

Title	メモリ効率の良い画像角度補正アルゴリズムに関する研究
Author(s)	尾藤, 慎也
Citation	
Issue Date	2007-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/3596">http://hdl.handle.net/10119/3596</a>
Rights	
Description	Supervisor:浅野 哲夫, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

メモリ効率の良い画像角度補正アルゴリズム  
に関する研究

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報処理学専攻

尾藤慎也

2007年3月

修 士 論 文

メモリ効率の良い画像角度補正アルゴリズム  
に関する研究

指導教官 浅野哲夫 教授

審査委員主査 上原隆平 助教授

審査委員 金子峰雄 教授

審査委員 平石邦彦 教授

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報処理学専攻

510085 尾藤慎也

提出年月: 2007年2月

## 概要

本研究では、メモリを効率よく使用する画像処理方式の実現を目的とする。例としてスキャナを取り上げ、入力画像が回転していればその角度を検出して角度補正を行う。この処理過程における効率の良いアルゴリズムを提案し、無駄なメモリを使っていないか検証する。特に、本研究ではスキャナの精度にメモリが追いついていない現況を考慮し、スキャナ自身のメモリだけで画像の処理を行うメモリ効率の良い方式の実現を目的とする。

# 目次

第 1 章	はじめに	1
1.1	研究の背景	1
1.2	研究の目的	2
1.3	本論文の流れ	3
第 2 章	最大内接長方形	4
2.1	問題の定義	4
2.2	長方形 $R_{\theta,w}$ の面積	4
2.2.1	$D$ 点が $E$ 点の下にある場合	6
2.2.2	$D$ 点が $E$ 点の上にある場合	8
2.3	長方形 $R_\theta$ の面積	9
2.3.1	長方形 $R_\theta$ が $R$ に完全に内接する場合	10
2.3.2	一般的な用紙サイズにおける解析結果	11
第 3 章	メモリ効率のよい回転	12
3.1	問題の定義	12
3.2	安全でない点の分布	15
3.2.1	$X = 0$ における安全性	16
3.2.2	行方向の安全性	16
3.3	提案するアルゴリズム	18
3.3.1	疑似コード	19
3.4	補間値の移し替え	22
第 4 章	最後に	25
4.1	まとめ	25
4.2	今後の課題	25

# 第1章 はじめに

## 1.1 研究の背景

現在のコンピュータの記憶装置（メモリ）では，主記憶の容量を補うために大容量の外部記憶装置として磁気ディスク装置を用いるのが標準的である．また，演算装置と主記憶装置との性能差を埋めるために，高速小容量の記憶装置が使われるのも今では一般的である．このような記憶装置のことをキャッシュメモリ，または簡単にキャッシュ（Cache）と呼ぶ．最近では，キャッシュにも最大3レベルの階層構造を導入しているものが多い．一般的に，L1と記されるレベル1のキャッシュのサイズが16KByteから32KByteであるのに対して，レベル2のキャッシュは512KByteから数MByteである．これらの関係を図1.1に示す．

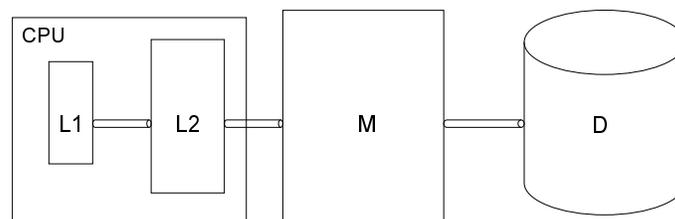


図 1.1: 記憶装置の階層構造（キャッシュ（L1，L2），主記憶（M），ディスク（D））

演算装置から離れるにしたがって記憶容量は増大するが，速度は逆に低下する．ハードウェアの性能によって大きな差があるが，各記憶装置のアクセス時間の目安は以下の表1.1である．つまり，レベル1のキャッシュは主記憶より100倍速いが，ディスクは主記憶より10万倍遅い．このようにメモリには階層構造があり，それぞれでアクセス時間が大きく異なる．したがって，大量のデータが外部記憶装置に蓄えられていて，すべてのデー

表 1.1: 各記憶装置のアクセス時間

レベル1キャッシュ	1ナノ秒
レベル2キャッシュ	10ナノ秒
主記憶	100ナノ秒
ディスク	1ミリ秒

データを主記憶上に蓄えることができない場合，何度も外部記憶装置と主記憶の間でデータの転送を繰り返さなければならない．しかし，先に述べたように，データ転送に多大な時間を要するので，全体の処理時間を最小にするためには，データ転送の回数を減らすことが重要である．

このように，大量のデータを対象にしてなにか意味のある計算を行おうとすると，記憶装置の階層構造を十分に意識しなければ非常に効率の悪いものになってしまう [1][2][3]．

このような研究は，データが大量にあるデータベースや Web サーバーなどが例として挙げられるネットワーク系の分野では盛んである．しかし，画像処理を高速に行う組み込みシステムに関する分野では，それほど盛んではない．そのため，入出力の面では効率が良くない例が少なくなく，アルゴリズムの改善が必要である．

## 1.2 研究の目的

本研究では，メモリを効率よく使用する画像処理方式の実現を目的とする．例としてスキャナを取り上げる．

近年，スキャナの精度が上がり，解像度の高いデジタル画像を処理する要求が高まってきている．鮮明な画像を処理するには大量のメモリをスキャナに搭載する必要がある．例えば，A4 サイズの文書を解像度 2400dpi，24 ビットフルカラーでスキャンした場合，約 1.6GByte のメモリが必要になる．また，文書などの入力画像が少し傾いてスキャナに取り込まれたとき，傾き補正を，ユーザに PC 上で行わせることもできる．しかし，大量の文書をスキャンする場合には，スキャナで角度補正を自動的に行うようにすると，ユーザの負担を減らすことができる．この画像をスキャナで角度補正を行うとき，画像 2 枚分のメモリ，すなわち，3.2GByte のメモリがあれば簡単に処理できる．しかし，必要以上のメモリを搭載するにはコストがかかるので，余計なメモリをできるだけ使わないメモリ効率の良い処理を行う必要がある．

スキャナで文書をスキャンした場合，図 1.2 のような処理過程で角度補正がなされる．回転角度の検出に関しては既存の研究 [4][5][6] を利用することができる．したがって，本研究では角度補正の部分に着目する．

画像は離散的な画素の集合によって形成されるので，幾何学変換処理を行うときには補間をしなければならない．ここでの幾何学変換処理とは，画像の形状を変更することであり，拡大，縮小，回転のことである．補間処理には，最近傍法 (Nearest Neighbor)，線形補間法 (Bilinear)，3 次補間法 (Bicubic) などがある．最近傍法は，ある画素の周辺の 4 つの画素のうち，最も近い画素を明度として選択する．これは処理速度は高速であるが，補間精度は低い．3 次補間法は，ある画素の周辺の 16 個の格子点における明度を用いて 3 次式による補間を行う．これは精度は高い画像を得られるが時間がかかりすぎる．

よって，本研究では，最も近い画素 (4 点) からの距離の比を求め，近傍 4 画素の濃度値から補間する線形補間を用いる [7]．これにより補間精度もよく，あまり時間もかからず処理できる．この線形補間の補間値を格納するメモリの領域をできるだけ少なくするメ

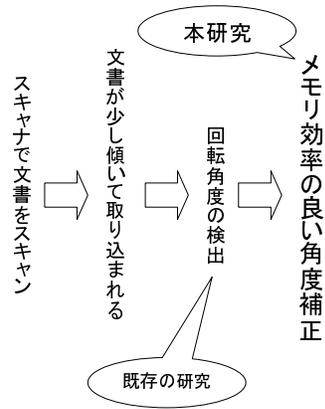


図 1.2: 文書が角度補正される処理過程

メモリ効率の良いアルゴリズムを提案する。

### 1.3 本論文の流れ

本稿では、第2章で最大に内接した長方形について、第3章ではメモリ効率のよい補間について述べる。

## 第2章 最大内接長方形

この章では、与えられた軸平行な長方形に含まれた角度  $\theta$  の長方形の中で面積最大のものを求める。実際、必要な情報がどこまで含まれているかわからないため、面積最大の長方形を求めることにより、必要な情報はこの長方形内に完全に含まれているものと想定する。また、補間をするときに使用できる最悪な場合のメモリがどれくらいあるかを調べるためにも用いる（図 2.1）。

### 2.1 問題の定義

入力として、縦  $H$ 、横  $W$ （一般性を失わず  $H \geq W$  とする）の軸平行な長方形  $R$  と角度  $\theta$  を与える。長方形  $R$  は4つの直線  $x = 0, x = W, y = 0, y = H$  に囲まれているものとする。このとき、 $R$  に含まれ、 $R$  に対して角度  $\theta$  だけ傾いた、面積最大となる長方形を求める。この面積最大となる長方形を  $R_\theta$  とする。

観察 1. 長方形  $R_\theta$  は長方形  $R$  の相対する2辺に接している。

証明.  $R_\theta$  が長方形  $R$  の相対する2辺に接していないとする。このとき、 $R_\theta$  は  $R$  の接しない隣り合う2頂点を持つ。すると、この2頂点を  $R$  に接するまで残りの2頂点から離れる方向に移動することができる。これは、 $R_\theta$  が面積最大であることに矛盾する。したがって、 $R_\theta$  は  $R$  の相対する2辺に接している。□

$R_\theta$  が相対する2辺のみで  $R$  に接しているとする。すると、 $R_\theta$  は  $R$  内を水平方向もしくは垂直方向に動くことができるので、一般性を失わずに  $R$  の3辺に接すると仮定できる。したがって、長方形  $R_\theta$  の1頂点が  $R$  の底辺上にあると仮定する。

点  $(w, 0)$  で  $R$  に接している面積最大の長方形を  $R_{\theta, w}$  とする。すると、 $0 \leq w \leq W$  で面積最大となる  $R_{\theta, w}$  が  $R_\theta$  となる。

### 2.2 長方形 $R_{\theta, w}$ の面積

点  $(w, 0)$  を点  $A$  とする。点  $A$  から出る  $R_{\theta, w}$  の2つの辺の傾きは  $\tan \theta$  と  $\frac{-1}{\tan \theta}$  である。点  $A$  から出る傾き  $\tan \theta$  の直線は直線  $x = W$  と  $(W, (W - w) \tan \theta)$  で交わる。この交点を  $B$  とする。また、点  $A$  から出る傾き  $\frac{-1}{\tan \theta}$  の直線は  $x = 0$  と  $(0, \frac{w}{\tan \theta})$  で交わる。この交点

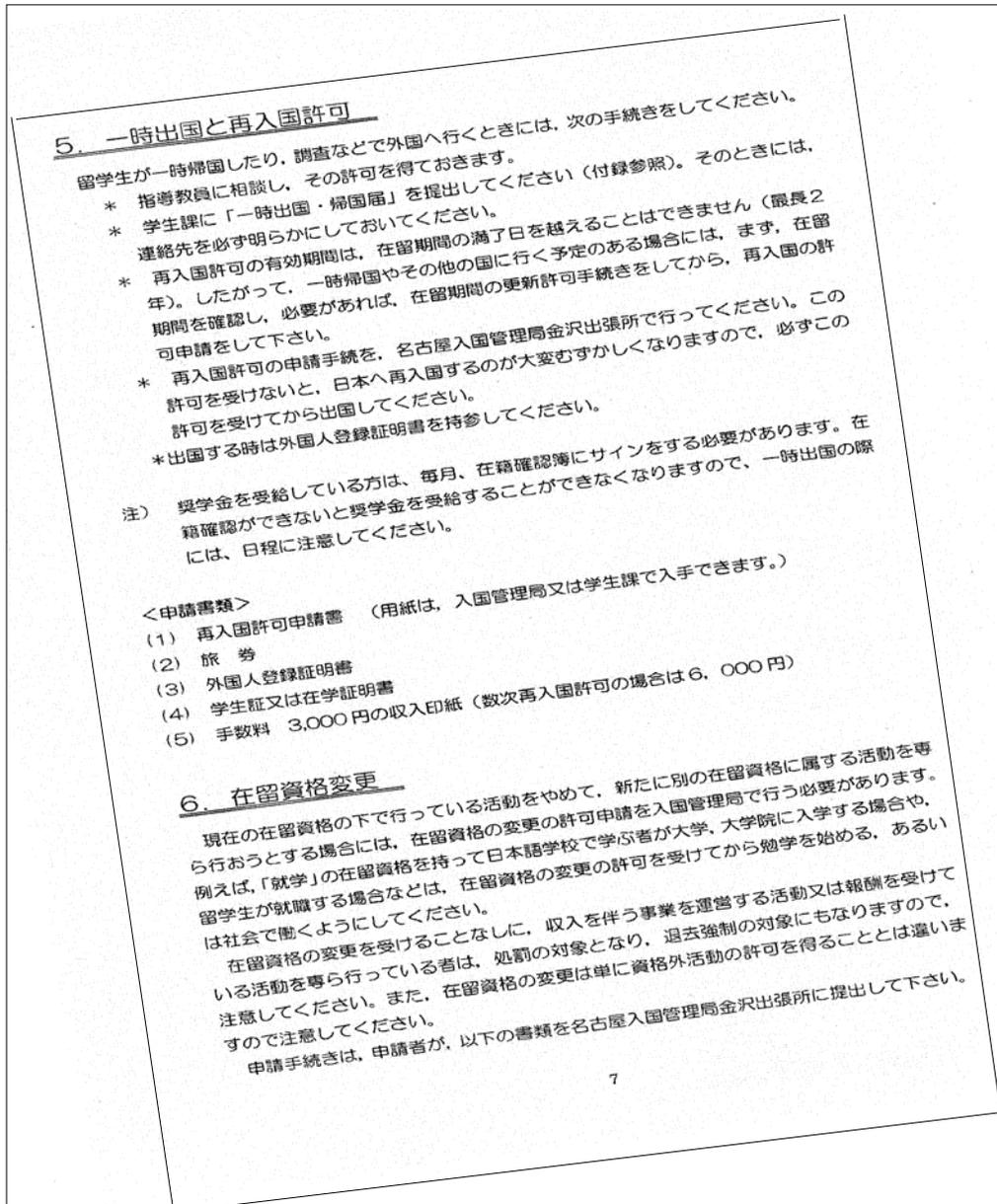


図 2.1: 傾いて取り込まれた画像の例 (文書以外の余白が角度補正の補間に使える領域)

を  $D$  とする．ここで，点  $A, B$  で  $R$  と接する長方形を  $R_{\theta, w}$  とする．なぜなら，線分  $AB$  を固定して考えても一般性は失われないからである．

また，点  $B$  から出る傾き  $\frac{-1}{\tan \theta}$  の直線は  $y = H$  と  $(W(1 + \tan^2 \theta) - w \tan^2 \theta - H \tan \theta, H)$  で交わる．この交点を  $C$  とする．さらに，点  $C$  から出る傾き  $\tan \theta$  の直線は  $x = 0$  と  $(0, H(\tan^2 \theta + 1) - W \tan \theta(1 + \tan^2 \theta) + w \tan^3 \theta)$  で交わる．この交点を  $E$  とする．すなわち，

$$|OD| = \frac{w}{\tan \theta} \quad (2.1)$$

$$|OE| = H(1 + \tan^2 \theta) - W \tan \theta(1 + \tan^2 \theta) + w \tan^3 \theta \quad (2.2)$$

となる．

$R_{\theta, w}$  は，点  $D$  と点  $E$  の位置関係によって決まる．点  $D$  が点  $E$  の下にある場合，点  $A$ ，点  $B$ ，点  $D$  によって定まる長方形が  $R_{\theta, w}$  となる（図 2.2）．また，点  $D$  が点  $E$  の下にあ

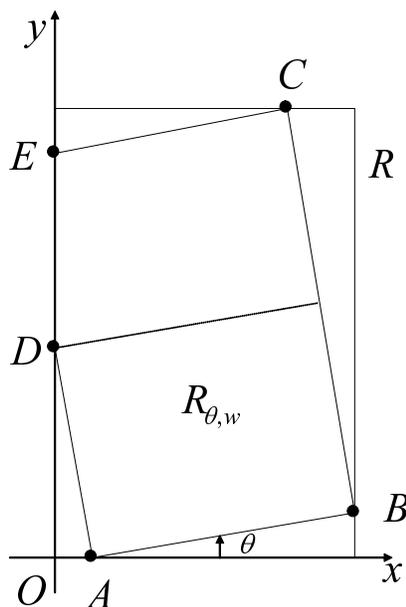


図 2.2: 点  $D$  が点  $E$  の上の場合

る場合，点  $A$ ，点  $B$ ，点  $C$  によって定まる長方形が  $R_{\theta, w}$  となる（図 2.3）．よって，それぞれの場合毎に  $R_{\theta, w}$  の面積  $S(w)$  を求める．

### 2.2.1 $D$ 点が $E$ 点の下にある場合

点  $D$  が点  $E$  の下にあるので， $|OD| \leq |OE|$  が成り立つ．よって，式 (2.1) と式 (2.2) より，

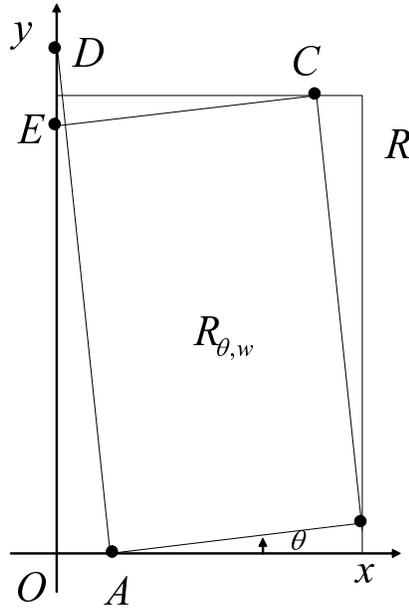


図 2.3: 点  $D$  が点  $E$  の下の場合

$$\frac{w}{\tan \theta} \leq H(1 + \tan^2 \theta) - W \tan \theta(1 + \tan^2 \theta) + w \tan^3 \theta \quad (2.3)$$

となる．式 (2.3) を  $w$  について解くと

$$\begin{aligned} w &\geq \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta - 1}(W \tan \theta - H) && \tan \theta > 1 \text{ のとき} \\ w &\leq \frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}(H - W \tan \theta) && \tan \theta < 1 \text{ のとき} \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる． $\tan \theta = 1$  のときは， $H$  と  $W$  の関係によって点  $D$  と点  $E$  の上下が決まるので特別に扱う．長方形  $R_{\theta, w}$  は，3つの点  $A, B, D$  と点  $D$  点からの垂線と線分  $BC$  の交点によって決まる．よって，長方形  $R_{\theta, w}$  の面積は  $|AB| \times |AD|$  である．したがって，

$$\begin{aligned} S(w) &= |AB| \times |AD| \\ &= \frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan \theta}(W - w)w \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる．これは  $w$  に関して上に凸の関数であり， $w = \frac{1}{2}W$  で極大値をとる．

ここで， $\tan \theta = 1$  の場合を考える． $\tan \theta = 1$  のときは

$$|OE| - |OD| = 2H - 2W$$

となる。

$H \geq W$  を仮定したので、 $|OE| - |OD| \geq 0$  が常に成り立つ。すなわち、 $\tan \theta = 1$  のときは、 $w$  がどのような値をとっても常に点  $D$  が点  $E$  の下にある。

## 2.2.2 $D$ 点が $E$ 点の上にある場合

点  $D$  が点  $E$  の上にあるので、 $|OD| \geq |OE|$  が成り立つ。よって、式 (2.1) (2.2) より、

$$\frac{w}{\tan \theta} \geq H(1 + \tan^2 \theta) - W \tan \theta(1 + \tan^2 \theta) + w \tan^3 \theta \quad (2.6)$$

となる。式 (2.6) を  $w$  について解くと

$$\begin{aligned} w &\leq \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta - 1}(W \tan \theta - H) && \tan \theta > 1 \text{ のとき} \\ w &\geq \frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}(H - W \tan \theta) && \tan \theta < 1 \text{ のとき} \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。 $\tan \theta = 1$  のときは、 $H \geq W$  を仮定しているので、この場合は起こりえない。面積が最大になる長方形  $R_{\theta, w}$  は、3つの点  $A, B, C$  と点  $C$  点からの垂線と線分  $AD$  の交点によって決まる。よって、長方形  $R_{\theta, w}$  の面積は  $|AB| \times |BC|$  である。したがって、

$$\begin{aligned} S(w) &= |AB| \times |BC| \\ &= (1 + \tan^2 \theta)(W - w)|H - (W - w) \tan \theta| \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる。これは  $w$  に関して上に凸の関数であり、 $w = W - \frac{1}{2 \tan \theta} H$  で極大値をとる。

以上より  $S(w)$  は  $\tan \theta$  の値によって、以下のようになる。

- $\tan \theta < 1$  のとき

$$S(w) = \begin{cases} \frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan \theta}(W - w)w & w \leq \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta - 1}(W \tan \theta - H) \text{ のとき} \\ (1 + \tan^2 \theta)(W - w)|H - (W - w) \tan \theta| & w > \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta - 1}(W \tan \theta - H) \text{ のとき} \end{cases}$$

- $\tan \theta > 1$  のとき

$$S(w) = \begin{cases} (1 + \tan^2 \theta)(W - w)|H - (W - w) \tan \theta| & w < \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta - 1}(W \tan \theta - H) \text{ のとき} \\ \frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan \theta}(W - w)w & w \geq \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta - 1}(W \tan \theta - H) \text{ のとき} \end{cases}$$

- $\tan \theta = 1$  のとき

$$S(w) = \frac{H \tan^2 \theta}{\tan \theta}(W - w)w = 2(W - w)w$$

## 2.3 長方形 $R_\theta$ の面積

まず,  $\tan \theta < 1$  のときを考える. このとき,  $R_{\theta,w}$  の面積  $S(w)$  は

$$S(w) = \begin{cases} \frac{1+\tan^2 \theta}{\tan \theta}(W-w)w & w \leq \frac{\tan \theta}{1-\tan^2 \theta}(H-W \tan \theta) \text{ のとき} \\ (1+\tan^2 \theta)(W-w)(H-(W-w) \tan \theta) & w > \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta - 1}(W \tan \theta - H) \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. ここで,  $\frac{1+\tan^2 \theta}{\tan \theta}(W-w)w$  は  $w = W/2$  で極大値,  $(1+\tan^2 \theta)(W-w)(H-(W-w) \tan \theta)$  は  $w = W - \frac{H}{2 \tan \theta}$  でそれぞれ極大値を取る. したがって,  $R_\theta$  は

$$R_\theta = \begin{cases} R_{\theta, W - \frac{H}{2 \tan \theta}} & H \leq \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} W \text{ のとき} \\ R_{\theta, \frac{\tan \theta}{1-\tan^2 \theta}(H-W \tan \theta)} & \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} W \leq H \leq \frac{1+\tan^2 \theta}{2 \tan \theta} W \text{ のとき} \\ R_{\theta, W/2} & H \geq \frac{1+\tan^2 \theta}{2 \tan \theta} W \text{ のとき} \end{cases}$$

となり, その面積  $S(R_\theta)$  は

$$S(R_\theta) = \begin{cases} \frac{1+\tan^2 \theta}{4 \tan \theta} H^2 & H \leq \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} W \text{ のとき} \\ \frac{1+\tan^2 \theta}{(1-\tan^2 \theta)^2} (H-W \tan \theta)(W-H \tan \theta) & \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} W \leq H \leq \frac{1+\tan^2 \theta}{2 \tan \theta} W \text{ のとき} \\ \frac{1+\tan^2 \theta}{4 \tan \theta} W^2 & H \geq \frac{1+\tan^2 \theta}{2 \tan \theta} W \text{ のとき} \end{cases}$$

となる.

次に,  $\tan \theta > 1$  の場合を考える. このとき,  $R_{\theta,w}$  の面積  $S(w)$  は

$$S(w) = \begin{cases} \frac{1+\tan^2 \theta}{\tan \theta}(W-w)w & w \geq \frac{\tan \theta}{1-\tan^2 \theta}(H-W \tan \theta) \text{ のとき} \\ (1+\tan^2 \theta)(W-w)(H-(W-w) \tan \theta) & w < \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta - 1}(W \tan \theta - H) \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. ここで,  $\frac{1+\tan^2 \theta}{\tan \theta}(W-w)w$  は  $w = W/2$  で極大値,  $(1+\tan^2 \theta)(W-w)(H-(W-w) \tan \theta)$  は  $w = W - \frac{H}{2 \tan \theta}$  でそれぞれ極大値を取る. したがって,  $R_\theta$  は

$$R_\theta = \begin{cases} R_{\theta, W - \frac{H}{2 \tan \theta}} & H \geq \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} W \text{ のとき} \\ R_{\theta, \frac{\tan \theta}{1-\tan^2 \theta}(H-W \tan \theta)} & \frac{1+\tan^2 \theta}{2 \tan \theta} W \leq H \leq \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} W \text{ のとき} \\ R_{\theta, W/2} & H \leq \frac{1+\tan^2 \theta}{2 \tan \theta} W \text{ のとき} \end{cases}$$

となり, その面積  $S(R_\theta)$  は

$$S(R_\theta) = \begin{cases} \frac{1+\tan^2 \theta}{4 \tan \theta} H^2 & H \geq \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} W \text{ のとき} \\ \frac{1+\tan^2 \theta}{(1-\tan^2 \theta)^2} (H-W \tan \theta)(W-H \tan \theta) & \frac{1+\tan^2 \theta}{2 \tan \theta} W \leq H \leq \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} W \text{ のとき} \\ \frac{1+\tan^2 \theta}{4 \tan \theta} W^2 & H \leq \frac{1+\tan^2 \theta}{2 \tan \theta} W \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。

最後に  $\tan \theta = 1$  の場合を考える。このとき， $R_{\theta,w}$  の面積  $S(w)$  は

$$S(w) = \frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan \theta} (W - w)w$$

となるので， $R_{\theta} = R_{\theta,W/2}$  となり，その面積は  $\frac{1+\tan^2 \theta}{4 \tan \theta} W^2$  となる。

### 2.3.1 長方形 $R_{\theta}$ が $R$ に完全に内接する場合

前節で， $R_{\theta}$  とその面積を求めた。  $R_{\theta}$  は  $H, W, \theta$  の関係によって点  $D$  と点  $E$  の上下が定まることがわかった。点  $D$  と点  $E$  が一致する場合があることもわかった。そこで，この節では， $R_{\theta}$  が  $R$  に完全に内接する場合がどんなときかを考える（図 2.4）。

本節では  $\tan \theta < 1$  の場合のみを考える。これは，スキャンした文書が 45 度以上も傾くことは実際的ではないからである。

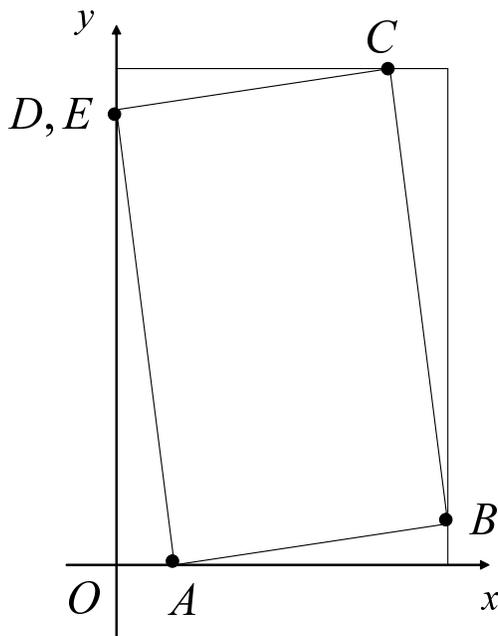


図 2.4: 点  $D$ ，点  $E$  の一致する点

点  $D$  と点  $E$  が一致する  $R_{\theta,w}$  が  $R_{\theta}$  となるのは，

$$\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} (H - W \tan \theta) \leq \frac{1}{2} W \quad (2.9)$$

かつ

$$W - \frac{H}{2 \tan \theta} \leq \frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} (H - W \tan \theta) \quad (2.10)$$

のときである．

この式 (2.9) を  $\tan \theta$  について解くと，

$$\tan \theta \leq \frac{H - \sqrt{H^2 - W^2}}{W}$$

または

$$\frac{H + \sqrt{H^2 - W^2}}{W} \leq \tan \theta$$

となる．また、式 (2.10) は  $H \geq W$  では常に成り立つ．

このことから，回転角  $\theta$  が

$$0 \leq \theta \leq \min\left\{\arctan \frac{H - \sqrt{H^2 - W^2}}{W}, \frac{\pi}{4}\right\} \quad (2.11)$$

の範囲であるとき点  $D$ ，点  $E$  が一致する長方形  $R_\theta$  をとりつづけることがわかる．

### 2.3.2 一般的な用紙サイズにおける解析結果

原画像の大きさは一般的な用紙サイズとする．つまり，アスペクト比が  $\sqrt{2} : 1$  の原画像を仮定する．このとき，原画像に対して，どのような長方形を考えると最も面積が最大になるかを調べる

入力は，高さ  $H = \sqrt{2}$ ，横  $W = 1$ ，回転角  $\theta$  を与える．出力は，点  $A$  の  $x$  座標である．点  $A(w, 0)$  を求めることにより，面積が一意にきまる．なぜなら，点  $A$  と回転角  $\theta$  によって線分  $AB$  が決まるからである (2.2 節参照)．また，回転角は  $\theta$  の値を 0 度 ~ 90 度とする (90 度以上は画像そのものを回転させれば同じ結果になるため)．このとき，解析的にどのようなようになるか求める．

高さ  $H = \sqrt{2}$ ，横  $W = 1$  を式 (2.11) に代入すると，回転角  $\theta$  の値が

$$0 \leq \theta \leq 0.414 \quad (2.12)$$

となった．角度で示すと，0 度から 22.5 度の間で，点  $D$  と点  $E$  は一致した．

このことから，面積最大の長方形  $R_\theta$  は点  $D$  と点  $E$  は一致した状態から点  $D$  が点  $E$  の下にある状態で角度が 90 度まで推移することがわかった．

スキャナで文書をスキャンしたとき，通常の使用で回転角が 22.5 度を超えることは滅多にない．よって，回転角を 20.0 度までに制限すれば，原画像に対して，必ず 4 辺で内接する長方形が面積最大になるといえる．

## 第3章 メモリ効率のよい回転

前章では原画像に含まれ面積最大となる長方形を求めた。これは、使用できるメモリの量が最悪な場合を考えたためである。また、原画像をアスペクト比  $\sqrt{2}:1$  の一般的な用紙サイズとし、回転角度を 22.5 度以下とすると内接した長方形を除いた、原画像の残りの部分は傾いた画像を補正するときの作業メモリとして使用できる。この作業メモリをうまく用いて、原画像に対して 2 枚分のメモリを使わずに回転処理を行う。

この章では、角度  $\theta$  だけ傾いた画像を、余計なメモリを使わずに画像を回転するメモリ効率の良いアルゴリズムを提案する。

### 3.1 問題の定義

入力は縦  $H$ 、横  $W$  (一般性を失わず  $H \geq W$ ) の長方形の画像とする。正確には、 $G(W, H) = \{(x, y) | x = 0, \dots, W-1, y = 0, \dots, H-1\}$  で定義される画素 (格子点) のそれぞれで明度  $g(x, y)$  が与えられているものとする。この画像  $G(W, H)$  の一部分として、高さ  $H_\theta$ 、横  $W_\theta$  の画像が角度  $\theta$  だけ回転されて含まれているものとする。この回転した画像を  $G_\theta(W_\theta, H_\theta)$  とする。 $G_\theta(W_\theta, H_\theta)$  の左下隅の格子点は元の座標系では点  $(x_0, y_0)$  にあるとする。以下では、元の座標系を  $(x, y)$ 、回転画像の座標系を  $\langle X, Y \rangle$  で表すとする。このとき、回転画像  $G_\theta(W_\theta, H_\theta)$  上の格子点  $\langle X, Y \rangle$  は、 $G$  上の座標系では、

$$(p_x^\theta(X, Y), p_y^\theta(X, Y)) = (x_0 + X \cos \theta - Y \sin \theta, y_0 + X \sin \theta + Y \cos \theta)$$

に対応する (図 3.1)。

回転画像を求めるには、回転画像のそれぞれの格子点における明度を元の画像の明度から補間によって求める必要がある。なぜなら、回転画像の座標系での格子点に対応する原画像の座標は整数値とはならないため、求めたい点の原画像上での周辺の格子点の明度によって求めるからである。補間処理には以下のようなものがある。

最近傍法 (nearest neighbor interpolation) 補間したい点に最も近い格子点の明度その点の明度とする。細かな部分の情報が欠落して画質が劣化する。処理時間が速い。

線形補間法 (bi-linear interpolation) 補間したい点の周囲 4 格子点の画素の明度の線形式を用いて補間する。最近傍法に比べ画質がよく、処理時間もあまり変わらない。

3 次補間 (cubic convolution interpolation) 補間したい点の周囲 16 格子点の画素の明度を用いて補間する。線形補間より画質が良い。処理時間がかかりすぎる。

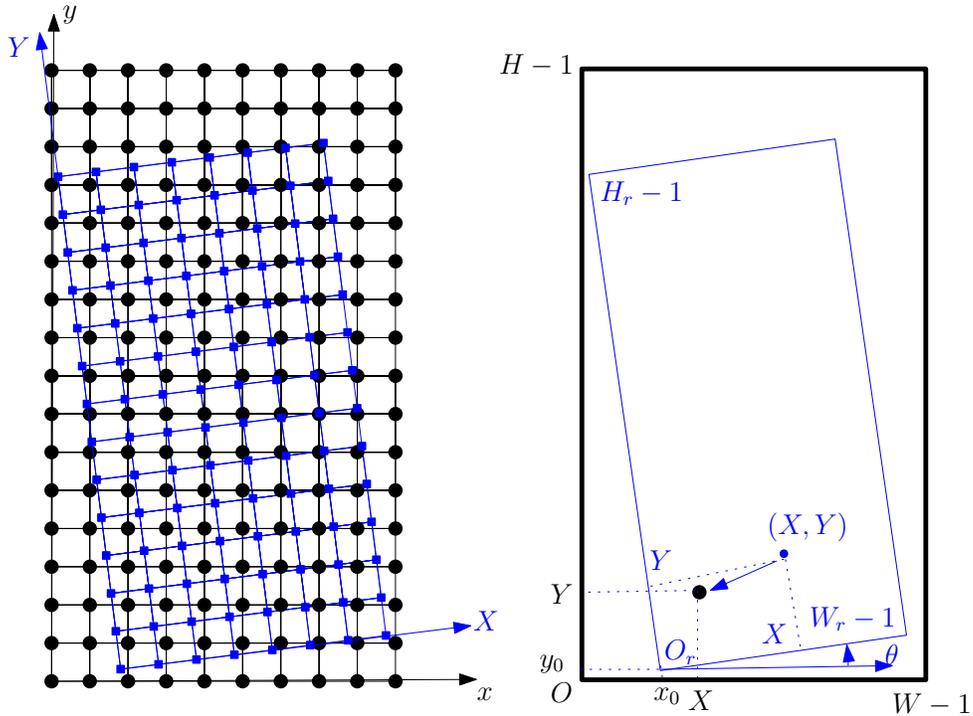


図 3.1: 元の座標系への変換

本研究では、処理時間があまりかからず、それなりの画像が得られる線形補間を用いる。線形補間は回転画像の画素に最も近い4画素での明度を用いて1次式で補間する。具体的には、点  $(x, y)$  に最も近い4画素  $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$ ,  $(\lfloor x \rfloor + 1, \lfloor y \rfloor)$ ,  $(\lfloor x \rfloor + 1, \lfloor y \rfloor + 1)$ ,  $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor + 1)$  における明度を用いて、点  $(x, y)$  での明度  $g(x, y)$  を求める (図 3.2)。

$$g(x, y) = (y - \lfloor y \rfloor)g(x, \lfloor y \rfloor + 1) + (\lfloor y \rfloor + 1 - y)g(x, \lfloor y \rfloor) .$$

回転画像  $G_\theta$  上の各画素  $\langle X, Y \rangle$  における補間値を  $g_\theta(X, Y)$  とする。補間値  $g_\theta(X, Y)$  は、点  $\langle X, Y \rangle$  の  $xy$  平面上での点  $(p_x(X, Y), p_y(X, Y))$  における補間値  $g(p_x(X, Y), p_y(X, Y))$  として求める。

ただし、

$$p_x(X, Y) = x_0 + X \cos \theta - Y \sin \theta$$

$$p_y(X, Y) = x_0 + X \sin \theta + Y \cos \theta$$

である。

このようにして求めた補間値  $g_\theta(X, Y)$  を元の画像  $G$  の  $(X, Y)$  における明度  $g(X, Y)$  に保存する。(元の画像の明度は上書きによって失われる)

回転画像の画素の処理順はラスタ順と定める。すなわち、

$$\delta \langle X, Y \rangle = X + W_\theta Y$$

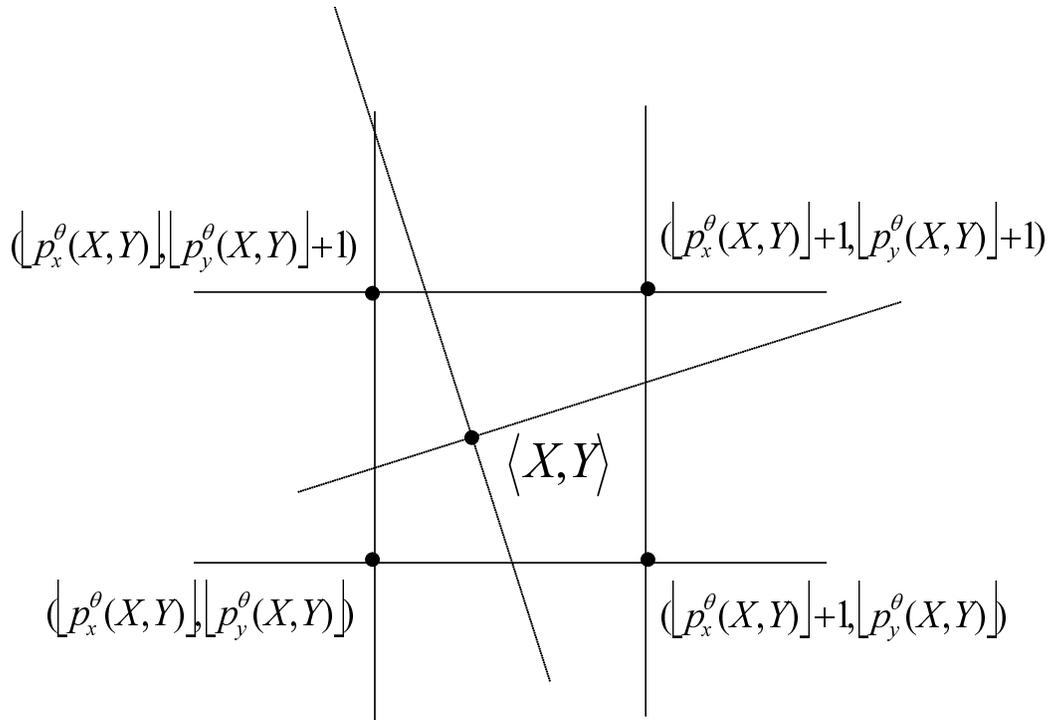


図 3.2: 明度の補間

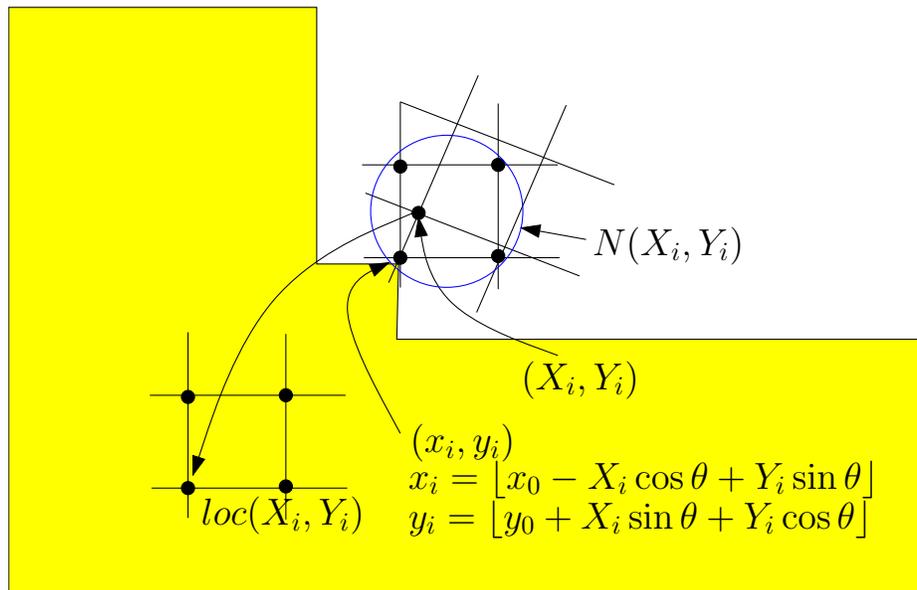


図 3.3: 補間計算の安全性

と定めるとき， $\delta(X, Y)$  の値の昇順に回転画像  $G_\theta$  上の画素の明度を求める．ラスタ順と定めた理由は，2次元の画像を伝送したり計算機内部に蓄積する際は，2次元であると取り扱いつらいため画像の濃度値を1次元に再配列させて，1次元画像信号に変換する代表的な方式のためである [8]．点  $\langle X, Y \rangle$  よりも先に処理された画素での補間値を蓄えている元画像の画素の集合を  $Occ_\delta(X, Y)$  とすると  $Occ_\delta(X, Y)$  は次式で表される．

$$Occ_\delta(X, Y) = \{(x, y) \in G(W, H) \mid [0 \leq x \leq X - 1 \text{ かつ } y \leq Y] \text{ または } [0 \leq y \leq Y - 1]\} \quad (3.1)$$

ここまでの方法で補間の計算を行っていく場合，補間の計算が正しく行われるためには，補間に用いる点の明度が，既に行った補間によって上書きされていないことを保証しなければならない．回転画像  $G_\theta$  の画素  $\langle X, Y \rangle$  における補間の計算が安全であるとは，補間の計算をするために用いた  $G$  の4画素が，補間の計算を行う時点で元の値を保持していることをいう．つまり， $\langle X, Y \rangle$  より先に求めた補間値によって値が置き換えられていないことである．画素の処理はラスタ順であるから，4つの近傍点のうちでラスタ順の最初の点 ( $\lfloor p_x^\theta \langle X, Y \rangle \rfloor, \lfloor p_y^\theta \langle X, Y \rangle \rfloor$ ) が補間値を蓄えている画素の集合  $Occ_\delta(X, Y)$  に含まれていなければ  $\langle X, Y \rangle$  における補間の計算は安全である．以上より次の補題がいえる．

補題 1. 回転画像の画素  $\langle X, Y \rangle$  における補間の計算が安全であるための必要十分条件は

1.  $\lfloor p_x \langle X, Y \rangle \rfloor \geq X$  かつ  $\lfloor p_y \langle X, Y \rangle \rfloor \geq Y$       または
2.  $\lfloor p_y \langle X, Y \rangle \rfloor \geq Y + 1$

が成り立つことである．

## 3.2 安全でない点の分布

3.1節では補間についての安全性について示した．本節では，安全でない点をどのように見つけるかという問題を考える．安全でない点とは，補間の計算をするのに用いる  $G$  の4画素が，補間の計算によって行う時点で元の値を保持していないことをいう．つまり， $\langle X, Y \rangle$  より先に求めた補間値によって値が置き換えられていることである．まず，安全でない点の分布を調べるために安全性の概念を示す．回転画像の画素  $\langle X, Y \rangle$  における安全性  $sf(X, Y)$  を安全性の条件より以下ようになる．

$$\begin{aligned} sf(X, Y) &= \max\{\min\{p_x^\theta(X, Y) - X, p_y^\theta(X, Y) - Y\}, p_y^\theta(X, Y) - (Y + 1)\} \\ &= \max\{\min\{x_0 + X \cos \theta - Y \sin \theta - X, y_0 + X \sin \theta + Y \cos \theta - Y\}, \\ &\quad y_0 + X \sin \theta + Y \cos \theta - (Y + 1)\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

補題 2. 回転画像の画素  $\langle X, Y \rangle$  における補間の計算が安全であるための必要十分条件は  $sf(X, Y) \geq 0$  が成り立つことである．

証明.  $sf(X, Y) \geq 0$  のとき, 式 (3.2) より,

1.  $\min\{p_x^\theta(X, Y) - X, p_y^\theta(X, Y) - Y\} \geq 0$       または
2.  $p_y^\theta(X, Y) - (Y + 1) \geq 0$

のどちらかが成り立つ. これらの条件は補題 1 の条件と対応しているので,  $\langle X, Y \rangle$  での補間の計算は安全である.

また,  $\langle X, Y \rangle$  での補間の計算が安全であるならばラスタ-順の最初の点 ( $\lfloor p_x^\theta(X, Y) \rfloor, \lfloor p_y^\theta(X, Y) \rfloor$ ) には補間値が蓄えられていないことがわかる. つまり,  $\lfloor p_x(X, Y) \rfloor \geq X$  かつ  $\lfloor p_y(X, Y) \rfloor \geq Y$  となり,  $sf(X, Y) \geq 0$  になる. よって成り立つ.  $\square$

### 3.2.1 $X = 0$ における安全性

点  $\langle 0, Y \rangle$  での補間値は画素  $(0, \lfloor y_0 + Y \cos \theta \rfloor)$  に蓄えられる. この  $y$  座標が  $Y - 1$  以下なら安全でないが,  $y_0 = 0$  のとき,

$$\lfloor y_0 + Y \cos \theta \rfloor \leq Y - 1$$

は  $Y \geq 1$  に対して常に成り立つ. なぜなら,  $\cos \theta < 1$  なので  $\lfloor Y \cos \theta \rfloor \leq Y - 1$  が成り立つからである. よって,  $y_0 = 0$  のとき,  $\langle 0, 0 \rangle$  を除いて, 他の点  $\langle 0, Y \rangle$  の補間の計算は安全ではない. 点  $\langle 0, 0 \rangle$  はラスタ-順の最初の点であるので補間の値は書き変わっていないことは明らかである.

安全性関数  $sf(X, Y)$  から同じことを確認することができる.  $sf(0, Y) < 0$  が任意の  $Y \geq 1$  に対して成り立つ. つまり,  $y_0 = 0$  かつ  $Y \geq 1$  のとき

1.  $\min\{x_0 - Y \sin \theta, Y \cos \theta - Y\} < 0$       かつ
2.  $Y \cos \theta - (Y + 1) < 0$

が成り立つことを示す. これは,  $\cos \theta < 1$  であることから  $Y \cos \theta < Y < Y + 1$  となるので, 明らかに自明である.

$Y = 0$  のときは,  $sf(0, 0) = \max\{\min\{x_0, 0\}, -1\} = 0$  であるので, 点  $\langle 0, 0 \rangle$  での補間の計算は安全である. 以上をまとめると以下ようになる.

補題 3.  $y_0 = 0$  のとき, 0 列目での補間の計算は  $\langle 0, 0 \rangle$  を除いてすべて安全ではない.

### 3.2.2 行方向の安全性

この節では行方向についての安全性を考える.

補題 4.  $x_0 + y_0 \geq 1$  のとき, 任意の  $X \geq 0$  で  $\langle X, 0 \rangle$  での補間の計算は常に安全である.

証明.  $sf(X, 0) = \max\{\min\{x_0 + X \cos \theta - X, y_0 + X \sin \theta\}, y_0 + X \sin \theta - 1\}$  であるから,  $sf(X, 0) < 0$  となるのは,  $x_0 + X \cos \theta - X < 0$  かつ  $y_0 + X \sin \theta - 1 < 0$  が成り立つときである. しかし, 任意の  $\theta$  に対して,  $\cos \theta + \sin \theta > 1$  であるから,  $x_0 + y_0 \geq 1$  であれば,

$$x_0 + X \cos \theta - X + y_0 + X \sin \theta - 1 > (x_0 + y_0 - 1) + X(\cos \theta + \sin \theta - 1) \geq 0$$

が成り立つ. よって, 上の2つの条件が同時に成り立つことはない. □

補題 5.  $y_0 = 0$  のとき, 1 行目以降の 0 列目での補間の計算は常に安全ではない.

証明. これは補題 3 で示した通りである. □

$y_0 = 0$  とした定義式

$$sf(X, Y) = \max\{\min\{x_0 + X \cos \theta - Y \sin \theta - X, X \sin \theta + Y \cos \theta - Y\}, X \sin \theta + Y \cos \theta - (Y + 1)\}$$

において

$$\begin{aligned} sf_1(X, Y) &= x_0 + X \cos \theta - Y \sin \theta - X \\ sf_2(X, Y) &= X \sin \theta + Y \cos \theta - Y \\ sf_3(X, Y) &= X \sin \theta + Y \cos \theta - (Y + 1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

とおくと,  $Y$  の値を固定すれば,  $sf_1(X, Y)$  は  $X$  に関して単調減少である.  $sf_2(X, Y)$ ,  $sf_3(X, Y)$  は  $X$  に関して単調増加である. 関数  $sf$  の値は  $sf_1$  と  $sf_2$  の下側包括線と  $sf_3$  の上側包括線として与えられる (図 3.4).

$sf_i(X, Y) = 0$  となる  $X$  の値を  $X_i(Y)$  とすると, 式 (3.3) より,

$$\begin{aligned} X_1(Y) &= \frac{x_0 - Y \sin \theta}{1 - \cos \theta}, \\ X_2(Y) &= \frac{Y(1 - \cos \theta) - y_0}{\sin \theta}, \\ X_3(Y) &= \frac{Y(1 - \cos \theta) - (y_0 - 1)}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる. このとき, 図 3.4 より, 安全でない画素は, 行  $Y$  において  $[0, X_2(Y)]$  と  $[X_1(Y), X_3(Y)]$  の区間に存在する.  $X_2(Y) < 0$  ならば,  $[0, X_2(Y)]$  は存在しないので, 対応する安全でない画素はない. また,  $X_3(Y) < 0$  または  $X_3(Y) < X_1(Y)$  の場合は,  $[X_1(Y), X_3(Y)]$  の区間が存在しないので, 対応する安全でない画素も存在しない. さらに, これらの2つの区間が重なることもある. いずれの場合も, 行  $Y$  における安全でない画素の個数はこれらの式を評価することにより容易に (定数時間で) 求めることができる. 図 3.5 は安全でない画素が存在する領域の典型的な場合について図示したものである.

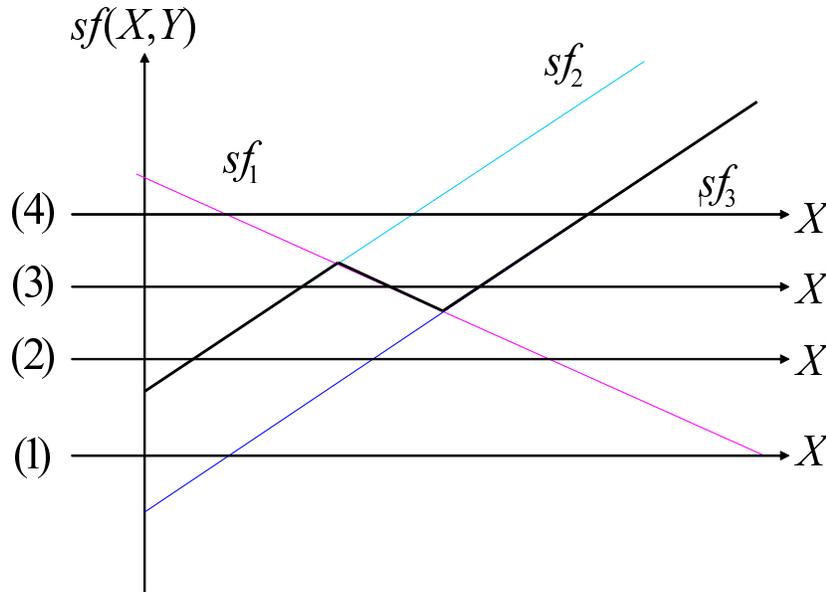


図 3.4: 安全性関数  $sf$ :4 つの異なる場合

$y_0 \geq H_\theta(1 - \cos \theta)$  のとき,  $Y(1 - \cos \theta - y_0) < 0$  であるので, 任意の  $Y$  に対して  $X_2(Y)$  が成り立つ. よって, 安全でない画素の区間  $[0, X_2(Y)]$  は存在しない. また,  $y_0 \geq H_\theta(1 - \cos \theta) + 1$  であれば, 任意の  $Y$  に対して  $X_3(Y) < 0$  が成り立つから, もう一方の区間  $[X_1(Y), X_3(Y)]$  も存在しない. つまり, このときは安全でない画素は全く存在しないことがわかる. これらの結果と証明より, 次の定理を得る.

定理 1.  $y_0 \geq H_\theta(1 - \cos \theta) + 1$  のとき, 本稿で述べた方式による補間値の計算は常に安全である.

### 3.3 提案するアルゴリズム

安全でない画素が存在する場合, 補間の計算を正しくするためには, 安全でない画素の補間値を別の場所に蓄えておく必要がある. 原画像に回転した画像が完全に含まれている場合のみを考えているため, 回転画像は原画像よりも小さい. したがって, 出力に必要としない領域がある. この右下の隅に示した領域を  $R(Y_0)$  として, アルゴリズムを考えていく (図 3.5 参照). なぜなら補間に使用できる領域は増えていくからである.

提案するアルゴリズムは, まず安全でない画素の個数を数える. その合計が領域  $R(Y_0)$  の面積 (画素数) を越えなければ問題なく補間できる. 安全でない画素の個数の合計が  $R(Y_0)$  の面積をもし越えるならば, 領域  $R(Y_0)$  の面積 (画素数) を越えない最大の行  $Y_1$  を求める. そして,  $Y = 0$  から  $Y = Y_1$  までの安全でない画素における補間値を計算し, その値を領域  $R(Y_0)$  に蓄える.

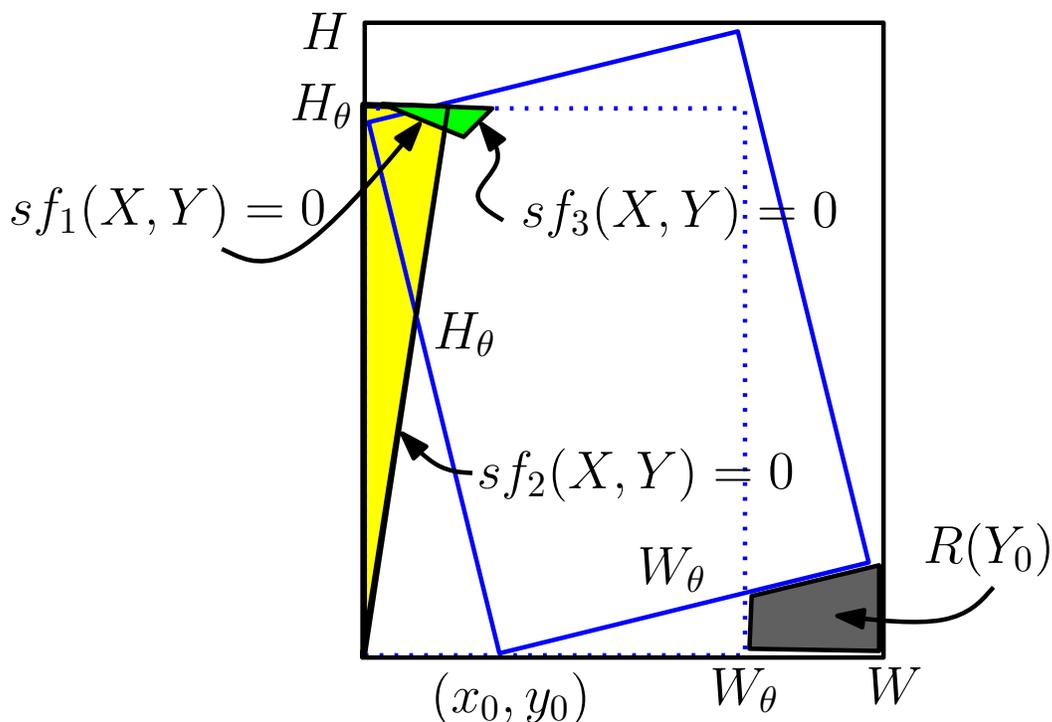


図 3.5: 補間にも出力にも使われない安全な領域  $R(Y_0)$

その後,  $Y = 0$  から  $Y = Y_1$  までの部分にある画素  $\langle X, Y \rangle$  を順に調べる. 安全な画素であれば, 線形補間により原画像の座標に移し替える. 安全でない画素の場合は, 領域  $R(Y_0)$  に蓄えた補間値を原画像に移し換える.  $Y = 0$  から  $Y = Y_1$  までの計算が終われば領域  $R(Y_0)$  は必要ではなくなる.

また, 回転画像における行  $Y_1$  を上限として,  $X = W_\theta$  と  $X = W$  で挟まれた領域を  $R(Y_1)$  とすると, 領域  $R(Y_1)$  の画素はやはり出力に必要としない領域となる. したがって, 領域  $R(Y_1)$  に安全でない画素の補間値を蓄えることができる. 注目するところは, 領域  $R(Y_1)$  は領域  $R(Y_0)$  に比べて面積が大きくなる. したがって,  $Y$  の値が大きくなるにつれて安全でない画素は増えるが, 安全でない画素をうまく蓄えることができる.

それ以降も,  $Y_1 + 1$  行から始めて, 安全でない画素の数をカウントしていき, 領域  $R(Y_1)$  の面積を超えない行  $Y_2$  とし,  $Y_1 + 1$  から  $Y_2$  までの部分について, 上で述べた同じ処理を行う. このような処理を繰り返せずにより, いずれ回転画像全体の処理が終わる.

### 3.3.1 疑似コード

メモリ効率を考えた角度補正の疑似コードを角度補正アルゴリズム 1 に示す.

補間の計算を正しくするには安全でない画素の補間値を別の場所に蓄えておく. また, 原画像に完全に含まれている場合のみを考えているので回転画像は原画像よりも小さい. すると, 出力に必要でない領域がある. この領域を  $R(Y_0)$  とする. 領域  $R(Y_0)$  の画素数を

越えない最大の行を  $Y_1$  とする .

---

## 補間の計算の安全性判定 1: 角度補正アルゴリズム

---

領域  $R(Y_0)$  の画素数を求める ;

$Y_0 = 0; Y_1 = 0 ;$

**while** ( $Y_1 < RH$ ) **do**

$Y = Y_0$ , 安全でない点の数 = 0 ;

**while**  $Y < RH$  かつ安全でない点の数  $< R(Y_0)$  の画素数 **do**

**for**  $X = 0$  **to**  $RW - 1$  **do**

**if**  $sf(X, Y) < 0$  **then**

                安全でない点++ ;

$Y++$  ;

**if** 安全でない点の数  $> R(Y_0)$  の画素数 **then**

$Y_1 = Y - 2$  ;

        /\* $Y_1$  は安全でない画素の数が  $R(Y_0)$  の画素数より少ない最大の行\*/;

**else**

$Y_1 = RH$  ;

$TMP \leftarrow R(Y_0)$  の最初の点へのポインタ;

**for**  $Y = Y_0$  **to**  $Y_1$  **do**

**for**  $X = 0$  **to**  $RW - 1$  **do**

**if**  $sf(X, Y) < 0$  **then**

$\langle X, Y \rangle$  の明度を補間で求め  $TMP$  に保存 ;

$TMP \leftarrow R(Y_0)$  の  $TMP$  の次の点へのポインタ ;

$TMP$  を一つもどす;

**for**  $Y = Y_0$  **to**  $Y_1$  **do**

**for**  $X = 0$  **to**  $RW - 1$  **do**

**if**  $sf(X, Y) \geq 0$  **then**

$\langle X, Y \rangle$  の補間をして  $(X, Y)$  に保存 ;

**else**

$TMP$  の値を  $(X, Y)$  に保存 ;

$TMP$  を一つもどす ;

$Y_0 = Y_1 + 1$

---

### 3.4 補間値の移し替え

回転画像の補間値は原画像に完全に含まれるなら，回転座標の点  $(x_0, y_0)$  に対応する点は一般にどこから始めても良い．しかし，本研究では，補間後の値は原画像の原点から順に補間値を移し替える．なぜなら，ラスタ順  $\delta\langle X, Y \rangle = X + W_\theta Y$  と定めたので，補間値を原画像の原点に近い順に移し替えことで，補間の計算が安全に行われるからである．さらに，原画像の原点から順に移し替えることで，提案したアルゴリズムの補間に用いる領域  $R(Y_0)$  が増えるためでもある．図 3.6 から図 3.9 は回転角  $\theta = 15$  度の時の補間の結果を示した．

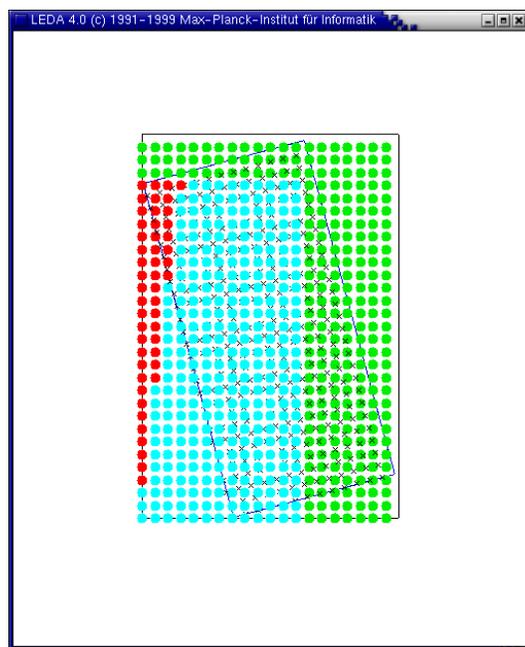


図 3.6: 補間後の値を点  $(0,0)$  から移動させた場合

青色の点は補間が安全に行われた点で，赤色の点は補間の計算が安全に行われていない点を示す．図 3.6 と図 3.9 を比較すると補間値を原点に移していくほうが，安全な点や領域  $R(Y_0)$  が多い．

図 3.7 と図 3.8 を比較すると  $Y = 0$  に近いほうが補間の計算が安全であるといえる．

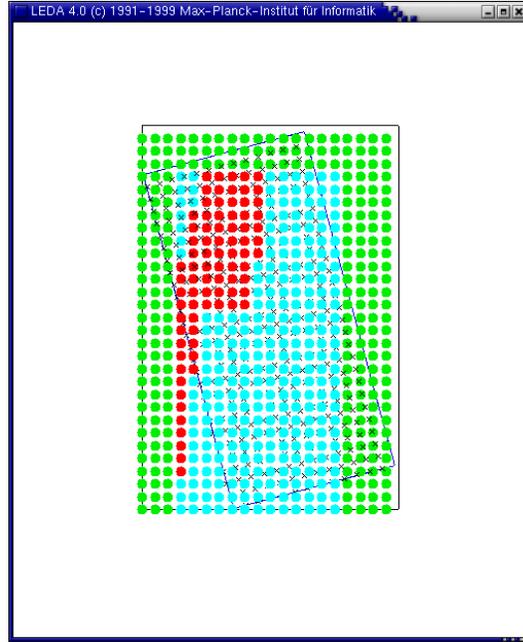


図 3.7: 補間後の値を点 (3,0) から移動させた場合

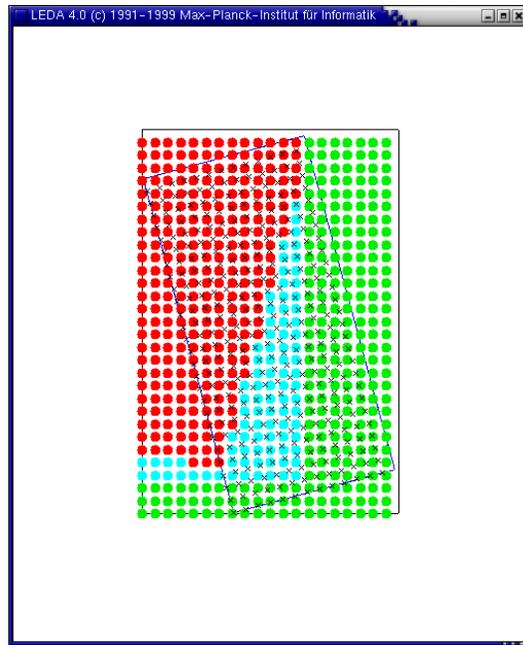


図 3.8: 補間後の値を点 (0,3) から移動させた場合

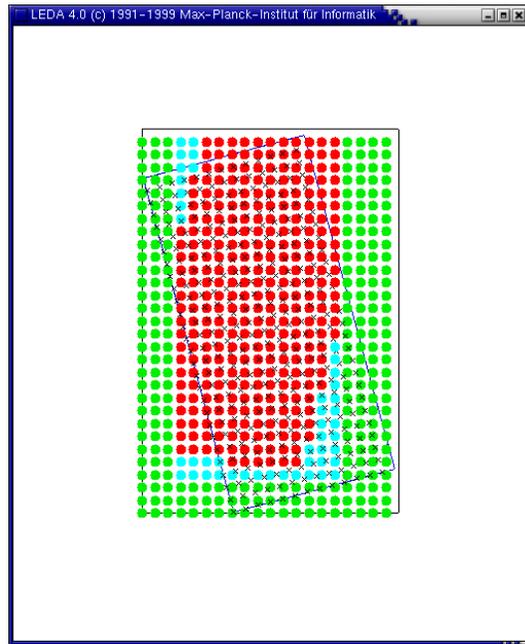


図 3.9: 補間後の値を点 (3,3) から移動させた場合

# 第4章 最後に

## 4.1 まとめ

本研究では、メモリ効率の良い角度補正のアルゴリズムについて述べた。まず、与えられた軸平行な長方形に含まれた角度  $\theta$  の長方形の中で面積最大のものを求めた。角度補正を行う時に使用できる最悪な場合のメモリがどれくらいあるかを調べるためである。

また、一般的な用紙サイズ（アスペクト比が  $\sqrt{2}:1$ ）を原画像として仮定した。すると、回転角  $\theta$  の値が  $0 \leq \theta \leq 0.414$  となる時、すなわち、0度から 22.5度の間では、原画像に内接した長方形が面積最大となった。したがって、この原画像に対して内接した長方形を除いた部分は補正するメモリとして用いることができた。

次に、メモリ効率の良い回転について述べた。明度の補間には線形補間を用いた。提案したアルゴリズムは、ラスタ走査を3回行う方法である。最初の走査では安全でない画素の個数を数え、次の走査では安全でない画素の補間値の計算を行う。このとき、安全でない画素の総数が、補間値を蓄える領域よりも多ければ、回転処理は分割して行う。そして、最後の走査で、安全な画素ならば、近傍の値を用いて補間を行う。安全でなければ、補間値を蓄えた領域から補間値を移した。以上の処理を繰り返した。すると回転画像全体の角度補正の処理は完了した。

## 4.2 今後の課題

提案したアルゴリズムでは、回転画像の底辺に対して平行なラスタ処理を行い、角度補正を行った。今後の課題としては、回転画像の高さに対して平行なラスタ処理を行い、今回のアルゴリズムとの比較を行う。また、補間方法を線形補間以外の方法に換えてみたり、安全でない点の補間の場所を変えたりする。そして、それぞれの結果を比較する。

# 謝辞

本研究を行うにあたって，サバティカル期間中にも関わらず，懇切丁寧にご指導を賜りました浅野哲夫先生には心より深く感謝致します．また，上原隆平助教授，清見礼助手には日頃から適切にご教示を頂き御礼申し上げます．そして，元木光雄助手には研究やプログラムに関しまして多くのことをご教授いただきありがとうございました．また色々と至らない私のために大変なご迷惑をおかけしましたことを，この場を借りてお詫び申し上げますとともに，強く感謝いたします．また，情報棟3棟6階の情報基礎学講座の皆様には，日常生活の数多くの場面で支えていただき，大変感謝します．最後に，この学校に来て出会えた全ての方に最大の敬意と感謝の意を記させていただきます．

# 参考文献

- [1] 浅野哲夫, 計算幾何 (理論の基礎から実装まで), 10章, 共立出版社, 2007.
- [2] Lars Arge, I/O-Efficient Geometric Algorithms and Data Structures, KAIST/JAIST Summer School on Algorithms(Lecture 1), August 8, 2005.
- [3] Lars Arge, I/O-Efficient Geometric Algorithms and Data Structures, KAIST/JAIST Summer School on Algorithms(Lecture 3), August 11, 2005.
- [4] A.Kawahara, Rotating of binary image with consideration of jaggy, February 9, 2006
- [5] 長谷川純一, 輿水大和, 中山晶, 横井茂樹, 画像処理の基本技法, 技術評論社, pp.10-99  
May 10, 1997
- [6] 田村進一, FAのための画像処理技術, 工学研究社, pp.66-70, pp.112-120, 1988.
- [7] 田村秀行, コンピュータ画像処理, オーム社, pp123-pp130, 2005,
- [8] 中嶋正之, 山本正信, グラフィックスとビジョン- デジタル映像処理-, オーム社,  
pp.5-22, 1996.