

Title	生産計画におけるリスク低減方式に関する研究
Author(s)	佐々木, 秀憲
Citation	
Issue Date	2002-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/347
Rights	
Description	Supervisor: 吉田 武稔, 知識科学研究科, 修士

修 士 論 文

生産計画におけるリスク低減方式に関する研究

指導教官 吉田 武稔 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
知識科学研究科知識社会システム学専攻

050040 佐々木 秀憲

審査委員： 吉田 武稔 助教授（主査）
Gu Jifa 教授
永田 晃也 助教授
三品 和広 助教授

2002 年 2 月

目 次

第 1 章 序論.....	1
1.1 本研究の背景と目的	1
1.2 本論文の構成.....	1
第 2 章 リスク・マネジメント.....	3
2.1 リスクの形態.....	3
2.1.1 リスクとは.....	3
2.1.2 一般的なリスクの分類	4
2.2 企業経営とリスク.....	4
2.3 リスク・マネジメントの意義と目的	5
2.4 生産計画におけるリスク	5
2.5 第 2 章のまとめ	6
第 3 章 オプション・プライシング理論	7
3.1 オプション	7
3.1.1 オプションとは.....	7
3.1.2 オプション価値.....	8
3.2 裁定定理.....	9
3.2.1 裁定とは.....	9
3.2.2 無裁定価格の利用	11
3.2.3 裁定定理.....	12
3.3 オプションの無裁定価格.....	14

3.3.1	裁定定理からの導出.....	14
3.3.2	複製ポートフォリオからの導出.....	14
3.3.3	ブラック・ショールズの微分方程式.....	15
3.4	オプションの無裁定価格導出に必要な要素	18
3.4.1	確実性等価	18
3.4.2	無裁定と確実性等価の関係	20
3.4.3	オプションの無裁定価格導出に必要な要素	22
3.5	第 3 章のまとめ	23
第 4 章 オプション・プライシング理論の生産計画への適用		24
4.1	金融工学との対応.....	24
4.1.1	行使価格.....	25
4.1.2	リスク資産	25
4.1.3	無リスク資産	25
4.1.4	オプションの価格	26
4.1.5	数値例	26
4.2	生産計画におけるオプション価格.....	27
4.2.1	考え方の枠組み.....	27
4.2.2	数値例	29
4.3	考察	29
4.4	第 4 章のまとめ	30
第 5 章 VAR の生産計画への適用		32
5.1	VAR とは	32
5.1.1	VaR の歴史	32
5.1.2	VaR の定義	33
5.2	生産計画への適用.....	34
5.2.1	パラメータの導出	34
5.2.2	例題.....	35
5.2.3	結果.....	38
5.2.4	考察.....	43

5.3 第5章のまとめ	44
第6章 結論	45
参考文献	46
謝辞	47

図 目 次

図 1	オプション価値	10
図 2	効用関数と確実性等価	19
図 3	確率関数と VaR	34
図 4	4MDRAM の価格推移.....	36
図 5	16MDRAM の価格推移.....	36
図 6	64MDRAM の価格推移.....	37
図 7	128MDRAM の価格推移.....	37

表 目 次

表 1	金融工学と生産計画との対応	26
表 2	各 DRAM のヒストリカルデータ	38
表 3	過去 10 週間のデータより算出した 4 週間後の VaR	39
表 4	過去 10 週間のデータを用いたときに実際の 4 週間後の値が観測された点.....	39
表 5	過去 10 週間のデータより算出した 8 週間後の VaR	40
表 6	過去 10 週間のデータを用いたときに実際の 8 週間後の値が観測された点.....	40
表 7	過去 20 週間のデータより算出した 4 週間後の VaR	41
表 8	過去 20 週間のデータを用いたときに実際の 4 週間後の値が観測された点.....	41
表 9	過去 20 週間のデータより算出した 8 週間後の VaR	42
表 10	過去 20 週間のデータを用いたときに実際の 8 週間後の値が観測された点.....	42

第 1 章

序 論

1.1 本研究の背景と目的

日本経済新聞には石油の価格や DRAM のスポット価格などが掲載されている。それは、それらの価格が日々変化し、生産者と購入者の双方に影響を与えるからである。このような価格変化のリスクに対応した生産計画について有効な手法の報告を聞かない。

金融の世界では、リスクへの対策が発達している。本研究では、先にあげたような価格変化のリスクを伴うものの生産計画に対し、金融工学的手法を適用し検討する。金融工学的手法の中でも、オプション・プライシング理論とバリュー・アット・リスク (以下 VaR) の適用を試み、リスク低減方式としての可能性と限界を考察することを目的とする。

1.2 本論文の構成

本論文の構成および概要は、以下の通りである。

第 1 章 序論

本研究を行う背景と目的を明らかにし、本論文の構成を示す。

第 2 章 リスク・マネジメント

リスク・マネジメントについて一般的にふれ、本研究における生産計画のリスク・マネジメントの対象を絞る。

第 3 章 オプション・プライシング理論

金融工学におけるオプション・プライシング理論の原理と有用性を示し、そ

の発展性を述べる.

第 4 章 オプション・プライシング理論の生産計画への適用

オプション・プライシング理論と生産計画を対応付け, その結果を考察する.

第 5 章 VaR の生産計画への適用

VaR の原理を示し, 生産計画への適用をし, その結果を考察する.

第 6 章 結論

本研究の成果を述べる.

第 2 章

リスク・マネジメント

本章では、一般的にリスクとは何かを示し、リスク・マネジメントの意義と目的を示す。そして、本研究における生産計画のリスク・マネジメントについて述べる。

2.1 リスクの形態

2.1.1 リスクとは

まず、はじめに「リスク」と「危険」の解釈を広辞苑で確認すると、

- リスクとは、危険、保険者の責任、被保険物
 - 危険とは、あぶないこと、危害または損失の生ずるおそれがあること
- と表現されている。一方、学術的には、「リスクとは、事故発生の可能性である」と一般的に定義されている。

企業にとってのリスクとは、「企業活動を阻害する要因と、それに関連して発生する損失またはその可能性」と表現できる。

リスクを発生させる要因には、次のものがあげられる。

- 管理の不在・不十分・欠如・誤り・過剰
- 情報量の不十分・情報選択の誤り・欠如・分析の不十分または誤り
- 時間の不十分・過剰、タイミング・欠如など

これら 3 要素のうちの、いずれが欠けてもリスクを生じさせる要因になる可能性があるといえる[1]。

2.1.2 一般的なリスクの分類

リスクはさまざまな角度から分類されているが、一般的な分類としては、次のようになる。

- 静態的リスクと動態的リスク

静態的リスクは、求めているのに損害を発生する可能性のリスクで、地震、火災、風水害などの財産の物理的損失、またはこれに伴う間接的な損害を生じさせるリスクである。

- 純粋リスクと投機的リスク

純粋リスクとは、地震、火災、風水害などのように自然的な条件が原因となるもので、予測は難しく発生頻度もそれほど多くはないが、いざ起こると損失として受ける影響は巨大なものである。投機的リスクとは、金利、為替などの経済条件、政治形態の変化、法令の改正および産業構造の変換など社会的な要因に伴うリスクである。これも先行きを的確に予測することは不可能に近いが、ある程度の見通しを立てることができる。

企業を取り巻く環境は、このようなさまざまなリスクが充満しており、対応策を怠ると不時に巨大な損失を被るおそれがある。

本研究では、投機的リスクを扱っていく。

2.2 企業経営とリスク

企業はつねに経営環境といういわゆる危険事情に取り巻かれて経営活動を行っている。経営環境には、外部環境と内部環境があり、その企業が現在置かれている「経営環境の分析・将来予測」と「自社の経営能力の分析」を通して、経営環境への適合を模索している。

企業は外部環境から政治、経済、社会上の制度に起因するさまざまな外圧にさらされている。内部的には販売力、生産力、財務力などの欠如を補うためにヒト、モノ、カネ、情報、技術力などの経営資源をバランスさせ、経営の向上に努めながら少しでも外部環境に適合するように努力している。

この意味で、企業はつねにリスクと隣り合わせで経営活動を行っており、リ

スクの低減が永遠の課題であるといえる。

2.3 リスク・マネジメントの意義と目的

リスク・マネジメントのルーツは、1920 年代のドイツにおけるリスク政策、および 1930 年代のアメリカにおける保険管理にある。リスク・マネジメントは本来損失を管理する手法で、ビジネス・リスクをいかに合理的、科学的に管理していくかが重要なポイントとなる。

リスク・マネジメントの目的は、究極的には企業倒産を回避し、健全な企業活動を維持していくことである。すなわち、リスク・マネジメントとは、いかに適切な経営管理と行い、倒産リスクを未然に防ぐか、といった企業存続を目的とした経営戦略であるといえる。

2.4 生産計画におけるリスク

製造業には在庫に関連するリスクがつねに存在する。在庫不足や在庫過剰がそれである。これらが発生する原因の 1 つとして、製造ラインへの投入に問題があることがあげられる。製造ラインへの投入量が多ければ在庫過剰となる可能性があり、逆に少なければ在庫不足となる可能性がある。つまり、製造ラインへの投入の意思決定が製造業のリスク・マネジメントの重要な役割を担う。また、市場で価格が変動する製品であるならば、製品の価格推移を見極めながら生産計画を立てなければならない。例えば、投入量が多いときに製品価格が下落すれば、儲けが減る、もしくは損となる可能性もある。そのような状況で、もし製品を売却しなければ、在庫保管費を別に負担しなければならない。

本研究では、市場で価格が日々変化するものの生産計画を対象とし、価格変動によるリスクを低減する生産計画の立て方について検討する。

2.5 第2章のまとめ

本章では，一般的なリスクについて述べ，リスク・マネジメントの意義と目的を示した．また，生産計画におけるリスクについてふれ，本研究における対象を絞った．

第 3 章

オプション・プライシング理論

本章では、リスク・マネジメントが積極的に行われている金融工学についてふれる。金融工学の基礎であるオプションと無裁定について説明し、オプションの無裁定価格の導出方法を示す。また、オプション・プライシング理論を他の分野に適用するときに必要な要素について吟味する。

3.1 オプション

3.1.1 オプションとは

オプションにはコール・オプションとプット・オプションの 2 つがある。コール・オプションとは、ある資産を将来の定められた期日までに、決められた価格で購入する権利であり、プット・オプションはこの逆で、売却する権利である。この決められた価格は行使価格とよばれ、決められた期日を満期日あるいは行使日という。この権利の売買がオプション取引で、権利の買い手は権利の売り手に契約時に対価(オプション・プレミアム)を払う。

オプション契約の買い、または売りの対象となる資産は原資産とよばれる。オプションの原資産は株式や商品などの現物資産(現物オプション)から始まり、最近では株価指数、通貨などの先物を原資産とする先物オプションも扱われている。

オプションの買い手は必ずしもその権利を行使する必要はなく、原資産を買い与否かを選択することができる。これに対して先物契約では、例えば買い契

約をした人は満期日に契約を履行し、必ず原資産を購入しなければならない。この点がオプション契約と先物契約の重要な相違である。プット・オプションの場合も同様であり、売る権利をもっているが、必ず売らねばならないという義務が課されているわけではない。

コール・オプションの買い手にとってのメリットは以下のようなものがある。

- 資産価格がコール・オプションの行使価格を下回っている場合は、購入した権利を捨てるだけでよいから、損失は契約時に支払ったプレミアム以上にはならない。
- 資産価格が行使価格を上回っている場合、権利の買い手は、市場で現物を購入するより有利な価格で取引ができる。つまり、買い手は利益を得ているといえる。

一方、売り手のメリットは以下のとおりである。

- 現金(プレミアム)を前払いで受け取ることができる。
- 資産の価格が行使価格以上の場合でも、プレミアムがその価格差以上の額であれば、利益を得ていることになる。

売り手のデメリットは損失が限定されないことである。

なお、オプションにはヨーロッパ型とアメリカ型がある。ヨーロッパ型とは満期日にのみ権利を行使できるオプションであり、アメリカ型とは満期日以前にいつでも権利を行使できるオプションである。分析はヨーロッパ型のほうが簡単であり、本論文でもヨーロッパ型を仮定して進めていく。

3.1.2 オプション価値

コール・オプションの評価のもっとも望ましい方法は、コール・オプションの価格 $C(t)$ について、原資産の価格とその他のパラメータにより、解析解を見つけることである。

時点 t において $C(t)$ に関して唯一わかっている式は、 T で示される満期日の価値で決定される式である。実際

- 取引手数料などが 0
- $S(t), C(t)$ のビット・アスク・スプレッドが 0

であれば、満期日の価値 $C(T)$ は2通りの値しかとらない。ここで、ビッド・アスク・スプレッドとは、売り値と買い値の差のことである。

オプションがアウト・オブ・マネー、つまり満期日において

$$S(T) < K \cdots (1)$$

であれば、オプションの価値はない。原資産の市場価格は $S(T)$ であり、これは行使価格 K よりも低い。オプション保有者は原資産を K で購入する権利を行使しない。したがって

$$S(T) < K \Rightarrow C(T) = 0 \cdots (2)$$

となる。しかし、オプションがイン・ザ・マネー、つまり満期日 T において

$$S(T) > K \cdots (3)$$

あれば、オプションはなんらかの価値をもつ。オプションはあきらかに権利行使されるべきである。原資産を価格 K で購入し、より高い価格 $S(T)$ で売却することができる。取引コストやビッド・アスク・スプレッドは存在しないと仮定したため、ネットの損益は $S(T) - K$ となる。このことに注意すると、市場参加者はオプションの価値を $S(T) - K$ とすることになり

$$S(T) > K \Rightarrow C(T) = S(T) - K \cdots (4)$$

となる。この2つの可能性を短い記法で次のように記述することができる。

$$C(T) = \max[S(T) - K, 0] \cdots (5)$$

$S(T)$ と $C(T)$ の関係を与える数式(5)は、図を用いて用意に理解される。図1はこの関係を示す。 $S(T) \leq K$ では $C(T)$ は0である。 $K < S(T)$ なる $S(T)$ の値では $C(T)$ は $S(T)$ と同じ割合で増加する。したがって値がこの範囲では、式(5)のグラフは傾き1の直線となる。オプションは非線形の商品である。ただし、図1では $K = 100$ とした。式(5)より、 $S(T) \leq 100$ のとき $C(T) = 0$ で、 $100 < S(T)$ のときは傾き1の直線となる。例えば、 $S(T) = 120$ のとき $C(T) = 20$ となる。

3.2 裁定定理

3.2.1 裁定とは

裁定とは簡単に説明すると、異なる資産に同時に投資し、無リスクの国債な

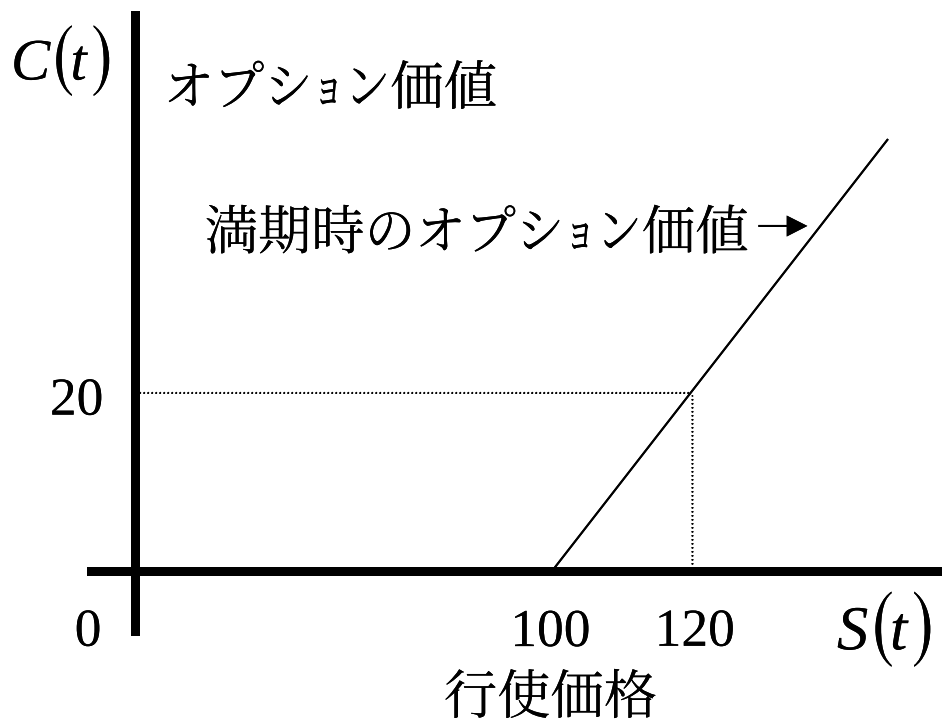


図 1 オプション価値

どから得られる以上の収益を無リスクで得ることが保証されることである。そのような収益が存在する場合、裁定機会が存在するという。

裁定機会には 2 つの種類がある。まずネットの投資金額を 0 にするような投資を行い、正の収益が見込める場合である。例えば株式を空売りし、その株式に対して契約されたコール・オプションを買い建てることことができる。ここでコール・オプションを買い建てるために必要な資金は株式の空売りによってまかなうとする。これらのポジションを適切に調節することにより、株価の予測できない変動が 2 つのポジションで相殺され、全体では無リスクとすることができる。これが第 1 種の裁定機会である。

第 2 種の裁定機会は、はじめに負の資金を投下する必要があるが、将来において 0 または正の収益が保証される場合である。例えば、東京と香港の外国為替市場において円とドルの為替レートが一時的に異なり、東京では 1 ドル 100 円で取引され、香港では 1 ドル 101 円で取引されていると仮定する。このとき、

東京市場でドルを買い、直ちに買ったドルを香港市場で売ることによって、確実に 1 円得することができる。

第 1 種あるいは第 2 種の種類の裁定機会も存在しない場合、証券価格は公正な水準である、もしくは正しく評価されているという。

3.2.2 無裁定価格の利用

裁定機会が存在しないことを無裁定とよび、証券の無裁定価格はベンチマークとして利用することができる。無裁定価格は派生資産評価の中心であり、少なくとも以下の 4 つの用途に利用することができる。

派生資産業者が新しい金融商品を考案する。このとき、それは新種の商品であるため、その価格を金融市場の実際の取引から観測することができない。このような状況において、無裁定価格は市場価格を推定するために非常に有効である。

第 2 の例はリスク管理である。リスク管理者は、しばしば最悪のシナリオを想定してポートフォリオのリスクを推定することがある。このような想定は定期的にくりかえされる。そのたびに何らかのベンチマーク価格が必要となるが、扱っているのはこれまでに観測されたことのない仮想的な状況なのである。そのベンチマーク価格として、無裁定価格が用いられる。

3 番目の例は所有するポートフォリオの資産の値洗いである。経理部門では、最近取引がない流動性が低い資産の現在価値を知りたいと思うことがあるかもしれない。対応する無裁定価格を計算することが、その解決となる場合がある。

最後に無裁定価格と実際に取引されている価格を比較することができる。もしその乖離が大きければ超過収益の機会の存在を示唆する。つまり無裁定価格は短い時間の間に発生しているミスプライスを検出するために利用することができる。もし無裁定価格が観測される価格を上回っていれば派生資産は割安であり、買建てのポジションをとることになろう。反対の場合には派生資産は割高である。

3.2.3 裁定定理

時点を現在と次の時点しか存在しないと仮定し、これらの時間間隔を Δ とする。 Δ は微小ではあるが、無限小ではない時間間隔を表すことにする。

ここで、市場参加者は次の3つの資産にしか興味がない場合を考える。

1つ目の資産は、短期国債のような無リスク資産で、次の時点までの原本込み収益率は $(1+r\Delta)$ である。この収益率は市場の状態が何であれ、一定という意味で無リスクである。

2つ目の資産は、例えば株式などの原資産 $S(t)$ である。 Δ が経過した次の時点で、 $S(t)$ は2通りの値しかとらないと仮定する。 $S(t)$ は2つの市場の状態によって異なるペイオフをとるので、リスク資産である。

3番目の資産は派生資産であり、プレミアム $C(t)$ 、行使価格 C_0 、 Δ が経過した次の時点で満期となるコール・オプションである。原資産が2つの値しかとらないと仮定しているため、このコール・オプションも2通りの値しかとらないことになる。

このモデルは非常にシンプルであり、3つの資産と2つの状態しか存在しない。原資産とオプション、そして無リスクによる借り入れ、貸し付けである。

資産価格を $A(t)$ というベクトルで表現するとき、以上のモデルは3つの要素を持つベクトルとなる。

$$A(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ S(t) \\ C(t) \end{pmatrix} \cdots (6)$$

ここで $B(t)$ は無リスクの借り入れ、貸し付け、 $S(t)$ は株式、 $C(t)$ はコール・オプションの価格である。 t はこれらの価格が評価される時点である。

ペイオフ行列 $D(t)$ は次のようになる。 $B(t)$ は次の時点においていずれの状態でもペイオフが同じ無リスク資産である。 $S(t)$ はリスク資産であり、上昇して $S_1(t+\Delta)$ となるか、下落して $S_2(t+\Delta)$ となる。最後にコール・オプションの市場価格 $C(t)$ も原資産価格 $S(t)$ の変化に伴って変動し、原資産価格が $S_1(t+\Delta)$ となるとき $C_1(t+\Delta)$ となり、 $S_2(t+\Delta)$ となるとき $C_2(t+\Delta)$ となる。以上からこの特定のケースにおいて $D(t)$ は次のように表現される。

$$D(t) = \begin{pmatrix} (1+r\Delta)B(t) & (1+r\Delta)B(t) \\ S_1(t+\Delta) & S_2(t+\Delta) \\ C_1(t+\Delta) & C_2(t+\Delta) \end{pmatrix} \cdot \cdot \cdot (7)$$

ここで r は無リスク金利である。

ここで記法をさらに簡略化する．無リスク金利での借り入れ，貸し付けの量は投資家が決めることができる．したがって，つねに

$$B(t) = 1 \cdot \cdot \cdot (8)$$

とする．また，これまで経過時間を Δ と表してきたが，一般性をなくすことなく

$$\Delta = 1 \cdot \cdot \cdot (9)$$

とする．裁定定理は次のように記すことができる．

裁定定理

式(6), (7)で与えられる A, D およびそれぞれ正の生起確率を持つ2つの状態について，

1. 次の式を満たす2つの正の定数 ψ_1, ψ_2 が存在するならば，裁定機会は存在しない．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ S(t) \\ C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+r) & (1+r) \\ S_1(t+1) & S_2(t+1) \\ C_1(t+1) & C_2(t+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \cdot \cdot \cdot (10)$$

2. もし裁定機が存在しないならば，式(10)を満たす正の定数 ψ_1, ψ_2 が存在する．

現実にはこの関係が観測されるわけではない．実際， $S_1(t+1)$ と $S_2(t+1)$ は原資産の将来の価格として実現する可能性がある値である．そのどちらか一方，すなわち実現する状態に対応する価格だけが観測されることになる．

この2つの定数 ψ_1, ψ_2 は何を意味するかを次に説明する．裁定定理の表現に従うと，もし原資産 $S(t)$ が状態1において1を支払い，状態2において何も支払わないならば

$$S(t) = 1 \cdot \psi_1 \cdot \cdot \cdot (11)$$

である．したがって投資家はそのような証券に対し，保険料として ψ_1 を支払うだろう．同様に ψ_2 は状態2で1が支払われ，状態1で何も支払われない場合の

保険料として、投資家がどれだけ支払うかを示している。 $\psi_1 + \psi_2$ を保険料として払い込むことにより、いずれの状態が実現したとしても将来 1 を確実に受け取ることができるのはあきらかであろう。これはまさに式(10)の第 1 行が示していることである。このような解釈から ψ_1, ψ_2 を状態価格と呼ぶ。

3.3 オプションの無裁定価格

3.3.1 裁定定理からの導出

式(10)の第 1 行と第 2 行より、 ψ_1, ψ_2 は次のように求まる。

$$(\psi_1, \psi_2) = \left(\frac{(1+r)S(t) - S_2(t+1)}{(1+r)(S_1(t+1) - S_2(t+1))}, \frac{S_1(t+1) - (1+r)S(t)}{(1+r)(S_1(t+1) - S_2(t+1))} \right) \dots (12)$$

となる。 ψ_1, ψ_2 を式(10)の第 3 行に代入し、オプションの無裁定価格を得る。

$$C(t) = \frac{((1+r)S(t) - S_2(t+1))C_1(t+1) + (S_1(t+1) - (1+r)S(t))C_2(t+1)}{(1+r)(S_1(t+1) - S_2(t+1))} \dots (13)$$

3.3.2 複製ポートフォリオからの導出

公正な価格を一意に定義するためには、完備市場の前提が必要となる。完備市場とは、市場にリスクの異なる多くの資産が存在し、いかなる資産の収益率も他の資産を組み合わせることによって複製できるような市場をいう。

そこで、オプションの収益率を無リスク資産と株式の組み合わせで複製する。

$$\begin{cases} S_1(t+1) \times \gamma - (1+r)B = C_1(t+1) \\ S_2(t+1) \times \gamma - (1+r)B = C_2(t+1) \end{cases} \dots (14)$$

ここで、 γ は買うべき原資産の単位数、 B は借入金を表す。上式を解くと、次を得る。

$$(\gamma, B) = \left(\frac{C_1(t+1) - C_2(t+1)}{S_1(t+1) - S_2(t+1)}, \frac{S_2(t+1)C_1(t+1) - S_1(t+1)C_2(t+1)}{(1+r)(S_1(t+1) - S_2(t+1))} \right) \dots (15)$$

式(15)より、 γ と B を現時点で満たされる等式 $C(t) = S(t) \times \gamma - B$ に代入する。

$$C(t) = \frac{p \times C_1(t+1) + (1-p)C_2(t+1)}{(1+r)} \dots (16)$$

ここで

$$p = \frac{(1+r)S(t) - S_2(t+1)}{S_1(t+1) - S_2(t+1)} \dots (17)$$

である。よって、複製ポートフォリオより、オプションの価格が求まった。

式(13)に式(17)を代入すると、式(16)と等しくなる。よって、次の時点で原資産価格が 2 通りの値しかとらないと仮定したときのオプションの無裁定価格を導出する方法を 2 つ示した。

3.3.3 ブラック・ショールズの微分方程式

ブラック・ショールズの微分方程式は、株価 S の派生証券の価格を $V(S,t)$ とするとき、 $V(S,t)$ が満たすべき微分方程式である。つまり、ブラック・ショールズの微分方程式を解くことができれば、派生証券、すなわちオプションの価格評価公式が求まるのである。

ブラック・ショールズの微分方程式を導出する。

オプションの原資産を株式とし、株価を S とする。時点 t におけるオプションの価値を $V(S,t)$ とする。オプションがコール・オプションならば、株価 S が上昇すれば $V(S,t)$ も上昇し、 S が下落すれば $V(S,t)$ も下がる。

オプションを 1 単位購入し、株式を Δ 単位売る。資産は $V(S,t)$ 増え、 Δ だけ減るから、ポートフォリオの価値 Π は

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S \dots (18)$$

となる。購入したオプションがコールで、行使価格を K とするとき、満期 T に $S > K$ ならばオプションを行使し

$$V(S,T) = S - K \dots (19)$$

$S < K$ ならばコールを行使せず

$$V(S,T) = 0 \dots (20)$$

である。

株価 S は、幾何ブラウン運動に従うと仮定する。すなわち、次式である。

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \cdots (21)$$

μ は株価 S の期待収益率, σ は株価ボラティリティ, $W(t)$ は標準ブラウン運動過程である. 表示を簡潔にするため, 式(21)を次のように書き直す.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \cdots (22)$$

時間 t から $t+dt$ にかけて, ポートフォリオの価値 Π がどのように変化するかは, Δ を一定とすると

$$d\Pi = dV - \Delta dS \cdots (23)$$

によって示される. すなわち $d\Pi$ はオプション価値の変化による dV と, 株価 S の変化 dS に Δ をかけた ΔdS の差である.

伊藤の公式より

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS \cdots (24)$$

が得られるから, 式(23)に代入して次のようになる.

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS - \Delta dS \cdots (25)$$

式(25)の右辺には確定的な項

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \cdots (26)$$

と, 偶然変動する項

$$\frac{\partial V}{\partial S} dS - \Delta dS \cdots (27)$$

が現れている. この偶然変動する項は株価変動 dS によってもたらされ, そして, この dS はブラウン運動の増分 dW によって確率的に変動するから, 事前に知ることはできない. この確率的変動にさらされている項は, ポートフォリオのリスクである. このリスクを除去するためには

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS = 0 \cdots (28)$$

すなわち

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \cdots (29)$$

とすればよい。すなわち株価 S の上昇による 1 単位のコールの買建てによって、オプション価値 V は上昇するが、この上昇 $\partial V / \partial S$ に等しいだけの株式の売りたてをすれば、このポートフォリオはリスクのない安全なポートフォリオになる。もちろん、この $\partial V / \partial S$ の値は株価 S の変動によって変化するため、 S の変化に連動して連続的にポートフォリオを組み直していかなければならない。

偶然変動の除去は一般にヘッジングといわれる。この例のように S と $V(S, t)$ の正の相関に注目して、リスクを完全に除去しようとすることをデルタヘッジという。

デルタヘッジを行えば、ポートフォリオの価値の変化は

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \cdots (30)$$

となる。この完全にリスクのない安全ポートフォリオの価値の変化 $d\Pi$ は、 Π と同額の現金を安全資産である債券に投資したときに得られる資産価値の変化 $r\Pi dt$ に等しくなければならない。すなわち

$$d\Pi = r\Pi dt \cdots (31)$$

でなければならない。なぜならばこの式が成立しなければ裁定機会が存在するからである。式(31)の Π へ式(18)を、式(18)の Δ へ式(25)を代入すると

$$r\Pi dt = rV dt - r \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right) S dt \cdots (32)$$

が得られ、この式(32)と式(30)は等しくなければならないから

$$\left(rV - rS \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \cdots (33)$$

すなわち、次式が得られる。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \cdots (34)$$

これがブラック・ショールズの微分方程式である。

3.4 オプションの無裁定価格導出に必要な要素

3.4.1 確実性等価

2つの選択肢を考える。

- 期末の資産額が2分の1の確率で1000万円となるが、2分の1の確率で0となる。
- 期末の資産額は確実に500万円となる。

これら2つの選択に直面した場合、普通の人々は後者を選ぶ。平均すれば同じ結果が得られるにもかかわらず、確実に得られることを望む。つまり、人間は期待値を目安として行動するのではない。危険を回避するように行動するのが普通である。

その理由は、資産が増加することによって得られる満足度の増加分は減少していくのである。ここで、「資産を保有することによって得られる満足」の事を「効用」と表現することとし、資産額が W のときの効用を $U(W)$ で表すこととする。すると、上で述べたことは、「資産の効用の増加は逓減的である」と表現できる。つまり、1000万円から得られる効用は500万円の効用より高いのだが、それよりも、資産がゼロになってしまう事態が重く評価されるのである。一般に、限界効用が逓減的であるような効用関数をもつ人は危険回避的になる。

合理的な行動は、期待資産額 $E(W)$ を最大化することではなく、資産の期待効用 $E[U(W)]$ を最大化することである。これを、期待効用最大化原則という。ただし、正確にいうと、期待効用最大化原則が述べているのは、「もし、リスクのある状況で人々が合理的に行動するとすれば、各状態に付される確率と効用関数が存在し、期待効用を最大化するように行動しているものと解釈することができる」ということである。

今、資産の値として W_1, W_2 の2つの可能性があるとし、 $W_1 > W_2$ であるとする。 W_1 となる確率を $p(0 \leq p \leq 1)$ とする。期待効用と期待資産額の効用は、それぞれ、

$$\begin{aligned} E[U(W)] &= pU(W_1) + (1-p)U(W_2) \\ U[E(W)] &= U[pW_1 + (1-p)W_2] \end{aligned}$$

と書ける。

期待資産額 $E(W)$ は、図2において点Aで表されている。この効用 $U[E(W)]$ は、

点 B の高さで表されている．他方で，期待効用 $E[U(W)]$ は， $U(W_1)$ と $U(W_2)$ の加重平均なので，図 2 の C の高さで表されている．図 2 に示すように，点 B が点 C より上にくるような効用関数をもっている人，すなわち， $U[E(W)] > E[U(W)]$ となるような効用関数をもっている人を，危険回避者という．図 2 から明らかにように，これは，効用関数が上に凸であることと同値である．

危険回避者は，確実に得られる価値に対してプレミアム Δ を払おうとする．これを「リスク・プレミアム」という．

図 2 では，「D で示される点に相当する額を確実に得られる場合の効用が，点 C の高さで表される効用と等しい」と表されている．AD の長さがプレミアム Δ を表す．すなわち，

$$U[E(W) - \Delta] = E[U(W)]$$

である．危険回避者の場合には Δ が正であるから，D は A の左側にある．そして，D で表される額 $E(W) - \Delta$ のことを，「確実性等価」という．

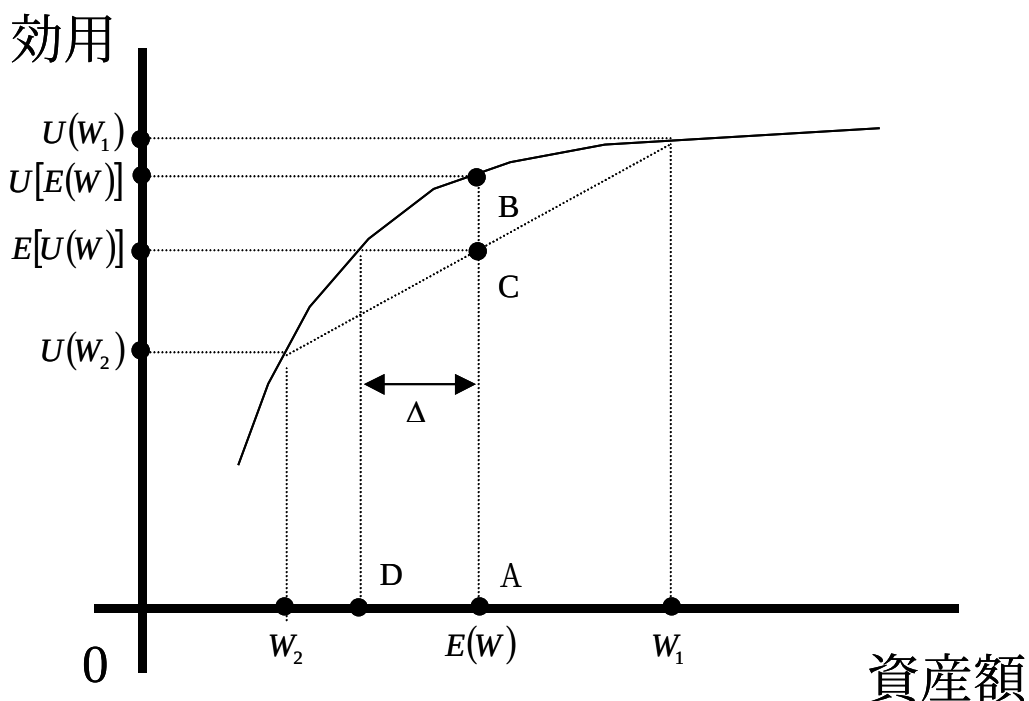


図 2 効用関数と確実性等価

3.4.2 無裁定と確実性等価の関係

式(10)を考えると、リスクと時間が混在するとわかりにくい。そこで、時間という要素を消し去る。すなわち、無リスク金利 r を0とする。すると、式(10)は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ S \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ S_1 & S_2 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \cdots (35)$$

第1行は、 ψ_1, ψ_2 の和が1になるような数、つまり確率と解釈できる数であることを示している。

時間の要素を消し去った世界で考えれば、式(35)は確実性等価の計算と解釈できる。つまり、 ψ_1, ψ_2 は確実性等価の点を求めるために線分を内分する比率である。「無裁定である」とは、「 S_1, S_2 がランダムに得られること」と「 S が確実に得られること」が同等であると、市場で評価されていることを意味する。

時間を消し去った解釈では、 S, S_1, S_2 を現在と将来の株価と考えるよりも、次のようなイメージで考えるほうがわかりやすいかもしれない。

ゲーム機があり、料金を投げ込んでハンドルを回すと、 S_1 円のコインが出てくるか、あるいは S_2 円のコインが出てくる。これらが出てくる確率は一定であるとする。料金が安すぎれば、多くの人がこの機械に殺到するだろう。逆に高すぎれば、誰も試みようとしまいだろう。式(35)の第2行は、適正な料金が S であることを示している。料金が S に設定されていれば、市場は「 S が確実に得られること」と機械から「 S_1, S_2 がランダムに得られること」を同等に評価しているのだ。

ところで、市場がこのような評価を行っているということは、次の2通りに解釈できる。

機械が S_1, S_2 を出力する真の確率 ψ'_1, ψ'_2 を個人は知っており、また自分の効用関数の形も正確に意識している。そこで

$$U(S) = \psi'_1 U(S_1) + \psi'_2 U(S_2) \cdots (36)$$

が成り立つように、確実性等価 S を求める。

そして、確率 ψ'_1, ψ'_2 に関する判断に個人差がなく、また効用関数にも個人差がない。このため、市場でも、「 S_1, S_2 が確率 ψ'_1, ψ'_2 で得られること」と「 S が確実に

得られること」が同等のものと評価されている。

この解釈は、直接的なものなので、わかりやすい。しかし、個人が効用の計算など行っているという点でやや非現実的な解釈であり、また、個人差がないというのは、かなり強い仮定である。

厳密な期待効用最大化理論が想定しているのは、むしろ次のようなことだ。上記のような機械に対して、人々はつねに料金の評価ができる。つまり、ランダムな値の組 S_1, S_2 が示されたとき、個人はこれと同等な確実な値 S を選択することができる。

この選択において、効用関数や真の確率 ψ'_1, ψ'_2 は明示的に示されなくともよい。ただし、選択は合理的なものでなければならない。ここで、選択が合理的とは、次のような意味だ。すなわち、さまざまな異なる機械に関して料金を判断する際に

$$U(S) = \psi'_1 U(S_1) + \psi'_2 U(S_2) \cdots (37)$$

を成り立たせるような数 ψ'_1, ψ'_2 および関数 $U(\cdot)$ が存在すると解釈できなければならない。 ψ'_1, ψ'_2 は機械によって異なり得るが、つねに $\psi'_1 + \psi'_2 = 1$ が成り立たなければならない。また、関数 $U(\cdot)$ は、さまざまな機械に対して同一のものでなければならない。つまり、前者が述べたような選択を行っていると解釈できるということだ。

前者の立場では「 ψ'_1, ψ'_2 および $U(\cdot)$ が存在するから、個人が合理的に選択する」と考えられているのに対して、後者の立場では「個人が合理的に選択すると仮定すれば、 ψ'_1, ψ'_2 および $U(\cdot)$ が存在すると解釈できる」と考えられていることになる。

ところで、ここで問題とされているのは、個人の選択でなく、市場の選択である。われわれが市場の裁定を論議する際に前提としてもとめるのは「市場が全体として行う選択が、上記の合理的な個人と同じようなもの」ということだ。

後者の立場をとる場合には、選択の背後にある ψ'_1, ψ'_2 および $U(\cdot)$ をかならずしも知る必要はない。われわれが仮定しているのは、確実性等価の選択が合理的なものであることである。

3.4.3 オプションの無裁定価格導出に必要な要素

再び 3 種類の資産の例に戻り、オプションという第 3 の資産の価格付け問題に振り返る。この計算を行うためにわれわれが知る必要があるのは、次のものであった。

- 無リスク金利 r
- 現在の株価 S ，将来の株価 S_1, S_2
- オプションのペイオフ C_1, C_2

このリストのなかには、株価が S_1, S_2 となる確率 ψ'_1, ψ'_2 は含まれていない。現在の株価が S であるということのなかに、それはすでに反映されてしまっているのである。ゲーム機械の例でいえば、料金が S と判断されていることのなかに、機械の出力確率の判断と評価関数は、すでに含まれているのである。つまり、上で述べたオプション価格の計算は、「 S_1, S_2 の確実性等価がわかっているならば、 C_1, C_2 の確実性等価もわかる」ということなのだ。

このことから、つぎのようにいえる。オプションの価格を計算するために必要なのは、つぎのものである。

- オプションのペイオフ C_1, C_2
- オプションが C_1 を出力する状態で S_1 となり、 C_2 を出力する状態で S_2 となる別の資産と、その確実性等価 S
- $(1+r)$ のペイオフをもたらす無リスク資産

リスク資産としてこれまでの論議に登場したのは、多くの場合において株式であった。しかし、それは、かならずしも株式である必要はない。必要なのは、オプションがペイオフを出力する各々の状態でのペイオフがわかっている資産の存在である。

上記が与えられたとき、無裁定の条件を満たすオプション価格は、状態数が 2 という想定の下では、体系と整合的になるように一義的に決まる。これを応用すれば、オプションとしてとらえられる資産の価格評価についてもオプション価格理論が適用できる。

3.5 第3章のまとめ

本章では，オプションの無裁定価格について説明し，オプションの無裁定価格の導出方法と導出に必要な要素を示した．その中で，確実性等価にふれ，リスク資産に対する満足度という考え方を示した．

第 4 章

オプション・プライシング理論の生産計画への適用

本章では，オプション・プライシング理論を生産計画へ適用する．適用にあたり，金融工学における理論との対応を示し，適用の枠組みを示す．

4.1 金融工学との対応

第 3 章では，国債のような無リスク資産，株式のようなリスク資産，派生資産であるオプションの 3 つ資産に着目し，オプションの無裁定価格の導出方法を述べた．その中でも，次の時点では 2 つの市場の状態しかないと仮定し，オプションの無裁定価格を求めるときに必要な要素を示し，オプションとみなせるものへのオプション・プライシング理論の適用への前提とした．ここで，再び，オプション価値を計算するとき必要なものを記す．

- オプションのペイオフ C_1, C_2
 - オプションが C_1 を出力する状態で S_1 となり， C_2 を出力する状態で S_2 となる別の資産と，その確実性等価 S
 - $(1+r)$ のペイオフをもたらす無リスク資産
- これらのものが，生産計画において何に対応するか考える．

4.1.1 行使価格

金融において行使価格とは、購入したオプションの権利を行使するかどうかを判断する価格である。行使価格はオプションを購入したときに決められている。まず、生産計画において行使とは何かを考え、行使価格を考えていく。

行使するというとき、そこには意思決定が働いている。生産計画における行使価格も意思決定の要素を含む。生産計画の中で意思決定となるのは、生産するかどうかである。生産するということは、その製品を売ることが前提としてある。つまり、生産計画における行使価格とは、生産者側が製品を売ろうとする意思の基準となる価格である。

4.1.2 リスク資産

金融におけるリスク資産は、これまで株式を想定していた。なぜなら、株価変動はブラウン運動とみなすことができ、次の瞬間、上昇するか下落するかわからないからである。

生産計画におけるリスク資産にあたるものは、生産の意思決定に影響を及ぼすものである。もう一度金融の枠組みに戻ると、リスク資産の満期での値 S_T が行使価格 K を上回るときオプションは価値をもつ。上に示したように、生産計画において行使価格は生産者側が製品を売ろうとする意思の基準となる価格である。リスク資産がそれを上回るか下回るかが製造の意思決定の判断となるので、生産計画におけるリスク資産は製品の市場価格となる。また、本論文において、製品の市場価格は幾何ブラウン運動に従うと仮定する。

4.1.3 無リスク資産

金融において無リスク資産とは、無リスク金利を r とするとき、1 単位時間後に確実に $(1+r)$ のペイオフをもたらすものである。そこで、生産計画において確実なペイオフを示すものを考える。

一般的にある金額がある期間後に確実な値となるのは、無リスク資産に投資したときである。生産計画においても、無リスク資産に投資すれば同じ結果が

得られる。しかし、無リスク資産の現状を考えると利率がとても小さいので、短い期間を想定したとき投資額とほぼ同じ額となる。これでは、投資する意味がない。そこで、他のものを考える。確実となる値は、市場が決めるというより、生産者側が自由に決めることで保障される。つまり、生産計画における無リスク資産は生産者側が自由に決められる値であり、例えば製品における定価の原価に対する比率がそれにあたる。

4.1.4 オプションの価格

以上に示した金融工学と生産計画の枠組みを表 1 にまとめる。

表 1 金融工学と生産計画との対応

	金融	生産計画
r	無リスク金利	定価の原価に対する比率または無リスク金利
$S(t)$	株価	製品の価格
K	行使価格	売ろうとする価格

金融工学において、無リスク金利の値、株価変動、オプションの行使価格がわかれば、オプションの無裁定価格を求めることができる。生産計画におけるそれぞれに対応するものが表に示されている。つまり、これらを用いることにより、生産計画におけるオプションの無裁定価格を求めることができる。

4.1.5 数値例

無リスク金利 $r = 0.15$ ，現時点の製品の価格 $S(t) = 150$ 円，次の時点の製品価格 $S(t+1) = 120$ 円 or 200 円，生産者が売ろうとする価格 $K = 150$ 円とする。このときのオプションとみなせるものの無裁定価格を求める。ここでは第 3.3.1 項に従い、

行列式より求める.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 150 \\ C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.15 & 1.15. \\ 120 & 200 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \cdots (38)$$

第1行と第2行より, $\psi_1 = 0.292, \psi_2 = 0.575$ となる. よって, $C = 28.75$ 円である.

4.2 生産計画におけるオプション価格

4.2.1 考え方の枠組み

上に示したように, 金融工学の手法を用いることにより, 生産計画においてオプションの無裁定価格を求めることができる. しかし, 本論文ではオプションの無裁定価格が生産計画において何にあたるかをまだ述べていない. 以下に, それを示す.

第3.3.2項に述べたように, オプションの無裁定価格は複製ポートフォリオから導出することができる. ここでは, その導出を違う切り口から見ていく.

第3.3.2項と同様に, γ は買うべき原資産の単位数, B は借入金とする. また, $S(t), C(t)$ をそれぞれ時点 t における原資産の価格とコール・オプションの無裁定価格とする. このとき

$$C(t) = S(t) \times \gamma - B \cdots (39)$$

が成り立つ. B を左辺に移項し,

$$C(t) + B = S(t) \times \gamma \cdots (40)$$

式(40)を, 時点 t においてコール・オプションを無裁定価格で売り, その売って得た金額と借入金 B とをあわせて, 原資産を γ 単位買う, と解釈する.

完備市場の考えをもとに, コール・オプションの無裁定価格が導出されたことを考えれば, 次の時点 $t+1$ において,

$$\begin{cases} S_1(t+1) \times \gamma - (1+r)B = C_1(t+1) \\ S_2(t+1) \times \gamma - (1+r)B = C_2(t+1) \end{cases} \cdots (41)$$

が成り立つ. ここで, また式変形を行い

$$\begin{cases} S_1(t+1) \times \gamma = C_1(t+1) + (1+r)B \\ S_2(t+1) \times \gamma = C_2(t+1) + (1+r)B \end{cases} \dots (42)$$

とする。この式の解釈は以下のようなになる。

- 原資産価格が上昇し $S_1(t+1)$ になったとき

購入した γ 単位の原資産をすべて売却し、 $S_1(t+1) \times \gamma$ を得る。これで、利率込みの借入金 $(1+r)B$ を返却する。原資産価格は上昇し、コール・オプションは行使され、売り手は損をすることになる。その損の額は買い手にとっての利益、すなわちコール・オプションの価値となるので $C_1(t+1)$ である。ここで、式(42)より、損額 $C_1(t+1)$ は γ 単位の原資産の売却で得られた $S_1(t+1) \times \gamma$ の中で補填することができる。つまり、売り手は損をしない。

- 原資産が下落し $S_2(t+1)$ になったとき

購入した γ 単位の原資産をすべて売却し、 $S_2(t+1) \times \gamma$ を得る。これで、借入金 $(1+r)B$ を返却する。原資産価格は下落し、コール・オプションは行使されない。コール・オプションは行使されないの、その価値はゼロとなる。式(42)より、 γ 単位の原資産の売却で得られた $S_1(t+1) \times \gamma$ はすべて借入金の返却に使用される。つまり、売り手は損をしない。

この枠組みを生産計画に適用する。

コール・オプションの価格と借入金をあわせて、製品を γ 単位生産の意思決定を行う。製品は 1 単位時間後に完成し、1 単位時間後の価格で γ 単位すべて売却する。このとき、金融の理論で示したように、損をすることはない。

しかし、生産計画においてオプション取引というのは存在しない。そのため、製品を γ 単位生産するための資金の一部であるコール・オプションの価格は存在しない。もし、存在するならば、オプションの取引相手は自分自身となる。つまり、コール・オプションの価格は、例えば、生産管理部門と製造部門との間で払われる金額となる。自身がコール・オプションの額を用意し、その金額を用意することで、生産計画における無リスク化ができる。

コール・オプションの無裁定価格を自ら用意することによって生産計画における無リスク化が可能となり、無リスクなので損得ゼロのような気がするが、コール・オプションの価格を先に支払っているの、その分は自己負担となる。つまり、次の時点において取り得る価格が 2 通りのとき、生産計画におけるコ

ール・オプションの価格とは、容認しなければいけない期待する利益からの差の額となる。

しかし、実際には取り得る可能性のある価格は 2 通り以上存在し、そのような場合を考えれば、 $C(t)$ を払い込むことで無裁定とは言い切れないが、払い込むことでリスクが低減されるとは言うことができる。つまり、 $C(t)$ はリスク低減のために支払う金額であり、製造するとしたときに見積もられた、製造することと等価の額であるということが出来る。つまり、 $C(t)$ は製造することの価値であるといえる。

4.2.2 数値例

第 4.1.5 項に使用した数値を用い、生産計画におけるオプション取引を説明する。

ある製品の現時点 t での価格は $S(t)=150$ 円、現時点で製造を開始する製品ができあがるときの価格は $S(t+1)=120$ 円 or 200 円である。定価の製造原価に対する比率は $r=0.15$ 、製造者は価格が 150 円であれば製品を売ろうと考えているので $K=150$ となる。このとき、先に示したように、容認しなければならない期待する利益からの差の額は $C(t)=28.75$ 円となる。

現時点において、生産管理部門は次の時点で製品価格が 150 円にはなると判断し、製造部門に製造の指示を出す。1 単位時間後に製品は完成するが、そのときの値は 2 通り考えられる。

200 円となったとき、 $r=0.15$ より、製造原価は 130 円であることがわかる。つまり、70 円の儲けが発生する。

120 円となったとき、製造原価は 130 円であるので、10 円の損をする。

4.3 考察

オプションは権利であり、オプションの価格はそのオプションのもっている価値を示している。生産計画において権利とは、生産することであり、その価

値とは、生産することの価値である。つまり、製造の指示を出す生産管理部門は製造することに価値を見出しているのである。その価値は $C(t)$ であり、生産管理部門は製造することによる期待利益額を $C(t)$ と見込んでいる。そのため、生産管理部門は $C(t)$ を今どこかに投資しても次の時点で取り返せると判断していることとなる。この $C(t)$ を現時点において、製造の指示を出すときに蓄えておく。次の時点で製品価格が 120 円となったとき、蓄えておいた $C(t)=28.75$ 円を損の額 10 円を補填に使用することができる。しかし、この $C(t)$ を蓄えることへの判断は自己に任せられ、この額を容認することができれば、生産計画においてリスク低減策となりえる。

この例では、次の時点の取り得る価格が 2 通りとしたが、実際にはすべての数値を取り得る。つまり、製品価格が 120 円を下回る可能性もある。そのようなときは、損の額が大きくなり、製造の指示を出した生産管理部門の責任が重くなる。

次の時点での取り得る価格を 2 通りとして、裁定定理からオプションの無裁定価格を求めるとき、リスク中立の考えが必要となる。リスク中立を考えると、現時点の価格を $S(t)$ 、次の時点の価格を $S(t+1)=S_1(t+1)$ or $S_2(t+1)$ 、無リスク金利を r とすると、 $S_1(t+1) > S_2(t+1)$ とすれば、 $S_1(t+1) > (1+r)S(t)$ かつ $S_2(t+1) < (1+r)S(t)$ を満たす必要がある。つまり、価格変動の予測がこの条件を満たさなければ、オプションの無裁定価格を導出することができない。そして、生産計画におけるオプションの無裁定価格、すなわち、製造することの価値を導出することができない。つまり、この制限がかかることがオプション・プライシング理論の生産計画への適用の限界であることが示される。

4.4 第 4 章のまとめ

本章では、金融におけるオプション・プライシング理論を生産計画に適用した。各要素の対応付けを明らかにし、生産計画におけるオプションの無裁定価格は生産管理部門が製造することに対して見積もった価値であると示唆した。その額を生産管理部門が蓄えておくことで、損失を補填することができるので、

リスク低減策となりえることを示した。しかし，そのような額を容認できるかは自己の判断によるものである。また，リスク中立を考えると，次の時点での値に制限かかることを示し，オプション・プライシング理論の生産計画への適用の限界を示した。

第 5 章

V a R の 生 産 計 画 へ の 適 用

第 4 章において、オプション・プライシング理論の生産計画への適用に限界があることが示された。本章では、その解決策として考えられる VaR について説明し、生産計画への適用をする。そして、その結果から考察を行う。

5.1 VaR とは

5.1.1 VaR の歴史

VaR を経営指標として最初に導入したのは、米国大手銀行の JP モルガン銀行とされている。同行経営トップの、24 時間以内に起こり得る最大損失額を、全世界、全商品にわたって一覽的にみたいというニーズから VaR は生まれた。以来、特に米国において全社的な経営管理ツールとして用いられ、米国が他国に先駆けてバブルの後遺症をいち早く払拭できた理由の 1 つが VaR の存在とされている。

いうまでもなく、金融機関は資金の受け入れに際して支払う利回りと資金を運用して得られる利回りの鞘により収益を得る。単にリスクの回避を望むならば競争市場においては収益を得られないであろうし、逆に高い収益を望むならば、ある程度のリスクをとる覚悟が必要となる。したがって、重要なことは、企業がさらされているリスクを定量的に把握し、それを経営意思決定の判断にいかすことである。

マーケット・リスクの計測モデルとして VaR が適当であるというコンセンサ

スは金融業界においてできあがっており、BIS(国際決済銀行)が内部モデルを奨励するという姿勢を打ち出したこともあり、わが国においても VaR を経営管理の道具として積極的に利用しようという気運が高まってきている。

5.1.2 VaR の定義

保有ポートフォリオの現在価値を V とする。現時点を 0 とし、将来のある時点 T (リスク・ホライズン)におけるこのポートフォリオの現在価値の変化額 ΔV が、ある水準 $(-x)$ を下回るという事象が確率 α で生起するとき、 x はこのポートフォリオの水準 $100(1-\alpha)\%$ の期間 T における VaR という。数学的には、VaR とは

$$P(\Delta V \leq -x) = \alpha \cdots (43)$$

を満たす点 x のことである。たとえば、バーゼル合意では金融当局へ報告する場合にはリスク・ホライズン T として 10 営業日(2 週間)、 α として 0.01 を使用することとなっている。一方、各金融機関内部でのリスク管理目的では、典型的には、 T として 1 営業日または 5 営業日(1 週間)、 α として 0.05 を使用することが多いようである。なお、JP モルガン銀行の Risk Metrics™ では、95%の確率で 1 日に起こりうる最大損失(すなわち $\alpha = 0.05$, $T = 1$ 日)の場合を特に DeaR(Daily Earning at Risk)と呼んでいる。

ところで、将来時点 T における損失(または利得)を現時点で確実に予測することはできないので、期間 T の変動額 ΔV を確率統計のフレームワークで確率変数としてとらえる必要がある。確率変数の確率的性質を規定するものは分布関数であるから、変動額 ΔV の従う分布関数が与えられたならば、VaR は

$$P(-x) = \alpha \cdots (44)$$

を満たす x としていつでも計算可能である。また、変動額 ΔV の確率的性質が密度関数 $f(x)$ を通して与えられている場合には、VaR は

$$P(\Delta V \leq -x) = \int_{-\infty}^{-x} f(y) dy = \alpha \cdots (45)$$

より計算される。現実には、市場データから変動額 ΔV の従う分布関数 $F(x)$ または密度関数を推定し、VaR の値 x を計算する必要がある。

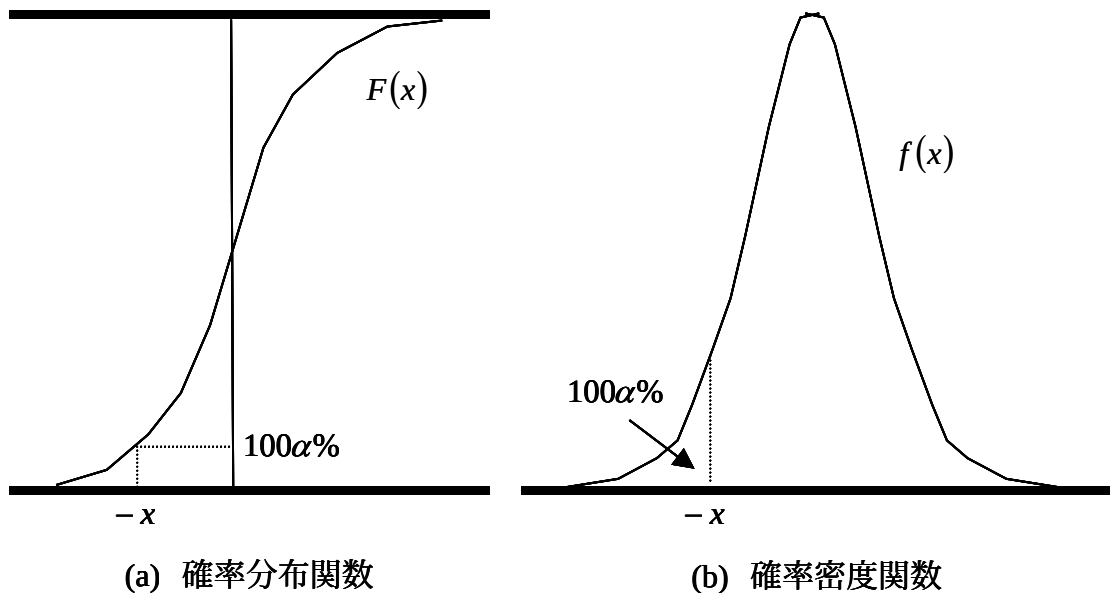


図 3 確率関数と VaR

5.2 生産計画への適用

例として、4M、16M、64M、128M の DRAM の価格について VaR を適用する。なぜならば、DRAM の価格推移は下落傾向を示し始めると、上昇することがめったにないからであり、第 4 章で述べたオプション・プライシング理論の生産計画への適用の限界に対する回答として、VaR を用いるからである。各 DRAM の価格推移の一部をそれぞれ図 4、5、6、7 に示す。

5.2.1 パラメータの導出

VaR を生産計画に適用する。DRAM の価格推移を幾何ブラウン運動過程とみなし、次の微分方程式を満たすとする。

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \cdots (46)$$

ここで、 $S(t)$ は DRAM の価格過程である。金融において μ は期待収益率、 σ はボラティリティである。価格推移において、 μ は価格変化率、 σ は価格変化率のばらつきであり、ボラティリティと同様のものである。 $W(t)$ は標準ブラウン運動過程である。

まず、DRAM の価格推移のヒストリカルデータから μ と σ を算出する方法を示す。時点 $t=0$ から時間間隔 1 で $n+1$ 回値を観測し、それぞれの値が $S_0, S_1, \Delta, S_{i-1}, S_i, \Delta, S_n$ であったとする。このとき

$$S_i = S_{i-1} \exp[\mu_i] \cdot \cdot \cdot (47)$$

を満たすとする。式(47)より

$$\mu_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \cdot \cdot \cdot (48)$$

を得る。このとき、時点 $t=0$ から $t=n$ までの価格変化率 $\bar{\mu}$ は次のように与えられる。

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \cdot \cdot (49)$$

σ は価格変化率のばらつきを表すので、ボラティリティと同様にして求めることができるので、 σ は次の式

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mu_i - \bar{\mu})^2} \cdot \cdot \cdot (50)$$

を満たす。よって、価格変化率のばらつき σ は次のように与えられた。

5.2.2 例題

図 4 から図 7 に示された DRAM の価格推移のヒストリカルデータを用いる。それぞれ 21 週目を基準点とし、基準点から前 10 週間と 20 週間の価格推移から 1 週間あたりの価格変化率 μ とボラティリティ σ を算出する。その値を使用し、基準点から 4 週後と 8 週後の VaR を 5% ごとに 5% から 95% まで求める。このとき、実際に市場で観測された 4 週間後と 8 週間後の値がどの範囲に収まるか測定する。

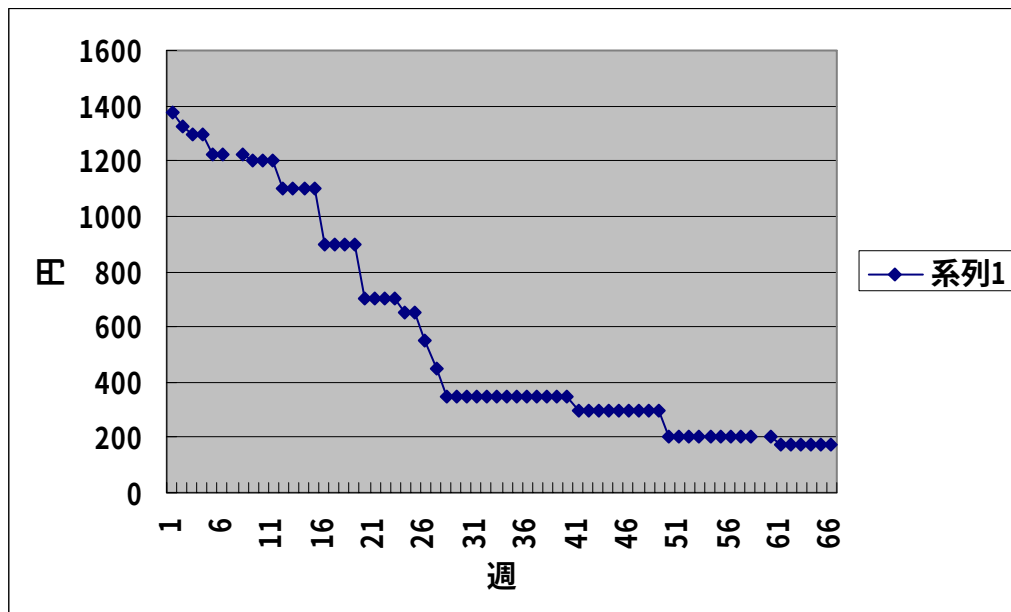


図 4 4MDRAM の価格推移

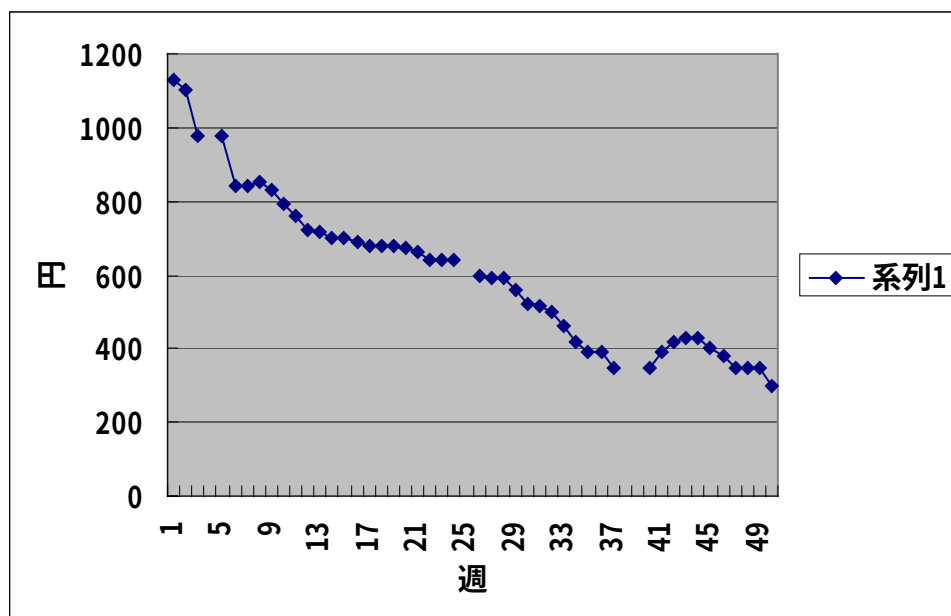


図 5 16MDRAM の価格推移

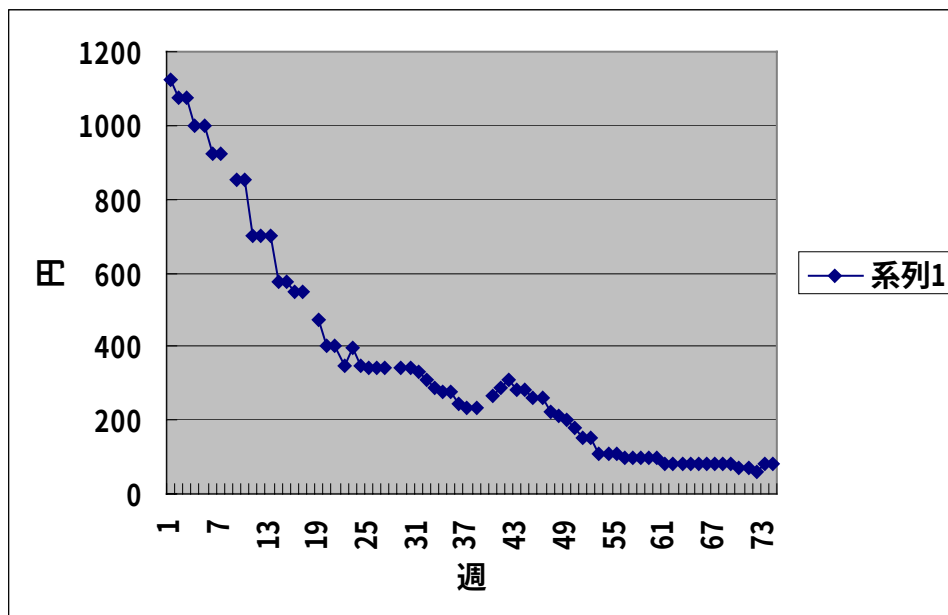


図 6 64MDRAM の価格推移

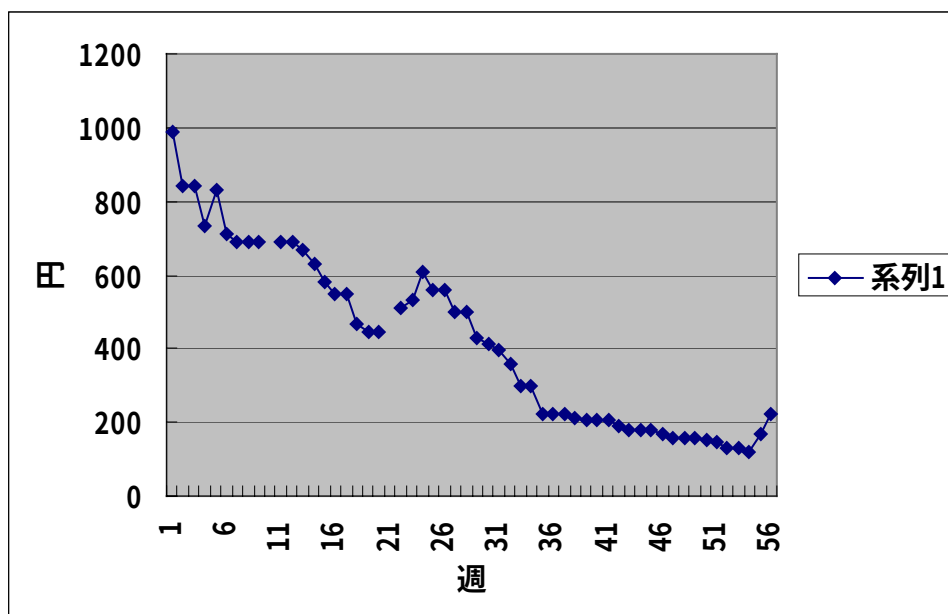


図 7 128MDRAM の価格推移

VaR の計測は、DRAM の価格推移が式(46)で示される幾何ブラウン運動の微分方程式に従うことを利用し、式(46)を解くことで与えられる以下の式により測定する[4].

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right) \cdots (51)$$

5.2.3 結果

ヒストリカルデータから観測された各 DRAM の価格推移の価格変化率 μ ，ボラティリティ σ ，基準点である 21 週目の価格，4 週後の 25 週目の価格，8 週後の 29 週目の価格を，表 2 にまとめる．

表 2 各 DRAM のヒストリカルデータ

	4M	16M	64M	128M
前 10 週間で算出した 1 週間の価格変化率 μ	-0.0539	-0.01411	-0.05596	-0.03681
前 10 週間で算出したボラティリティ σ	0.095421	0.016366	0.081696	0.063111
前 20 週間で算出した 1 週間の価格変化率 μ	-0.03376	-0.02748	-0.0517	-0.03503
前 20 週間で算出したボラティリティ σ	0.070194	0.040769	0.071134	0.075689
基準点の価格	700	660	400	477.5
実際の 4 週後の価格	650	617.5	340	560
実際の 8 週後の価格	350	560	340	430

表 2 により与えられた価格変化率 μ とボラティリティ σ を式(52)に代入し，5% ごとの VaR を求める．得られた結果を表 3，5，7，9 にまとめる．表 2 に示した実際の 4 週間後，8 週間後の値が何% 目の点であったかを表 4，6，8，10 にまとめる．

表 3 過去 10 週間のデータより算出した 4 週間後の VaR

	4M	16M	64M	128M
5%	411	591	244	334
10%	441	598	259	350
15%	462	602	269	361
20%	479	606	278	370
25%	495	610	286	378
30%	509	613	293	385
35%	523	615	300	392
40%	537	618	306	398
45%	550	621	313	405
50%	563	623	319	411
55%	577	626	326	418
60%	592	629	333	425
65%	607	631	340	432
70%	623	634	348	440
75%	641	637	357	448
80%	662	641	367	458
85%	688	645	378	469
90%	720	650	394	484
95%	772	658	418	507

表 4 過去 10 週間のデータを用いたときに実際の 4 週間後の値が観測された点

	4M	16M	64M	128M
実際の値の観測点	77.12%	38.00%	64.62%	99.22%

表 5 過去 10 週間のデータより算出した 8 週間後の VaR

	4M	16M	64M	128M
5%	291	546	174	265
10%	321	555	190	283
15%	343	562	201	295
20%	362	567	210	306
25%	379	571	218	315
30%	395	575	226	324
35%	410	579	233	332
40%	424	582	241	340
45%	439	586	248	347
50%	454	589	255	355
55%	470	592	263	364
60%	487	596	270	372
65%	504	600	279	381
70%	523	603	288	391
75%	545	608	298	401
80%	571	612	310	413
85%	601	618	325	428
90%	644	625	344	447
95%	708	636	374	477

表 6 過去 10 週間のデータを用いたときに実際の 8 週間後の値が観測された点

	4M	16M	64M	128M
実際の値の観測点	16.68%	13.11%	89.08%	85.48%

表 7 過去 20 週間のデータより算出した 4 週間後の VaR

	4M	16M	64M	128M
5%	458	516	257	323
10%	511	532	270	341
15%	529	542	280	354
20%	543	551	288	365
25%	556	559	295	374
30%	567	566	301	383
35%	578	572	307	391
40%	589	579	313	399
45%	600	585	319	407
50%	610	591	325	415
55%	622	597	331	423
60%	633	603	337	431
65%	645	610	343	439
70%	658	617	350	449
75%	672	624	358	460
80%	688	633	366	471
85%	707	643	377	485
90%	732	656	390	504
95%	770	676	411	533

表 8 過去 20 週間のデータを用いたときに実際の 4 週間後の値が観測された点

	4M	16M	64M	128M
実際の値の観測点	66.90%	70.16%	62.22%	97.61%

表 9 過去 20 週間のデータより算出した 8 週間後の VaR

	4M	16M	64M	128M
5%	385	438	189	253
10%	414	456	204	274
15%	434	470	214	288
20%	451	480	223	301
25%	467	490	231	312
30%	480	498	238	322
35%	494	506	244	331
40%	507	514	251	341
45%	520	521	257	350
50%	533	529	264	360
55%	547	537	271	370
60%	561	545	278	380
65%	576	553	286	391
70%	592	562	294	403
75%	610	572	303	417
80%	630	583	314	432
85%	655	596	326	450
90%	688	613	342	474
95%	739	639	369	513

表 10 過去 20 週間のデータを用いたときに実際の 8 週間後の値が観測された点

	4M	16M	64M	128M
実際の値の観測点	1.64%	68.36%	89.23%	79.28%

5.2.4 考察

表 4 と表 8 を見ると、128M の DRAM の実際に観測された 4 週間後の値の点が他よりも非常に高くなっているのがわかる。図 7 を見ると、128M の DRAM の価格推移において、20 週目付近から価格が上昇しているが、価格推移は全体として下落していることがその原因である。128M を除いて考えれば、4 週間後という近い将来の値であれば、近似値を求めることが可能であることが示される。

表 6 と表 8 を見ると、128M の DRAM について、実際の 8 週間後の値が観測された点が 4 週間後のそれよりも低くなっているのがわかる。これは、図 7 を見ることにより、容易に理解できる。4M、16M、64M について見ると、4 週間後のときと比べて観測点にばらつきがあるのがわかる。これは、VaR を見積もる時点が 4 週間先に延びたことが影響し、信頼性が薄れたことを示す。

価格変化率 μ とボラティリティ σ は、採取するデータが過去 10 週間と 20 週間とでは異なる。このため、それぞれで算出した VaR は、4 週間後、8 週間後ともに大きく異なるところがある。したがって、価格変化率 μ とボラティリティ σ の選び方、すなわちデータを採取する範囲によって、VaR が変化するのである。そのため、VaR をより正確に見積もるためには、適当な範囲でデータを採取する必要がある。

VaR を生産計画に適用すること生じる利点を考える。例で示したように、DRAM の価格推移に対して、VaR を適用することにより、製品価格が原価を下回る可能性を見積もることができる。このとき、その可能性が許容範囲を越えているならば、生産調整をし、価格の下落を抑制することができる。

オプション・プライシング理論を生産計画に適用する際、将来の価格の予測が必要となるが、その予測に VaR を用いることができる。VaR を算出する μ と σ を適当にすることにより、VaR の正確性が増し、現在からの価格変化額の精度が増す。すなわち、VaR とオプション・プライシング理論を併用することにより、生産計画におけるリスク低減がより図られることを示している。

5.3 第 5 章のまとめ

本章では、オプション・プライシング理論の生産計画への適用の限界への一つの回答として、VaR について説明し、生産計画に適用した。具体的な例として、DRAM のスポット価格をあげ、実際に観測された価格との比較をし、考察した。その結果、オプション・プライシング理論を VaR でサポートすることで、生産計画におけるリスク低減策となりえると示唆した。

第 6 章

結 論

本論文では、DRAM のように日々変動するような生産物に対する有効なリスク低減方式について検討した。オプション・プライシング理論と VaR を適用し、その可能性と限界を確認した。

第 1 章では、本研究の背景と目的を述べ、本論文の構成を示した。

第 2 章では、一般的なリスクとリスク・マネジメントについて述べ、本研究で考えるリスク・マネジメントについて言及した。

第 3 章では、オプション・プライシング理論を説明し、オプションとみなせるものへ適用する際に必要となる要素を確認した。

第 4 章では、オプション・プライシング理論を生産計画に適用し、生産計画の中での各要素の働きを示した。また、その適用の限界を示した。

第 5 章では、VaR を生産計画に適用し、その可能性と限界を示した。

以上より、本研究では、生産計画についてオプション・プライシング理論と VaR の適用し、リスク低減方式について検討した。

参 考 文 献

- [1] 瀧澤正雄：『製造業のリスク・マネジメント』，税務経理協会，1998.
- [2] S.F.ネフツィ：『ファイナンスへの数学』，朝倉書店，1999.
- [3] 刈屋武昭，山本大輔：『入門リアル・オプション』，東洋経済新報社，2001.
- [4] 蓑谷千凰彦：『よくわかるブラック・ショールズモデル』，東洋経済新報社，2000.
- [5] 野口悠紀雄，藤井真理子：『金融工学』，ダイヤモンド社，2000.
- [6] 石村貞夫，石村園子：『金融・証券のためのブラック・ショールズ微分方程式』，東京図書株式会社，2000.
- [7] 牟田誠一郎：『バリュー・アット・リスク』，近代セールス社，1998.
- [8] 木島正明：『金融リスクの計量化上巻バリュー・アット・リスク』，金融財政事業研究会，1998.

謝 辞

本研究を終えるにあたり、終始ご指導いただきました指導教官吉田武稔助教授に、心より御礼申し上げます。

また、生活全般にわたってお世話になりました吉田研究室と Gu 研究室の皆様に、厚くお礼を申し上げます。