

Title	部分構造論理への代数的アプローチ
Author(s)	相馬, 大輔
Citation	
Issue Date	2008-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/4200
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 博士



An algebraic approach to substructural logics (部分構造論理への代数的アプローチ)

相馬 大輔
北陸先端科学技術大学院大学

2008 年 1 月 9 日

論文の内容の要旨

古典論理や直観主義論理から構造に関する推論規則の一部または全てを取り除いた substructural logic に対する研究は近年盛んに行われている。substructural logic に対する研究は Lambek による **FL** の研究に始まり、relevant logic, linear logic, BCK-logic など様々な種類の論理がある。これらの基本的な substructural logic に対しては cut elimination の成り立つ sequent 計算が導入できるので、それらの論理については様々な論理的な性質を証明論的方法により示すことができる。しかし、このような証明論的な方法は限られた論理についてしか適用できないため、一般的な議論を展開するためには意味論的方法が必要になる。modal logic では Kripke 型の意味論が用いられてきたが、現在までに提案された substructural logic の Kripke 型の意味論はこのような問題に対してはほとんど有効に用いることができない。Kripke 型の意味論に代わり、substructural logic に対して有効なのは residuated lattice を用いた代数的意味論である。本論文は「論理的性質の代数的特徴付けとその応用」「substructural logic 全体の成す束の構造に関する研究」の二つの内容により構成されている。以下でこれらの詳細を述べる。

論理的性質の代数的特徴付けとその応用

これまでに modal logic や intermediate logic に対しては、Maksimova や Wroński 等によりいくつかの論理的性質の代数的特徴付けが与えられている。論理の証明論的な性質である disjunction property (DP) は、その論理に対応する sequent 計算で cut elimination theorem が成り立つ場合には証明論的な方法により容易に示される。また、証明論的方法はあたえられた論理が DP を持つということの証明に使うことができて、どのような論理が DP を持ち、またどのような論理が DP を持たないのかといった一般的な議論には使うことができない。本研究では特に Maksimova によって得られている intermediate logic に対する DP の代数的特徴付けに注目し、この特徴付けが **FL** 上の論理に対してまで成立することを示した。そしてその結果を用いると、これまで証明論的方法では扱えなかった多くの substructural logic についての DP を導いた。実際に、cut elimination theorem の成り立たない **FL**[E_n^m] や **FL**[DN] という論理の DP を示す事ができた。

substructural logic 全体の成す束の構造に関する研究

論理を論理式の集合とみなせば、論理全体のクラスは集合の包含関係によって束をなしていることがわかる。これらの束がどのような構造をなしているか調べる際の一つに、最大元の次に大きな論理、すなわち極大無矛盾論理、がどのようなものがどのくらい存在しているかという問題がある。実際、intermediate logic や **FL**_{ew} より大きな論理の場合には極大無矛盾論理は古典論理 **CL** しか存在しない事が知られている。これに対しそれよりも弱い論理については、それより大き

い論理のうち極大無矛盾論理が非可算個もある例が知られている。substructural logic 全体の成す束は対応する代数の subvariety 全体の成す束と双対であることが知られている。よって、論理全体の成す束で極大無矛盾論理を議論する問題は residuated lattice の variety の subvariety 全体がなす束の構造の研究に帰着される。すなわち最小元である trivial variety の次に小さい minimal variety (atom) としてどのようなものがいくつ存在しているかを調べることである。

実際に、Tsinakis と Wille によって involutive residuated lattice の variety に非加算個の minimal subvariety が存在するという結果がえられている。本研究ではまずこの involutive residuated lattice に関する結果を強め、bounded representable でさらに mingle axiom $x \leq x^2$ を付け加えた variety の場合でも minimal subvariety は非可算個存在することを示した。それとともにこの mingle axiom を強めて idempotency $x = x^2$ をとった場合には、minimal subvariety は有限個しか存在しないということも示した。

キーワード: 部分構造論理, **residuated lattice**, **disjunction property**, **well-connectedness**, 極大無矛盾論理, **minimal subvariety**, **involutive**, **representable**