して、後者では任意のノードが属する最短ループを対象としている。さらに、両者で最短ループの多重度が異なる可能性があり、これによって結果に若干の差異が生じていると考えられる。また、理論推定での母関数に基づく再帰的な近似計算では局所的な木構造が仮定されているため、短いループを多く含むネットワークに対しては有効ではない [19, 20]。これらの要因が重なり合うことで、本研究の数値結果と理論推定値との間にわずかな相違が生じていると考えられる。

図 4.6 に、ランダム摂動を加えたネットワークにおける最短ループ長  $l$  の分布を示す。ランダム摂動を加えることで、3.1.3 節の図 3.3(b) で示した次数分布  $P(k)$  の変化に対応して、最短ループ長の分布が  $\nu = -1$  (ER ランダムグラフ) を境として反対方向へとシフトしている。この結果は、ランダム摂動によって、異なる接続パラメータ  $\nu$  値間の結果が補間されていることを示している。

### 4.3.2 次数分布の分散に対する最短ループの平均長

図 4.7(a) は、 $N = 50000$  において、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  が増加するにつれて、最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  が単調に減少することを示している。他の  $N$  についても同様の結果が得られており、付録の図 5.4~5.6 に示す。また、各プロット点の補間のために、 $\nu = 0.8, 0.9, 0.97$  の結果も示しているが、 $\nu = -20$  の場合は  $\nu = -100$  (赤色の丸印) とほぼ重なるため省略している。注目すべき結果は、分散  $\sigma^2$  が小さいほど、最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  が大きくなることである。言い換えれば、次数分布  $P(k)$  が狭いネットワークほど、SF ネットワーク、ER ランダムグラフ、そしてレギュラーネットワークの順に、より大きな穴（長い最短ループ）が含まれることを発見した。この結果は、小さい分散  $\sigma^2$  に対する結合の頑健性向上 [13] と一致する。したがって、分散  $\sigma^2$  の値が小さいほど、ネットワークに含まれる穴は大きくなり、頑健性が向上する。図 4.7(b) はランダム摂動を加えた結果を含んでおり、3.1.3 節の図 3.3(b) で示した次数分布  $P(k)$  の補間によって滑らかな  $\sigma^2 - \langle l \rangle$  曲線を与えている。

特に、最も狭い次数分布  $P(k)$  はレギュラーネットワークに対応する。 $d$ -レギュラーグラフの特別な場合として、ラマヌジャングラフは二分割に対する耐性が高く、 $O(\log_{d-1} N)$  の大きな内周を示すことが知られている [29, 30]。さらに、ランダム化されたレギュラーネットワークは、サイズ  $N \rightarrow \infty$  でラマヌジャングラフに漸近する [31]。そこで本研究では、単峰性の次数分布を持つランダム化された

レギュラーネットワークにおける最短ループの平均長  $\langle l \rangle \approx \log_{d-1} N$  を、図 4.8 において推定している。一方、任意の次数分布  $P(k)$  を持つ、より一般的なランダム化されたネットワークにおいては、最短経路の平均長  $\langle l_{\text{SP}} \rangle$  は既に次のように解析されている [50]。

$$\langle l_{\text{SP}} \rangle \simeq \frac{\ln N}{\ln \mu}, \quad (4.3)$$

$$\mu = \frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle}. \quad (4.4)$$

レギュラーネットワークにおいては平均次数  $\langle k \rangle = d$  で、 $\mu = d - 1$  となる。すると、最短経路の平均長  $\langle l_{\text{SP}} \rangle \simeq \log_{d-1} N$  となり、これは本研究が単峰性の次数分布の特別な場合として推定した最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  と一致する。図 4.8 に示すように、レギュラーネットワーク ( $\nu = -100$  の赤色線) は、サイズ  $N$  が増加するにつれて最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  が大きくなり、ラマヌジャングラフのスケール  $O(\log_{d-1} N)$  と一致する。したがって、このような大きさの穴は、小さい分散  $\sigma^2$  に対する結合の頑健性向上の結果 [13] と合わせると、意図的な攻撃に対しても結合を維持するのに大きすぎないと言える。

図 4.8(b) は、ランダム摂動による、異なる接続パラメータ  $\nu$  値間の結果の補間を示している。 $\nu > -1$  の場合には上側 (最短ループ長が長い) へのシフトが見られ、 $\nu < -1$  の場合には下側 (最短ループ長が短い) へのシフトが見られる。これらの上側および下側へのシフトは、図 4.6 の分布  $P(l)$  および累積分布  $P_{\text{SL}}(L > l)$  の右側および左側へのシフトと、図 4.7(b) における一定のサイズ  $N$  に対する滑らかな曲線  $\sigma^2 - \langle l \rangle$  に対応している。ここで、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  が SF ネットワーク、ER ランダムグラフ、レギュラーネットワークの順に減少する順序は、最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  が増加し、攻撃に対する結合の頑健性が向上する順序 [13] と一致することを強調しておく。したがって、次数分布の分散は頑健性だけでなく、最短ループ長にも影響を与えることがわかった。

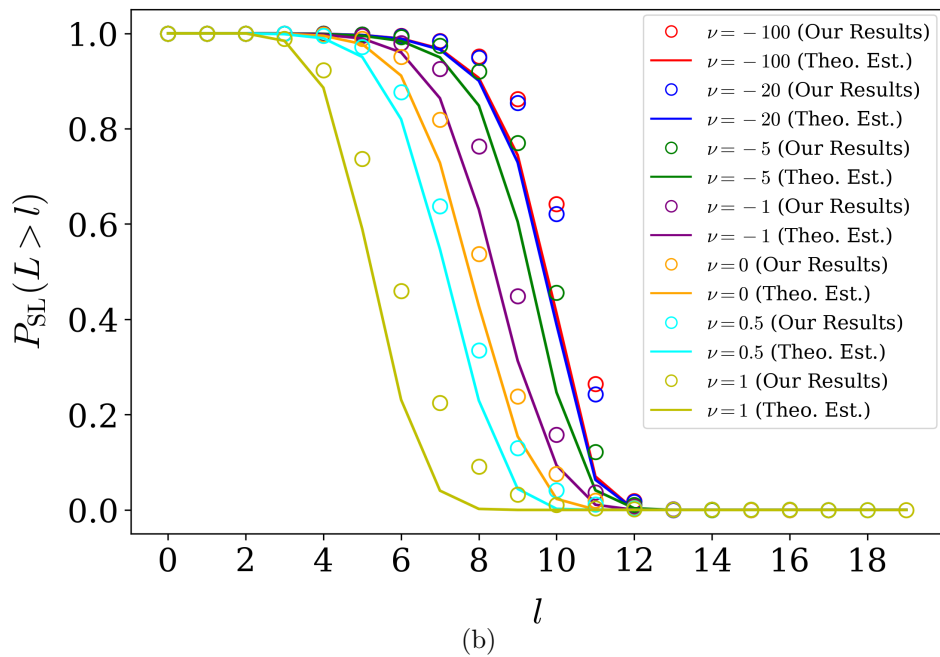
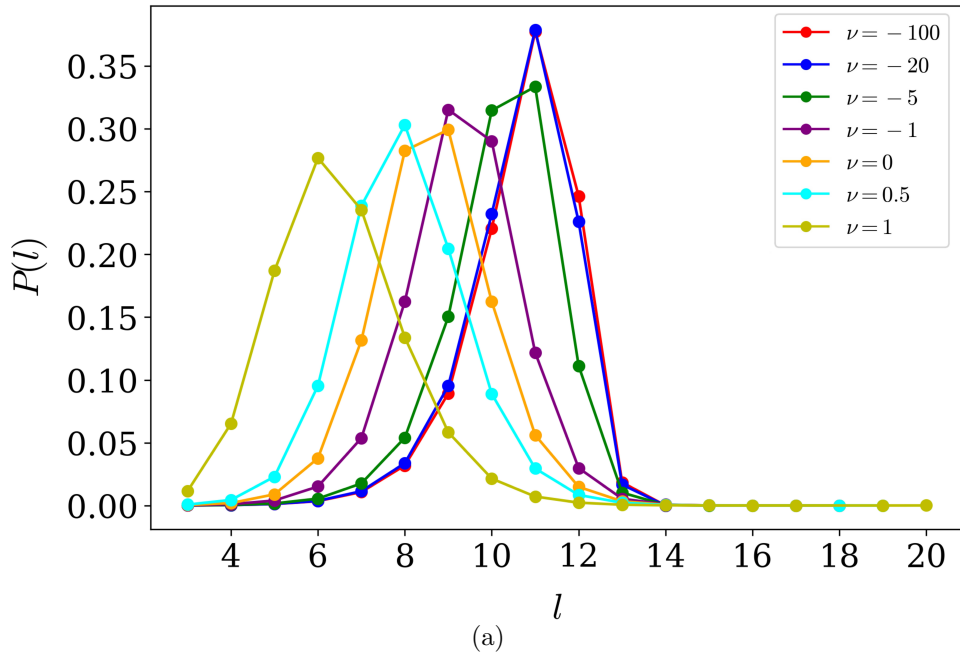


図 4.5: サイズ  $N = 50000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  のネットワークにおける、異なる接続パラメータ  $\nu$  の最短ループ長  $l$  の分布。 $\nu$  が減少するにつれて、ネットワークに含まれる最短ループは長くなる。(a) 分布  $P(l)$  のピークは、 $\nu$  が減少するにつれて右にシフトする。これは、レギュラーネットワーク (赤色線の  $\nu = -100$ ) は SF ネットワーク (金色線の  $\nu = 1$ ) よりも長い最短ループを含み、ER ランダムグラフ (紫色線の  $\nu = -1$ ) はそれらの中間であることを示す。(b) 同様に、累積分布  $P_{\text{SL}}(L > l)$  は、 $\nu$  が減少するにつれて右にシフトする。本研究の数値結果 (白抜き丸印) は、実線の理論推定値 [27] からわずかに逸脱している。

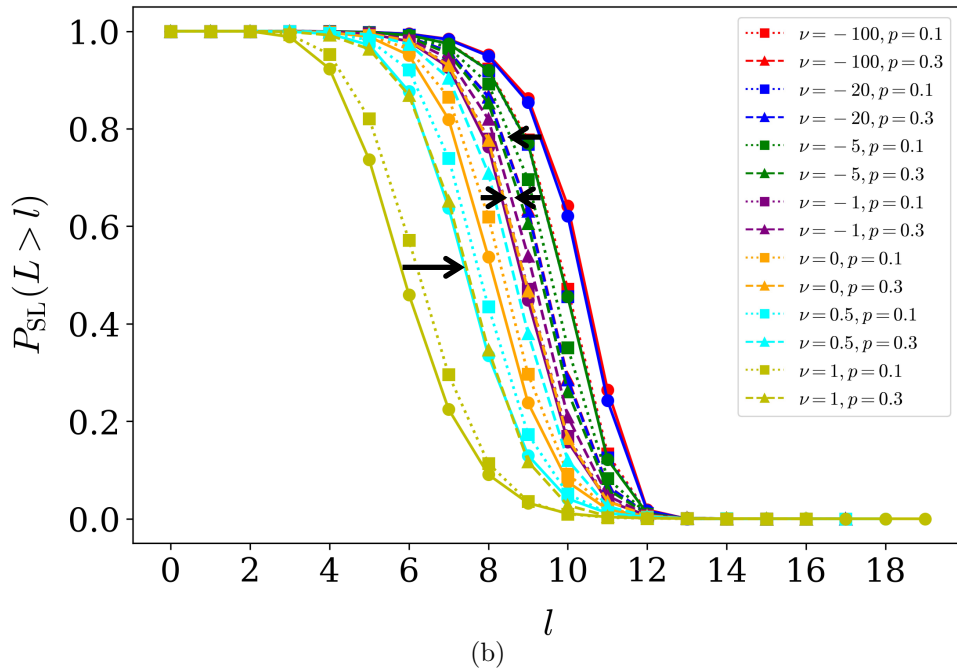
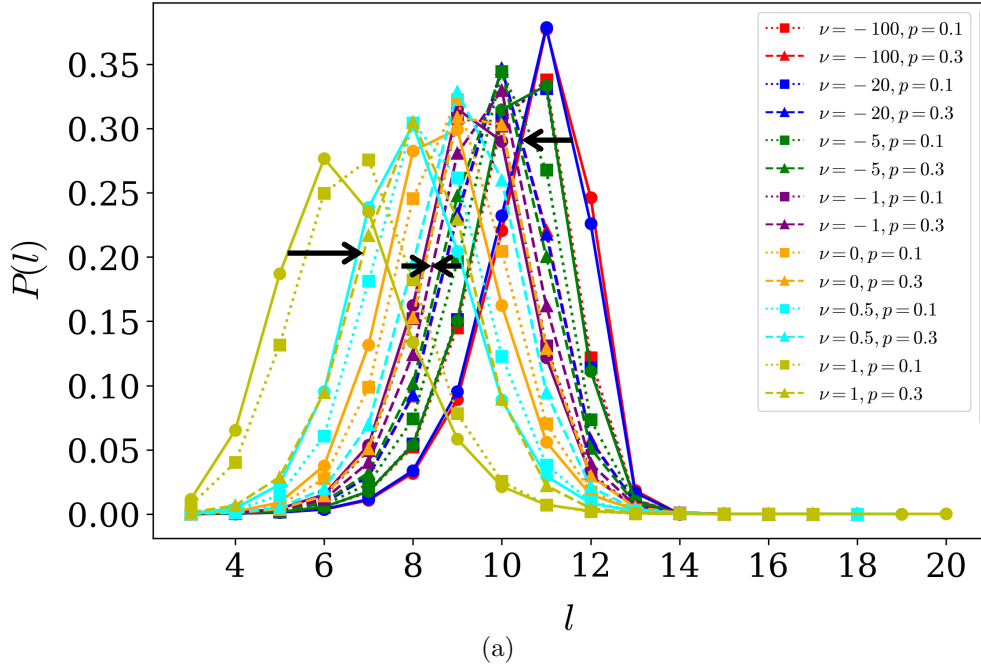


図 4.6: サイズ  $N = 50000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  のネットワークにおける、ランダム摂動を加えた結果を含む最短ループ長  $l$  の分布。実線と丸印、点線と四角印、破線と三角印は、それぞれ再配線率  $p = 0.0, 0.1, 0.3$  でランダム摂動を加えた分布を示す。(a) ランダム摂動により、分布  $P(l)$  は  $\nu = -1$  (ER ランダムグラフ) の境界を挟んで反対方向にシフトする。(b) 累積分布  $P_{\text{SL}}(L > l)$  も同様のシフトを示す。これらのシフトは、異なる接続パラメータ  $\nu$  値間の結果 (実線と丸印) を補間している。

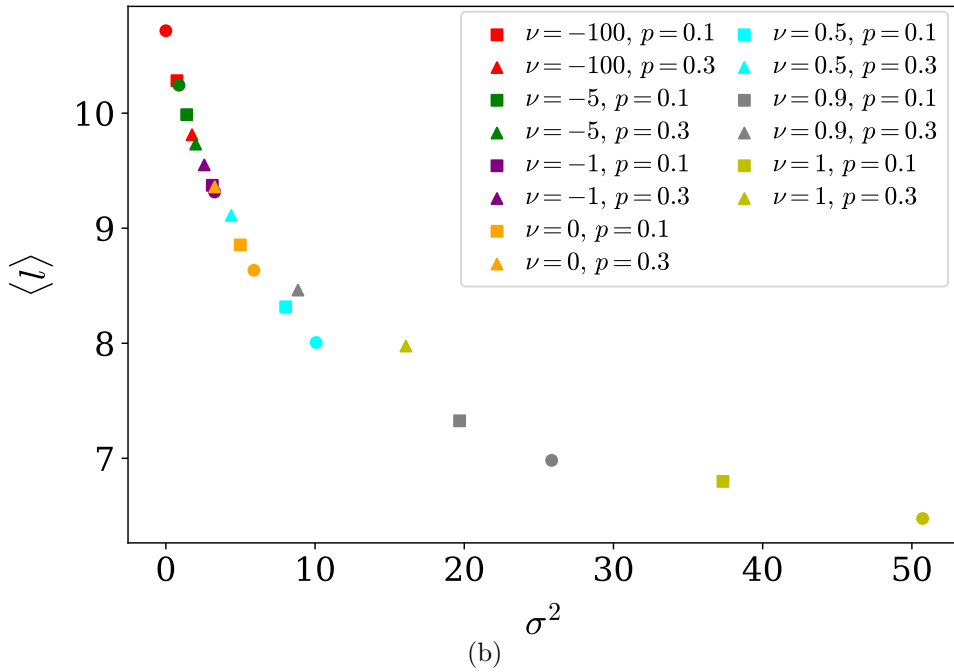
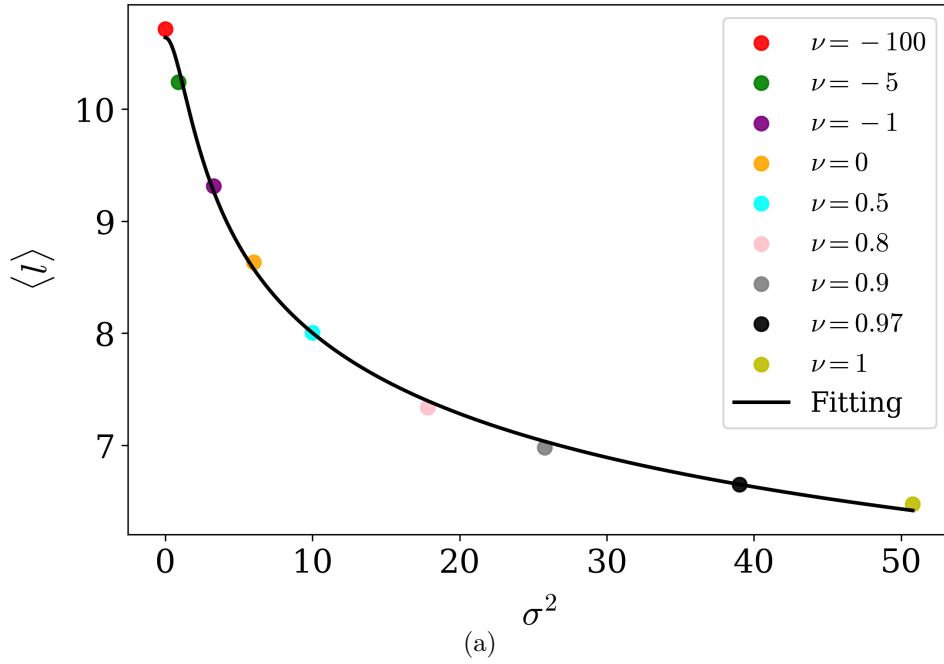


図 4.7: サイズ  $N = 50000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  のネットワークにおける、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の単調減少。(a)  $\sigma^2$  の値が小さいほど  $\langle l \rangle$  は大きくなる。特に  $\nu = -100$  におけるレギュラーネットワーク (赤色の丸印) のように、 $P(k)$  が狭いほど長い最短ループを含む。黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。(b) 四角印と三角印で示すランダム摂動の結果は、異なる接続パラメータ  $\nu$  値間の結果 (丸印) を滑らかな  $\sigma^2 - \langle l \rangle$  曲線で補間している。

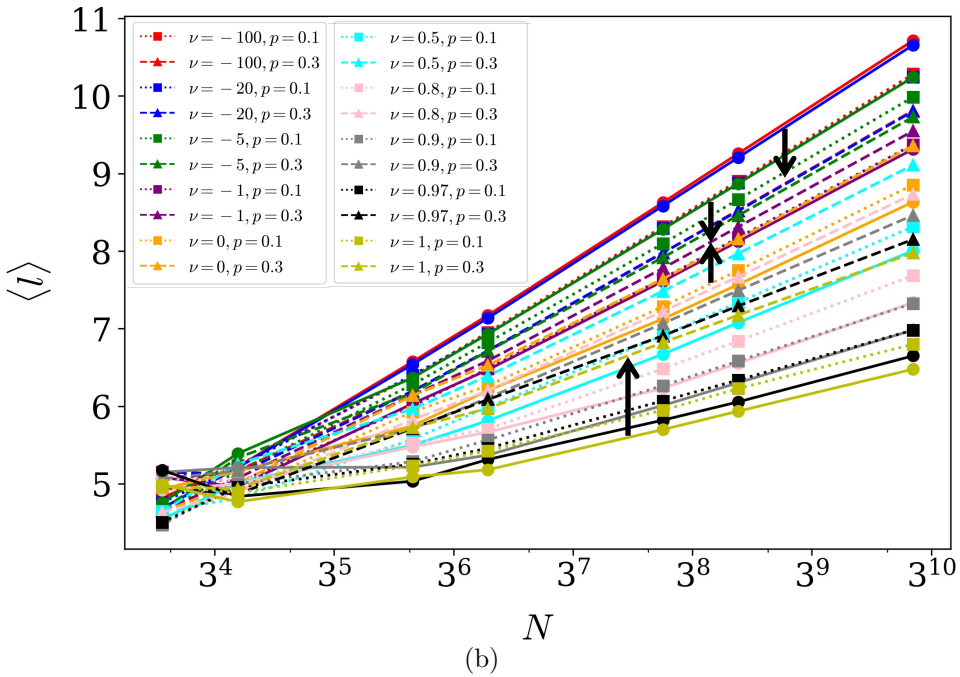
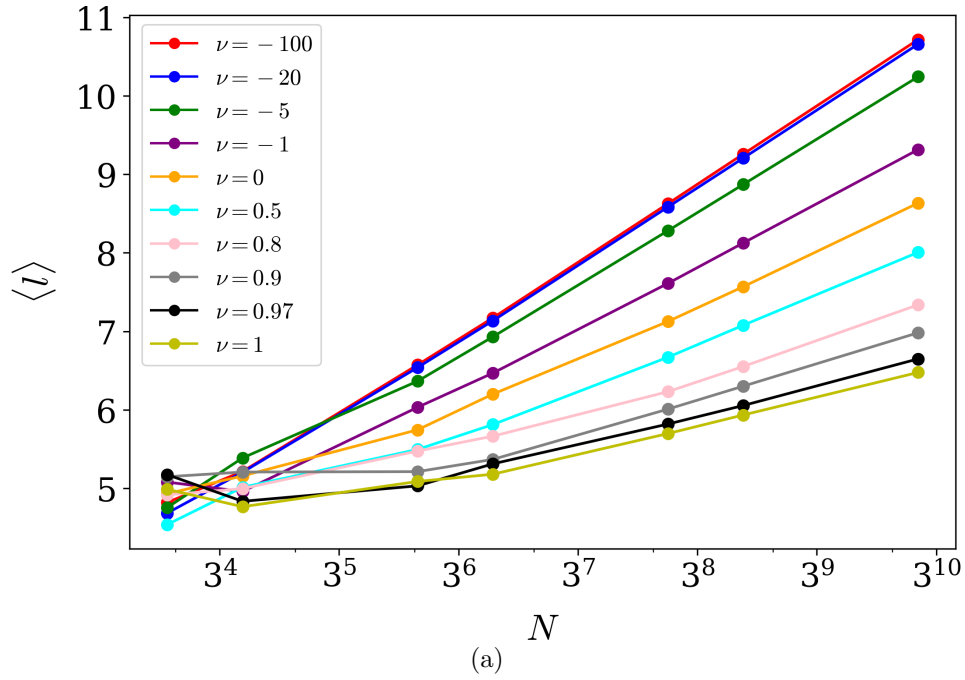


図 4.8: サイズ  $N$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の増加。ここで、 $N = 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000, 50000$  とした。(a)  $N$  が増加するにつれて  $\langle l \rangle$  は大きくなる。特に、 $\nu = -100$  の赤色の直線（レギュラーネットワークに対応する）のような  $\nu \ll 0$  の場合には  $\langle l \rangle \approx \log_3 N$  となる。 $\nu = 1$ （金色線）と  $\nu = -1$ （紫色線）のときは、それぞれ SF ネットワークと ER ランダムグラフに対応する。(b) ランダム摂動により、 $\langle l \rangle$  は  $\nu = -1$ （紫色線）を境界として反対方向にシフトし、(a) での異なる  $\nu$  値間の結果を補間する。

## 4.4 モジュール構造を持つ様々なネットワークにおける最短ループ長

4.3節では、モジュール構造を持たないネットワークにおいて、次数分布の分散が小さいほど結合の頑健性が向上すること [13] に対応して、最短ループの平均長が長くなる（穴が大きくなる）ことを明らかにした。そこで本節では、モジュール構造を持つネットワークでは、強いモジュール構造が頑健性を低下させること [34] に対応して、モジュール構造の強さと最短ループの平均長との関係を示す。以下の結果では、サイズ  $N = 10000$ 、時間ステップあたりのノード接続数  $m = 2$ 、接続パラメータ  $\nu = 1, 0.5, 0, -1, -5, -10, -100$ 、モジュール構造の強さを制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$ 、モジュール数  $m_0 = 5, 10, 50, 100$  の各組み合わせについて、100回の実現結果を平均した値を示す。

図 4.9 に、モジュール構造を持つネットワークにおける、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の結果を示す。どのネットワークにおいても、 $\sigma^2$  が小さくなるほど、最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  は大きくなる。この結果は、小さい  $\sigma^2$  に対する結合の頑健性向上 [13] と一致する。また、実線から破線、一点鎖線、点線へと、モジュラリティ  $Q$  が増加するにつれて  $\sigma^2 - \langle l \rangle$  曲線は下側（最短ループ長が短い）にシフトする。これは、モジュール構造が強くなるにつれて小さな穴の数が増加することを意味する。さらに、モジュール数  $m_0$  が増加すると、最適な場合であるレギュラーネットワークでさえも、モジュール構造を持たない SF ネットワーク（GN モデルで  $\nu = 1$  の場合）よりも  $\langle l \rangle$  が小さくなる。モジュラリティ  $Q$  の増加に伴い、最短ループ長の分布  $P(l)$  が短い側へシフトして、より小さな穴を多く含むようになる結果を付録の図 5.7~5.9 に示している。

図 4.10 は、モジュラリティ  $Q$  の増加に伴って、最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  が急速に減少することを示している。 $Q < 0.5$  の範囲では  $\langle l \rangle$  はほぼ一定であるが、 $Q$  の値が大きくなるにつれて急激に低下する。モジュール数  $m_0$  が増加すると、この減少はより顕著になる。さらに、赤色線 ( $\nu = -100$  のレギュラーネットワーク) から金色線 ( $\nu = 1$  の SF ネットワーク) へと分散  $\sigma^2$  が増加するにつれて  $Q - \langle l \rangle$  曲線は下側（最短ループ長が短い）にシフトする。言い換えれば、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  が大きいほど、 $\langle l \rangle$  は小さくなる、すなわち小さな穴の数は増加する。ここで、SF ネットワークからレギュラーネットワークまで、あらゆるネットワークにおいて、モジュラリティ  $Q$  が増加することで頑健性が低下すること [34] を強調する。したがって、どのようなネットワークにおいても、モジュール構造が強まるほど、含まれる穴は小さくなり、頑健性は低下すると言える。モジュール数  $m_0 = 10, 50$  でも同様の傾向が得られており、 $\sigma^2 - \langle l \rangle$  曲線と  $Q - \langle l \rangle$  曲線の結果を、それぞれ付録の図 5.10 と図 5.11 に示す。

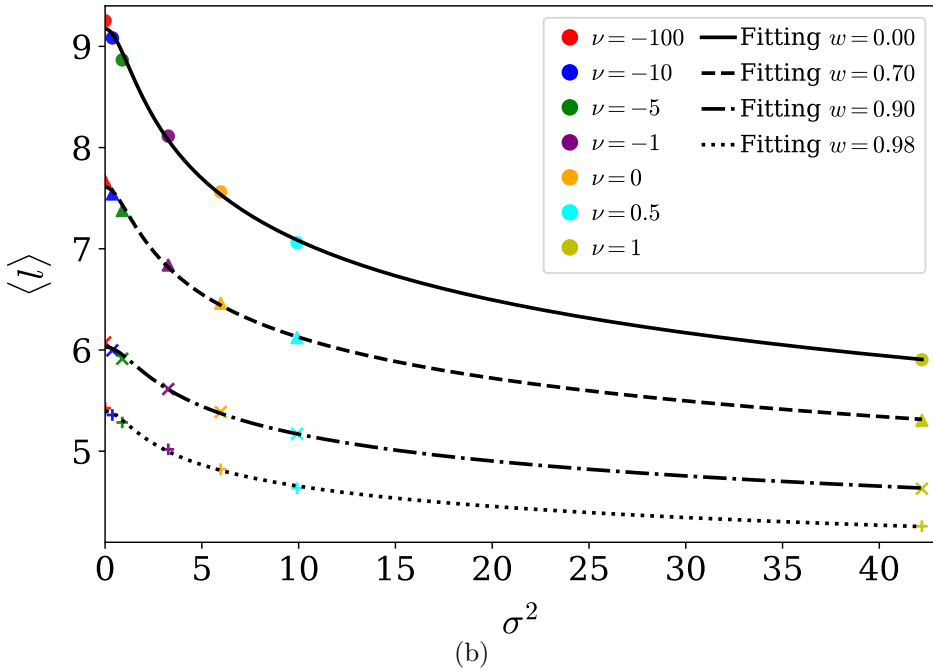
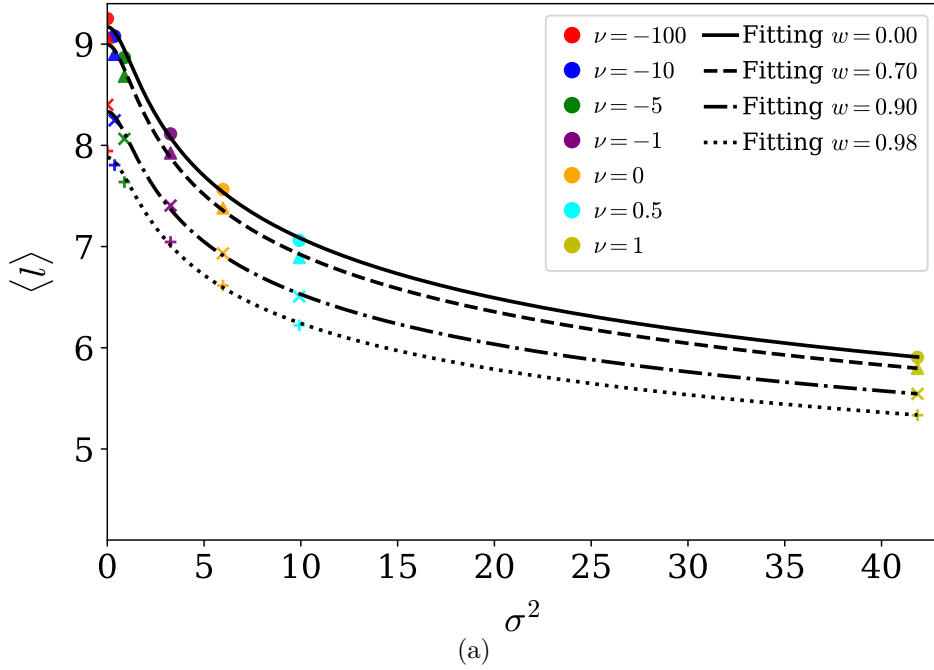


図 4.9: サイズ  $N = 10000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  での、連続的に変化する次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の単調減少。(a) モジュール数  $m_0 = 5$ 、(b)  $m_0 = 100$  の結果。モジュラリティ  $Q$  が増加するにつれて、実線から破線、一点鎖線、点線へと  $\sigma^2 - \langle l \rangle$  曲線は下側にシフトする。丸印、三角印、クロス、十字印は、モジュール構造の強度を表すモジュラリティ  $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$  にそれぞれ対応する。黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。

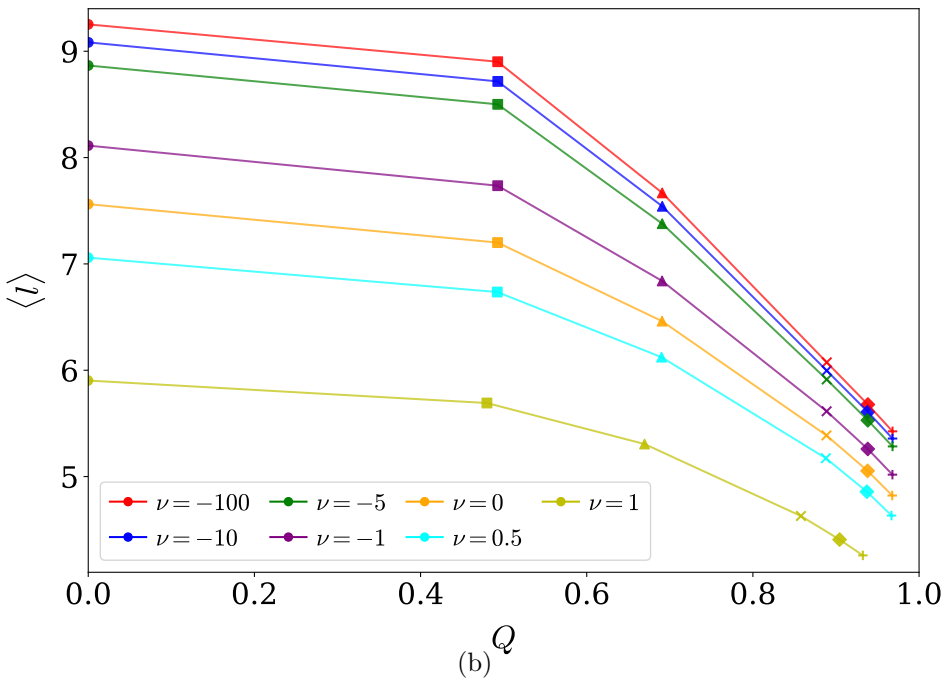
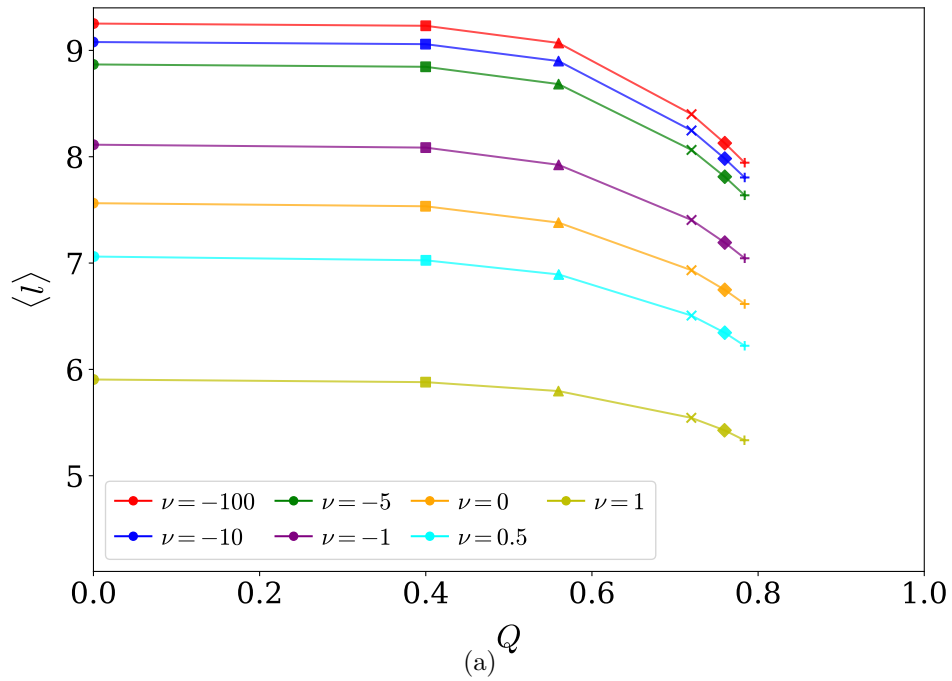


図 4.10: サイズ  $N = 10000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$ での、連続的に変化する次数分布の下でのモジュラリティ  $Q$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の急激な減少。(a) モジュール数  $m_0 = 5$ 、(b)  $m_0 = 100$  の結果。次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  が増加するにつれて、レギュラーネットワーク (赤色線の  $\nu = -100$ ) から SF ネットワーク (金色線の  $\nu = 1$ ) へと  $Q - \langle l \rangle$  曲線は下側にシフトする。丸印、四角印、三角印、クロス、ひし形、十字印は、モジュール構造の強度を表すモジュラリティ  $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.50, 0.70, 0.90, 0.95, 0.98$  にそれぞれ対応する。

## 第5章 結論

現代社会は多様なネットワークに支えられている一方で、大規模災害やテロ攻撃、システム障害といった危機に常に脅かされている。ネットワークは全体が連結していなければ機能せず、結合の維持は効率性に先立つ最も基本的な要件である。しかしながら、効率性を重視して構築されてきた多くの現実ネットワークは深刻な脆弱性を抱えており、結合の頑健性を高めるための新たなネットワーク設計指針が強く求められている。また、現実ネットワークには、次数分布がべき乗則に従う不平等な構造であるだけでなく [3, 4]、モジュール構造を持ち、最小の「穴」となる三角形を多く含む [23, 24] といった特徴がある。既存研究では、次数分布の分散が小さいほど頑健性が向上する一方で [13]、強いモジュール構造は頑健性を低下させること [34] が知られている。ただし、ループ構造が頑健性と関係することは示唆されてきたが [11, 16]、その最適な大きさについては未解明であった。

そこで本研究では、「穴」となる最短ループに着目して、次数分布の分散およびモジュール構造の強さ（モジュラリティ）との関係を網羅的に調べた。その結果、同一のサイズおよび平均次数において連続的に変化する次数分布の下で、モジュール構造の有無にかかわらず成り立つ、様々なネットワークに共通する普遍的な性質を見出した。以下に、その主要な結果を示す。

- 次数分布の分散を小さくすると、最短ループの平均長は増加する [Kawato-1]。最短ループの平均長の増加は、ネットワークが「大きな穴」を多く含むようになることを意味する。これは、次数分布の分散が小さいほど結合の頑健性が向上すること [13] に対応する。
- 一方、モジュール構造を強めると、最短ループの平均長は減少する [Kawato-2]。特に、最適な場合であるレギュラーネットワークでさえも、モジュール構造を持たないSFネットワークよりも小さい値を示す。これは、モジュール構造の強化が頑健性を低下させること [34] に対応する。
- レギュラーネットワークにおいては、最短ループの平均長が  $O(\log N)$  を示して、ラマヌジャングラフのスケール [29, 30] と一致する [Kawato-1]。

ところで、「大きな穴」と「強い結合」の共存は一見矛盾するように思えるが、これらの結果が示すのは、最適な穴の大きさである  $O(\log N)$  の長いループを構築することで、結合の頑健性を向上できることである。その理由の一つとして、ラマヌジャングラフが大きな拡大定数を持ち、ネットワークを2つの部分に分割されにくい特性を持つことが挙げられる [29, 30]。さらに、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  と最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の間には滑らかな曲線関係を示すことから、その明示的な数式表現の存在も示唆される。

今後の課題として、本研究で得られた重要な知見を基盤として、現実ネットワークが抱える脆弱性を克服するための、システムティックな構造移行法を検討する必要があると考えている。現実ネットワークが脆弱性を抱える背景には、いくつかの要因が重なっている。第一に、新規ノードが利得や効率を最大化しようとする利己的な選択の結果として、リンクがハブノードに集中して不平等なSF構造が形成される。第二に、別の効率性から、ノード間の代替経路としての三角形（最小の穴）を多数生成する。第三に、友人関係や共通の関心、宗教といった属性、あるいは地理的制約などによって、モジュール内の結びつきが強くなる。これらの要因が同時に存在することで、次数分布の分散が小さく、小さい穴を多く持ち、かつモジュール構造が強い、極めて脆弱なネットワーク構造が構成されていると考えられる。本研究の成果は、このような現実ネットワークに対して、「大きさが  $O(\log N)$  の長いループを構築する」という視点から再配線を行うことで、結合の頑健性を向上できる可能性を示唆している。特に、現実の人間関係、鉄道路線、道路、電力線といったリンクを全面的に解体・再構築することは困難であるため、既存のリンクを可能な限り再利用することが重要となる。したがって、既存構造を維持しながらも、不足する部分に対しての投資を行い、段階的により頑健な構造へ移行する実現性の高い方法を検討することが求められる。その際、局所的な情報のみを用いた分散処理的な再配線方法も課題である。さらに、本研究ではネットワークのトポロジー構造に着目したが、現実ネットワークにはそれ以外にも重要な制約や要素が存在する。例えば、電力網や交通網では、鉄塔や交差点といったノードが空間的に配置されており、電力線や道路といったリンクの長さに応じて、エネルギー損失や建設コストなどの物理的コストが伴う。また、社会ネットワークや情報通信ネットワークにおいては、ノードやリンクが一様ではなく、役割や種類の異なる要素が混在している。したがって、これらの空間的制約やリンクの重み、ノード・リンクの異質性を考慮した検討も重要であると考えられる。

# 付録

本付録では、第4章で示した結果を補足するための追加図を示す。

## 4.3.1 節の付録

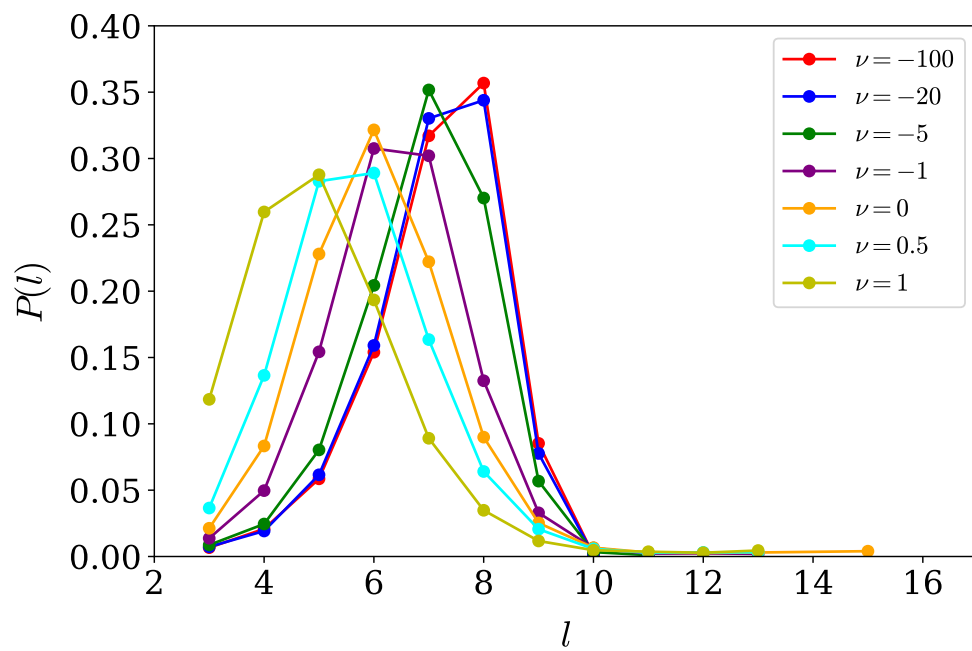
図5.1～図5.3に、サイズ  $N = 1000, 5000, 10000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  のネットワークにおける最短ループ長の分布  $P(l)$  および累積分布  $P_{\text{SL}}(L > l)$  を示す。

## 4.3.2 節の付録

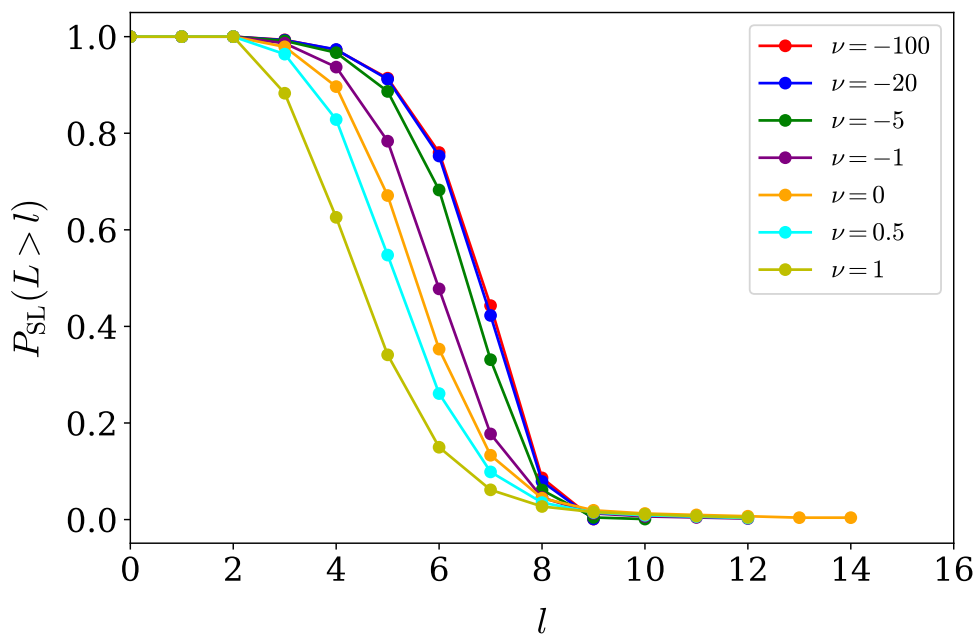
図5.4～図5.6に、サイズ  $N = 1000, 5000, 10000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$  のネットワークにおける、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  を示す。これらの結果には、ランダム摂動を加えた場合も含まれている。

## 4.4 節の付録

図5.7～図5.9に、サイズ  $N = 10000$ 、平均次数  $\langle k \rangle \approx 4$ 、モジュール数  $m_0 = 100$  における、異なる接続パラメータ  $\nu = -100, -5, -1, 0, 0.5, 1$  での最短ループ長の分布  $P(l)$  を示す。また、図5.10に、モジュール数  $m_0 = 10, 50$  での、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  を示す。さらに、図5.11に、同じ条件下でのモジュラリティ  $Q$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  を示す。

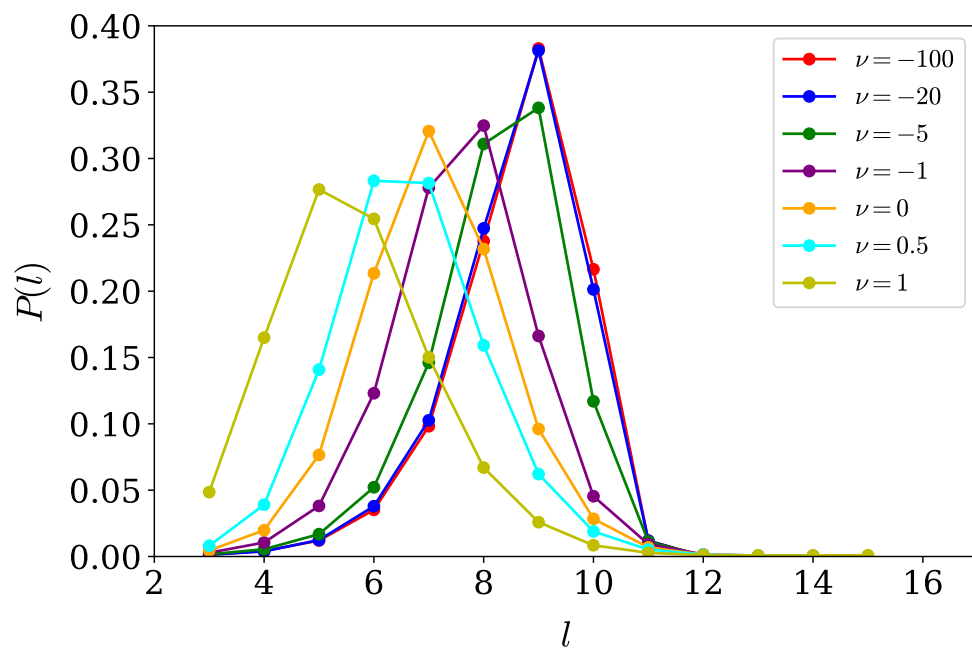


(a)

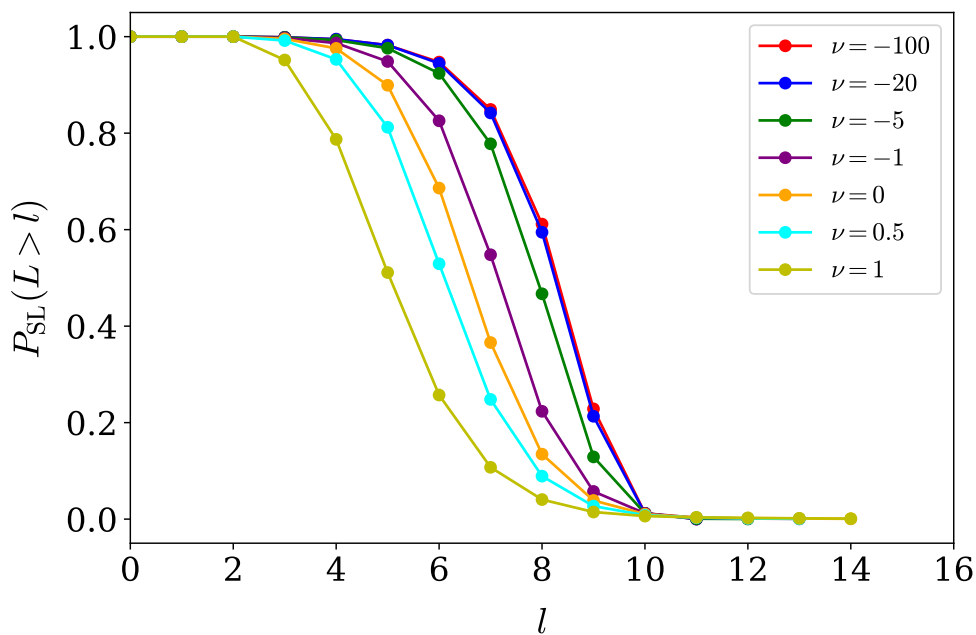


(b)

図 5.1: サイズ  $N = 1000$  のネットワークにおける、(a) 異なる接続パラメータ  $\nu$  の最短ループ長の分布  $P(l)$ 、(b) 累積分布  $P_{\text{SL}}(L > l)$ 。

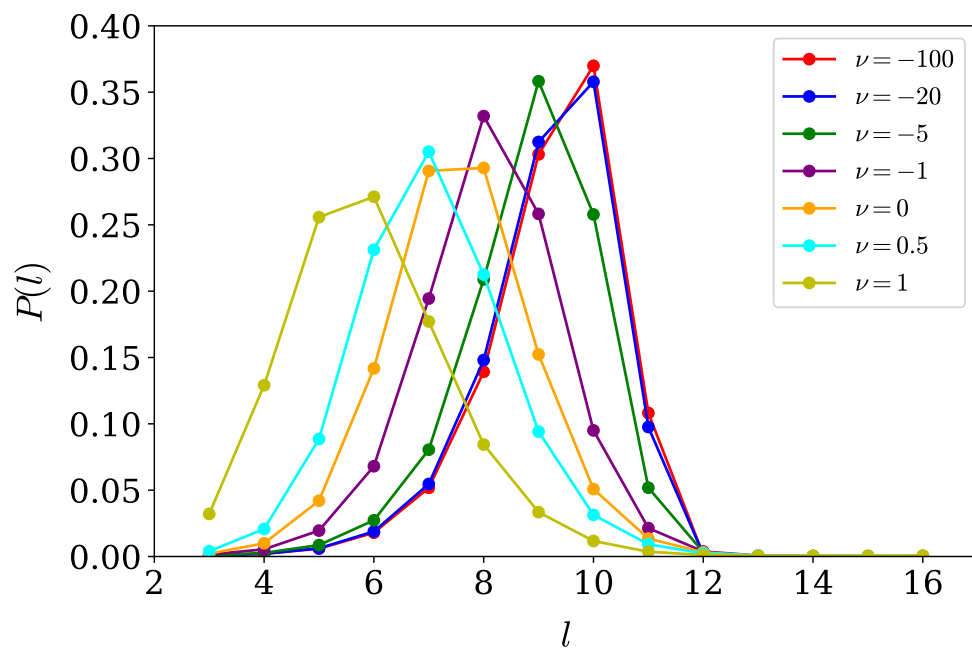


(a)

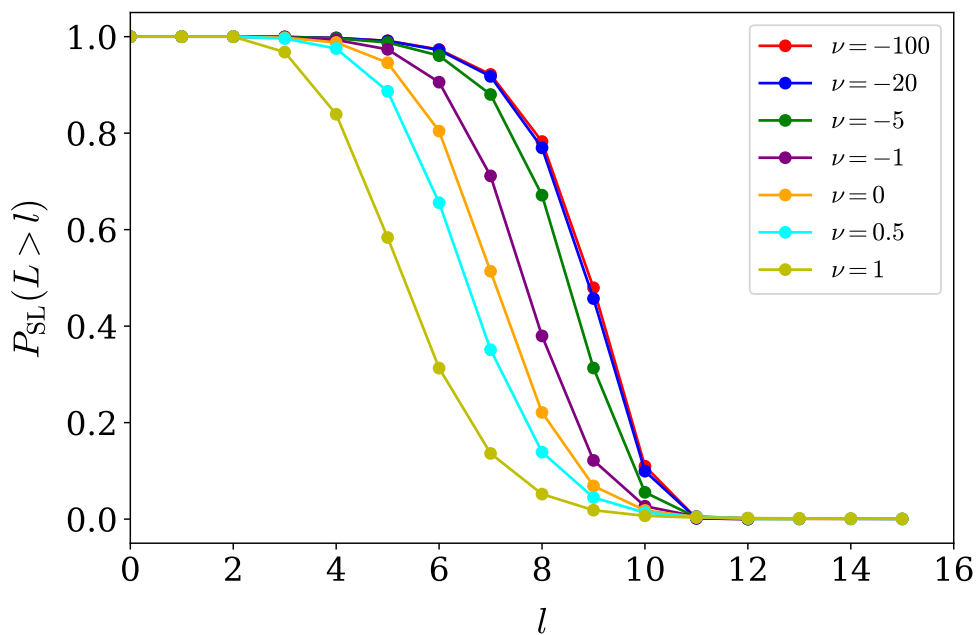


(b)

図 5.2: サイズ  $N = 5000$  のネットワークにおける、(a) 異なる接続パラメータ  $\nu$  の最短ループ長の分布  $P(l)$ 、(b) 累積分布  $P_{\text{SL}}(L > l)$ 。

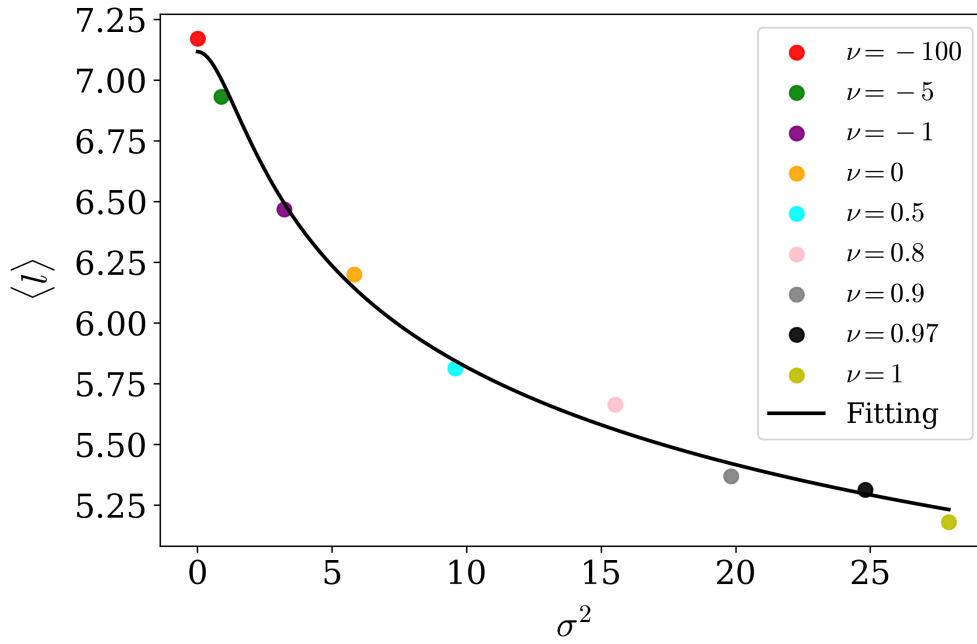


(a)

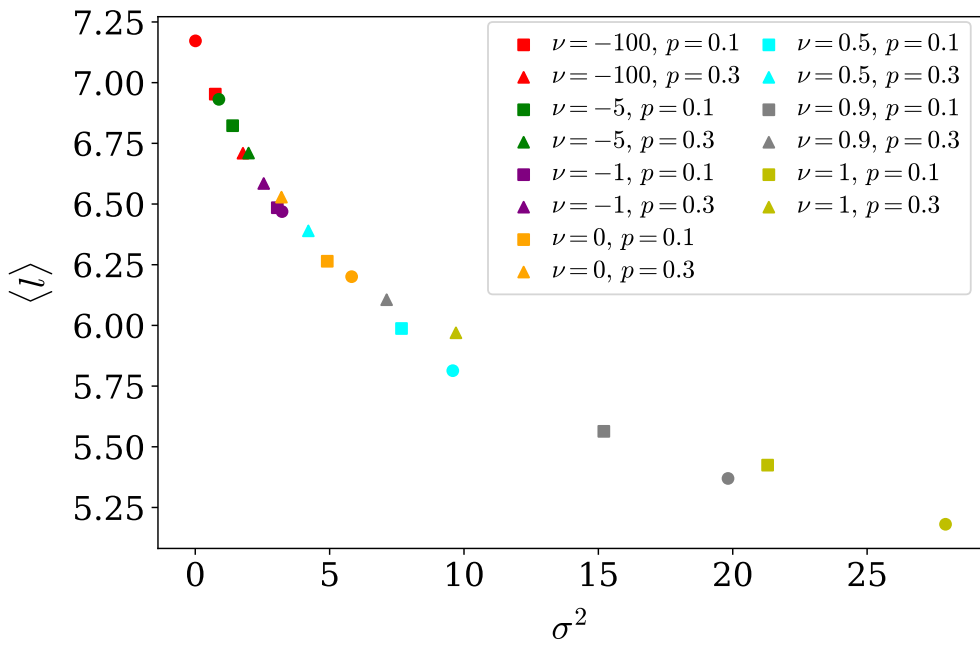


(b)

図 5.3: サイズ  $N = 10000$  のネットワークにおける、(a) 異なる接続パラメータ  $\nu$  の最短ループ長の分布  $P(l)$ 、(b) 累積分布  $P_{\text{SL}}(L > l)$ 。

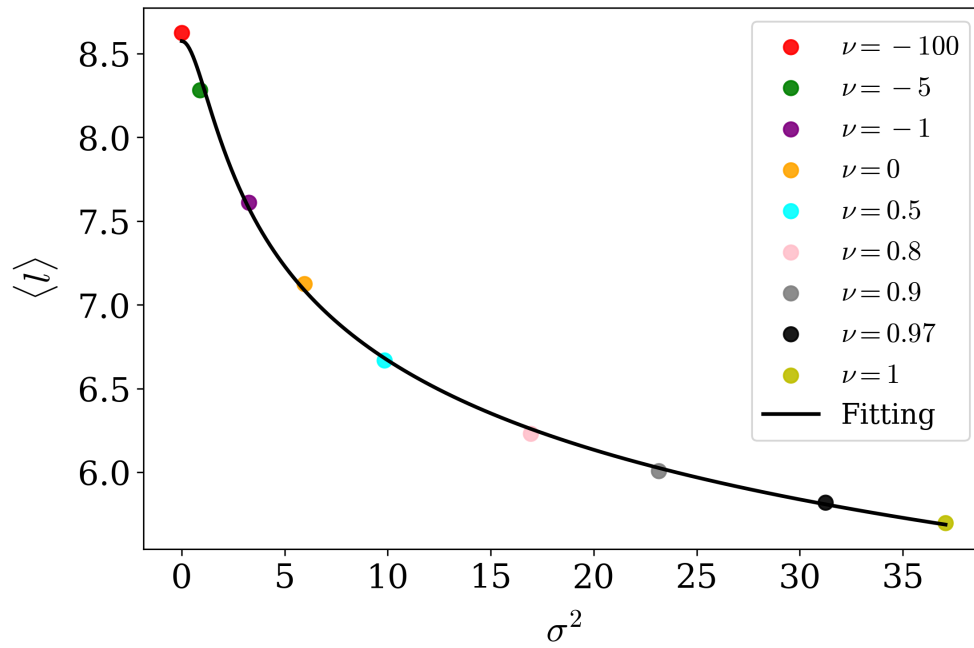


(a)

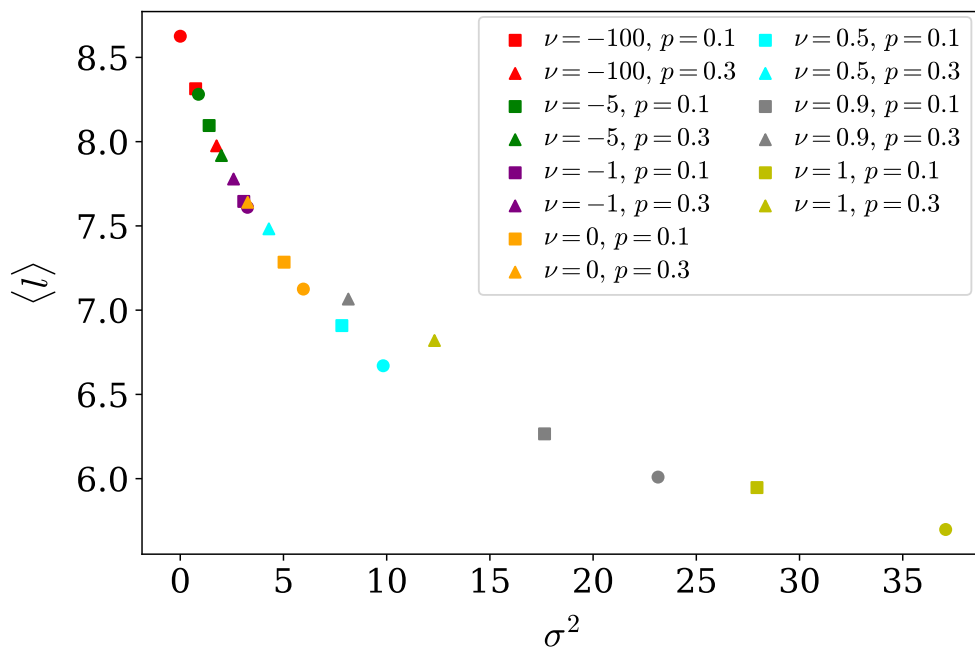


(b)

図 5.4: サイズ  $N = 1000$  のネットワークにおける、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の単調減少。(a) 黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。(b) 四角印、三角印は、それぞれ再配線率  $p = 0.1, 0.3$  でランダム摂動を加えた結果を示す。

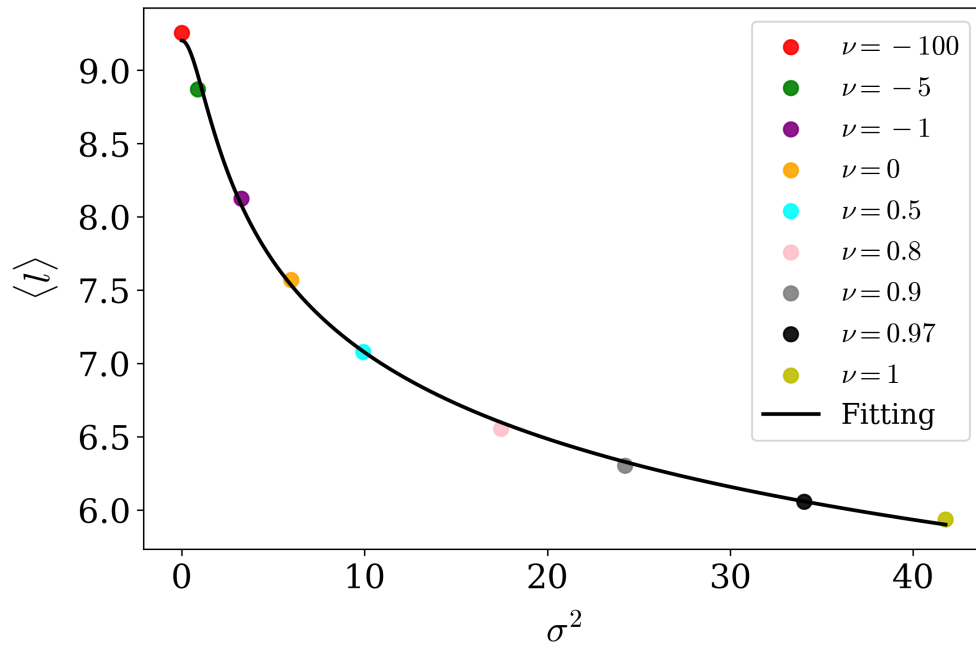


(a)

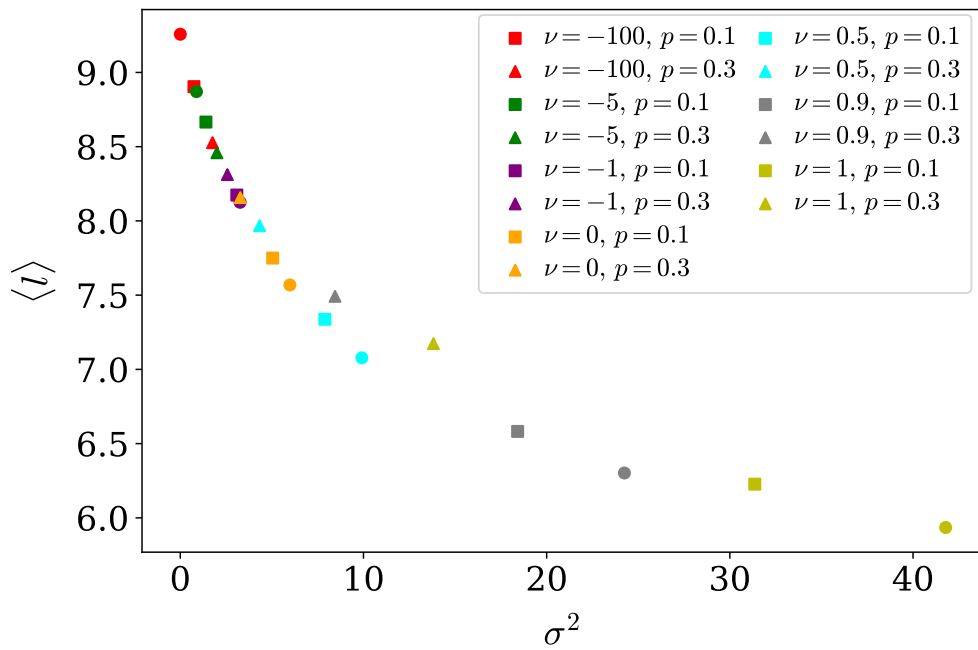


(b)

図 5.5: サイズ  $N = 5000$  のネットワークにおける、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の単調減少。(a) 黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。(b) 四角印、三角印は、それぞれ再配線率  $p = 0.1, 0.3$  でランダム摂動を加えた結果を示す。

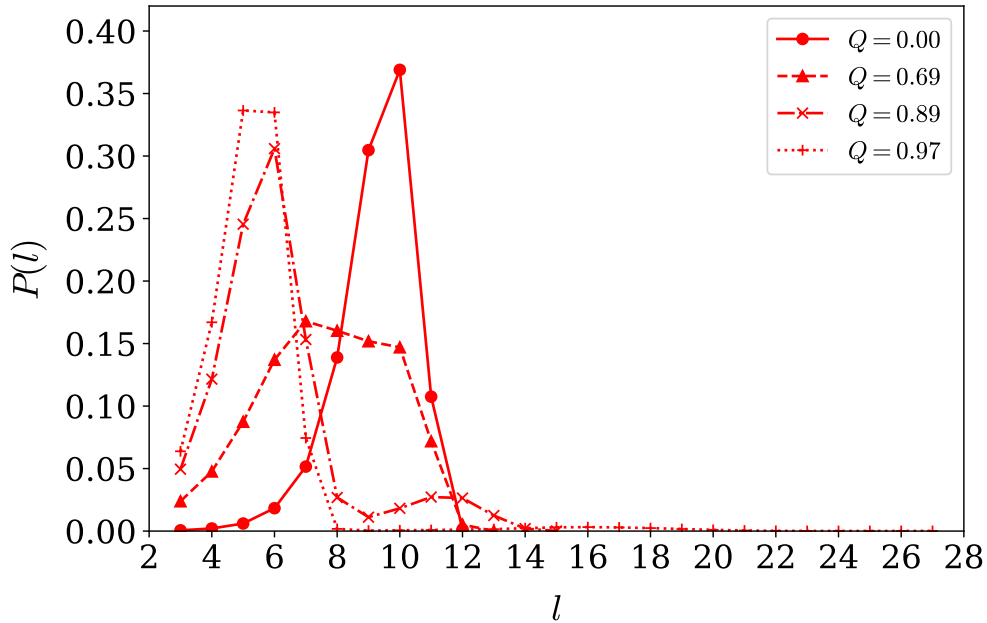


(a)

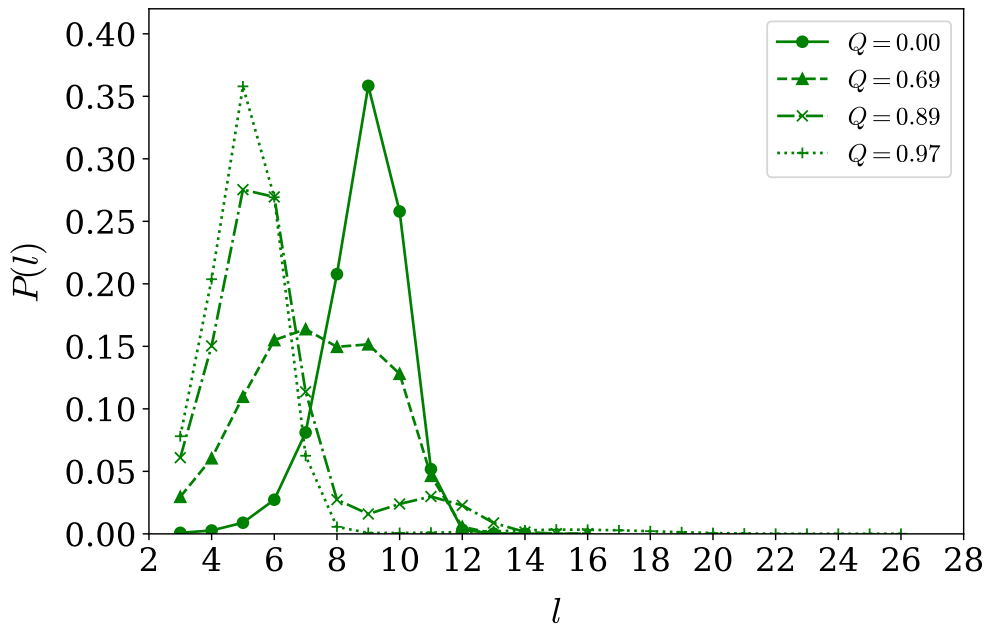


(b)

図 5.6: サイズ  $N = 10000$  のネットワークにおける、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の単調減少。(a) 黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。(b) 四角印、三角印は、それぞれ再配線率  $p = 0.1, 0.3$  でランダム摂動を加えた結果を示す。

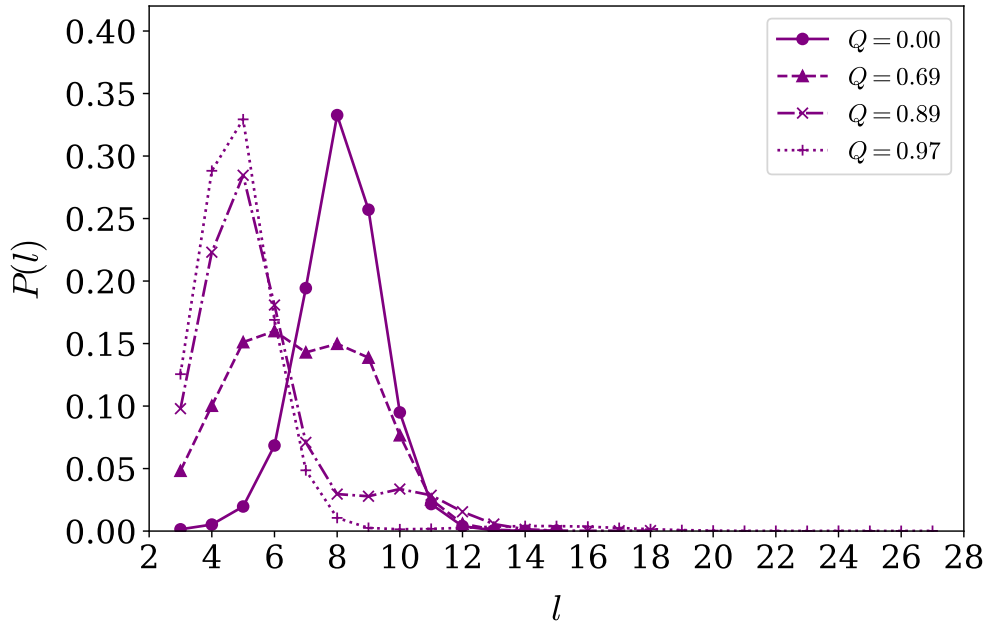


(a)

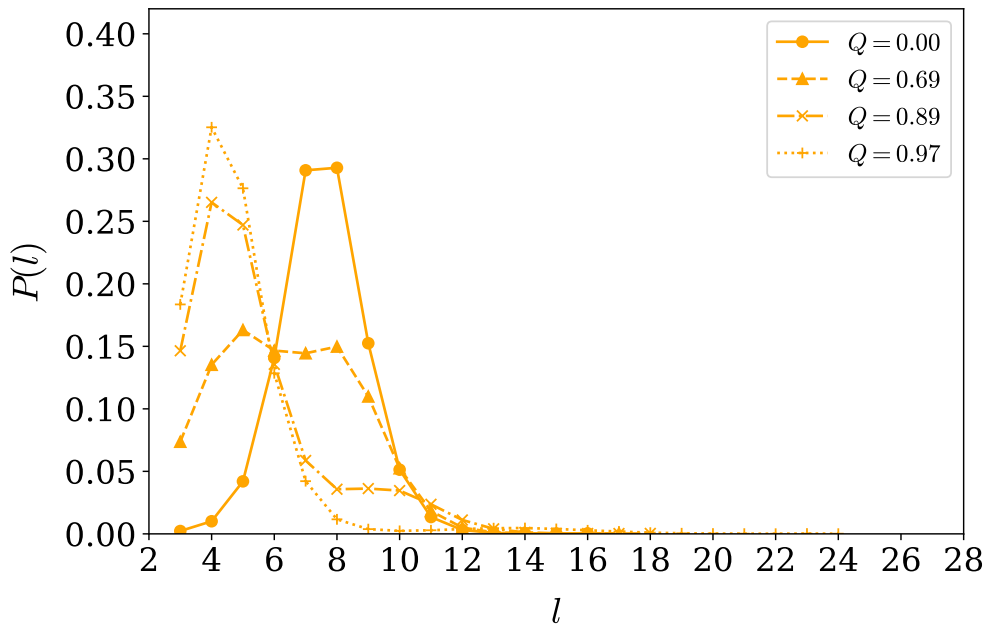


(b)

図 5.7: サイズ  $N = 10000$ 、モジュール数  $m_0 = 100$  での、モジュラリティ  $Q$  増加による最短ループ長の分布  $P(l)$  のシフト。(a)  $\nu = -100$  (レギュラーネットワークに対応)、(b)  $\nu = -5$  の結果。丸印と実線、三角印と破線、クロスと一点鎖線、十字印と点線は、 $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$  にそれぞれ対応する。

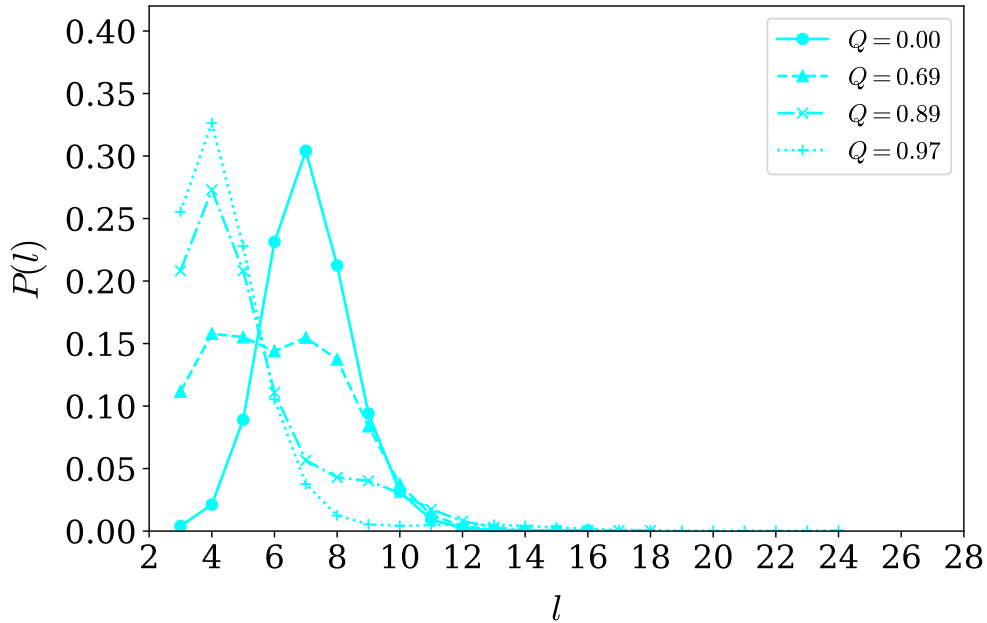


(a)

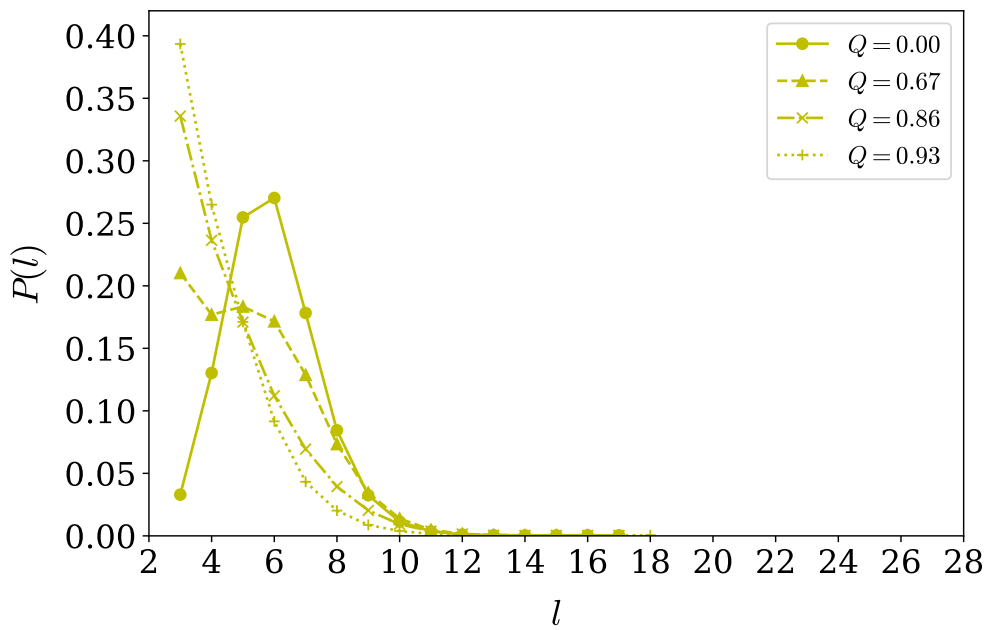


(b)

図 5.8: サイズ  $N = 10000$ 、モジュール数  $m_0 = 100$  での、モジュラリティ  $Q$  増加による最短ループ長の分布  $P(l)$  のシフト。(a)  $\nu = -1$  (ER ランダムグラフに対応)、(b)  $\nu = 0$  の結果。丸印と実線、三角印と破線、クロスと一点鎖線、十字印と点線は、 $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$  にそれぞれ対応する。



(a)



(b)

図 5.9: サイズ  $N = 10000$ 、モジュール数  $m_0 = 100$  での、モジュラリティ  $Q$  増加による最短ループ長の分布  $P(l)$  のシフト。(a)  $\nu = 0.5$ 、(b)  $\nu = 1$  (SF ネットワークに対応) の結果。丸印と実線、三角印と破線、クロスと一点鎖線、十字印と点線は、 $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$  にそれぞれ対応する。

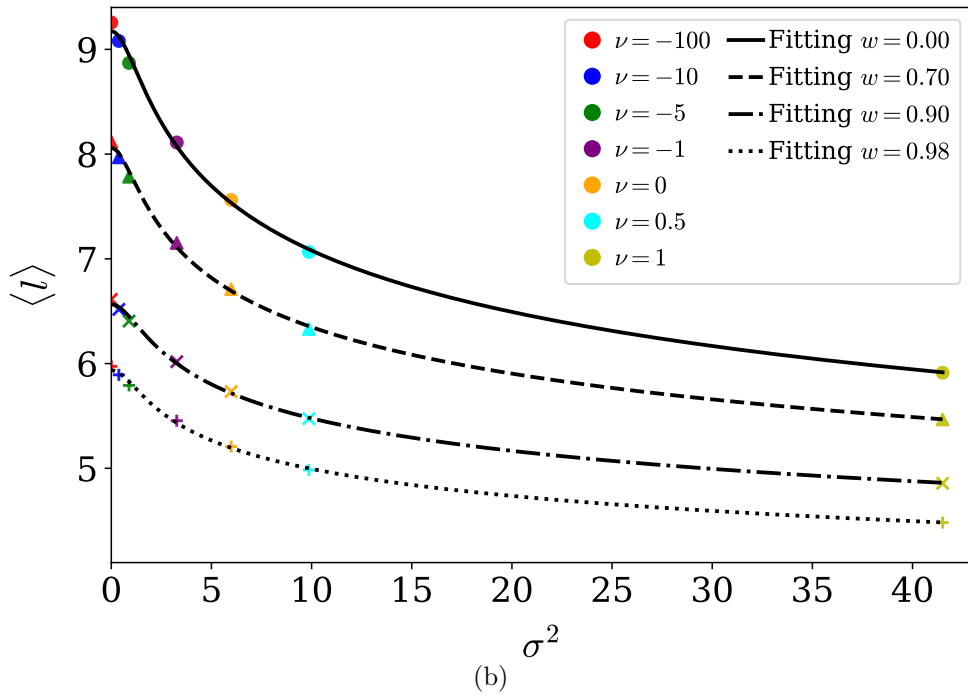
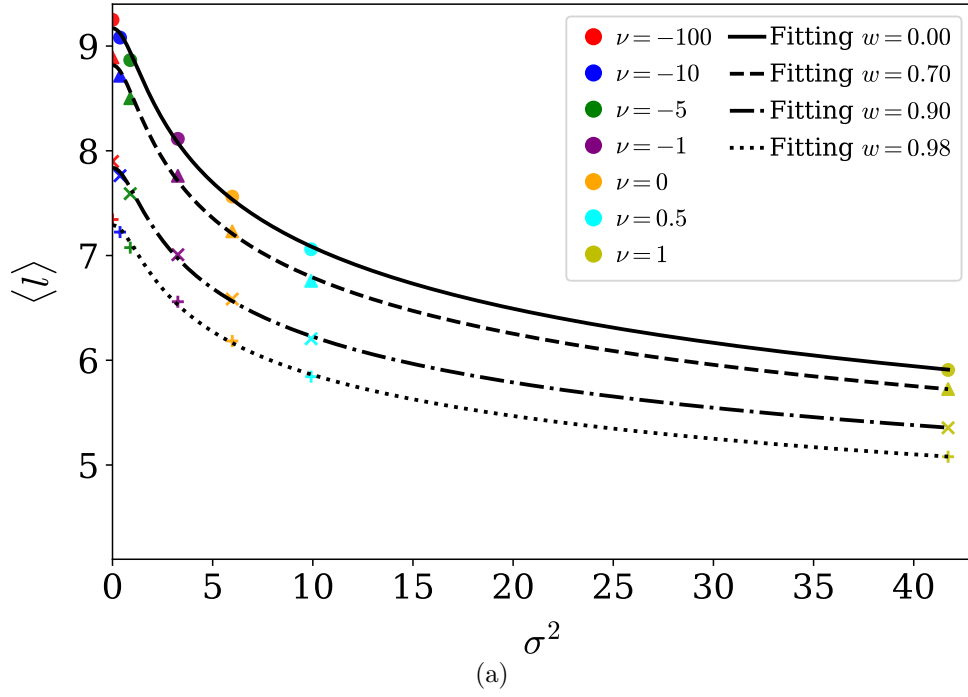


図 5.10: サイズ  $N = 10000$  の (a) モジュール数  $m_0 = 10$ 、(b)  $m_0 = 50$  での、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の単調減少。丸印、三角印、クロス、十字印は、モジュラリティ  $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.70, 0.90, 0.98$  にそれぞれ対応する。黒い実線は、最小二乗法により推定したパラメータ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を用いた関数  $a_3 / \log(a_1 x^2 + a_2) + a_4$  のフィッティングである。

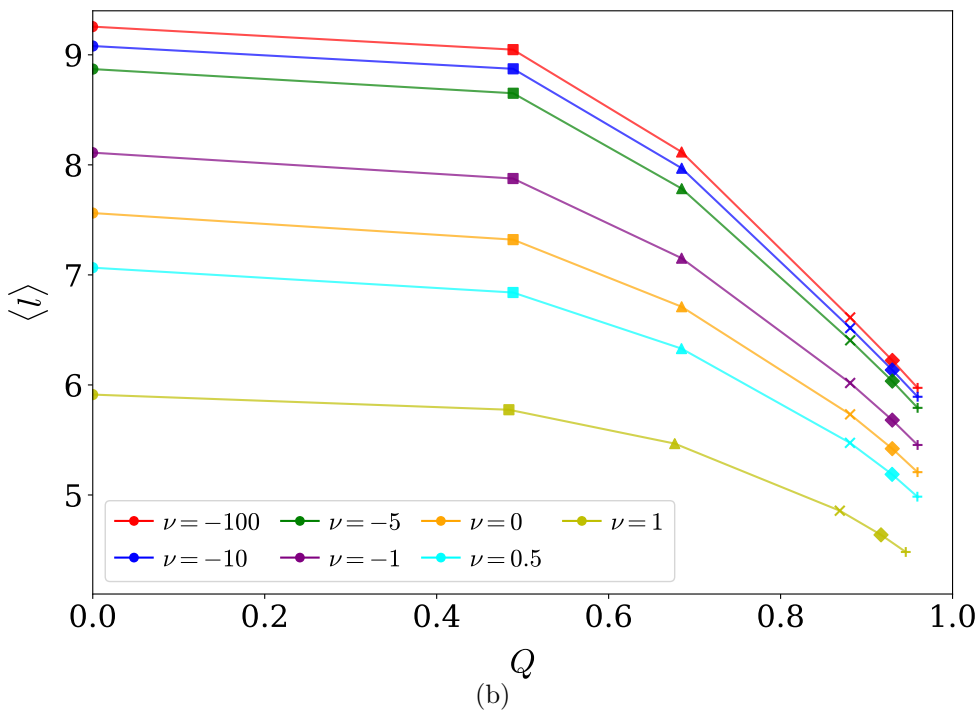
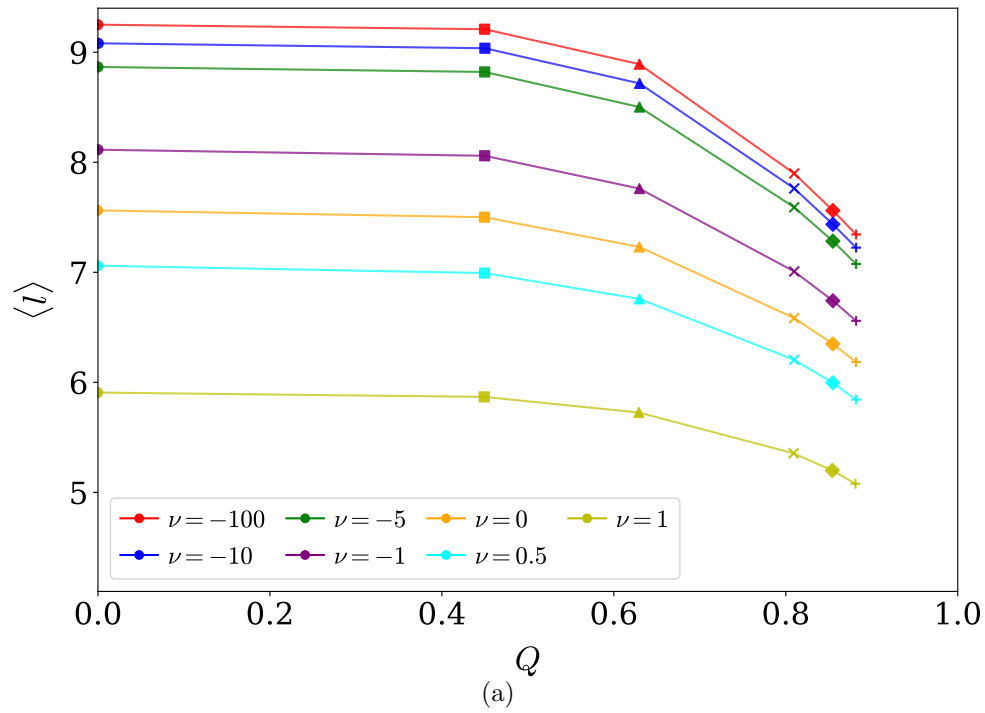


図 5.11: サイズ  $N = 10000$  の (a) モジュール数  $m_0 = 10$ 、(b)  $m_0 = 50$  での、モジュラリティ  $Q$  に対する最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  の急激な減少。丸印、四角印、三角印、クロス、ひし形、十字印は、モジュラリティ  $Q$  を制御する再配線確率  $w = 0.00, 0.50, 0.70, 0.90, 0.95, 0.98$  にそれぞれ対応する。

## 査読付き論文業績リスト

- [Kawato-1] **Kiri Kawato**, Yukio Hayashi, Larger holes as narrower degree distributions in complex networks, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 681(131072), 2026.
- [Kawato-2] **Kiri Kawato**, Yukio Hayashi, Strong communities weaken the better connectivity based on large holes, *in: Proceedings of the International Conference on Complex Networks and Their Applications XIX*, Springer, 2026. (口頭発表、12頁、掲載予定)

## 参考文献

- [1] 内閣府, 東日本大震災における災害応急対策の主な課題, 首都直下地震対策検討ワーキンググループ, 2012. (2026年1月14日閲覧).
- [2] ロイター通信, 世界的システム障害 航空便や医療など影響多岐に 脆弱性が露呈, 2024年7月19日. (2026年1月14日閲覧).
- [3] A.-L. Barabási, R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *Science*, 286, pp.509–512, 1999.
- [4] L.A.N. Amaral, A. Scala, M. Barthélémy, H.E. Stanley, Classes of small-world networks, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 97, pp.11149–11152, 2000.
- [5] A.-L. Barabási, R. Albert, H. Jeong, Mean-field theory for scale-free random networks, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 272, pp.173–187, 1999.
- [6] R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabási, Error and attack tolerance of complex networks, *Nature*, 406, pp.378–382, 2000.
- [7] R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, S. Havlin, Breakdown of the internet under intentional attack, *Physical Review Letters*, 86, pp.3682–3685, 2001.
- [8] A. Braunstein, L. Dall’Asta, G. Semerjian, L. Zdeborová, Network dismantling, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 113, pp.12368–12373, 2016.
- [9] D. Santos, A. de Sousa, P. Monteiro, Compact models for critical node detection in telecommunication networks, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 64, pp.325–334, 2018.

- [10] R.M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, *in: Proceedings of the Complexity of Computer Computations*, R.E. Miller, J.W. Thatcher, J.D. Bohlinger (Eds.), Plenum Press, New York, pp.85–103, 1972.
- [11] M. Chujyo, Y. Hayashi, A loop enhancement strategy for network robustness, *Applied Network Science*, 6, 3, 2021.
- [12] H.-J. Zhou, Spin glass approach to the feedback vertex set problem, *European Physical Journal B*, 86, 455, 2013.
- [13] M. Chujyo, Y. Hayashi, Optimal network robustness in continuously changing degree distributions, *in: Proceedings of the International Conference on Complex Networks and Their Applications XI*, Studies in Computational Intelligence 1078, Springer, Cham, pp.395–406, 2023.
- [14] L. Ma, J. Liu, B. Duan, M. Zhou, A theoretical estimation for the optimal network robustness measure  $R$  against malicious node attacks, *Europhysics Letters*, 111, 28003, 2015.
- [15] M. Chujyo, Y. Hayashi, T. Hasegawa, Optimal network robustness against attacks in varying degree distributions, *arXiv:2301.06291*, 2023.
- [16] M. Chujyo, Y. Hayashi, Adding links on minimum degree and longest distance strategies for improving network robustness and efficiency, *PLOS ONE*, 17, e0276733, 2022.
- [17] D.S. Callaway, M.E.J. Newman, S.H. Strogatz, D.J. Watts, Network robustness and fragility: percolation on random graphs, *Physical Review Letters*, 85, pp.5468–5471, 2000.
- [18] S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes, *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [19] R. Cohen, S. Havlin, *Complex Networks: Structure, Robustness and Function*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [20] M.E.J. Newman, *Networks: An Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
- [21] M.E. Fisher, J.W. Essam, Some cluster size and percolation problems, *Journal of Mathematical Physics*, 2, pp.609–619, 1961.

- [22] M.E.J. Newman, Message passing methods on complex networks, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 479, 20220774, 2023.
- [23] M.E.J. Newman, The structure of scientific collaboration networks, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 98, pp.404–409, 2001.
- [24] M.E.J. Newman, The structure and function of complex networks, *SIAM Review*, 45, pp.167–256, 2003.
- [25] N. Alon, R. Yuster, U. Zwick, Finding and counting given length cycles, *Algorithmica*, 17, pp.209–223, 1997.
- [26] V. Latora, V. Nicosia, G. Russo, Complex Networks: Principles, Methods and Applications, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2017.
- [27] H. Bonneau, A. Hassid, O. Biham, R. Kühn, E. Katzav, Distribution of shortest cycle lengths in random networks, *Physical Review E*, 96, 062307, 2017.
- [28] P. Erdős, A. Rényi, On random graphs. I, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 6, pp.290–297, 1959.
- [29] N.L. Biggs, G. Boshier, Note on the girth of Ramanujan graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 49, pp.190–194, 1990.
- [30] T. McKenzie, S. Mohanty, High-girth near-Ramanujan graphs with lossy vertex expansion, *in: Proceedings of the 48th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2021)*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs) 198, Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, Dagstuhl, 96:1–96:15, 2021.
- [31] J. Friedman, A proof of Alon’s second eigenvalue conjecture, *in: Proceedings of the 35th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2003)*, ACM, New York, pp.720–724, 2003.
- [32] R. Kusunoki, Y. Hayashi, Investigating stronger tolerant network against cascading failures in focusing on changing degree distributions, *PLOS ONE*, 19, e0297094, 2024.

- [33] J. Kim, Y. Hayashi, Anti-modularization for both high robustness and efficiency including the optimal case, *PLOS ONE*, 19, e0301269, 2024.
- [34] Y. Hayashi, T. Ogawa, Universal vulnerability in strong modular networks with various degree distributions from inequality to equality, *Scientific Reports*, 15, 33129, 2025.
- [35] Y. Mou, Y. Hayashi, Vulnerable connectivity caused by local communities in spatial networks, *PLOS ONE*, 20, e0327203, 2025.
- [36] M.E.J. Newman, Modularity and community structure in networks, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 103, pp.8577–8582, 2006.
- [37] D.J. de Solla Price, A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes, *Journal of the American Society for Information Science*, 27, pp.292–306, 1976.
- [38] G. Bianconi, A.-L. Barabási, Competition and multiscaling in evolving networks, *Europhysics Letters*, 54, pp.436–442, 2001.
- [39] S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes, A.N. Samukhin, Structure of growing networks with preferential linking, *Physical Review Letters*, 85, pp.4633–4636, 2000.
- [40] P.L. Krapivsky, S. Redner, Organization of growing random networks, *Physical Review E*, 63, 066123, 2001.
- [41] F. Liao, Y. Hayashi, Emergence of robust and efficient networks in a family of attachment models, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 599, 127427, 2022.
- [42] M. Catanzaro, M. Boguñá, R. Pastor-Satorras, Generation of uncorrelated random scale-free networks, *Physical Review E*, 71, 027103, 2005.
- [43] S. Shai, D.Y. Kenett, Y.N. Kenett, M. Faust, S. Dobson, S. Havlin, Critical tipping point distinguishing two types of transitions in modular network structures, *Physical Review E*, 92, 062805, 2015.

- [44] Q. Nguyen, T.V. Vu, H.D. Dinh, D. Cassi, F. Scotognella, R. Alfieri, M. Bellingeri, Modularity affects the robustness of scale-free model and real-world social networks under betweenness and degree-based node attack, *Applied Network Science*, 6, 82, 2021.
- [45] M.E.J. Newman, The structure and function of complex networks, *SIAM Review*, 45, pp.167–256, 2003.
- [46] J. Kunegis, KONECT: the Koblenz network collection, *in: Proceedings of the 22nd International Conference on World Wide Web (WWW 2013, Companion Volume)*, ACM, New York, pp.1343–1350, 2013.
- [47] R. Guimerà, L. Danon, A. Díaz-Guilera, F. Giralt, A. Arenas, Self-similar community structure in a network of human interactions, *Physical Review E*, 68, 065103, 2003.
- [48] T. Opsahl, P. Panzarasa, Clustering in weighted networks, *Social Networks*, 31, pp.155–163, 2009.
- [49] L.A. Adamic, N. Glance, The political blogosphere and the 2004 US election: divided they blog, *in: Proceedings of the 3rd International Workshop on Link Discovery (LinkKDD 2005)*, ACM, New York, pp.36–43, 2005.
- [50] M.E.J. Newman, S.H. Strogatz, D.J. Watts, Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications, *Physical Review E*, 64, 026118, 2001.

# 謝辞

本研究を進めるにあたり、北陸先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科 林幸雄 教授には終始丁寧なご指導とご助言を賜りました。ここに謹んで御礼申し上げます。また、金沢大学 新学術創成研究科 坂本二郎 教授には異分野の視点から多くの示唆に富むご指摘をいただき、本研究を進める上で大きな助けとなりました。さらに、シミュレーション環境の構築やデータ整備において多大なご助力をいただいた博士後期課程の小川泰司さんに深く感謝いたします。本研究を支えてくださったすべての方々に厚く御礼申し上げます。