Title	様相演算を持つ部分構造論理の証明論的研究
Author(s)	鶴見，卓哉
Citation	
Issue Date	2006-12
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/3453
Rights	
Description	Supervisor:小野　寛晰，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

様相演算を持つ部分構造論理の証明論的研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

鶴見 卓哉

2006 年 12 月

修 士 論 文

様相演算を持つ部分構造論理の証明論的研究

指導教官 小野 寛晰 教授

審査委員主任 小野 寛晰 教授
審査委員 小川　瑞史　特任教授
審査委員 石原　哉　助教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

410082 鶴見 卓哉

提出年月日 2006 年 11 月

目 次

第1章　序論

通常の様相論理は、古典論理に様相記号 $\Box$ に関する公理と推論規則をつけ加えることにより得られる。しかし近年、古典論理を弱めた論理を基礎とした様相論理の研究が盛んに行われている。その一つが直観主義論理上の様相論理であり、1960 年代から 1990 年代にかけて、R.Bull、Fischer-Servi、H.Ono、F.Wolter 等によって研究がなされてきた。様相論理の証明論的研究としては、sequent 計算を用いる方法のほか、Fitting [2] や Goré 等によるタブロー法によるものや、Prawitz [10] や A.K.Simpson による自然演繹を用いたものがある。

本研究でとりあげるのは、部分構造論理上の様相論理である。Ono（2005) は Gödel の translation を用いて、**S4** と **Int** 上の論理の関係から、様相部分構造論理 $\mathbf{S4_{FL}}$ と部分構造論理の基本的体系 **FL** 上の論理のあいだの関係に拡張できることを示した [9]。このような部分構造論理上の様相論理の研究は、様相演算の公理の選択の任意性の問題などがあり、証明論的にも意味論的にも未だ多くの問題が未解決のままである。本研究では、特に証明論的立場から部分構造論理上の様相論理の研究を行った。まず、Ono により導入された様相部分構造論理の Gentzen 流の sequent 計算の体系に対し、その体系が cut 除去定理および Craig の補間定理が成り立つことを示した。さらにその結果から、この論理の決定可能性が導かれることを示した。また、意味論的研究として、Amano(2006) [1] により示された結果がある。本研究の結果との比較を行った。

[**様相部分構造論理ついて**]

本研究で、扱った様相部分構造論理の体系を示す前に、部分構造論理の体系および様相論理の体系について簡単に触れておく。

部分構造論理の体系 **FL** とは、直観主義論理の体系 **LJ** から全ての構造規則（weakening 規則、contraction 規則および exchange 規則）を取り除いたものである。**FL** には構造規則を一つも含まないが、**FL** に任意に構造規則を付ける加えることによって 8 種類の部分構造論理の体系 **FL**, $\mathbf{FL}_e$, $\mathbf{FL}_c$, $\mathbf{FL}_w$, $\mathbf{FL}_{ec}$, $\mathbf{FL}_{cw}$, $\mathbf{FL}_{ew}$ および $\mathbf{FL}_{ecw}$ を定義することができる。なお、$\mathbf{FL}_{cw}$ と表させる体系については、$\mathbf{FL}_{ecw}$（すなわち **LJ**) と同等である。なぜなら、weakening 規則と contraction 規則によって、exchange 規則と同じ推論が可能だからである。そのため通常は議論から除かれる。(第 3 章を参照)

様相論理の体系とは、部分構造論理に、さらに様相記号 $\Box$ に関する次の推論規則のうちのいくつかをつけ加えたものである。**K** , **KT** および **S4** は様相論理の各体系である。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\,(K) \qquad \frac{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Box A, \Sigma \Rightarrow B}\,(T) \qquad \frac{\Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\,(4)$$

KT は、**K** と **T** の推論規則を加えた体系であり、**S4** は、**T** と **4** の推論規則を加えた体系である。(第 4 章を参照)

本研究で扱った様相部分構造論理の体系を以下に示す。

- $\mathbf{K_{FL}}$, $\mathbf{K_{FL}}_e$, $\mathbf{K_{FL}}_w$, $\mathbf{K_{FL}}_{ec}$, $\mathbf{K_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{K_{FL}}_{ecw}$
- $\mathbf{KT_{FL}}$, $\mathbf{KT_{FL}}_e$, $\mathbf{KT_{FL}}_w$, $\mathbf{KT_{FL}}_{ec}$, $\mathbf{KT_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{KT_{FL}}_{ecw}$
- $\mathbf{S4_{FL}}$, $\mathbf{S4_{FL}}_e$, $\mathbf{S4_{FL}}_w$, $\mathbf{S4_{FL}}_{ec}$, $\mathbf{S4_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{S4_{FL}}_{ecw}$

第2章　直観主義論理の体系LJ

cut 除去定理および Crig の補間定理の証明の基本的な流れを説明する必要があると思われる。そこで、直観主義論理の体系 **LJ** について証明を与えていくことにする。

2.1　sequent 計算の体系

体系 **LJ** とは、古典命題論理に対する体系 **LK** とほぼ同様にして定義される。まず、**LJ** における式は、$A_1, \cdots, A_n \Rightarrow B$ の形とする。ただし n は 0 でもよく、右辺の B は空でもよい。したがって、**LJ** の式は、**LK** の式の定義で右辺に現れる論理式の数を高々一つに制限したものと考えればよい。次に **LJ** の始式は、**LK** の場合とまったく同様に $A \Rightarrow A$ の形の式とする。このことから、**LJ** には、(contraction 右) および (exchange 右) は存在しないことになる。

上の式の直感的な意味は、「前提 $A_1, \cdots, A_n$ から結論 B が帰結する」こと ($A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$) を表している。また、右辺が空 の場合 $A_1, \cdots, A_n \Rightarrow$ は、「前提 $A_1, \cdots, A_n$ を仮定すると矛盾する」こと ($\neg(A_1, \cdots, A_n)$) を表す。論理式の有限列 $A_1, \cdots, A_n$ を Γ、Δ、Π などのギリシア大文字を用いて表すことにする。すると任意の式は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の形で表現できる（注意：空列、つまり 0 個の論理式から成る列も Γ、Δ、Π などで表される）。

定義 2.1.1. (**LJ** の推論規則）**LJ** の推論規則は、以下の三つのグループに分類される。

- 始式（公理）及び cut 規則
- 構造に関する推論規則（構造規則）
- 論理結合子に関する推論規則（論理規則）

各グループについてそれぞれ以下の推論規則がある。

［ **始式** ］

$$A \Rightarrow A$$

[**構造に関する推論規則**]

$$\frac{\Gamma \Rightarrow D}{A, \Gamma \Rightarrow D}\ (w \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}\ (\Rightarrow w)$$

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow D}{A, \Gamma \Rightarrow D}\ (c \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow D}{\Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow D}\ (e \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Pi \Rightarrow B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow B}\ (cut)$$

[**論理結合子に関する推論規則**]

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow D}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow D}\ (\wedge \Rightarrow 1) \qquad \frac{B, \Gamma \Rightarrow D}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow D}\ (\wedge \Rightarrow 2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ (\Rightarrow \wedge)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow D \quad B, \Gamma \Rightarrow D}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow D}\ (\vee \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ (\Rightarrow \vee 1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ (\Rightarrow \vee 2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Pi \Rightarrow D}{A \supset B, \Gamma, \Pi, \Rightarrow D}\ (\supset \Rightarrow) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \supset B}\ (\Rightarrow \supset)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow}\ (\neg \Rightarrow) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A}\ (\Rightarrow \neg)$$

次に、証明図および証明可能性の定義をする。

定義 2.1.2. (**LJ** の証明図) S を任意の式とするとき、(**LJ** における) S の証明図は以下のように帰納的に定義される。

1. 始式 $A \Rightarrow A$ は、$A \Rightarrow A$ の証明図である。

2. π_1 が S_1 の証明図であり、

$$\frac{S_1}{S}$$

が **LJ** の推論規則ならば、π_1 にこの推論規則を付け加えてできる図形

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ S_1\end{array}}{S}$$

はS の証明図である。

3. π_1 が S_1 の証明図であり、π_2 が S_2 の証明図であるとすると、

$$\frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

が **LJ** の推論規則ならば、π_1 と π_2 にこの推論規則を付け加えてできる図形

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ S_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ S_2\end{array}}{S}$$

はS の証明図である。

定義 2.1.3. (証明可能性) 式S が **LJ** で証明可能であるとは、**LJ** における S の証明図が存在することである。また、論理式A が **LJ** で証明可能であるとは、式 $\Rightarrow A$ が **LJ** で証明可能である。

2.2 cut 除去定理

1934 年に G.Gentzen [3] の論文の中で、古典論理および直観主義論理に対して証明された cut 除去定理—Sequent 計算において、証明可能な論理式は、cut 規則を用いずに証明可能である—は、Gentzen 自身がその論文の主要命題と呼んだ定理である。それ以来この定理は、様々な論理に対して証明が行われ、その応用として無矛盾性や決定問題などに利用されてきた。その結果、証明論の多くの結果がこの定理に依存していることになり、現在では、証明論全体における**基本定理**としての位置づけを与えられている。

定理 2.2.1. （**LJ** の cut 除去定理）式 $\Gamma \Rightarrow A$ が **LJ** で証明可能ならば、$\Gamma \Rightarrow A$ に到る **LJ** の証明図で cut を一度も用いないものが存在する（ A は空でもよい)。

LJ の cut 除去定理について証明を行う前にいくつかの準備を行う。

2.2.1 mix 規則の導入と補助定理

cut 消去定理の本証明に入る前に、そのアイデアを説明しておく。基本的な考え方は次のとおりである。

1. 複雑な（cut を含む）証明図を、より単純な証明図へと書き換える書き換え手続きを定義する。
2. その書き換え手続きは無限に適用することはできず、いつかは必ず停止することを示す。
3. そのようにして得られた最も単純な証明は cut 規則を含まない。

ここで問題となるのは、1. で言及されている証明図の「複雑さ」をどのように定義するか、である。もっとも素朴な考え方は、「証明図の大きさ、つまりその証明図に含まれる式の数、が証明図の複雑さである。」とすることである。すなわち、「式の数が多ければ多いほど、その証明図は複雑である。」と見なすのである。しかしこの方法だと証明図の中に contraction 規則が用いられている場合には、証明のサイズが大きくなり、しかも cut 規則自体も二つに複製されてしまうため cut 消去の素朴な論法は通用しない。その例を次に示す。

［ **例** ］

$$\dfrac{\Lambda \Rightarrow A \qquad \dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow D}{A, \Gamma \Rightarrow D}\,(c \Rightarrow)}{\Lambda, \Gamma \Rightarrow D}\,(cut) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\Lambda \Rightarrow A \qquad \dfrac{\dfrac{\Lambda \Rightarrow A \quad A, A, \Gamma \Rightarrow D}{\Lambda, A, \Gamma \Rightarrow D}\,(cut)}{A, \Lambda, \Gamma \Rightarrow D}\,(cut)}{\Lambda, \Lambda, \Gamma \Rightarrow D}}{\Lambda, \Gamma \Rightarrow D}$$

contraction 規則を含んだ証明図左の場合、cut 論理式を複数個含むため、cut 規則を用いて一気に消去しようと思っても、cut 規則の性質上一気に消すことができない。そのため、右に示した証明図のように、cut 論理式がなくなるまで cut 規則を繰り返さなければならない。このような困難を解消するために、まず、cut 規則に類似した mix と呼ばれる推論規則を導入する必要がある。

［ **mix 規則** ］

定義 2.2.1. (Mix 推論規則) M を論理式とする。以下の推論規則は M に関する mix 推論規則と呼ばれる。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow M \quad \Lambda \Rightarrow D}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(M)$$

ここで、Λ は少なくとも一つ論理式 M を含む。Λ^* は Λ から論理式 M を除いたものである。論理式 M は mix 推論規則の mix 論理式と呼ばれる。

cut 規則は mix 推論規則と構造規則の組み合わせにより代替できる。逆に mix 規則は cut 規則と構造規則の組合せにより代替することができる。

[**cut 規則から mix 規則**]

cut 規則は mix 規則を用いて次のように表すことができる。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Pi \Rightarrow B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow B}\,(cut) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Pi \Rightarrow B}{\Gamma, \Pi^* \Rightarrow B}\,(e \Rightarrow, c \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow B}\,(M)$$

[**mix 規則から cut 規則**]

また逆に mix 規則は cut 規則を用いて次のように表される。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow M \quad \Lambda \Rightarrow D}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(M) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \dfrac{\dfrac{\Lambda \Rightarrow D}{M, \ldots, M, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(e \Rightarrow)}{M, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(c \Rightarrow)}{\Gamma, \Lambda^*, \Rightarrow D}\,(cut)$$

よって、cut 規則と mix 規則は上の意味で同値である。

cut 規則の代わりに mix 規則が用いらているときには、以下のように、contraction 規則を含む証明図の書き換えが非常にうまくいく。

[**例**]

$$\dfrac{\Lambda \Rightarrow M \quad \dfrac{M, M, \Gamma \Rightarrow D}{M, \Gamma \Rightarrow D}\,(c \Rightarrow)}{\Lambda, \Gamma \Rightarrow D}\,(M) \qquad \frac{\Lambda \Rightarrow M \quad M, M, \Gamma \Rightarrow D}{\Lambda, \Gamma^* \Rightarrow D}\,(M)$$

このように contraction 規則を mix 規則に吸収させる (mix 論理式を一気に消去する）ことができる。ため、このような書き換えにより証明図の大きさは小さくなる。この章でとり扱う証明図の中に cut があればこれをすべて上の意味で mix に置き換え cut は全く含まれないようにあらかじめ変形したものを考えることにする。したがって 定理 2.2.1.（cut 除去定理）を示すには、mix を全く含まない証明図が作れることを証明すればよい。それには次の補助定理を証明すれば十分である。

補助定理 2.2.1. （*mix* 除去定理）一番下にある推論規則が *mix* 規則で、その他には *mix* 規則を全く含まないような証明図は、同じ終式を持ち *mix* 規則を全く含まないような証明図に書き換えることができる。

2.2.2 *grade* と *rank*

定義 2.2.2. （grade）論理式 A の *grade* (*grade* (A) で表す) とは、mix 論理式に含まれる論理記号の数のことである。より形式的には、以下のように定義される。

- A が原子論理式のとき、$grade(A) = 0$。
- $grade(\neg A) = grade(A) + 1$。
- $grade(A \wedge B) = grade(A \vee B) = grade(A \supset B) = grade(A) + grade(B) + 1$。

一番下にある推論規則が mix 規則で、その他には mix 規則を全く含まないような証明図 π の *grade* ($grade(\pi)$ で表す) とは、そこで用いられている mix 規則の mix 論理式の *grade* のことである。

定義 2.2.3. （*rank* ）証明図 π に mix 規則が与えられたとき、mix 規則の左上式から糸にそって上方へ式をたどり、mix 論理式を右辺に含む式を順に数えていく。mix 論理式が右辺に含まれなくなったらやめる。そのようにして得られる式の個数の最大値を π の *Lrank* と呼び、$Lrank(\pi)$ とかく（この場合 mix 規則の左上式も数える)。

π の *Lrank* も同様に定義される。mix 規則の右上式から糸にそって上方へ式をたどるとき、左辺に mix 論理式を含無用なしこの個数の最大値を π の *Rrank* と呼び、$Rrank(\pi)$ と書く。

ここで mix 規則を見て分かるように、$Rrank(\pi) \geqq 1, Lrank(\pi) \geqq 1$ から $rank(\pi) \geqq 2$ である。

2.2.3 cut 除去定理の証明

一番下にある推論規則が mix で、その他には mix を全く含まないような証明図 π

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \Gamma \Rightarrow M\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \Lambda \Rightarrow B\end{array}}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow B}\ (M)$$

が与えられたとき、証明図 π は mix を用いない証明図に書き換えられることを *grade* (π) と *rank* (π) に関する二重帰納法により示す。以下の場合分けを考える。

(1) $grade(\pi) = 0, rank(\pi) = 2$ のとき (Base Case)

(1.1) $\Gamma \Rightarrow M$ が始式のとき

(1.2) $\Lambda \Rightarrow B$ が始式のとき

(1.3) $\Gamma \Rightarrow M$ が構造規則の下式のとき

(1.4) $\Lambda \Rightarrow B$ が構造規則の下式のとき

$rank(\pi) = 2$ であるから、$Lrank(\pi) = Rrank(\pi) = 1$ である。この場合 $\Gamma \Rightarrow M$ が論理規則の下式であることはあり得ない。なぜなら $grade\,(\pi) = 0$ であるから、mix 論理式 M は論理記号をふくまない。ゆえに M が論理規則の主論理式であることは不可能である。残された可能性は M が論理規則の副論理式となっている場合であるが、もしそうだとしたら、M は論理規則の上式にも現れることになるため、$Lrank\,(\pi) = Rrank\,(\pi) = 1$ と反する。

(2) $grade(\pi) > 0, rank(\pi) = 2$ のとき

(2.1) $\Gamma \Rightarrow M$ が始式のとき

(2.2) $\Lambda \Rightarrow B$ が始式のとき

(2.3) $\Gamma \Rightarrow M$ が構造規則の下式のとき

(2.4) $\Lambda \Rightarrow B$ が構造規則の下式のとき

(2.5) $\Gamma \Rightarrow M$ も $\Lambda \Rightarrow D$ が論理規則の下式のとき

$Rrank(\pi) > 2$ のとき、$rank(\pi) = Lrank(\pi) + Rrank(\pi)$ であるから、$Lrank(\pi) > 1$ か $Rrank(\pi) > 1$ のどちらかが成り立つ。

(3) $Rrank(\pi) > 1$ のとき

(3.1) Γ が M を含んでいるとき

(3.2) $\Lambda \Rightarrow B$ が構造規則の下式のとき

(3.3) $\Lambda \Rightarrow B$ が論理規則の下式で M がその推論規則の主論理式でないとき

(3.4) 上記のいずれでもないとき。つまり、Γ が M を含まず、$\Lambda \Rightarrow B$ が推論規則の下式で M がその推論規則の主論理式のとき

(4) $Lrank(\pi) > 1$ のとき

(4.1) B が mix 論理式 M のとき

(4.2) $\Gamma \Rightarrow M$ が構造規則の下式のとき

(4.3) $\Gamma \Rightarrow M$ が論理規則の下式で M がその推論規則の主論理式でないとき

(4.4) 上記のいずれでもないとき。つまり、B が mix 論理式 M でなく、$\Gamma \Rightarrow M$ が推論規則の下式で M がその推論規則の主論理式のとき

以上の場合分けについて、cut 除去定理の証明を与えていく。

［**証明**］

(1) $grade(\pi) = 0, rank(\pi) = 2$ のとき

(1.1) $\Gamma \Rightarrow M$ が始式のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{M \Rightarrow M \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2 \\ \Lambda \Rightarrow B\end{array}}{M, \Lambda^* \Rightarrow B}\ (M)$$

この証明図は次のように mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

$$\begin{array}{cl} \vdots\ \pi_2 & \\ \Lambda \Rightarrow B & \\ \hline\hline M, \ldots, M, \Lambda^* \Rightarrow B & (w \Rightarrow) \\ \hline\hline M, \Lambda^* \Rightarrow B & (c \Rightarrow) \end{array}$$

(1.2) $\Lambda \Rightarrow B$ が始式のとき

このとき証明図 π は次の形をしている

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1 \\ \Gamma \Rightarrow M\end{array} \qquad B \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B}\ (M)$$

この証明図は次のように mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

$$\begin{array}{cl} \vdots\ \pi_2 & \\ B \Rightarrow B & \\ \hline\hline \Gamma, B \Rightarrow B & (w \Rightarrow) \end{array}$$

(1.3) $\Gamma \Rightarrow M$ が構造規則の下式のとき

$Lrank(\pi) = 1$ より、ここで用いられる構造規則は weakening 右であり、その主論理式は M でなければならない。それ以外の推論規則の場合には、上式にも M が残るはずだからである。ゆえに証明図 π は以下の形で与えられる。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_{10}\\ \Gamma \Rightarrow\end{array}}{\Gamma \Rightarrow M}(\Rightarrow w) \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \Lambda \Rightarrow B\end{array}}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow B}\,(M)$$

この証明図は次のように mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

$$\begin{array}{cl}\vdots\ \pi_{10} & \\ \Gamma \Rightarrow & \\ \hline \Gamma \Rightarrow B & (\Rightarrow w) \\ \hline\hline \Lambda^*, \Gamma \Rightarrow B & (w \Rightarrow) \\ \hline\hline \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow B & (e \Rightarrow)\end{array}$$

(1.4) $\Lambda \Rightarrow B$ が構造規則の下式のとき

$Rrank(\pi) = 1$ より、ここで用いられる構造規則は weakening 左であり、その主論理式は M でなければならない。ゆえに証明図 π は以下の形で与えられる。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \Gamma \Rightarrow M\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_{20}\\ \Lambda_0 \Rightarrow B\end{array}}{M, \Lambda_0 \Rightarrow B}(w \Rightarrow)}{\Gamma, \Lambda_0 \Rightarrow B}\,(M)$$

ここで $Rrank(\pi) = 1$ より Λ_0 には M は入っていない。ゆえに $\Lambda_0^* \equiv \Lambda_0$ となっている。この証明図は次のように mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

$$\begin{array}{cl}\vdots\ \pi_{20} & \\ \Lambda_0 \Rightarrow B & \\ \hline\hline \Gamma, \Lambda_0 \Rightarrow B & (w \Rightarrow)\end{array}$$

(2) $grade(\pi) > 0, rank(\pi) = 2$ のとき

(2.1) 〜 (2.4) は (1.1) 〜 (1.4) と同じである。

(2.5) $\Gamma \Rightarrow M$ も $\Lambda \Rightarrow D$ が論理規則の下式のとき。このとき、M はそれぞれの論理規則の主論理式でなければならない。さらに、M は Λ の中にちょうど一回ずつ現われるのでなければならない。でなければ M は上式にも現われ、$rank(\pi) = 2$ と反するからである。M の一番外側の論理記号の種類によりさらに以下の場合分けを考える。

(2.5.1) M が $A \wedge B$ のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\,\pi_{11}}{\Gamma\Rightarrow A}\qquad \overset{\vdots\,\pi_{12}}{\Gamma\Rightarrow B}}{\Gamma\Rightarrow A\wedge B}\,(\Rightarrow\wedge)\qquad \dfrac{\overset{\vdots\,\pi_{20}}{A,\Lambda_0\Rightarrow D}}{A\wedge B,\Lambda_0\Rightarrow D}\,(\wedge\Rightarrow 1)}{\Gamma,\Lambda_0\Rightarrow D}\,(A\wedge B)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\,\pi_{11}}{\Gamma\Rightarrow A}\qquad \overset{\vdots\,\pi_{12}}{\Gamma\Rightarrow B}}{\Gamma,\Lambda_0^{\#}\Rightarrow D}\,(A)}{\Gamma,\Lambda_0\Rightarrow D}\,(w\Rightarrow,e\Rightarrow)$$

ここで、$(w{,}ex)$ は weakening 左, 右および exchange 左, 右を何回か用いたことを表わす。また、$\Lambda_0^{\#}$ は、Λ_0 から mix 論理式 $A\wedge B$ を取り除いたものである。

この書き換えによって、$\Gamma,\Lambda_0^{\#}\Rightarrow D$ を終式とする証明図の $grade$ はもとの証明図 π の $grade$ より小さい。したがって帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.5.2) M が $A\vee B$ のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\,\pi_{11}}{\Gamma\Rightarrow A}}{\Gamma\Rightarrow A\vee B}\,(\Rightarrow\vee 1)\qquad \dfrac{\overset{\vdots\,\pi_{21}}{A,\Gamma,\Lambda_0\Rightarrow D}\quad \overset{\vdots\,\pi_{22}}{B,\Lambda_0^{\#}\Rightarrow D}}{A\vee B,\Lambda_0\Rightarrow D}\,(\vee\Rightarrow)}{\Gamma,\Lambda_0\Rightarrow D}\,(A\vee A)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\,\pi_{11}}{\Gamma\Rightarrow A}\qquad \overset{\vdots\,\pi_{21}}{A,\Lambda_0\Rightarrow D}}{\Gamma,\Lambda_0^{\#}\Rightarrow D}\,(A)}{\Gamma,\Lambda_0\Rightarrow D}\,(w\Rightarrow,e\Rightarrow)$$

ここで、$\Lambda_0^{\#}$ は、Λ_0 から mix 論理式 $A\vee B$ を取り除いたものである。

この書き換えによって、$\Gamma,\Lambda_0^{\#}\Rightarrow D$ を終式とする証明図の $grade$ はもとの証明図 π の $grade$ より小さい。よって、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.5.3) M が $A\supset B$ のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_{11}}{A,\Gamma\Rightarrow B}}{\Gamma\Rightarrow A\supset B}\,(\Rightarrow\supset)\qquad \dfrac{\overset{\vdots\ \pi_{21}}{\Lambda_0\Rightarrow A}\quad \overset{\vdots\ \pi_{22}}{B,\Pi_0\Rightarrow D}}{A\supset B,\Lambda_0,\Pi_0}\,(\supset\Rightarrow)}{\Gamma,\Lambda_0,\Pi_0\Rightarrow D}\,(A\supset B)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_{21}}{\Lambda_0\Rightarrow A}\quad\overset{\vdots\ \Pi_{22}}{A,\Gamma\Rightarrow B}}{\Lambda_0,\Gamma^{\#}\Rightarrow B}\,(A)\qquad B,\Pi_0\Rightarrow D}{\Lambda_0^{\#},\Gamma^{\#\#},\Pi_0^{\#}\Rightarrow D}\,(B)}{\Gamma,\Lambda_0,\Pi_0\Rightarrow D}\,(w\Rightarrow,e\Rightarrow)$$

ここで、$\Gamma^{\#}$ は Γ から mix 論理式 A を取り除いたものである。また、$\Lambda_0^{\#},\Gamma^{\#\#},\Pi^{\#}$ は $\Lambda_0,\Gamma^{\#},\Pi$ から mix 論理式 B を取り除いたものである。

この書き換えによって、二つの mix 規則を含む証明図ができる。まず、$\Lambda_0,\Gamma^{\#}\Rightarrow B$ を終式とする証明図について注目する。この $grade$ はもとの証明図 π の $grade$ より小さい。したがって帰納法の仮定よりこの mix 規則を取り除くことができる。次に、$\Lambda_0^{\#},\Gamma^{\#\#},\Pi_0^{\#}\Rightarrow D$ を終式とする証明図を見ると、この $grade$ はもとの証明図 π の $grade$ より小さい。よって、帰納法の仮定よりこの mix 規則を取り除くことができる。よって、mix 規則のない証明図を書くことができる。

(2.5.4) M が $\neg A$ のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_{10}}{A,\Gamma\Rightarrow}}{\Gamma\Rightarrow\neg A}\,(\Rightarrow\neg)\qquad\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_{20}}{\Lambda_0\Rightarrow A}}{\neg A,\Lambda_0\Rightarrow}\,(\Gamma\Rightarrow)}{\Gamma,\Lambda_0\Rightarrow}\,(\neg A)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_{20}}{\Lambda_0\Rightarrow A}\quad\overset{\vdots\ \pi_{10}}{A,\Gamma\Rightarrow}}{\Lambda_0,\Gamma^{\#}\Rightarrow}\,(A)}{\Gamma^{\#},\Lambda_0\Rightarrow}\,(e\Rightarrow)}{\Gamma,\Lambda_0\Rightarrow}\,(w\Rightarrow,e\Rightarrow)$$

ここで、$\Gamma^{\#}$ は、Γ から mix 論理式 A を取り除いたものである。

この書き換えによって、$\Lambda_0,\Gamma^{\#}\Rightarrow$ を終式とする証明図の $grade$ はもとの証明図 π の $grade$ より小さい。したがって帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3) $Rrank(\pi) > 1$ のとき

(3.1) Γ が M を含んでいるとき

証明図 π は、mix 規則と同じ形であり、次に示すように mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

$$\begin{array}{c} \Lambda \Rightarrow B \\ \hline\hline M, \Lambda^* \Rightarrow B \\ \hline\hline \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow B \end{array} \begin{array}{l} (e \Rightarrow, c \Rightarrow) \\ (w \Rightarrow, e \Rightarrow) \end{array}$$

(3.2) $\Lambda \Rightarrow B$ が構造規則の下式のとき

ここでは、$(c \Rightarrow)$ が用いられており、その主論理式が M の場合のみを考える（その他の場合も同様である）。このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \qquad \dfrac{M, M, \Lambda \Rightarrow B}{M, \Lambda \Rightarrow B}\,(c \Rightarrow)}{\Gamma, \Lambda^{\#} \Rightarrow B}\,(M)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \qquad M, M, \Lambda \Rightarrow B}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow B}\,(M)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ減っている。よって、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.3) $\Lambda \Rightarrow B$ が論理規則の下式で M がその推論規則の主論理式でないとき

このときは、用いられる論理規則で場合分けをする必要がある。

(3.3.1) 用いられる論理規則が（$\wedge \Rightarrow 1$）のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \qquad \dfrac{A, \Lambda \Rightarrow B}{A \wedge B, \Lambda \Rightarrow B}\,(\wedge \Rightarrow 1)}{\Gamma, A \wedge B, \Lambda^* \Rightarrow B}\,(M)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\begin{array}{c} \Gamma, \Rightarrow M \qquad A, \Lambda \Rightarrow B \\ \hline \Gamma, A, \Lambda^* \Rightarrow B \\ \hline\hline A, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow B \\ \hline A \wedge B, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow B \\ \hline\hline \Gamma, A \wedge B, \Lambda^* \Rightarrow B \end{array} \begin{array}{l} (M) \\ (e \Rightarrow) \\ (\wedge \Rightarrow 1) \\ (e \Rightarrow) \end{array}$$

この証明図の *grade* は証明図 π と変わらず、*rank* は証明図 π よりも一つ少ない。よって帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.3.2) 用いられる論理規則が（$\Rightarrow \wedge$）のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \dfrac{\Lambda \Rightarrow A \quad \Lambda \Rightarrow B}{\Lambda \Rightarrow A \wedge B}(\Rightarrow \wedge)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A \wedge B}(M)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \Lambda \Rightarrow A}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A}(M) \quad \dfrac{\Lambda \Rightarrow A \quad \Lambda \Rightarrow B}{\Lambda \Rightarrow A \wedge B}(\Rightarrow \wedge)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A \wedge B}(\Rightarrow \wedge)$$

この証明図は二つの mix 規則を含むが、それぞれの mix 規則の上の部分についてみて見ると、その *grade* は証明図 π の *grade* と同じであり、その *rank* は証明図 π の *rank* よりも小さい。したがって、帰納法の仮定より両方とも mix 規則のない証明図に書き換えることができる。よって、証明図全体も mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.3.3) 用いられる論理規則が（$\Rightarrow \vee 1$）のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \dfrac{\vee \Rightarrow A}{\Lambda \Rightarrow A \vee B}(\Rightarrow \vee 1)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A \vee B}(M)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \Lambda \Rightarrow A}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A}(M)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A \vee B}(\Rightarrow \vee 1)$$

この証明図の *grade* は π と変わらず、*rank* は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.3.4) 用いられる論理規則が（$\supset\Rightarrow$）のとき

このとき π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \dfrac{\Lambda \Rightarrow A \quad B, \Pi \Rightarrow D}{A \supset B, \Lambda, \Pi \Rightarrow D}(\supset\Rightarrow)}{\Gamma A \supset B, \Lambda^*, \Pi^* \Rightarrow D}(M)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \Lambda \Rightarrow A}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A}\,(M) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad B, \Pi \Rightarrow D}{\Gamma, B, \Pi^* \Rightarrow D}\,(M)}{B, \Gamma, \Pi^* \Rightarrow D}\,(e \Rightarrow)}{A \supset B, \Gamma, \Lambda^*, \Gamma, \Pi^* \Rightarrow D}\,(\supset\Rightarrow)}{\dfrac{\Gamma, \Gamma, A \supset B, \Lambda^*, \Pi^* \Rightarrow D}{\Gamma, A \supset B, \Lambda^*, \Pi^* \Rightarrow D}\,(c \Rightarrow)}\,(e \Rightarrow)
$$

この証明図は2つの mix 規則を含むが、それぞれの mix 規則の上の部分についてみて見ると、その $grade$ は π の $grade$ と同じであり、その $rank$ は証明図 π の $rank$ よりも小さい。したがって、帰納法の仮定より両方とも mix 規則のない証明図に書き換えることができる。よって、証明図全体も mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.3.5) 用いられる論理規則が（$\Rightarrow\supset$）のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$
\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \dfrac{A, \Lambda \Rightarrow B}{\Lambda \Rightarrow A \supset B}\,(\Rightarrow\supset)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A \supset B}\,(M)
$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad A, \Lambda \Rightarrow B}{\Gamma, A, \Lambda^* \Rightarrow B}\,(M)}{A, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow B}\,(e \Rightarrow)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A \supset B}\,(\Rightarrow\supset)
$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.3.6) 用いられる論理規則が（$\neg \Rightarrow$）のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$
\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \dfrac{\Lambda \Rightarrow A}{\neg A, \Lambda \Rightarrow}\,(\neg \Rightarrow)}{\Gamma, \neg A, \Lambda^* \Rightarrow}\,(M)
$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \Lambda \Rightarrow A}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A}\,(M)}{\neg A, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow}\,(\neg \Rightarrow)}{\Gamma, \neg A, \Lambda^* \Rightarrow}\,(e \Rightarrow)
$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.3.7) 用いられる論理規則が（$\Rightarrow \neg$）のとき
このとき π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad \dfrac{A, \Lambda \Rightarrow}{\Lambda \Rightarrow \neg A}\,(\Rightarrow \neg)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow \neg A}\,(M)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \quad A, \Lambda \Rightarrow}{\Gamma, A, \Lambda^* \Rightarrow}\,(M)}{A, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow}\,(e \Rightarrow)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow \neg A}\,(\Rightarrow \neg)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.4) 上記のいずれでもないとき
つまり、Γ が M を含まず、 $\Lambda \Rightarrow B$ が推論規則の下式で M がその推論規則の主論理式のとき。mix 論理式の一番外側の論理記号の種類により、さらに場合分けして考える。

(3.4.1) mix 論理式が $A \wedge B$ のとき
このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B \quad \dfrac{A, \Lambda \Rightarrow D}{A \wedge B, \Lambda \Rightarrow D}\,(\wedge \Rightarrow 1)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(A \wedge B)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B \quad A, \Lambda \Rightarrow D}{\Gamma, A, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(A \wedge B)}{A, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(e \Rightarrow)}{A \wedge B, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(\wedge \Rightarrow 1)}{\Gamma, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(A \wedge B)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(c \Rightarrow, e \Rightarrow)$$

この証明図は 2 箇所で mix 規則が用いられている。まず、上の方の mix 規則 を見ると、$grade$ は証明図 π と同じであるが $rank$ は $Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換

えることができる。次に、下の方の mix 規則 を見ると $A, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D$ の左辺には、場合分けの条件より、mix 規則 が含まれていないので、 $Rrank$ は一つである。もとの証明図 π の $Rrank$ は 2 以上であるので、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.4.2) mix 論理式が $A \vee B$ のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \vee B \qquad \dfrac{A, \Lambda \Rightarrow D \quad B, \Lambda \Rightarrow D}{A \vee B, \Lambda \Rightarrow D}\,(\vee \Rightarrow)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(A \vee B)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(c \Rightarrow, e \Rightarrow)}{}$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \vee B \quad A, \Lambda \Rightarrow D}{\Gamma, A, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(A \vee B)}{A, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(e \Rightarrow) \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \vee B \quad B, \Lambda \Rightarrow D}{\Gamma, B, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(A \vee B)}{B, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(e \Rightarrow)}{A \vee B, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(\vee \Rightarrow)}{\dfrac{\Gamma, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}\,(c \Rightarrow, e \Rightarrow)}\,(A \vee B)$$

この証明図は 3 箇所で mix 規則が用いられている。まず、上の方（2 箇所）の mix 規則を見ると、$grade$ は証明図 π と同じであるが $rank$ は $Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。次に、下の方の mix 規則 を見ると $A, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D$ および $B, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D$ の左辺には、場合分けの条件より mix 規則 が含まれていないので、$Rrank$ は 1 である。もとの証明図 π の $Rrank$ は 2 以上であるので、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.4.3) mix 論理式が $A \supset B$ のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \supset B \qquad \dfrac{\Lambda \Rightarrow A \quad B, \Pi \Rightarrow D}{A \supset B, \Lambda, \Pi \Rightarrow D}\,(\supset\Rightarrow)}{\Gamma, \Lambda^*, \Pi^* \Rightarrow D}\,(A \supset B)$$

ここで、$Rrank(\pi) > 2$ という条件から、mix 論理式（$A \supset B$）は Λ か Π の少なくとも一方には含まれていなければならない。よって、以下のような場合分けが考えられる。

(a) $A \supset B$ が Λ に含まれ、Π には含まれてないとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \supset B \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \supset B \quad \Lambda \Rightarrow A}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow D}(A \supset B) \qquad B, \Pi \Rightarrow D}{A \supset B, \Gamma, \Lambda^*, \Pi \Rightarrow D}(\supset\Rightarrow)}{\dfrac{\Gamma, \Gamma, \Lambda^*, \Pi \Rightarrow D}{\Gamma, \Lambda^*, \Pi^* \Rightarrow D}(c \Rightarrow, e \Rightarrow)}(A \supset B) \qquad \because \Pi = \Pi^*$$

この証明図は2箇所でmix規則が用いられている。まず、上の方のmix規則 を見ると、$grade$ は証明図 π と同じであるが $rank$ は $Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定よりmix規則を用いない証明図に書き換えることができる。次に、下の方のmix規則も同じように、$Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定よりmix規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(b) $A \supset B$ が $A \supset B, \Lambda$ ともに含まれるとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \supset B \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \supset B \quad \Lambda \Rightarrow A}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A}(A \supset B) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \supset B \quad B, \Pi \Rightarrow D}{\Gamma, B, \Pi^* \Rightarrow D}(A \supset B)}{B, \Gamma, \Pi^* \Rightarrow D}(e \Rightarrow)}{A \supset B, \Gamma, \Lambda^*, \Gamma, \Pi^* \Rightarrow D}(\supset\Rightarrow)}{\dfrac{\Gamma, \Gamma, \Lambda^*, \Gamma, \Pi^* \Rightarrow D}{\Gamma, \Lambda^*, \Pi^* \Rightarrow D}(c \Rightarrow, e \Rightarrow)}(A \supset B)$$

この証明図は3箇所でmix規則が用いられている。まず、上の方（2箇所）のmix規則 を見ると、$grade$ は証明図 π と同じであるが $rank$ は $Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定よりmix規則を用いない証明図に書き換えることができる。次に、下の方のmix規則も同じように、$Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定よりmix規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(c) $A \supset B$ が Π に含まれ、Λ には含まれてないとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \supset B \qquad \dfrac{\Lambda \Rightarrow A \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \supset B \quad B, \Pi \Rightarrow D}{\Gamma, B, \pi^* \Rightarrow D}(A \supset B)}{B, \Gamma, \Pi^* \Rightarrow D}(e \Rightarrow)}{A \supset B, \Lambda, \Gamma, \Pi^* \Rightarrow D}(\supset\Rightarrow)}{\dfrac{\Gamma, \Lambda, \Gamma, \Pi^* \Rightarrow D}{\Gamma, \Lambda^*, \Pi^* \Rightarrow D}(c \Rightarrow, e \Rightarrow)}(A \supset B) \qquad \because \Lambda = \Lambda^*$$

この証明図は2箇所でmix規則が用いられている。まず、上の方のmix規則 を見ると、$grade$ は証明図 π と同じであるが $rank$ は $Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定よりmix規則を用いない証明

図に書き換えることができる。次に、下の方の mix 規則も同じように、$Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.4.4) mix 論理式が $\neg A$ のとき

このとき証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \neg A \qquad \dfrac{\Lambda \Rightarrow A}{\neg A \Rightarrow}\,(\neg \Rightarrow)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow}\,(\neg A)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \neg A \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \neg A \quad \Lambda \Rightarrow A}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow A}\,(\neg A)}{\neg A, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow}\,(\neg \Rightarrow)}{\Gamma, \Gamma, \Lambda^* \Rightarrow}\,(\neg A)}{\Gamma, \Lambda^* \Rightarrow}\,(c \Rightarrow)$$

この証明図は 2 箇所で mix 規則が用いられている。まず、上の方の mix 規則 を見ると、$grade$ は証明図 π と同じであるが $rank$ は $Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。次に、下の方の mix 規則も同じように、$Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(4) $Lrank(\pi) > 1$ のとき

（3）$Rrank(\pi) > 1$ のときと同じように証明することができる。

2.3 Craig の補間定理

cut 除去定理の応用として、Craig の補間定理が成り立つことを示す。本章では、述語を含まない **LJ** の体系について、前原の方法を用いて補間定理の証明を示す。

[**前原の方法**]

前原は [12] に示されるように、cut 除去定理が成り立てば、補間定理の前提となる証明可能な論理式の証明図を定理の証明の道程に当てはめることにより、補間定理を具体的に求めることができるとし、**LK** や **LJ** の cut 除去定理を用いて、証明論的に Craig の補間定理を証明する方法を与えた。この章では直観主義論理の体系 **LJ** について実際に Craig の補間定理を帰納法によって証明していく。まず、以下のことを定義しておく。

定義 2.3.1. （ここで扱う記法）

- $\Gamma_1; \Gamma_2$ を論理式 Γ の分割と呼ぶ。
- $\Gamma_1; \Gamma_2, D$ を $\Gamma \Rightarrow D$ の分割と呼ぶ。
- **LJ** $\#$ は **LJ** に始式として $\Rightarrow \top$ を加えたものである。

定理 2.3.1. （**LJ** に対する *Craig* の補間定理）$A \Rightarrow B$ が **LJ** で証明可能なとき、次のいずれかが成り立つ。

1. *A, B* が少なくとも一つの共通の述語記号を持つ場合 *A, B* に共通な自由変数、対象定数、述語記号のみからなる論理式 C が存在して、$A \Rightarrow C$ および $C \Rightarrow B$ が **LJ** で証明可能（論理式 C を $A \Rightarrow B$ の補間定理式という）。
2. *A, B* に共通な述語記号がない場合 $A \Rightarrow$ あるいは $\Rightarrow B$ のいずれかが **LJ** で証明可能。

ここで、以下の重要な補助定理を示す。

補助定理 2.3.1. $\Gamma \Rightarrow D$ が **LJ** で証明可能なとき、Γ_1, Γ_2 を Γ の任意の分割とすると、Γ_1 Γ_2, D に共通な命題変数、命題定数および $\top$ からなる論理式 C' が存在して、$\Gamma_1 \Rightarrow C'$ および $C', \Gamma_2 \Rightarrow D$ が **LJ** で証明可能。

この補助定理 2.3.1 は、$\Gamma \Rightarrow D$ に至る cut なしの証明図の高さに関する帰納法で証明することができる。

2.3.1 Craig の補間定理の証明

(1) 証明図が始式（$A \Rightarrow A$）のみからなるとき

(1.1) Γ_1 を A としたとき

$\Gamma_1 \Rightarrow C'$ および $C', \Gamma_2 \Rightarrow A$ はそれぞれ $A \Rightarrow C'$ および $C' \Rightarrow A$ となる。よって、C' を A とおけば二つの式は始式 $A \Rightarrow A$ により証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.2) Γ_2 を A としたとき

$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ および $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$ はそれぞれ $\Rightarrow C_1$ および $C_1, A \Rightarrow A$ となる。よって、C_1 を A とおけば二つの式はそれぞれ $\Rightarrow A$ および $A, A \Rightarrow A$ となる。これは、

$$\frac{\Rightarrow A}{A \Rightarrow A}\,(w \Rightarrow) \qquad \frac{A, A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A}\,(c \Rightarrow)$$

より証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(2) 証明図に少なくとも一つの推論規則を用いているとき

(2.1) 最後に用いられている推論規則が（$w \Rightarrow$）のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow D}{A, \Gamma \Rightarrow D}\ (w \Rightarrow)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow D}{C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow D}\ (c \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と Γ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_1 と A, Γ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.2) 最後に用いられている推論規則が（$\Rightarrow w$）のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow D}\ (w \Rightarrow)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow$ が証明可能。さらに、

$$\frac{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow}{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow D}\ (\Rightarrow w)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と Γ_2 に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_1 と Γ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.3) 最後に用いられている推論規則が（$c \Rightarrow$）のとき

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow D}{A, \Gamma \Rightarrow D}\ (c \Rightarrow)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, A, A, \Gamma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{C_1, A, A, \Gamma_2 \Rightarrow D}{C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow D}\ (c \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と A, A, Γ_2 に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_1 と A, Γ_2 に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.4) 最後に用いられている推論規則が（$e \Rightarrow$）のとき

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow D}{\Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow D}\ (e \Rightarrow)$$

(2.4.1) Γ, B, A, Π を $\Gamma_1; \Gamma_2, B, A, \Pi$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2, A, B, \Pi \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{C_1, \Gamma_2, A, B, \Pi \Rightarrow D}{C_1, \Gamma_2, B, A, \Pi \Rightarrow D}\ (e \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2, B, A, \Pi \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と Γ_2, A, B, Π, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\perp$ からなる論理式である。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.4.2) Γ, B, A, Π を $\Gamma, B, A, \Pi_1; \Pi_2$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Pi_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma, A, B, \Pi_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{C_1, \Gamma, A, B, \Pi_2 \Rightarrow D}{C_1, \Gamma, B, A, \Pi_2 \Rightarrow D}\ (e \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Pi_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma, B, A, \Pi_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Π_1 と Γ, A, B, Π_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\perp$ からなる論理式である。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.5) 最後に用いられている推論規則が（$\wedge \Rightarrow 1$）のとき（$\wedge \Rightarrow 2$ も同様）

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow D}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow D}\ (\wedge \Rightarrow 1)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow D}{C_1, A \wedge B, \Gamma_2 \Rightarrow D}\ (\wedge \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, A \wedge B, \Gamma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と A, Γ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\perp$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_1 と $A \wedge B, \Gamma_2, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\perp$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.6) 最後に用いられている推論規則が（$\Rightarrow \wedge$）のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ (\Rightarrow \wedge)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$ および $\Gamma_1 \Rightarrow C_2$ と $C_2, \Gamma_2 \Rightarrow B$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\dfrac{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A}{C_1 \wedge C_2, \Gamma_2 \Rightarrow A}\ (\wedge \Rightarrow 1) \quad \dfrac{C_2, \Gamma_2 \Rightarrow A}{C_1 \wedge C_2, \Gamma_2 \Rightarrow A}\ (\wedge \Rightarrow 1)}{C_1 \wedge C_2, \Gamma_2 \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow \wedge)$$

および、

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow C_1 \quad \Gamma_1 \Rightarrow C_2}{\Gamma_1 \Rightarrow C_1 \wedge C_2}\ (\Rightarrow \wedge)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1 \wedge C_2$ と $CC_1 \wedge C_2, \Gamma_2 \Rightarrow A \wedge B$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と Γ_2, A に共通な命題変数および命題定数1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であり、C_2 は Γ_1 と $A\Gamma_2, B$ に共通な命題変数および命題定数1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式である。よって、$C_1 \wedge C_2$ が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.7) 最後に用いられている推論規則が（$\vee \Rightarrow$）のとき

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow D \quad B, \Gamma \Rightarrow D}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow D}\ (\vee \Rightarrow)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow D$ および $\Gamma_1 \Rightarrow C_2$ と $C_2, B, \Gamma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\dfrac{C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow D}{C_1 \wedge C_2, A, \Gamma_2 \Rightarrow D}\ (\wedge \Rightarrow 1) \quad \dfrac{C_2, B, \Gamma_2 \Rightarrow D}{C_1 \wedge C_2, B, \Gamma_2 \Rightarrow D}\ (\wedge \Rightarrow 2)}{C_1 \vee C_2, A \vee B, \Gamma_2 \Rightarrow D}\ (\vee \Rightarrow)$$

および、

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow C_1 \quad \Gamma_1 \Rightarrow C_2}{\Gamma_1 \Rightarrow C_1 \wedge C_2}\ (\Rightarrow \wedge)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1 \wedge C_2$ と $C_1 \wedge C_2, A \vee B, \Gamma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と A, Γ_2, D に共通な命題変数および命題定数1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であり、C_2 は Γ_1 と B, Γ_2, D に共通な命題変数および命題定数1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式である。したがって、$C_1 \wedge C_2$ は、Γ_1 と $A \vee B, \Gamma_2, D$ に共通な命題変数および命題定数1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式である。よって、$C_1 \wedge C_2$ が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.8) 最後に用いられている推論規則が（$\Rightarrow \vee 1$）のとき（$\Rightarrow \vee 2$ も同様）

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ (\Rightarrow \vee 1)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$ が証明可能。さらに、

$$\frac{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A}{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \vee B}\ (\Rightarrow \vee 1)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と Γ_2, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_1 と $\Gamma_2, A \vee B$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.9) 最後に用いられている推論規則が（⊃⇒）のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Pi \Rightarrow D}{A \supset B, \Gamma, \Pi, \Rightarrow D} \ (\supset\Rightarrow)$$

(2.9.1) $A \supset B, \Gamma, \Pi$ を $A \supset B, \Gamma_1; \Gamma_2, \Gamma_2, \Pi$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$ および $\Gamma_1 \Rightarrow C_2$ と $C_2, B, \Pi \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A}{C_1 \wedge C_2, \Gamma_2 \Rightarrow A} (\wedge\Rightarrow 1) \quad \dfrac{C_2, B, \Pi \Rightarrow D}{C_1 \wedge C_2, B, \Pi \Rightarrow D} (\wedge\Rightarrow 2)}{A \supset B, C_1 \wedge C_2, \Gamma_2, C_1 \wedge C_2, \Pi \Rightarrow D} (\supset\Rightarrow)}{C_1 \wedge C_2, A \supset B, \Gamma_2, \Pi \Rightarrow D} (e\Rightarrow, c\Rightarrow)$$

および、

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow C_1 \quad \Gamma_1 \Rightarrow C_2}{\Gamma_1 \Rightarrow C_1 \wedge C_2} \ (\Rightarrow\wedge)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1 \wedge C_2$ と $C_1 \wedge C_2, A \supset B, \Gamma_2, \Pi \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と Γ_2, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であり、C_2 は Γ_1 と B, Π, D に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥ からなる論理式である。したがって、$C_1 \wedge C_2$ は、Γ_1 と $\Gamma_2, A \supset B, \Gamma_2, \Pi, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式である。よって、$C_1 \wedge C_2$ が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.9.2) $A \supset B, \Gamma, \Pi$ を $A \supset B, \Gamma, \Pi_1; \Pi_2$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma \Rightarrow A$ および $\Pi_1 \Rightarrow C_2$ と $C_2, B, \Pi_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\Rightarrow C_1 \quad \dfrac{C_2, B, \Pi_2 \Rightarrow D}{A \supset B, C_1, C_2, \Pi_2 \Rightarrow D} (\supset\Rightarrow)}{A \supset B, C_2, \Pi_2 \Rightarrow D} (cut)$$

とすると、結局 $\Pi_1 \Rightarrow C_1$ と $A \supset B, C_2, \Pi_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_2 は Π_1 と B, Π_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、あきらかに Π_1 と $A \supset B, \Pi_2, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式である。よって、C_2 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.10) 最後に用いられている推論規則が（$\Rightarrow\supset$）のとき

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \supset B}\ (\Rightarrow\supset)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow B$ が証明可能。さらに、

$$\frac{C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow B}{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \supset B}\ (\Rightarrow\supset)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \supset B$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と A, Γ_2, B に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_1 と $\Gamma_2, A \supset B$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.11) 最後に用いられている推論規則が（$\neg\Rightarrow$）のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow}\ (\neg\Rightarrow)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$ が証明可能。さらに、

$$\frac{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A}{\neg A, C_1, \Gamma_2 \Rightarrow}\ (\neg\Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $\neg A, C_1, \Gamma_2 \Rightarrow$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と Γ_2, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_1 と $\neg A, \Gamma_2$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2.12) 最後に用いられている推論規則が（$\Rightarrow\neg$）のとき

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A}\ (\Rightarrow\neg)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow$ が証明可能。さらに、

$$\frac{C_1, A, \Gamma_2 \Rightarrow}{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \neg A}\ (\Rightarrow\neg)$$

とすると、結局 $\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \neg A$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と A, Γ_2 に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_1 と $\neg A, \Gamma_2$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

2.4　決定可能性

任意の形式的体系が与えられたとき、この体系について定義された任意の論理式が、この体系で証明可能であるか否かを有限回の手順で判定する具体的な**手続きを決定手続き**(decision procedure) といい、また手続きが存在するとき、この体系は**決定可能である**(decidable) という。

定理 2.4.1. 直観主義論理の体系 **LJ** は決定可能性を持つ。

［ **証明** ］

定理 2.4.1 を証明するには、**LJ** に対する決定手続きを具体的に与えればよい。それにはまず**規約**という概念を定義し、次の補助定理を証明する。

LJ の任意の式について、その左辺に同じ論理式は高々3 個しか含まれないとき、この式を**規約**（reduced）であるという。

［ **例** ］

$$A \vee B, C, A \vee B, B \wedge C, A \vee B \Rightarrow A$$

は、既約な式である。

補助定理 2.4.1. 規約な式を終式にもつ証明図があれば、これと同じ終式をもつ証明図が存在して、この証明図に現れる式は全て規約であるようにできる。また始めの証明図が cut を含まないならば、新しくできた証明図も cut を含まないようにできる。

［ **証明** ］

まず、任意の規約でない式 $\Gamma \Rightarrow A$ に対しては、exchange 左および contraction 左を何回か用いると規約な式 $\Gamma' \Rightarrow A$ が得られ、また逆に規約な式 $\Gamma' \Rightarrow A$ に対しては、weakening 左および exchang 右を用いると元の式 $\Gamma \Rightarrow A$ が導かれる。よって、任意の規約でない式 $\Gamma \Rightarrow A$ に対して、この式と同値でかつ規約な式 $\Gamma' \Rightarrow A$ が存在する。次に、規約な式 $\Gamma' \Rightarrow A$ に至る cut なしの証明図において、**LJ** の推論規則の表 Γ, Π にあたる部分にはそれぞれの論理式が高々1 個だけしか現れないように、重複する論理式を取り除く。すると、適当に構造に関する推論規則を補い、さらに不必要な式を取り除くことにより $\Gamma' \Rightarrow A$ に至る cut なしの証明図 π' でその中には規約な式しか現れないものを作ることができる。

［ **直観主義の体系 LJ の決定手続き** ］

体系 **LJ** の任意の式 $\Gamma \Rightarrow A$ が一つ与えられたとする。この式と同値で規約な式が存在するからこの式を $\Gamma' \Rightarrow A$ とする。$\Gamma \Rightarrow A$ に含まれる各論理式の全ての部分論理式を数え上げる。これは有限個しかない。これら有限個の論理式から作られる規約な式全てを数え

上げる。これらの数も、規約であることから有限個しかない。これら規約な式の全体を ψ とする。

まず、ψ の中で始式を全て取り出し、それれは証明可能であるという印を付ける。ψ の残りの式について次のような式があるか否かを調べる。各推論規則について、その一つまたは、二つの上式がすでに証明可能として印が付いている証明図で、その下式が ψ の残りの式の式になっているものを探し、下式になり得るものがあれば印を付ける。この一連の手順を踏めば有限回の操作の後には、始めに与えられた式 $\Gamma' \Rightarrow A$ に印が付くか否かが判断できる。印が付けば、式 $\Gamma \Rightarrow A$ が証明可能であり、印が付かなければ $\Gamma \Rightarrow A$ は証明可能ではない。また、証明可能と判断できたときには、上に示した手続きに従って具体的な証明図が得られることがわかる。 $\blacksquare$

第3章　部分構造論理の体系

Gentzen が導入した直観主義論理の体系は **LJ** は、3 種類の構造に関する推論規則（exchange ,contraction ,weakening）を持つ。この体系 **LJ** から 3 種類の構造に関する推論規則を全て取り除いた体系を部分構造論理の基本的体系 **FL** (Full Lambek calculus) という。また、部分構造論理の基本的体系 **FL** に、構造に関する推論規則を選択的に付け加えることによって八つの体系 **FL**, $\mathbf{FL}_e$, $\mathbf{FL}_c$, $\mathbf{FL}_w$, $\mathbf{FL}_{ec}$, $\mathbf{FL}_{cw}$, $\mathbf{FL}_{ew}$ および $\mathbf{FL}_{ecw}$ を得ることができる。例えば **FL** に exchange を付け加えると $\mathbf{FL}_e$、**FL** に exchange 規則と weakening 規則を付け加えると $\mathbf{FL}_e$ となる。本研究の目的は、部分構造論理の体系上に様相論理の体系を加えた場合に、どのような証明論的性質が導き出されるのかを調べることである。そのためには、まず部分構造論理の基本的体系である **FL** について、cut 除去定理および Craig の補間定理が証明可能かどうかを調べることが重要である。そこで、cut 除去定理および 1996 年に成瀬 [10] によって与られた Craig の補間定理の証明を順次示していく。

3.1　sequent 計算の基本的体系 FL

定義 3.1.1. (**FL** の推論規則) **FL** の推論規則は、以下の 二つのグループに分類される。

- 始式（公理) 及び cut 規則
- 論理結合子に関する推論規則（論理規則）

FL の sequent は、$\Gamma \Rightarrow A$ の形をした式である。Γ は論理式の finite sequence であり、C は論理式である。Γ, C は空またはただ一つの論理式でなければならない。各グループについてそれぞれ以下の推論規則がある。

ここでは、命題定数の $\top, \bot, 1, 0$ を持つ体系での始式と推論規則を導入し、構造規則と weakening 規則の関係について述べる。

体系 **LJ** の始式を

(a) $A \Rightarrow A$

(b) $\Gamma \Rightarrow \top$

(c) $\Gamma, \bot, \Delta \Rightarrow A$

とすると、

論理式 A が証明可能 $\Leftrightarrow$ A は論理的に $\top$ と同値

をいうことができる。しかし、$A \supset \top$ は始式 **(a)** および **(b)** によりすぐにいえるが、$\top \supset A$ は次に示すように weakening 規則を使わないと示すことができない。

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow A}{\top \Rightarrow A}\,(w \Rightarrow)}{\top \supset A}\,(\Rightarrow \supset)$$

また次のように $\neg A$ が $A \supset \bot$ と論理的に同値であることも weakening 規則を使わないと示すことができない。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}\,(\neg \Rightarrow}{\neg A, A \Rightarrow \bot}\,(\Rightarrow w)}{\neg A \Rightarrow A \supset \bot}\,(\Rightarrow \supset) \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad \bot \Rightarrow}{A \supset \bot, A \Rightarrow}\,(\supset \Rightarrow)}{A \supset \bot \Rightarrow \neg A}\,(\Rightarrow \neg)$$

このようなことから、weakening 規則のない論理体系では、$\top, \bot$ の他に命題定数 $1, 0$ を導入する必要がある。また、始式に

(d) $\Rightarrow 1$

(e) $0 \Rightarrow$

を加え、推論規則に

$$\dfrac{\Gamma, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, 1, \Delta \Rightarrow A}\,(1w) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow 0}\,(0w)$$

を加える必要がある。

さらに、$\neg A$ が $A \supset 0$ と論理的同値であるということを次のようにして示す。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}\,(\neg A \Rightarrow)}{\neg A, A \Rightarrow 0}\,(0w)}{\neg A \Rightarrow A \supset 0}\,(\Rightarrow \neg) \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad 0 \Rightarrow}{A \supset 0 \Rightarrow}\,(\supset \Rightarrow)}{A \supset 0 \Rightarrow \neg A}\,(\Rightarrow \neg)$$

また、weakening 規則のある体系では、1 と $\top$ および 0 と $\bot$ はそれぞれ論理的に同値になる。このことから部分構造論理の基本的体系 **FL** の始式は次のようになる。

［ **始式** ］

(1) $A \Rightarrow A$

(2) $\Rightarrow 1$

(3) $0 \Rightarrow$

(4) $\Gamma \Rightarrow \top$

(5) $\Gamma, \bot, \Delta \Rightarrow A$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow B}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow B}\ (cut)$$

［**論理結合子に関する推論規則**］

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, 1, \Delta \Rightarrow A}\ (1w) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow 0}\ (0w)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \Rightarrow C}\ (\wedge \Rightarrow 1) \qquad \frac{\Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \Rightarrow C}\ (\wedge \Rightarrow 2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B, \Delta \Rightarrow C}\ (\vee \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ (\Rightarrow \vee 1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ (\Rightarrow \vee 2)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A * B, \Delta \Rightarrow C}\ (* \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A * B}\ (\Rightarrow *)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, \Gamma, A \backslash B, \Sigma \Rightarrow C}\ (\backslash \Rightarrow) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \backslash B}\ (\Rightarrow \backslash)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C}\ (/ \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B/A}\ (\Rightarrow /)$$

上に示したように **FL** の特徴としては、2 種類の含意と融合積があげられる。まずは含意について説明する。

体系 **FL** では含意の推論規則について次のように定義している。参考のためにもう一度示す。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma \Rightarrow C}\ (\backslash \Rightarrow) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A\backslash B}\ (\Rightarrow \backslash)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C}\ (/ \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B/A}\ (\Rightarrow /)$$

このような (/) と (\) は、exchange 規則がある体系では $B\backslash A \Rightarrow A/B$ と $A\backslash B \Rightarrow BrdA$ が証明可能である。ところが exchange 規則がない体系では証明することができない。そのため、(/) と (\) が異なる論理結合子として意味を持つのである。

融合積についても同様である。

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A * B, \Delta \Rightarrow C}\ (* \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A * B}\ (\Rightarrow *)$$

このように定義される論理結合子（*）は weakening 規則と contraction 規則の両方を持つ体系では、$\wedge$ と同一と考えることができる。

3.2 cut 除去定理

定理 3.2.1. （**FL** の *cut* 除去定理） 式 $\Gamma \Rightarrow A$ が **FL** で証明可能ならば、$\Gamma \Rightarrow A$ に至る **FL** の証明図で *cut* を一度も用いないものが存在する（A は空でもよい）。

この定理を証明するためには **LJ** と同様のことを行えばよいが、**FL** の推論規則には contraction 規則が含まれていないため mix 規則を考える必要はない。すなわち、2.2.1 節に示したような cut 消去の素朴な論法を用いることができる。この素朴な論法を定義として以下に示す。

補助定理 3.2.1. 一番下にある推論規則が *cut* で、その他には *cut* を全く含まないような証明図は、同じ終式を持ち *cut* を全く含まない証明図に書き換えることができる。

一般に有限個の cut 規則を含む証明図が与えられたとき、最も上にある cut 規則の一つに目をつける。この cut 規則の下式が終式となるような証明図は、上に示した補助定理よりこの cut を消去することができる。そして、残りの証明図は元のままにしておくことにより全体の証明図の cut 規則の数は一つ少なくなる。したがって、帰納法の仮定より **FL** の cut 除去定理が成り立つことになる。

3.2.1 *grade* と *rank*

定義 3.2.1. （*grade*）grade とは、cut 論理式に含まれる論理記号の数のことである。

rank についても、**FL** の推論規則には contraction 規則が含まれていないため、**LJ** のときよりも簡単な定義をすることができる。

定義 3.2.2. （*rank*）証明図に含まれる squent の数。

3.2.2 cut 除去定理の証明

grade と *rank* の二重帰納法により補助定理の証明を行う。この節では最後の推論規則としてのみ cut を含む証明図を扱う。
次の場合分けを考える。

(1) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ のどちらか一方が始式のとき

(2) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ のどちらか一方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式でないとき

(3) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ の両方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式であるとき

［**証明**］

(1) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ のどちらか一方が始式のとき

(1.1) $\Gamma \Rightarrow A$ が始式 $A \Rightarrow A$ とき
証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{A \Rightarrow A \quad \Delta, A, \Sigma \Rightarrow B}{\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B}\ (cut)$$

この場合は、証明図 π の左上式が終式 $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ になっている。

(2) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ のどちらか一方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式でないとき

(2.1) $\Gamma \Rightarrow A$ が論理規則（$\wedge \Rightarrow 1$）とき
証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma A \wedge B, \Delta \Rightarrow C}\ (\wedge \Rightarrow 1) \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, A \wedge B, \Delta, \Sigma \Rightarrow D}\ (cut)$$

この証明図πは、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, A, \Delta, \Sigma \Rightarrow D}\,(cut)}{\Delta, \Gamma, A \wedge B, \Delta, \Sigma \Rightarrow D}\,(\wedge \Rightarrow 1)$$

この証明図の $grade$ は証明図πと変わらず、$rank$ は証明図πよりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.2) $\Gamma \Rightarrow A$が論理規則（$\wedge \Rightarrow$）とき

(2.1) と同様に行えばよい。

(2.3) $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow D$が論理規則（$\Rightarrow \wedge$）とき

証明図πは次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \qquad \dfrac{C, \Sigma \Rightarrow A \quad C, \Sigma \Rightarrow B}{C, \Sigma \Rightarrow A \wedge B}\,(\Rightarrow \wedge)}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow A \wedge B}\,(cut)$$

この証明図πは、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad C, \Sigma \Rightarrow A}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow A}\,(cut) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad C, \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow B}\,(cut)}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow A \wedge B}\,(\Rightarrow \wedge)$$

この証明図は2箇所の cut 規則が用いられている。まず左側方の cut 規則 を見ると、$grade$ は証明図πと同じであるが $rank$ は $Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。次に右側の cut 規則も同じように、$Rrank$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.4) $\Gamma \Rightarrow A$が論理規則（$\vee \Rightarrow 1$）とき

証明図πは次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B, \Delta \Rightarrow C}\,(\vee \Rightarrow) \qquad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, A \vee B, \Delta, \Sigma \Rightarrow C}\,(cut)$$

この証明図πは、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, A, \Delta, \Sigma \Rightarrow D}\,(cut) \qquad \dfrac{\Gamma, B\Delta \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, B, \Delta, \Sigma \Rightarrow D}\,(cut)}{\Delta, \Gamma, A \vee B, \Delta, \Sigma \Rightarrow C}\,(\vee \Rightarrow)$$

(2.5) $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ が論理規則（$\Rightarrow \vee 1$）とき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad \dfrac{\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B}{\Delta, C, \Sigma \Rightarrow A \vee B}\,(\Rightarrow \vee 1)}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow A \vee B}\,(cut)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow A}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow A}\,(cut)}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow A \vee B}\,(\Rightarrow \vee 1)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より mix 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.6) $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ が論理規則（$\Rightarrow \vee 2$）とき

(2.5) と同様に行えばよい。

(2.7) $\Gamma \Rightarrow A$ が論理規則（$* \Rightarrow$）とき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma A * B, \Delta \Rightarrow C}\,(* \Rightarrow) \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, A * B, \Delta, \Sigma \Rightarrow D}\,(cut)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, A, B, \Delta, \Sigma \Rightarrow D}\,(cut)}{\Delta, \Gamma, A * B, \Delta, \Sigma \Rightarrow D}\,(* \Rightarrow)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.8) $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ が論理規則（$\Rightarrow *$）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad \dfrac{C, \Delta \Rightarrow A \quad \Sigma \Rightarrow B}{C, \Delta, \Sigma \Rightarrow A * B}\,(\Rightarrow *)}{\Gamma, \Delta, \Sigma \Rightarrow A * B}\,(cut)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad C, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A}\,(cut) \qquad \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta, \Sigma \Rightarrow A * B}\,(\Rightarrow *)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.9) $\Gamma \Rightarrow A$ が論理規則（$/ \Rightarrow$）とき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Lambda, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Lambda, B/A, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C}\,(/ \Rightarrow) \qquad \Delta, C, \Pi \Rightarrow D}{\Delta, \Lambda, B/A, \Gamma, \Sigma, \Pi \Rightarrow D}\,(cut)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \dfrac{\Lambda, B, \Sigma \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Pi \Rightarrow D}{\Delta, \Lambda, B, \Sigma, \Pi \Rightarrow D}\,(cut)}{\Delta, \Lambda, B/A, \Gamma, \Sigma, \Pi \Rightarrow D}\,(/ \Rightarrow)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.10) $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ が論理規則（$\Rightarrow /$）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \qquad \dfrac{\Delta, C, \Sigma, A \Rightarrow B}{\Delta, C, \Sigma \Rightarrow B/A}\,(\Rightarrow /)}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow B/A}\,(cut)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma, A \Rightarrow B}{\Delta, \Gamma, \Sigma, A \Rightarrow B}\,(cut)}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow B/A}\,(\Rightarrow /)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.11) $\Gamma \Rightarrow A$ が論理規則（$\backslash \Rightarrow$）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Lambda, B, \Pi \Rightarrow C}{\Lambda, \Gamma, A\backslash B, \Pi \Rightarrow C}(\backslash \Rightarrow) \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Lambda, \Gamma, A\backslash B, \Pi, \Sigma \Rightarrow D}(cut)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \dfrac{\Lambda, B, \Pi \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Lambda, B, \Pi, \Sigma \Rightarrow D}(cut)}{\Delta, \Lambda, \Gamma, A\backslash B, \Pi, \Sigma \Rightarrow D}(\backslash \Rightarrow)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.12) $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ が論理規則（$\Rightarrow \backslash$）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad \dfrac{\Delta, C, A, \Sigma \Rightarrow B}{\Delta, C, \Sigma \Rightarrow A\backslash B}(\Rightarrow \backslash)}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow A\backslash B}(cut)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad \Delta, C, A, \Sigma \Rightarrow B}{\Delta, \Gamma, A, \Sigma \Rightarrow B}(cut)}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow A\backslash B}(\Rightarrow \backslash)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.13) $\Gamma \Rightarrow A$ が推論規則（$1w$）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Lambda \Rightarrow C}{\Gamma, 1, \Lambda \Rightarrow C}(1w) \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, 1, \Lambda, \Sigma \Rightarrow D}(cut)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Lambda \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, \Lambda, \Sigma \Rightarrow D}(cut)}{\Delta, \Gamma, 1, \Lambda, \Sigma \Rightarrow D}(1w)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(2.14) $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ が論理規則（$0w$）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad \dfrac{\Delta, C, \Sigma \Rightarrow}{\Delta, C, \Sigma \Rightarrow 0}\,(0w)}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow 0}\,(cut)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow}\,(cut)}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow 0}\,(0w)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π と変わらず、$rank$ は証明図 π よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ の両方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式であるとき

(3.1) mix 規則が（$A \vee B$）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\,(\Rightarrow \vee 1) \quad \dfrac{\Delta, A, \Sigma \Rightarrow D \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, A \vee B, \Sigma \Rightarrow D}\,(\vee \Rightarrow)}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D}\,(A \vee B)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, A, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D}\,(A)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π の $grade$ よりも一つ少ない。よって帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.2) cut 規則が（$A \wedge B$）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}\,(\Rightarrow \wedge) \quad \dfrac{\Delta, A, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, A \wedge B, \Sigma \Rightarrow D}\,(\wedge \Rightarrow 1)}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D}\,(A \wedge B)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, A, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D}\,(A)$$

この証明図の $grade$ は証明図 π の $grade$ よりも一つ少ない。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.3) cut 規則が（$A * B$）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A * B}\,(\Rightarrow *) \quad \dfrac{\Sigma, A, B, \Pi \Rightarrow D}{\Sigma, A * B, \Pi \Rightarrow D}\,(* \Rightarrow)}{\Sigma, \Gamma, \Delta, \Pi \Rightarrow D}\,(A * B)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\Delta \Rightarrow B \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Sigma, A, B, \Pi \Rightarrow D}{\Sigma, \Gamma, B, \Pi \Rightarrow D}\,(A)}{\Sigma, \Gamma, \Delta, \Pi \Rightarrow D}\,(B)$$

この証明図は 2 箇所の cut 規則が用いられている。まず上部の cut 規則の $grade$ を見ると、証明図 π の $grade$ よりも一つ小さくなっている。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。次に、下部の cut 規則も同じように $grade$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.4) cut 規則が（B/A）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B/A}\,(\Rightarrow /) \quad \dfrac{\Pi \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, B/A, \Pi, \Sigma \Rightarrow D}\,(/ \Rightarrow)}{\Delta, \Gamma, \Pi, \Sigma \Rightarrow D}\,(B/A)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\Pi \Rightarrow A \quad \dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma, A, \Pi \Rightarrow D}\,(B)}{\Delta, \Gamma, \Pi, \Sigma \Rightarrow D}\,(A)$$

この証明図は 2 箇所の cut 規則が用いられている。まず上部の cut 規則の $grade$ を見ると、証明図 π の $grade$ よりも一つ小さくなっている。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。次に、下部の cut 規則も同じように $grade$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

(3.5) cut 規則が（$A\backslash B$）のとき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{A,\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A\backslash B}\,(\Rightarrow\backslash) \quad \dfrac{\Pi \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Pi, A\backslash B, \Pi \Rightarrow D}\,(\backslash\Rightarrow)}{\Delta, \Pi, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D}\,(A\backslash B)$$

この証明図 π は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\Pi \Rightarrow A \quad \dfrac{A,\Gamma \Rightarrow B \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, A, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D}\,(B)}{\Delta, \Pi, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D}\,(A)$$

この証明図は 2 箇所の cut 規則が用いられている。まず上部の cut 規則の $grade$ を見ると、証明図 π の $grade$ よりも一つ小さくなっている。よって、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。次に、下部の cut 規則も同じように $grade$ が一つ小さくなっているので、帰納法の仮定より cut 規則を用いない証明図に書き換えることができる。

以上で、部分構造論理の基本的体系 **FL** の cut 除去定理の証明は終わるが、構造に関する推論規則を選択的に付け加えた体系では、以下のことが知られている。

定理 3.2.2. *cut* 除去定理は、 **FL**, $\mathbf{FL}_e$, $\mathbf{FL}_w$, $\mathbf{FL}_{ec}$, $\mathbf{FL}_{ew}$ および $\mathbf{FL}_{ecw}$ の各体系で成り立つ。

ここで、定理 3.2.2 についていくつかの注意を与える。定理 3.2.2 に述べた体系の中で、$\mathbf{FL}_e$, $\mathbf{FL}_w$ および $\mathbf{FL}_{ew}$ の体系について cut 除去定理を証明するには、**FL** と同様に行うことができる。しかし、構造に関する推論規則を含んでいる体系 $\mathbf{FL}_{ec}$ および $\mathbf{FL}_{ecw}$ の場合には、mix 規則の導入と $rank$ の定義が **FL** の場合の証明と異なり、**LJ** の場合の証明と同じ定義をすればよい。それ以外の体系では、**LJ** と同様な証明方法である。

3.3 Craig の補間定理

定理 3.3.1. （*Craig* の補間定理）$A \Rightarrow B$ が **FL** で証明可能であれば、A,B に共通な命題変数および命題定数 *1*,*0*,$\top$,$\bot$ からなる論理式 C が存在して、$A \Rightarrow C$ および $C \Rightarrow B$ が **FL** で証明可能である。

以下の補助定理を設定する。

補助定理 3.3.1. $\Gamma \Rightarrow D$（D は *formula* または空列）が **FL** で証明可能であり、$\Gamma_1;\Gamma_2;\Gamma_3$ を Γ の任意の分割（$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ が Γ となる任意の組み合わせ）としたとき、Γ_2 と Γ_1,Γ_3,D に共通な命題変数および命題定数 *1,0,*$\top$,$\bot$ からなる論理式 C' が存在して、$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1,C',\Gamma_3 \Rightarrow D$ が **FL** により証明可能である。

定理 3.2.2 は補助定理 3.2.2 において Γ_1,Γ_2 が空となるように分割を行うことで導かれる。

3.3.1 Craig の補間定理の証明

[証明]

$\Gamma \Rightarrow D$ の cut なしの証明図の高さによる帰納法を用いる。

(1) 証明図が始式のみからなるとき

(1.1) $A \Rightarrow A$ のとき

(1.1.1) Γ_1 を A としたとき
$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1,C',\Gamma_3 \Rightarrow D$ はそれぞれ、$\Rightarrow C'$ および $A,C',\Gamma_3 \Rightarrow A$ となる。よって C' を 1 とおけば、二つの式は始式 $A \Rightarrow A$、$\Rightarrow 1$ および推論規則（$1w$）により証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.1.2) Γ_2 を A としたとき
$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1,C',\Gamma_3 \Rightarrow D$ はそれぞれ、$\Rightarrow C'$ および $A,C',\Gamma_3 \Rightarrow A$ となる。よって C' を A とおけば、二つの式は始式 $A \Rightarrow A$ により証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.1.3) Γ_3 を A としたとき
$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1,C',\Gamma_3 \Rightarrow D$ はそれぞれ、$\Rightarrow C'$ および $A,C',\Gamma_3 \Rightarrow A$ となる。よって C' を 1 とおけば、二つの式は始式 $A \Rightarrow A$、$\Rightarrow 1$ および推論規則（$1w$）により証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.2) $\Rightarrow 1$ のとき
$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1,C',\Gamma_3 \Rightarrow D$ はそれぞれ、$\Rightarrow C'$ および $A,C',\Gamma_3 \Rightarrow A$ となる。よって C' を 1 とおけば、二つの式は始式 $A \Rightarrow A$、$\Rightarrow 1$ および推論規則（$1w$）により証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.3) $0 \Rightarrow$ のとき

(1.3.1) Γ_1 を 0 としたとき
$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1,C',\Gamma_3 \Rightarrow D$ はそれぞれ、$\Rightarrow C'$ および $A,C',\Gamma_3 \Rightarrow A$ となる。よって C' を 1 とおけば、二つの式は始式 $\Rightarrow 1$、$0 \Rightarrow$ および推論規則（$1w$）により証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.3.2) Γ_2 を 0 としたとき
$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1, C', \Gamma_3 \Rightarrow D$ はそれぞれ、$0 \Rightarrow C'$ および $C' \Rightarrow A$ となる。よって C' を 0 とおけば、二つの式は始式 $A \Rightarrow A$、$0 \Rightarrow$ により証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.3.3) Γ_3 を 0 としたとき
$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1, C', \Gamma_3 \Rightarrow D$ はそれぞれ、$\Rightarrow C'$ および $C', 0 \Rightarrow A$ となる。よって C' を 1 とおけば、二つの式は始式 $\Rightarrow 1$、$0 \Rightarrow$ および推論規則（$1w$）により証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.4) $\Gamma \Rightarrow \top$ のとき
$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ を Γ の任意の分割として $\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1, C', \Gamma_3 \Rightarrow D$ はそれぞれ、$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1, C', \Gamma_3 \Rightarrow \top$ となる。よって C' を $\top$ とおけば、二つの式は始式となって証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.5) $\Gamma, \bot, \Delta \Rightarrow A$ のとき

(1.5.1) $\Gamma, \bot, \Delta \Rightarrow A$ を $\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3, \bot, \Delta$ と分割したとき
$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1, C', \Gamma_3 \Rightarrow A$ は C' を $\top$ とおけば、始式となって証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.5.2) $\Gamma, \bot, \Delta \Rightarrow A$ を $\Gamma_1; \Gamma_2, \bot, \Delta_1; \Delta_2$ と分割したとき
$\Gamma_2, \bot, \Delta \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1, C', \Gamma_3 \Rightarrow A$ は C' を $\bot$ とおけば、始式となって証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(1.5.3) $\Gamma, \bot, \Delta \Rightarrow A$ を $\Gamma_1, \bot, \Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$ と分割したとき
$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1, C', \Gamma_3 \Rightarrow A$ は C' を $\bot$ とおけば、始式となって証明可能であり、補助定理が成り立つ。

(2) 証明図が少なくとも一つの推論規則を用いているとき

(2.1) 最後に用いられる推論規則が（1w）のとき

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, 1, \Delta \Rightarrow A}\ (1w)$$

(2.1.1) $\Gamma, 1, \Delta$ を $\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3, 1, \Delta$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, \Delta \Rightarrow A$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, \Delta \Rightarrow A}{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, 1, \Delta \Rightarrow A}\ (1w)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, 1, \Delta \Rightarrow A$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, \Delta, A$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに、Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, \Delta, 1, A$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.1.2) $\Gamma, 1, \Delta$ を $\Gamma_1; \Gamma_2, 1, \Delta_1; \Delta_2$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Gamma_2, \Delta_1 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Delta_2 \Rightarrow A$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_2, \Delta_1 \Rightarrow C_1}{\Gamma_2, 1, \Delta_1 \Rightarrow C_1}\ (1w)$$

とすると、結局 $\Gamma_2, 1, \Delta_1 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Delta_2 \Rightarrow A$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2, Δ_1 と Γ_1, Δ_2, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに、$\Gamma_2, 1, \Delta_1$ と Γ_1, Δ_2, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.1.3) $\Gamma, 1, \Delta$ を $\Gamma, 1, \Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Delta_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow A$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow A}{\Gamma, 1, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow A}\ (1w)$$

とすると、結局 $\Delta_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma, 1, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow A$ が証明可能。また、C_1 は Δ_2 と $\Gamma, \Delta_1, C_1, \Delta_3, A$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに、Δ_2 と $\Gamma, 1, \Delta_1, C_1, \Delta_3, A$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.2) 最後に用いられる推論規則が（0w）のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow 0}{\Gamma \Rightarrow}\ (0w)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow 0$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow 0}{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow}\ (0w)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow 0$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と $\Gamma_1, \Delta_3, 0$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2 と Γ_1, Γ_3 に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.3) 最後に用いられる推論規則が（$\wedge \Rightarrow 1$）のとき（($\wedge \Rightarrow 2$）も同様）

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \Rightarrow C}\ (\wedge \Rightarrow 1)$$

(2.3.1) $\Gamma, A \wedge B, \Delta$ を $\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3, A \wedge B, \Delta \Rightarrow D$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A, \Delta \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A, \Delta \Rightarrow D}{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A \wedge B, \Delta \Rightarrow D} \ (\wedge \Rightarrow 1)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A \wedge B, \Delta \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, A, \Delta, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, A \wedge B, \Delta, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.3.2) $\Gamma, A \wedge B, \Delta$ を $\Gamma_1; \Gamma_2, A \wedge B, \Delta_1; \Delta_2$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Gamma_2, A, \Delta_1 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Delta_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_2, A, \Delta_1, \Rightarrow C_1}{\Gamma_2, A \wedge B, \Delta_1 \Rightarrow C_1} \ (\wedge \Rightarrow 1)$$

とすると、結局 $\Gamma_2, A \wedge B, \Delta_1 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Delta_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2, A, Δ_1 と Γ_1, Δ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに $\Gamma_2, A \wedge B, \Delta_1$ と Γ_1, Δ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.3.3) $\Gamma, A \wedge B, \Delta$ を $\Gamma, A \wedge B, \Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Delta_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma, A, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma, A, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow D}{\Gamma, A \wedge B, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow D} \ (\wedge \Rightarrow 1)$$

とすると、結局 $\Delta_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma, A \wedge B, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Δ_2 と $\Gamma, A, \Delta_1, \Delta_3, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Δ_2 と $\Gamma, A \wedge B, \Delta_1, C_1, \Delta_3, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.4) 最後に用いられる推論規則が（$\Rightarrow \wedge$）のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B} \ (\Rightarrow \wedge)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A$ および $\Gamma_2 \Rightarrow C_2$ と $\Gamma_1, C_2, \Gamma_3 \Rightarrow B$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_2 \Rightarrow C_1 \quad \Gamma_2 \Rightarrow C_2}{\Gamma_2 \Rightarrow C_1 \wedge C_2} \ (\Rightarrow \wedge)$$

および、

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A}{\Gamma_1, C_1 \wedge C_2, \Gamma_3 \Rightarrow A}\,(\wedge\Rightarrow 1) \quad \dfrac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow B}{\Gamma_1, C_1 \wedge C_2, \Gamma_3 \Rightarrow B}\,(\wedge\Rightarrow 2)}{\Gamma_1, C_1 \wedge C_2, \Gamma_2 \Rightarrow A \wedge B}\,(\Rightarrow\wedge)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1 \wedge C_2$ と $\Gamma_1, C_1 \wedge C_2 \Rightarrow A \wedge B$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と Γ_1, Γ_3, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であり、C_2 は Γ_2 と Γ_1, Γ_3, B に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、$C_1 \wedge C_2$ は Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, A \wedge B$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、$C_1 \wedge C_2$ が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.5) 最後に用いられる推論規則が（$\vee\Rightarrow$）のとき

$$\dfrac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B, \Delta \Rightarrow C}\,(\vee\Rightarrow)$$

(2.5.1) $\Gamma, A \vee B, \Delta$ を $\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3, A \vee B, \Delta$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A, \Delta \Rightarrow D$ および $\Gamma_2 \Rightarrow C_2$ と $\Gamma_1, C_2, \Gamma_3, B, \Delta \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\Gamma_2 \Rightarrow C_1 \quad \Gamma_2 \Rightarrow C_2}{\Gamma_2 \Rightarrow C_1 \wedge C_2}\,(\Rightarrow\wedge)$$

および、

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A, \Delta \Rightarrow D}{\Gamma_1, C_1 \wedge C_2, \Gamma_3, A \vee B, \Delta \Rightarrow D}\,(\wedge\Rightarrow 1) \quad \dfrac{\Gamma_1, C_2, \Gamma_3, B, \Delta \Rightarrow D}{\Gamma_1, C_1 \wedge C_2, \Gamma_3, B, \Delta \Rightarrow D}\,(\wedge\Rightarrow 2)}{\Gamma_1, C_1 \wedge C_2, \Gamma_3, A \vee B, \Delta \Rightarrow D}\,(\vee\Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1 \wedge C_2$ と $\Gamma_1, C_1 \wedge C_2, \Gamma_3, A \vee B, \Delta \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, A, \Delta, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であり、C_2 は Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, B, \Delta, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、$C_1 \wedge C_2$ は Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, A \vee B, \Delta, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、$C_1 \wedge C_2$ が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.5.2) $\Gamma, A \vee B, \Delta$ を $\Gamma_1; \Gamma_2, A \vee B, \Delta_1; \Delta_2$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Gamma_2, A, \Delta_1 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Delta_2, D$ および $\Gamma_2, B, \Delta_1 \Rightarrow C_2$ と $\Gamma_1, C_2, \Delta_2, D$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_2, A, \Delta_1 \Rightarrow C_1}{\Gamma_2, A, \Delta_1 \Rightarrow C_1 \vee C_2}\,(\Rightarrow\vee 1) \quad \dfrac{\Gamma_2, B, \Delta_1 \Rightarrow C_2}{\Gamma_2, B, \Delta_1 \Rightarrow C_1 \vee C_2}\,(\Rightarrow\vee 2)}{\Gamma_2, A \vee B, \Delta_1 \Rightarrow C_1 \vee C_2}\,(\vee\Rightarrow)$$

および、

$$\frac{\Gamma_1, C_1, \Delta_2 \Rightarrow D \quad \Gamma_1, C_2, \Delta_2 \Rightarrow D}{\Gamma_1, C_1 \vee C_2, \Delta_2 \Rightarrow D} (\vee \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_2, B, \Delta_1 \Rightarrow C_2$ と $\Gamma_1, C_1 \vee C_2, \Delta_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2, A, Δ_1 と $\Gamma_1, \Gamma_3, \Delta_2, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であり、C_2 は Γ_2, B, Δ_1 と $\Gamma_1, \Gamma_3, \Delta_2, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、$C_1 \vee C_2$ は Γ_2, B, Δ_1 と Γ_1, Δ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、$C_1 \vee C_2$ が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.5.3) $\Gamma, A \vee B, \Delta$ を $\Gamma, A \vee B, \Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Delta_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma, A, \Delta_1, C_1, \Delta_3, \Rightarrow D$ および $\Delta_2 \Rightarrow C_2$ と $\Gamma, B, \Delta_1, C_2, \Delta_3 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Delta_2 \Rightarrow C_1 \quad \Delta_2 \Rightarrow C_2}{\Delta_2 \Rightarrow C1 \wedge C2} (\vee \Rightarrow)$$

および、

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, A, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow D}{\Gamma, A, \Delta_1, C_1 \vee C_2, \Delta_3 \Rightarrow D} (\wedge \Rightarrow 1) \quad \cfrac{\Gamma, B, \Delta_1, C_2, \Delta_3 \Rightarrow D}{\Gamma, B, \Delta_1, C_1 \vee C_2, \Delta_3 \Rightarrow D} (\wedge \Rightarrow 1)}{\Gamma, A \vee B, \Delta_1, C_1 \wedge C_2, \Delta_3 \Rightarrow D} (\vee \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Delta_2 \Rightarrow C_1 \wedge C_2$ と $\Gamma, A \vee B, \Delta_1, C_1 \wedge C_2, \Delta_3 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Δ_2 と $\Gamma, A, \Delta_1, \Delta_3, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であり、C_2 は Δ_2 と $\Gamma, B, \Delta_1, \Delta_3, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、$C_1 \wedge C_2$ は Δ_2 と $\Gamma, A \vee B, \Delta_1, \Delta_3, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、$C_1 \wedge C_2$ が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.6) 最後に用いられる規則が（⇒ ∨1）のとき（(⇒ ∨2）も同様）

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} (\Rightarrow \vee 1)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A}{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A \vee B} (\Rightarrow \vee 1)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A \vee B$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と Γ_1, Γ_3, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, A \vee B$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.7) 最後に用いられる規則が（$* \Rightarrow$）のとき

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow D}{\Gamma, A * B, \Delta \Rightarrow D}\ (* \Rightarrow)$$

(2.7.1) $\Gamma, A * B, \Delta$ を $\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3, A * B, \Delta$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A, B, \Delta \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A, B, \Delta \Rightarrow D}{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A * B, \Delta \Rightarrow D}\ (* \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A, B, \Delta \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, A, B, \Delta, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, A * B, \Delta, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.7.2) $\Gamma, A * B, \Delta$ を $\Gamma_1; \Gamma_2, A * B, \Delta_1; \Delta_2$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Gamma_2, A, B, \Delta_1 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Delta_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_2, A, B, \Delta_1 \Rightarrow C_1}{\Gamma_2, A * B, \Delta_1 \Rightarrow C_1}\ (* \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_2, A * B, \Delta_1 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Delta_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2, A, B, Δ_1 と Γ_1, Δ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに $\Gamma_2, A * B, \Delta_1$ と Γ_1, Δ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.7.3) $\Gamma, A * B, \Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Delta_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma, A, B, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow D}{\Gamma, A * B, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow D}\ (* \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Delta_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma, A * B, \Delta_1, C_1, \Delta_3 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Δ_2 と $\Gamma, A, B, \Delta_1, \Delta_3, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Δ_2 と $\Gamma, A * B, \Delta_1, \Delta_3 \Rightarrow D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.8) 最後に用いられる規則が（$\Rightarrow *$）のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A * B} (\Rightarrow *)$$

(2.8.1) Γ, Δ を $\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3, \Delta$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A$ および $\Rightarrow C_2$ と $\Delta, C_2 \Rightarrow B$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\Gamma_2 \Rightarrow C_1 \quad \dfrac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A \quad \Delta, C_2 \Rightarrow B}{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Delta, C_2 \Rightarrow A * B} (\Rightarrow *)}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Delta C_2 \Rightarrow A * B} (cut)$$

とすると、結局 $\Rightarrow C_2$ と $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Delta C_2 \Rightarrow A * B$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と Γ_1, Γ_3, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Delta, A$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_2 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.8.2) Γ, Δ を $\Gamma_1; \Gamma_2, \Delta_1; \Delta_2$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Rightarrow A$ および $\Delta_1 \Rightarrow C_2$ と $C_2, \Delta_2 \Rightarrow B$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_2 \Rightarrow C_1 \quad \Delta_1 \Rightarrow C_2}{\Gamma_2, \Delta_1 \Rightarrow C_1 * C_2} (\Rightarrow *)$$

および、

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, C_1 \Rightarrow A \quad C_2, \Delta_2 \Rightarrow B}{\Gamma_1, C_1, C_2 \Rightarrow A * B} (\Rightarrow *)}{\Gamma_1, C_1 * C_2, \Delta_2 \Rightarrow A * B} (* \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_2, \Delta_1 \Rightarrow C_1 * C_2$ と $\Gamma_1, C_1 * C_2, \Delta_2 \Rightarrow A * B$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と Γ_1, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であり、C_2 は Δ_1 と Δ_2, B に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、$C_1 * C_2$ は Γ_2, Δ_1 と $\Gamma_1, \Delta_2, A * B$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、$C_1 * C_2$ が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.8.3) Γ, Δ を $\Gamma, \Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma, \Rightarrow A$ および $\Delta_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, C_2, \Delta_3 \Rightarrow B$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\Rightarrow C_1 \quad \dfrac{C_1, \Gamma \Rightarrow A \quad \Delta_1, C_2, \Delta_3 \Rightarrow B}{C_1, \Gamma, \Delta_1, C_2, \Delta_3 \Rightarrow A * B} (\Rightarrow *)}{\Gamma, \Delta_1, C_2, \Delta_3 \Rightarrow A * B} (cut)$$

とすると、結局 $\Delta_2 \Rightarrow C_2$ と $\Gamma, \Delta_1, C_2, \Delta_3 \Rightarrow A * B$ が証明可能。また、C_2 は Δ_2 と Δ_1, Δ_3, B に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Δ_2 と $\Gamma, \Delta_1, \Delta_3, A * B$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_2 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.9) 最後に用いられる規則が（$/ \Rightarrow$）のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C}\ (/ \Rightarrow)$$

(2.9.1) $\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma$ を $\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3, B/A, \Gamma, \Sigma$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma, \Rightarrow A$ および $\Delta_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, C_2, \Delta_3, B, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Rightarrow C_1 \qquad \dfrac{C_1, \Gamma \Rightarrow A \quad \Delta_1, C_2, \Delta_3, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta_1, C_2, \Delta_3, B/A, C_1, \Gamma, \pi \Rightarrow D}\ (/ \Rightarrow)}{\Delta_1, C_2, \Delta_3, B/A, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D}\ (cut)$$

とすると、結局 $\Delta_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, C_2, \Delta_3, B/A, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_2 は Δ_2 と $\Delta_1, \Delta_3, B, \Sigma, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに C_2 は Δ_2 と $\Delta_1, \Delta_3, B/A, \Sigma, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_2 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.9.2) $\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma$ を $\Delta_1; \Delta_2, B/A, \Gamma_1; \Gamma_2, \Sigma$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Rightarrow A$ および $\Delta_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, B, C_2, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\dfrac{\Gamma_1, C_1 \Rightarrow A \quad \Delta_1, B, C_2, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta_1, B/A, \Gamma_1, C_1, C_2, \Sigma \Rightarrow D}\ (/ \Rightarrow)}{\Delta_1, B/A, \Gamma_1, C_1 * C_2, \Sigma \Rightarrow D}\ (* \Rightarrow)$$

および、

$$\frac{\Gamma_2 \Rightarrow C_1 \quad \Delta_2 \Rightarrow C_2}{\Gamma_2, \Delta_2 \Rightarrow C_1 * C_2}\ (\Rightarrow *)$$

とすると、結局 $\Gamma_2, \Delta_2 \Rightarrow C_1 * C_2$ と $\Delta_1, B/A, \Gamma_1, C_1 * C_2, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と Γ_1, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であり、C_2 は Δ_2 と Δ_1, B, Σ, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、$C_1 * C_2$ は Γ_2, Δ_2 と $\Delta_1, B/A, \Gamma_1, \Sigma, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、$C_1 * C_2$ が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.9.3) $\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma$ を $\Delta_1; \Delta_2, B/A, \Gamma, \Sigma_1; \Sigma_2$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Rightarrow C_1$ と $\Gamma, C_1 \Rightarrow A$ および $\Delta_2, B, \Sigma_1 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\Rightarrow C_1 \qquad \dfrac{\Gamma, C_1 \Rightarrow A \quad \Delta_2, B, \Sigma_1 \Rightarrow D}{\Delta_2, B/A, \Gamma, C_1, \Sigma_1 \Rightarrow C_2}\,(/\Rightarrow)}{\Delta_2, B/A, \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow C_2}\,(cut)$$

とすると、結局 $\Delta_2, B/A, \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_2 は Δ_2, B, Σ_1 と Δ_1, Σ_2, D に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であるから、あきらかに C_2 は $\Delta_2, B/A, \Gamma_1, \Sigma_1$ と Δ_1, Σ_2, D に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であるといえる。よって、C_2 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.9.4) $\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma$ を $\Delta, A/B, \Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3, \Sigma$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A$ および $\Rightarrow C_2$ と $\Delta, B, C_2, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\Rightarrow C_2 \qquad \dfrac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A \quad \Delta, B, C_2, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, B/A, \Gamma_1, C_1, \Gamma_3, C_2, \Sigma \Rightarrow D}\,(/\Rightarrow)}{\Delta, A/B, \Gamma_1, C_1, \Gamma_3, \Sigma \Rightarrow D}\,(cut)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Delta, B/A, \Gamma_1, C_1, \Gamma_3, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と Γ_1, Γ_3, A に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2 と $\Delta, B/A, \Gamma_1, \Gamma_3, \Sigma \Rightarrow D$ に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.9.5) $\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma$ を $\Delta, B/A, \Gamma_1; \Gamma_2, \Sigma_1; \Sigma_2$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Rightarrow A$ および $\Sigma_1 \Rightarrow C_2$ と $\Delta, B, C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\Gamma_2 \Rightarrow C_1 \quad \Sigma_1 \Rightarrow C_2}{\Gamma_2, \Sigma_1 \Rightarrow C_1 * C_2}\,(\Rightarrow *)$$

および、

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_1, C_1 \Rightarrow A \quad \Delta, B, C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D}{\Sigma, B/A, \Gamma_1, C_1 * C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D}\,(/\Rightarrow)}{\Delta, B/A, \Gamma_1, C_1 * C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D}\,(*\Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_2, \Sigma_1 \Rightarrow C_1 * C_2$ と $\Delta, B/A, \Gamma_1, C_1 * C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と Γ_1, A に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であり、C_2 は Σ_1 と Δ, B, Σ_2, D に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であるから、$C_1 * C_2$ は Γ_2, Σ_1 と $\Delta, B/A, \Gamma_1, \Sigma_2, D$

に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であるといえる。よって、$C_1 * C_2$ が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.9.6) $\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma$ を $\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma_1; \Sigma_2; \Sigma_3$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma \Rightarrow A$ および $\Sigma_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta, B, \Sigma_1, C_2, \Sigma_3 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\Rightarrow C_1 \quad \dfrac{C_1, \Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma_1, C_2, \Sigma_3 \Rightarrow D}{\Delta, B/A, C_1, \Gamma, \Sigma_1, C_2, \Sigma_3 \Rightarrow D}\,(/\Rightarrow)}{\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma_1, C_2, \Sigma_3 \Rightarrow D}\,(cut)$$

とすると、結局 $\Sigma_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta, B/A, \Gamma, \Sigma_1, C_2, \Sigma_3 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_2 は Σ_2 と $\Delta, B, \Sigma_1, sig_3 \Rightarrow D$ に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であるから、あきらかに Σ_2 と $\Delta, B/A, \Sigma_1, sig_3, D$ に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であるといえる。よって、C_2 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.10) 最後に用いられる規則が（$\Rightarrow /$）のとき

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B/A}\,(\Rightarrow /)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A \Rightarrow B$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\Gamma, C_1, \Gamma_3, A \Rightarrow B}{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow AB/A}\,(\Rightarrow /)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow B/A$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と Γ_1, Γ_3, A, B に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, B/A$ に共通な命題変数および命題定数1,0,⊤,⊥からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.11) 最後に用いられる規則が（$\Rightarrow \backslash$）のとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma \Rightarrow C}\,(\backslash \Rightarrow)$$

(2.11.1) $\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma$ を $\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3, \Gamma A\backslash B, \Sigma$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma, \Rightarrow A$ および $\Delta_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, C_2, \Delta_3, B, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\dfrac{\Rightarrow C_1 \quad \dfrac{C_1, \Gamma \Rightarrow A \quad \Delta_1, C_2, \Delta_3, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta_1, C_2, \Delta_3, C_1, \Gamma, A\backslash B, \Sigma \Rightarrow D}\,(\backslash \Rightarrow)}{\Delta_1, C_2, \Delta_3, \Gamma, A\backslash B, \Sigma \Rightarrow D}\,(cut)$$

とすると、結局 $\Delta_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, C_2, \Delta_3, \Gamma, A\backslash B, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_2 は Δ_2 と $\Delta_1, \Delta_3, B, \Sigma, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、あきらかに Δ_2 と $\Delta_1, \Delta_3, \Gamma, A\backslash B, \Sigma, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、C_2 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.11.2) $\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma$ を $\Delta_1; \Delta_2, \Gamma_1; \Gamma_2, A\backslash B, \Sigma$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$ および $\Delta_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, C_2, B, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Delta_2 \Rightarrow C_2 \quad \Gamma_1 \Rightarrow C_1}{\Delta_2, \Gamma_1 \Rightarrow C_2 * C_1}\ (\Rightarrow *)$$

および、

$$\frac{\dfrac{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \quad \Delta_1, C_2, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta_1, C_2, C_1, \Gamma_2, A\backslash B, \Sigma \Rightarrow D}\ (\backslash \Rightarrow)}{\Delta_1, C_2 * C_1, \Gamma_2, A\backslash B, \Sigma_1 \Rightarrow D}\ (* \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Delta_2, \Gamma_1 \Rightarrow C_1 * C_2$ と $\Delta_1, C_1 * C_2, \Gamma_2, A\backslash B, \Sigma_1 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と Γ_2, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であり、C_2 は Δ_2 と Δ_1, B, Σ, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、$C_1 * C_2$ は Δ_2, Γ_1 と $\Delta_1, \Gamma_2, A\backslash B, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、$C_2 * C_1$ が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.11.3) $\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma$ を $\Delta_1; \Delta_2, \Gamma, A\backslash B, \Sigma_1, \Sigma_2$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Rightarrow C_1$ と $\Gamma, C_1 \Rightarrow A$ および $\Delta_2, B, \Sigma_1 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Rightarrow C_1 \qquad \dfrac{\Gamma, C_1 \Rightarrow A \quad \Delta_2, B, \Sigma_1 \Rightarrow C_2}{\Delta_2, \Gamma, C_1, A\backslash B, \Sigma_1 \Rightarrow C_2}\ (\backslash \Rightarrow)}{\Delta_2, \Gamma, A/B, \Sigma_1 \Rightarrow C_2}\ (cut)$$

とすると、結局 $\Delta_2, \Gamma, A\backslash B, sig_1 \Rightarrow C_2$ と $\Delta_1, C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_2 は Δ_2, B, Σ_1 と Δ_1, Σ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、あきらかに $\Delta_2, \Gamma, A\backslash B, \Sigma_1$ と Δ_1, Σ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、C_2 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.11.4) $\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma$ を $\Delta, \Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3, A\backslash B, \Sigma$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A$ および $\Rightarrow C_2$ と $\Delta, B, C_2, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\cfrac{\Rightarrow C_2 \qquad \cfrac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A \quad \Delta, B, C_2, \Sigma \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A\backslash B, C_2, \Sigma \Rightarrow D}\ (\backslash \Rightarrow)}{\Delta, \Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A\backslash B, \Sigma \Rightarrow D}\ (cut)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Delta, \Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A\backslash B, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と Γ_1, Γ_3, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2 と $\Delta, \Gamma_1, \Gamma_3, A\backslash B, \Sigma, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.11.5) $\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma$ を $\Delta, \Gamma_1; \Gamma_2, A\backslash B, \Sigma_1; \Sigma_2$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Gamma_1 \Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$ および $B, \Sigma_1 \Rightarrow C_2$ と $\Delta, C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\cfrac{\cfrac{C_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \quad B, \Sigma_1 \Rightarrow C_2}{C_1, \Gamma_2, A\backslash B, \Sigma_1 \Rightarrow C_2}\ (\backslash \Rightarrow)}{\Gamma_2, A\backslash B, \Sigma_1 \Rightarrow C_1\backslash C_2}\ (\Rightarrow \backslash)$$

および、

$$\cfrac{\Gamma_1 \Rightarrow C_1 \quad \Delta, C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D}{\Delta, \Gamma_1, C_1\backslash C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D}\ (\backslash \Rightarrow)$$

とすると、結局 $\Gamma_2, A\backslash B, \Sigma_1 \Rightarrow C_1\backslash C_2$ と $\Delta, \Gamma_1, C_1\backslash C_2, \Sigma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_1 と Γ_2, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であり、C_2 は B, Σ_1 と Δ, Σ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、$C_1\backslash C_2$ は $\Gamma_2, A\backslash B, \Sigma_1$ と $\Delta, \Gamma_1, \Sigma_2, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、$C_1\backslash C_2$ が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.11.6) $\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Gamma, \Sigma$ を $\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma_1; \Sigma_2; \Sigma_3$ に分割したとき

帰納法の仮定より、$\Rightarrow C_1$ と $C_1, \Gamma \Rightarrow A$ および $\Sigma_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta, B, \Sigma_1, C_2, \Sigma_3 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\cfrac{\Rightarrow C_1 \qquad \cfrac{C_1, \Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma_1, C_2, \Sigma_3 \Rightarrow D}{\Delta, C_1, \Gamma, A\backslash B, \Sigma_1, C_2, \Sigma_3 \Rightarrow D}\ (\backslash \Rightarrow)}{\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma_1, C_2, \Sigma_3 \Rightarrow D}\ (cut)$$

とすると、結局 $\Sigma_2 \Rightarrow C_2$ と $\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma_1, C_2, \Sigma_3 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_2 は Σ_2 と $\Delta, B, \Sigma_1, \Sigma_3, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるから、あきらかに Σ_2 と $\Delta, \Gamma, A\backslash B, \Sigma_1, \Sigma_3 \Rightarrow D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,⊤,⊥ からなる論理式であるといえる。よって、C_2 が C' となり補助定理が成り立つ。

(2.12) 最後に用いられる規則が（$\Rightarrow \backslash$）のとき

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A\backslash B}\ (\Rightarrow \backslash)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $A, \Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow B$ が証明可能。さらに、

$$\frac{A, \Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow B}{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A\backslash B}\ (\Rightarrow \backslash)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A\backslash B$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と A, Γ_1, Γ_3, B に共通な命題変数および命題定数1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, A\backslash B$ に共通な命題変数および命題定数1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となり補助定理が成り立つ。

以上で、部分構造論理の基本的体系 **FL** についてCraigの補間定理の証明は終わるが、構造に関する推論規則を選択的に付け加えた体系では、以下のことが知られている。

定理 3.3.2. *Craig* の補間定理は $\mathbf{K_{FL}}$, $\mathbf{K_{FL}}_e$, $\mathbf{K_{FL}}_w$, $\mathbf{K_{FL}}_{ec}$, $\mathbf{K_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{K_{FL}}_{ecw}$ の各体系で成り立つ。

定理3.3.2に述べた体系におけるCraigの補間定理の証明は、**FL** の場合と同様に行うことができる。

3.4　決定可能性

部分構造論理の基本的体系 **FL** について決定可能性を示す。この体系では、推論規則としてcontraction規則が考慮されていないため **LJ** のときよりも簡単に証明をすることができる [8] 。

定理 3.4.1. 部分構造論理の基本的体系 **FL** は決定可能である。

［**証明**］

実際、cut規則を含まない証明図は、下式よりも上式の方が論理式の数が少なくなり、より簡易な式となっている。このように、与えられた式のcutを含まない証明図中の論理式は、有限である。よって、証明可能な式の数もまた有限である。

［**部分構造論理の基本的体系 FL の決定手続き**］

1. $\Gamma \Rightarrow A$ から出発して $\Gamma \Rightarrow A$ に至る cut 規則のない証明図 π' を構成する。

2. 証明図 π' に現れる論理式は Γ, A の部分論理式のみ。

3. 証明図 π' に現れる各推論規則の上式になりうる sequent の数は有限（cut 規則以外）。

4. 証明図 π' の各推論規則の上式は、必ず下式より簡単な形になっている。（contraction 規則がないため）。

5. 従って、有限ステップで証明探索手続きは停止。

6. 全ての最上式が始式ならば、$\Gamma \Rightarrow A$ は証明可能。

7. どのような探索結果も 6. のような形の証明図とならないならば証明不可能。

定理 2.4.1 および 3.4.1 より次の定理を導くことができる。

定理 3.4.2. 部分構造論理の各体系 $\mathbf{K_{FL}}$, $\mathbf{K_{FL}}_e$, $\mathbf{K_{FL}}_w$, $\mathbf{K_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{K_{FL}}_{ecw}$ は、決定可能性を持つ。

また、contraction 規則を含む部分構造論理の体系 $\mathbf{FL}_{ec}$ では、工夫が必要である。すなわち、contraction 規則を適用することによって、下式よりも上式の方が難しくなることを考慮しなければならない。また、本研究は、命題論理についてのみ考慮しているので次の定理を導くことができる。

定理 3.4.3. 部分構造論理の体系 $\mathbf{FL}_{ec}$ は、決定可能性を持つ。

この証明は、 [8] を参照。

第 4 章　様相部分構造論の体系

本章では、Gödel の translation のために導入された様相部分構造論理の体系 $\mathbf{S4_{FL}}$ について、cut 除去定理および Craig の補間定理が成り立つかどうか確認し、さらに決定可能性について証明論的に示していく。また、第 1 章で示した部分構造論理の体系についても、考察する。

4.1　sequent 計算の体系 $\mathbf{S4_{FL}}$

様相部分構造論理の体系 **S4** とは **FL** の推論規則にさらに次の推論規則（K），（T）および（4）を付け加えた体系である。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\ (K) \qquad \frac{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Box A, \Sigma \Rightarrow B}\ (T) \qquad \frac{\Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\ (4)$$

ただし、Γ が論理式の列 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ を表すとき、$\Box\Gamma$ は $\Box D_1, \Box D_2, \cdots, \Box D_n$ を表す。Γ が空のときには $\Box\Gamma$ も空を表す。

4.1.1　cut 除去定理とその証明

この定理を証明するには、第 3 章で示した **FL** の cut 除去定理の証明と同様に行えばよい。本章では、$\Box$ に関する推論規則についてのみ証明していくこととする。

定理 4.1.1. （$\mathbf{S4_{FL}}$ の cut 除去定理）$\Gamma \Rightarrow A$ を終式とする $\mathbf{S4_{FL}}$ の証明図に対し、これと同じ終式を持ち、かつ cut を含まないような証明図を作ることができる。

$\mathbf{S4_{FL}}$ の証明では、contraction 規則がないため、**FL** と同じように mix 規則を用いずに証明可能である。よって、補助定理は以下のようになる。

補助定理 4.1.1. 一番下にある推論規則が cut でその他には cut を全く含まないような証明図は、同じ終式を持ち cut を全く含まない証明図に変形することができる。

4.1.2 *grade* と *rank*

定義 4.1.1. （grade）論理式 A の *grade* とは、cut 論理式に含まれる論理記号の数のことである。

rank についても、**FL** の推論規則には contraction 規則が含まれていないため、**LJ** のときよりも簡単に定義をすることができる。

定義 4.1.2. （*rank* ）証明図 π に含まれる squent の数。

grade と *rank* の二重帰納法により補助定理の証明を行う。ここからは最後の推論規則としてのみ cut を含む証明図を扱う。
次の場合分けを考える。

(1a) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ のどちらか一方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式でないとき

(2a) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ の両方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式であるとき

［**証明**］

(1a) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ のどちらか一方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式でないとき

(1a.1) $\Gamma \Rightarrow A$ が（T）のとき

証明図 π は次のような形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow C}{\Gamma, \Box A, \Sigma \Rightarrow C}\,(T) \qquad \Delta, C, \Pi \Rightarrow B}{\Delta, \Gamma, \Box A, \Sigma, \Pi \Rightarrow B}\,(cut)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Pi \Rightarrow B}{\Delta, \Gamma, A, \Sigma, \Pi \Rightarrow B}\,(cut)}{\Delta, \Gamma, \Box A, \Sigma, \Pi \Rightarrow B}\,(T)$$

この証明図の grade は、証明図 π の *grade* より一つ少ない。よって、帰納法の仮定より新しい cut 規則を用いない証明図に置き換えることができる。

(2a) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ の両方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式であるとき

(2a.1) cut 論理式が $(\Box C)$ とき

証明図 π は次の形をしている。

$$\cfrac{\cfrac{\Box\Sigma \Rightarrow C}{\Box\Sigma \Rightarrow \Box C}\,(4) \qquad \cfrac{\Gamma, C, \Pi \Rightarrow B}{\Gamma, \Box C, \Pi \Rightarrow B}\,(T)}{\Gamma, \Box\Sigma, \Pi \Rightarrow C}\,(cut)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\cfrac{\Box\Sigma \Rightarrow C \quad \Gamma, C, \Pi \Rightarrow B}{\Gamma, \Box\Sigma, \Pi \Rightarrow B}\,(cut)$$

この証明図の $grade$ は、証明図 π の $grade$ より一つ少ない。よって、帰納法の仮定より新しい cut 規則を用いない証明図に置き換えることができる。

このように $\mathbf{S4_{FL}}$ において、cut 除去定理が証明できることが示された。また、同様の証明を行うことで次の定理を導き出すことができる。

定理 4.1.2. *cut* 除去定理は、$\mathbf{S4_{FL}}$, $\mathbf{S4_{FL}}_e$, $\mathbf{S4_{FL}}_w$, $\mathbf{S4_{FL}}_{ec}$, $\mathbf{S4_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{S4_{FL}}_{ecw}$ の各体系で成り立つ。

4.1.3 Craig の補間定理とその証明

定理 4.1.3. （*Craig* の補間定理）$A \Rightarrow B$ が $\mathbf{S4_{FL}}$ 証明可能であれば、*A,B* に共通な命題変数および命題定数 *1,0*,$\top$,$\bot$ からなる論理式 C が存在して、$A \Rightarrow C$ および $C \Rightarrow B$ が $\mathbf{S4_{FL}}$ で証明可能である。

以下の補助定理を設定する。

補助定理 4.1.2. $\Gamma \Rightarrow D$（D は論理式または空列）が $\mathbf{S4_{FL}}$ で証明可能であり、$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ を Γ の任意の分割としたとき、Γ_2 と Γ_1, Γ_3, D に共通な命題変数および命題定数 *1,0*,$\top$,$\bot$ からなる論理式 C' が存在して、$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1, C', \Gamma_3 \Rightarrow D$ が $\mathbf{S4_{FL}}$ により証明可能である。

［ **証明** ］

（T）および（4）の推論規則を用いた場合だけ証明を行う。その他の証明は、**FL** と同様に行えばよい。

(2a) 証明図が少なくとも一つの推論規則を用いているとき

(2a.1) 最後に用いられる推論規則が（T）のとき

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow D}{\Gamma, \Box A, \Sigma \Rightarrow D}\ (T)$$

(2a.1.1) $\Gamma, \Box A, \Sigma$ を $\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3, \Box A, \Sigma$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, A, \Sigma \Rightarrow D}{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, \Box A, \Sigma \Rightarrow D}\ (T)$$

とすると、結局 $\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3, \Box A, \Sigma \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, A, \Sigma, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2 と $\Gamma_1, \Gamma_3, \Box A, \Sigma, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2a.1.2) $\Gamma, \Box A, \Sigma$ を $\Gamma_1; \Gamma_2, \Box A, \Sigma_1; \Sigma_2$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Gamma_2, \Sigma_1 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, A, \Sigma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_1, C_1, A, \Sigma_2 \Rightarrow D}{\Gamma_1, C_1, \Box A, \Sigma_2 \Rightarrow D}\ (T)$$

とすると、結局 $\Gamma_2, \Sigma_1 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Box A, \Sigma_2 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2, Σ_1 と Γ_1, A, Σ_2, D に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2, Σ_1 と $\Gamma_1, \Box A, \Sigma_2, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2a.1.3) $\Gamma, \Box A, \Sigma$ を $\Gamma, \Box A, \Sigma_1; \Sigma_2; \Sigma_3$ に分割したとき
帰納法の仮定より、$\Sigma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma, A, \Sigma_1, C_1, \Sigma_3 \Rightarrow D$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma_1, C_1, \Sigma_3 \Rightarrow D}{\Gamma, \Box A, \Sigma_1, C_1, \Sigma_3 \Rightarrow D}\ (T)$$

とすると、結局 $\Sigma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma, \Box A, \Sigma_1, C_1, \Sigma_3 \Rightarrow D$ が証明可能。また、C_1 は Σ_2 と $\Gamma, A, \Sigma_1, \Sigma_3, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに、Σ_2 と $\Gamma, \Box A, \Sigma_1, \Sigma_3, D$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

(2a.2) 最後に用いられる推論規則が（4）のとき

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\ (4)$$

帰納法の仮定より、$\Box\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Box\Gamma_1, C_1, \Box\Sigma_3 \Rightarrow A$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Box\Gamma_2 \Rightarrow C_1}{\Box\Gamma_2 \Rightarrow \Box C_1}\ (4) \qquad \cfrac{\cfrac{\Box\Gamma_1, C_1, \Box\Sigma_3 \Rightarrow A}{\Box\Gamma_1, \Box C_1, \Box\Sigma_3 \Rightarrow A}\ (T)}{\Box\Gamma_1, \Box C_1, \Box\Sigma_3 \Rightarrow \Box A}\ (4)$$

とすると、結局 $\Box\Gamma_2 \Rightarrow \Box C_1$ と $\Box\Gamma_1, \Box C_1, \Box\Sigma_3 \Rightarrow \Box A$ が証明可能。

また、C_1 は $\Box\Gamma_2$ と $\Box\Gamma_1, \Box\Gamma_3, A$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに Γ_2 と $\Box\Gamma_1, \Box\Gamma_3, \Box\Box A$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、$\Box C_1$ が C' となって補助定理が成り立つ。

このように $\mathbf{S4_{FL}}$ において、Craig の補間定理が証明できることが示された。また、同様の証明を行うことで次の定理を導き出すことができる。

定理 4.1.4. *Craig* の補間定理は、$\mathbf{S4_{FL}}$, $\mathbf{S4_{FL}}_e$, $\mathbf{S4_{FL}}_w$, $\mathbf{S4_{FL}}_{ec}$, $\mathbf{S4_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{S4_{FL}}_{ecw}$ の各体系で成り立つ。

4.1.4 決定可能性

定理 3.4.2 および 3.4.3 から次のことが導かれる。

定理 4.1.5. 様相部分構造論理の各体系 $\mathbf{S4_{FL}}$, $\mathbf{S4_{FL}}_e$, $\mathbf{S4_{FL}}_w$, $\mathbf{S4_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{S4_{FL}}_{ecw}$ は、決定可能性を持つ。

Amano (2006) は、様相剰余代数のクラスが、有限モデル性を含意し、かつ有限埋め込み可能性を持つことを示すことで、その論理が決定可能性を持つことを証明した。

定理 4.1.6. 様相剰余代数のいくつかのクラスは、有限埋込可能性を持つ。それゆえに、その一般的な理論は決定可能性を持つ。

定理 4.1.5 および 4.1.6 により、証明論的およびモデル論的に様相部分構造論理の体系 $\mathbf{S4_{FL}}$ は決定可能性を持つことが示された。この手法で導かれる決定可能性は、有限モデル性より強くなる。本研究で示したように、cut 除去定理を用いて導いた決定可能性の方がより一般的である。

4.2 sequent 計算の体系 $\mathbf{K_{FL}}$

様相部分構造論理の体系 $\mathbf{K_{FL}}$ とは $\mathbf{FL}$ の推論規則にさらに次の推論規則（K）を付け加えた体系である。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\ (K)$$

4.2.1 cut 除去定理とその証明

この定理を証明するには、先に示した $\mathbf{S4_{FL}}$ の cut 除去定理の証明と同様に行えばよい。本章では、新しく導入した推論規則（K）についてのみ証明していくことにする。

定理 4.2.1. （$\mathbf{K_{FL}}$ の cut 除去定理）$\Gamma \Rightarrow A$ を終式とする $\mathbf{K_{FL}}$ の証明図に対し、これと同じ終式を持ち、かつ cut を含まないような証明図を作ることができる。

［**証明**］

(1a) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ の両方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式であるとき

(1a.1) cut 論理式が $(\Box C)$ とき

証明図 π は次の形をしている。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow C}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box C}\,(K) \quad \dfrac{\Delta, C, \Sigma \Rightarrow B}{\Delta, \Box C, \Sigma \Rightarrow \Box B}\,(K)}{\Delta, \Box\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Box B}\,(cut)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad \Delta, C, \Sigma \Rightarrow B}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow B}\,(cut)}{\Delta, \Box\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Box B}\,(K)$$

この証明図の $grade$ は、証明図 π の $grade$ より一つ少ない。よって、帰納法の仮定より新しい cut 規則を用いない証明図に置き換えることができる。

このように $\mathbf{K_{FL}}$ において、cut 除去定理が証明できることが示された。同様の証明を行うことで次の定理を導き出すことができる。

定理 4.2.2. cut 除去定理は、$\mathbf{K_{FL}}$, $\mathbf{K_{FL}}_e$, $\mathbf{K_{FL}}_w$, $\mathbf{K_{FL}}_{ec}$, $\mathbf{K_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{K_{FL}}_{ecw}$ の各体系で成り立つ。

4.2.2 Craig の補間定理とその証明

定理 4.2.3. （*Craig* の補間定理）$A \Rightarrow B$ が $\mathbf{K_{FL}}$ で証明可能であれば、A,B に共通な命題変数および命題定数 *1*,*0*,$\top$,$\bot$ からなる論理式 C が存在して、$A \Rightarrow C$ および $C \Rightarrow B$ が $\mathbf{K_{FL}}$ で証明可能である。

以下の補助定理を設定する。

補助定理 4.2.1. $\Gamma \Rightarrow D$（D は論理式または空列）が $\mathbf{K_{FL}}$ で証明可能であり、$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ を Γ の任意の分割としたとき、Γ_2 と Γ_1, Γ_3, D に共通な命題変数および命題定数 *1*,*0*,$\top$,$\bot$ からなる論理式 C' が存在して、$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1, C', \Gamma_3 \Rightarrow D$ が $\mathbf{K_{FL}}$ により証明可能である。

［**証明**］

（K）の推論規則を用いた場合だけ証明を行う。その他の証明は、**FL** と同様に行えばよい。

(1a) 証明図が少なくとも一つの推論規則を用いているとき

(1a.1) 最後に用いられる推論規則が（K）のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\ (K)$$

帰納法の仮定より、$\Gamma_2 \Rightarrow C_1$ と $\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A$ が証明可能。さらに、

$$\frac{\Gamma_1, C_1, \Gamma_3 \Rightarrow A}{\Box\Gamma_1, \Box C_1, \Box\Gamma_3 \Rightarrow \Box A}\ (K)$$

および、

$$\frac{\Gamma_2 \Rightarrow C_1}{\Box\Gamma_2 \Rightarrow \Box C_1}\ (K)$$

とすると、結局 $\Box\Gamma_2 \Rightarrow \Box C_1$ と $\Box\Gamma_1, \Box C_1, \Box\Gamma_3 \Rightarrow \Box A$ が証明可能。また、C_1 は Γ_2 と Γ_1, Γ_3, A に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるから、あきらかに $\Box\Gamma_2$ と $\Box\Gamma_1, \Box\Gamma_3, \Box A$ に共通な命題変数および命題定数 1,0,$\top$,$\bot$ からなる論理式であるといえる。よって、C_1 が C' となって補助定理が成り立つ。

このように $\mathbf{K_{FL}}$ において、Craig の補間定理が証明できることが示された。同様の証明を行うことで次の定理を導き出すことができる。

定理 4.2.4. *Craig* の補間定理は、$\mathbf{K_{FL}}$, $\mathbf{K_{FL}}_e$, $\mathbf{K_{FL}}_w$, $\mathbf{K_{FL}}_{ec}$, $\mathbf{K_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{K_{FL}}_{ecw}$ の各体系で成り立つ。

4.2.3　決定可能性

定理 2.4.1 および 3.4.3 から次のことが導かれる。

定理 4.2.5. 様相部分構造論理の各体系 $\mathbf{K_{FL}}$, $\mathbf{K_{FL}}_e$, $\mathbf{K_{FL}}_w$, $\mathbf{K_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{K_{FL}}_{ecw}$ は、決定可能性を持つ。

4.3　sequent 計算の体系 $\mathbf{KT_{FL}}$

様相部分構造論理の体系 $\mathbf{KT_{FL}}$ とは $\mathbf{FL}$ の推論規則に、さらに次の推論規則（K）および（T）を付け加えた体系である。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\,(K) \qquad \frac{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Box A, \Sigma \Rightarrow B}\,(T)$$

4.3.1　cut 除去定理とその証明

この定理を証明するには、先に示した $\mathbf{S4_{FL}}$ の cut 除去定理の証明と同様に行えばよい。本章では、新しく導入した推論規則（K）および（T）についてのみ証明する。

定理 4.3.1. （$\mathbf{KT_{FL}}$ の cut 除去定理）$\Gamma \Rightarrow A$ を終式とする $\mathbf{KT_{FL}}$ の証明図に対し、これと同じ終式を持ち、かつ cut を含まないような証明図を作ることができる。

［**証明**］

(1a) $\Gamma \Rightarrow A$ か $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ のどちらか一方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式でないとき

(1a.1) $\Gamma \Rightarrow A$ が（T）のとき
この場合は、$\mathbf{S4_{FL}}$ の証明（2a.1）と同様に行えばよい。

(2a) $\Gamma \Rightarrow A$ と $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ の両方が論理に関する推論規則の下式で、かつ推論規則の主論理式が cut 論理式であるとき

(2a.1) cut 論理式が（$\Box C$）のとき
証明図 π は次の形をしている。

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow C}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box C}\,(K) \quad \cfrac{\Gamma, C, \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Box C, \Sigma \Rightarrow B}\,(T)}{\Gamma, \Box\Gamma, \Sigma \Rightarrow B}\,(cut)$$

この証明図は、次のように書き換えることができる。

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow C \quad \Gamma, C, \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Gamma, \Sigma \Rightarrow B}\,(cut)}{\Gamma, \Box\Gamma, \Sigma \Rightarrow B}\,(T)$$

この証明図の $grade$ は、証明図 π の $grade$ より一つ少ない。よって、帰納法の仮定より新しい cut 規則を用いない証明図に置き換えることができる。

このように $KTFL$ において、cut 除去定理が証明できることが示された。また、同様の証明を行うことで次の定理を導き出すことができる。

定理 4.3.2. *cut* 除去定理は、$\mathbf{KT_{FL}}$, $\mathbf{KT_{FL}}_e$, $\mathbf{KT_{FL}}_w$, $\mathbf{KT_{FL}}_{ec}$, $\mathbf{KT_{FL}}_{ew}$, $\mathbf{KT_{FL}}_{ecw}$ の各体系で成り立つ。

4.3.2 Craig の補間定理とその証明

定理 4.3.3. （*Craig* の補間定理）$A \Rightarrow B$ が $\mathbf{KT_{FL}}$ で証明可能であれば、*A*,*B* に共通な命題変数および命題定数 *1*,*0*,$\top$,$\perp$ からなる論理式 C が存在して、$A \Rightarrow C$ および $C \Rightarrow B$ が $\mathbf{KT_{FL}}$ で証明可能である。

以下の補助定理を設定する。

補助定理 4.3.1. $\Gamma \Rightarrow D$（D は論理式または空列）が KT_{FL} で証明可能であり、$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ を Γ の任意の分割としたとき、Γ_2 と Γ_1, Γ_3, D に共通な命題変数および命題定数 *1*,*0*,$\top$,$\perp$ からなる論理式 C' が存在して、$\Gamma_2 \Rightarrow C'$ および $\Gamma_1, C', \Gamma_3 \Rightarrow D$ が KT_{FL} により証明可能である。

［**証明**］

$\mathbf{KT_{FL}}$ の Craig の補間定理についての証明は、$\mathbf{S4_{FL}}$ および $\mathbf{K_{FL}}$ の推論規則（T）および（K）の場合と同様に行うことができる。

定理 4.3.4. *Craig* の補間定理は、$\mathbf{KT_{FL}}$, $\mathbf{KT_{FL}}_e$, $\mathbf{KT_{FL}}_w$, $\mathbf{KT_{FL}}_{ec}$, $\mathbf{KT_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{KT_{FL}}_{ecw}$ の各体系で成り立つ。

4.3.3 決定可能性

定理 2.4.1 および 3.4.3 から次のことが導かれる。

定理 4.3.5. 様相部分構造論理の各体系 $\mathbf{KT_{FL}}$, $\mathbf{KT_{FL}}_e$, $\mathbf{KT_{FL}}_w$, $\mathbf{KT_{FL}}_{ew}$ および $\mathbf{KT_{FL}}_{ecw}$ は、決定可能性を持つ。

第5章　結論

本研究で、提案した様相部分構造論理の各体系について cut 除去定理および Craig の補間定理が成り立つことが確認できた。さらに、様相部分構造論理の各体系 $\mathbf{S4_{FL}}$, $\mathbf{S4_{FL_e}}$, $\mathbf{S4_{FL_w}}$, $\mathbf{S4_{FL_{ew}}}$ および $\mathbf{S4_{FL_{ecw}}}$ において決定可能性が示された。また、Amano により意味論的に示された決定可能性との比較では、同じ結果が得られた。他の体系 $\mathbf{K_{FL}}$, $\mathbf{K_{FL_e}}$, $\mathbf{K_{FL_w}}$, $\mathbf{K_{FL_{ew}}}$, $\mathbf{K_{FL_{ecw}}}$ および $\mathbf{KT_{FL}}$, $\mathbf{KT_{FL_e}}$, $\mathbf{KT_{FL_w}}$, $\mathbf{KT_{FL_{ew}}}$, $\mathbf{KT_{FL_{ecw}}}$ についても証明論的に決定可能性が示された。

contraction 規則を含む様相部分構造論理の体系について、cut 除去定理および Craig の補間定理は成り立つことを確認することができたが、決定可能性を証明することができなかった。contraction 規則を含む体系においては、規則の適用が複雑になると考えられるが Ono [9] に示されている手法を使えば証明することができると考えられる。残された課題である。また本研究では、命題論理のみを対象として研究を行ったが、述語論理を用いた場合にどのようになるか興味が持たれる。後輩に期待したい。

最後に本研究で得られた結果を定理としてあげておく。

定理 1 cut 除去定理および Craig の補間定理は、$\mathbf{K_{FL}}$, $\mathbf{K_{FL_e}}$, $\mathbf{K_{FL_w}}$, $\mathbf{K_{FL_{ec}}}$, $\mathbf{K_{FL_{ew}}}$ および $\mathbf{K_{FL_{ecw}}}$ の各体系で成り立つ。

定理 2 cut 除去定理および Craig の補間定理は、$\mathbf{KT_{FL}}$, $\mathbf{KT_{FL_e}}$, $\mathbf{KT_{FL_w}}$, $\mathbf{KT_{FL_{ec}}}$, $\mathbf{KT_{FL_{ew}}}$ および $\mathbf{KT_{FL_{ecw}}}$ の各体系で成り立つ。

定理 3 cut 除去定理および Craig の補間定理は、$\mathbf{S4_{FL}}$, $\mathbf{S4_{FL_e}}$, $\mathbf{S4_{FL_w}}$, $\mathbf{S4_{FL_{ec}}}$, $\mathbf{S4_{FL_{ew}}}$ および $\mathbf{S4_{FL_{ecw}}}$ の各体系で成り立つ。

その結果、次のことが導き出せた。

定理 4 様相部分構造論理の各体系 $\mathbf{K_{FL}}$, $\mathbf{K_{FL_e}}$, $\mathbf{K_{FL_w}}$, $\mathbf{K_{FL_{ew}}}$ および $\mathbf{K_{FL_{ecw}}}$ は、決定可能性を持つ。

定理 5 様相部分構造論理の各体系 $\mathbf{KT_{FL}}$, $\mathbf{KT_{FL_e}}$, $\mathbf{KT_{FL_w}}$, $\mathbf{KT_{FL_{ew}}}$ および $\mathbf{KT_{FL_{ecw}}}$ は、決定可能性を持つ。

定理 6 様相部分構造論理の各体系 $\mathbf{S4_{FL}}$, $\mathbf{S4_{FL_e}}$, $\mathbf{S4_{FL_w}}$, $\mathbf{S4_{FL_{ew}}}$ および $\mathbf{S4_{FL_{ecw}}}$ は、決定可能性を持つ。

謝辞

本研究を行うにあたり、日々御指導下さいました小野寛晰教授に深く感謝いたします。また、貴重な御意見を下さいました石原哉助教授ならびに小野研究室の皆様に感謝いたします。

文献

[1] Amano, S., The finite embeddability property for some modal algebras, 北陸先端科学技術大学院大学　情報科学研究科情報処理学専攻修士論文, 2006.

[2] Fitting, M.C., *Proof Methods of Modal and Intuitionistic Logics*, D.Reidel, 1983.

[3] Gentzen, G., *Untersuchungen über das logische Schliessen*, I. II., Math.Z., vol.39, pp.176-210, pp.405-431, 1935.

[4] 前原　昭二, 数理学シリーズ 6 数理論理学　数学的論理の論理的構造, 培風館, 1943.

[5] 松本　和夫, 復刻　数理論理学, 共立出版, 2001.

[6] 成瀬　博之, 部分構造論理における変数独立の原則, 北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科情報処理学専攻修士論文, 1996.

[7] 小野　寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.

[8] Ono, H., Proof-theoretic methods in nonclassical logic –an introduction, in:*Theorise of types and Proofs*, MSJ Memorirs vol.2, Mathematical Society of Japan, pp.207-254, 1998.

[9] Ono, H., Modalities in substructural logics –a preliminary report, a talk at Technical University of Vienna, 2005.

[10] Prawits, D., *Natural Deduction – A proof-theoretical study*, Almquist and Wiksell, 1965.

[11] 竹中　辰利, Contraction を持たない述語適切論理の決定可能性, 北陸先端科学技術大学院大学　情報科学研究科情報処理学専攻修士論文, 1996.

[12] Takeuti, G., Proof theory, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol 81, North-Holland, pp.33-35, 1975.

[13] 照井　一成, 2001 年度中級論理学講義ノート, pp.1-42, 2001.