Title	Involutiveな部分構造論理に対する証明論的アプローチ
Author(s)	瀧田, 康晴
Citation	
Issue Date	2008-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/4360
Rights	
Description	Supervisor:小野寛晰, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

involutive な部分構造論理に対する証明論的アプローチ

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

瀧田 康晴

2008 年 3 月

修 士 論 文

involutiveな部分構造論理に対する証明論的アプローチ

指導教官　小野 寛晰 教授

審査委員主査　小野 寛晰 教授
審査委員　石原 哉 准教授
審査委員　小川 瑞史 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

510062 瀧田 康晴

提出年月: 2008 年 2 月

目次

第1章　はじめに

1.1　背景

部分構造論理とは古典論理や直観主義論理から構造規則のうちの一部あるいは全部を取り除いた論理である. このような体系において, どのような論理的性質が成り立ち, また, どのような論理的性質が成り立たないのかを検討することは, それぞれの構造規則と論理的性質の間の関係を明らかにする手段として非常に有効である.

このような研究を展開する際の方法としては証明論的手法と代数的手法がある. 本研究では主として前者を sequent 計算に対して適用し, また involutive な部分構造論理, すなわち二重否定の公理を満たす部分構造論理を研究対象とする.

この研究の目的は, 与えられた論理に二重否定の公理を付け加えたとき, どの性質が保たれるのか, またどのようにその論理的性質が変化するかを明らかにすることである.

本研究では cut-free な部分構造論理の sequent 計算にもとづき、証明論的方法で研究を進める。commutative な部分構造論理の場合、両辺に複数の論理式を許す sequent(LK 型の sequent) を用いることにより involutive な論理の sequent 計算を導入することができる。このような sequent 計算で cut 除去定理が成り立つものを利用して、上記の研究を進める。

1.2 本論文の構成

本論文の構成について述べる. 第 2 章では sequent 計算の基本的な体系である LK 及び LJ について述べる. その後, 部分構造論理の基本的な体系である FL について述べる. 第 3 章では部分構造論理間の translation を論じる上で重要な結果である Positive fragments について述べる. 第 4 章では $Kolmogorov$ の定理およびその拡張について証明を行い解説する. 第 5 章では $Glivenko$ の定理とそれを一般化した結果について証明を行い解説する.

第2章　部分構造論理と sequent 計算の体系

sequent 計算の基本的な体系である LK 及び LJ について説明する. その後, 部分構造論理の基本的な体系である FL について説明する.

2.1　古典命題論理 LK と直観主義命題論理 LJ

2.1.1　LK, LJ の論理式

LK と LJ の論理結合子として次のようなものを使う:

$\wedge$(conjunction), $\vee$(disjunction), $\rightarrow$(implication), $\neg$(negation).

これらの論理結合子を使って次のように論理式が定義される

Definition 1. 論理式を次のように帰納的に定義する.

1. それぞれの命題変数は論理式である.
2. A, B がともに論理式ならば,
$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(\neg A)$
はいずれも論理式である.

2.1.2　古典命題論理 LK の体系

LK の sequent 計算における基本的な表現である式 (sequent) とは, A_j, B_j を論理式としたとき

$$A_1, \cdots, A_m \Longrightarrow B_1, \cdots, B_n$$

という形をした表現である. ただし, m, n は 0 でもよい.

LK で公理に相当する始式 (initial sequent) は

$$A \Rightarrow A$$

という形の式である.

また, 推論規則は一般に

$$\frac{S}{S_1} \qquad \text{または} \qquad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

という形をしている. ここで, S_1, S_2 および S は式である. 上の推論規則を I とするとき, S_1 および S_2 は I の上式, S は I の下式といわれる. 以下では有限個 (0 個でもよい) の論理式をコンマで区切った列を表すのに, Γ, Δ 等のギリシャ語の大文字を使うことにする. LK の推論規則を以下にあげる.

LK の推論規則

構造に関する推論規則 (Structural rule)

Weakening rule:

$$\frac{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow \Delta}\,(w\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A, \Theta}\,(w\text{右})$$

Contraction rule:

$$\frac{\Gamma, A, A, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow \Delta}\,(c\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A, A, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A, \Theta}\,(c\text{右})$$

Exchange rule:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Sigma \Rightarrow \Delta}\,(e\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, B, A, \Theta}\,(e\text{右})$$

Cut rule:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Theta \quad \Sigma, A, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Sigma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Theta}\,(cut)$$

論理結合子に関する推論規則 (Rule for logical connective)

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge\text{左 } 1) \qquad \frac{\Gamma, B, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge\text{左 } 2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \Rightarrow \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A \wedge B, \Theta}\ (\wedge\text{右})$$

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B, \Sigma \Rightarrow \Delta}\ (\vee\text{左})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A \vee B, \Theta}\ (\vee\text{右 } 1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A \vee B, \Theta}\ (\vee\text{右 } 2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Theta \quad \Pi, B, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Pi, A \rightarrow B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Theta}\ (\rightarrow\text{左}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Theta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Theta}\ (\rightarrow\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Theta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Theta}\ (\neg\text{左}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Theta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Theta}\ (\neg\text{右})$$

2.1.3 直観主義命題論理 LJ の体系

直観主義命題論理 LJ の sequent 計算の体系では

$$A_1, \cdots, A_m \Longrightarrow B \quad (\text{ただし}, m \text{ は } 0 \text{ でもよく}, B \text{ は空でもよい.})$$

という形の sequent を考える.

LJ の公理に相当する始式は LK のときと同様に

$$A \Rightarrow A$$

という形の式である.LJ の推論規則は LK のそれらを Λ, Θ を空列, Δ を一つの論理式または空な列に制限することにより得られる. すなわち, 推論規則は以下のように与えられる. ただし, D は空であってもよい.

LJ の推論規則

構造に関する推論規則 (Structural rule)

Weakening rule:

$$\frac{\Gamma, \Sigma \Rightarrow D}{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow D}\ (w\,左) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}\ (w\,右)$$

Contraction rule:

$$\frac{\Gamma, A, A, \Sigma \Rightarrow D}{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow D}\ (c\,左)$$

Exchange rule:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Gamma, B, A, \Sigma \Rightarrow D}\ (e\,左)$$

Cut rule:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Sigma, A, \Pi \Rightarrow D}{\Sigma, \Gamma, \Pi \Rightarrow D}\ (cut)$$

論理結合子に関する推論規則 (Rule for logical connective)

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow D}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \Rightarrow D}\ (\wedge 左\,1) \qquad \frac{\Gamma, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Gamma, A \wedge B, \Sigma \Rightarrow D}\ (\wedge 左\,2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}\ (\wedge 右)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow D \quad \Gamma, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Gamma, A \vee B, \Sigma \Rightarrow D} \ (\vee\text{左})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \ (\vee\text{右}\,1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \ (\vee\text{右}\,2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Pi, B, \Sigma \Rightarrow D}{\Pi, A \to B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D} \ (\to\text{左}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B} \ (\to\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow} \ (\neg\text{左}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A} \ (\neg\text{右})$$

このように LJ の体系では式の右辺が高々一つの論理式に限られるので, LK の推論規則の (e 右) 及び (c 右) に対応する規則は存在しない.

2.1.4 証明図

始式から出発し, それに推論規則を次々と適用していく過程をすべて記述したものを LK(または LJ) の証明図という. そして, 証明図の一番下にある式をその証明図の終式という.

Definition 2. *(証明図とその終式)*
証明図及びその証明図の終式を帰納的に定義する.

1. 始式はそれだけで証明図であり, その証明図の終式はその始式自身である.

2. P_1(および P_2) はそれぞれ S_1(および S_2) を終式とする証明図とする. さらに,

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

が, LK (または LJ) の推論規則の一つであれば.

$$\frac{P_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{P_1 \quad P_2}{S}$$

は証明図であり, その終式は S である.

また, 式 S を終式とするような証明図が存在するときには, S は LK(または LJ) で証明可能である (*provable*) という. また, そのような証明図を S の証明図, または S に到る証明図という. 式 $\Rightarrow A$ が証明可能であるとき論理式 A が LK(または LJ) で証明可能であるという. 本論文では今後, 例えば LK(または LJ) で証明可能であるとき $LK \vdash \Rightarrow A$ ($LJ \vdash \Rightarrow A$) と書くことがある. さらに, $A \rightarrow B$ かつ $B \rightarrow A$ が LK(または LJ) で証明可能のとき, LK(または LJ) において A は B と論理的に同値であるという.

2.2 cut 除去定理とその帰結

cut 除去定理は G.Gentzen によりはじめて証明された. この定理は「sequent 計算において, 証明可能な論理式は, cut を用いずに証明可能である」ことを主張している. この定理の証明は, ある cut を含む証明図が与えられたとき, 一つ一つの cut に対しその証明図を変形する具体的な方法を示し, さらにこの変形を繰り返すことにより有限のステップですべての cut が取り除かれることからなる. ここでは cut 除去定理の証明は行わず, この定理を用いた証明の例を挙げる. さらにこの cut 除去定理から導かれるいくつかの有用な結果について述べる.

2.2.1 LK および LJ の cut 除去定理

Theorem 1. *(LK の cut 除去定理)*
sequent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *が LK で provable ならば,* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *に到る LK の証明図で cut を一度も用いないものが存在する.(Δは空でもよい)*

Theorem 2. *(LJ の cut 除去定理)*
sequent $\Gamma \Rightarrow A$ *が LJ で provable ならば,* $\Gamma \Rightarrow A$ *に到る LJ の証明図で cut を一度も用いないものが存在する.(A は空でもよい)*

Example 1. *(cut 除去定理の例)*

1. $\Rightarrow (A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A)$ に到る *cut* を含む証明図の例を示す.
まず,$A \lor \neg A \Rightarrow (A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A)$ を証明する.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{(w 左)}
\UnaryInfC{$B, A \Rightarrow A$}
\RightLabel{($\rightarrow$右)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow B \rightarrow A$}
\RightLabel{($\lor$右 2)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow (A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A)$}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{($\neg$左)}
\UnaryInfC{$A, \neg A \Rightarrow$}
\RightLabel{(w 右)}
\UnaryInfC{$A, \neg A \Rightarrow B$}
\RightLabel{($\rightarrow$右)}
\UnaryInfC{$\neg A \Rightarrow A \rightarrow B$}
\RightLabel{($\lor$右 1)}
\UnaryInfC{$\neg A \Rightarrow (A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A)$}
\RightLabel{($\lor$左)}
\BinaryInfC{$A \lor \neg A \Rightarrow (A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A)$}
\end{prooftree}
$$

ここで, $\Rightarrow A \vee \neg A$ は次のように証明されるから,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow \neg A, A}\ (\neg右)}{\Rightarrow A \vee \neg A, A}\ (\vee右 2)}{\Rightarrow A \vee \neg A, A \vee \neg A}\ (\vee右 1)}{\Rightarrow A \vee \neg A}\ (c\,右)$$

これら二つの証明図を用い, 次のように cut を適用すると求める証明図が得られる.

$$\dfrac{\Rightarrow A \vee \neg A \quad A \vee \neg A \Rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)}{\Rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)}\ (cut)$$

2. $\Rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ に到る cut なしの証明図の例を示す.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B}\ (w\,右)}{\Rightarrow A, A \rightarrow B}\ (\rightarrow右)}{B \Rightarrow A, A \rightarrow B}\ (w\,左)}{\Rightarrow B \rightarrow A, A \rightarrow B}\ (\rightarrow右)}{\Rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A), A \rightarrow B}\ (\vee右 2)}{\Rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A), (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)}\ (\vee右 1)}{\Rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)}\ (c\,右)$$

2.2.2 subformula property

Theorem 3. *(subformula property)*
P を *sequent* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に到る証明図とする. このとき, P に現われるどの論理式も, *sequent* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に現われるどれかの論理式の部分論理式になっている.

実際に, cut 以外のどの推論規則を取ってみても, もしある論理式 A が上式に現われるならば, A は下式の中のある論理式の部分論理式になっていることがわかる. このことから上の定理が導かれるのである. 一方, cut

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Theta \quad \Sigma, A, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Sigma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Theta}\ (cut)$$

においては, 一般に cut で消去される論理式 A が下式のどこかに部分論理式として現われる保証はない. 実際に Example 1 の 1. では, 論理式 $A \vee \neg A$ は終式の部分論理式になっていない.

Theorem 3 から, 次のことが容易に導かれる.

Corollary 1.
P を *sequent* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に到る *cut* なしの証明図とすると, P の中で論理結合子 $*$ に関する推論規則が少なくとも一度用いられるならば, $*$ は必ず $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の中に現われる.(ただし, $*$ は $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ のどれかを表すものとする.)

2.2.3 disjunction property

LJ に対する cut 除去定理を用いると次の基本的な結果が得られる.

Theorem 4. *(disjunction property)*
$LJ \vdash\ \Rightarrow A \vee B$ ならば,$LJ \vdash\ \Rightarrow A$ または $LJ \vdash\ \Rightarrow B$ が成り立つ.

実際に, $\Rightarrow A \vee B$ に到る LJ の cut のない証明図において最後に適用された推論規則を I とすると, I は (w 右) か ($\vee$ 右) のいずれか以外にはあり得ない. (w 右) の場合には I の上式は $\Rightarrow$ となるが, これはトートロジーではないから矛盾する. したがって I は ($\vee$ 右) である. すると I の上式は $\Rightarrow A$ または $\Rightarrow B$ でなければならない.

これに対し, LK の場合には I が (c 右) である場合が起こりうるので, この証明は適用できない. 実際に $\Rightarrow p \vee \neg p$ は LK で証明可能だが, $\Rightarrow p$ も $\Rightarrow \neg p$ も証明可能でないので, 古典論理では disjunction property は成り立たない.

2.2.4 決定可能性 (decidability)

任意の形式体系で定義された任意の論理式が, この体系で証明可能であるか否かを有限回の手順で判定する具体的な手続きを決定手続き (decision procedure) といい, また手続きが存在するとき, この体系は決定可能である (decidable) という.

LK と LJ の cut 除去定理を用いると, 次のように強い形での決定可能性が導かれる. ここではその証明は述べない. 詳細については文献 [7] を参考にしてほしい.

Theorem 5. *(古典命題論理 LK の決定可能性)*
sequent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が古典命題論理の形式体系 LK で証明可能か否かを判定し, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であるときには $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に到る *cut* なしの証明図を構成するような有限の手続きが存在する.

Theorem 6. *(直観主義命題論理 LJ の決定可能性)*
sequent $\Gamma \Rightarrow A$ が直観主義命題論理の形式体系 LJ で証明可能か否かを判定し, $\Gamma \Rightarrow A$ が証明可能であるときには $\Gamma \Rightarrow A$ に到る *cut* なしの証明図を構成するような有限の手続きが存在する.

2.3 部分構造論理の sequent 計算

部分構造論理の中の基本的な体系である FL は簡単に言えば LJ から構造に関する推論規則をすべて除いた体系である. また, LK から構造に関する推論規則をすべて除いた体系を CFL という. さらに, FL に二重否定の公理 (involution) $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$ を付け加えた体系を $InFL$ という. ここでは, これらの部分構造論理の体系の性質を LK, LJ の体系との比較に基づいて説明する.

ただし, exchange rule を持たない体系では implication や negation が二種類必要になる. そこで記述があまり複雑になることを避けるため, 今後本研究で扱う部分構造論理の体系は exchage rule を含む体系に限定して議論する. すなわち FL, CFL, $InFL$ に exchange rule を付け加えた体系を, 以下では FLe, $CFLe$, $InFLe$ と表す. $CFLe$ は MALL(multiplicative additive linear logic), また FLe は intuitionistic linear logic ともよばれる.

2.3.1 命題定数と weakening

ここではまず, 命題定数の $\top$, $\bot$ や 1, 0 の始式と推論規則を導入する. そしてそれらが構造に関する推論規則 weakening とどのように関係するかについて述べる.

LK では

1. $\Gamma \ \Rightarrow \top$
2. $\Gamma, \bot, \Sigma \ \Rightarrow \Delta$

LJ では

1'. $\Gamma \ \Rightarrow \top$

2'. $\Gamma, \bot, \Sigma \ \Rightarrow D$

これらの始式 1 と **1'** によって

$$\text{論理式 } A \text{ が証明可能} \iff A \text{ は論理的に } \top \text{ と同値}$$

ということができる. 実際, $A \to \top$ は 1 及び **1'** より明らかにいえる. 他方, $\top \to A$ を示すには次のように weakening が必要になる.

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow A}{\top \Rightarrow A}\ (w\text{ 左})}{\Rightarrow \top \to A}\ (\to\text{ 右})$$

同様に, 左下の証明図が示す様に $\neg A$ が $A \to \bot$ と論理的に同値であることを示すには weakening が必要になる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}\ (\neg\text{左})}{\neg A, A \Rightarrow \bot}\ (w\text{ 右})}{\neg A \Rightarrow A \to \bot}\ (\to\text{ 右}) \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad \bot \Rightarrow}{A \to \bot, A \Rightarrow}\ (\to\text{ 左})}{A \to \bot \Rightarrow \neg A}\ (\neg\text{右})$$

weakening の持たない論理で, これらの定数 $\top$, $\bot$ と同じ役割を果たすように命題定数 1, 0 を導入し, さらに次の始式と推論規則を仮定する.

3. $\Rightarrow 1$

4. $0 \Rightarrow$

さらに推論規則として, $CFLe$ では

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (1w) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda}{\Gamma \Rightarrow 0, \Lambda}\ (0w)$$

を仮定する. FLe および $InFLe$ の場合は sequent の右辺の制限により,

$$\frac{\Gamma \Rightarrow D}{1, \Gamma \Rightarrow D}\ (1w) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow 0}\ (0w)$$

という形になる. これらの始式と推論規則は, 証明可能な論理式の中で 1 が最弱の論理式であり, また矛盾が証明可能な論理式, すなわち式 $A \Rightarrow$ が証明可能となるような論理式 A の内では 0 が最強のものであるということを表している. さらに, $\neg A$ が $A \to 0$ と論理的に同値であるということを次の様に示すことができる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}\ (\neg 左)}{\neg A, A \Rightarrow 0}\ (0w)}{\neg A \Rightarrow A \to 0}\ (\neg 右) \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad 0 \Rightarrow}{A \to 0, A \Rightarrow}\ (\to 左)}{A \to 0 \Rightarrow \neg A}\ (\neg 右)$$

2.3.2 multiplicative conjunction(fusion)

ここでは multiplicative conjunction(fusion) という論理結合子についての推論規則を導入し, その論理結合子が sequent の右辺の formula の列の中に現れるコンマと同等であることを示す. まず,

$$LK \vdash A_1, \cdots, A_m \Rightarrow B_1, \cdots, B_n \Longleftrightarrow LK \vdash A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \Rightarrow B_1 \vee \cdots \vee B_n$$

が成り立つことは次のようにして確かめられる.

Proof.

$(\Longrightarrow)$ の証明.
$LK \vdash A_1,\cdots,A_m \Rightarrow B_1,\cdots,B_n$ を仮定する. すると, $A_1,\cdots,A_m \Rightarrow B_1,\cdots,B_n$ を終式とする LK の証明図が存在するから, この証明図の下に次のような推論を付け加えることにより, $A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \Rightarrow B_1 \vee \cdots \vee B_n$ に到る証明図を得ることができる.

$$
\begin{array}{cl}
\vdots & \\
A_1,\cdots,A_m \Rightarrow B_1,\cdots,B_n & \\
\hline\hline
A_1\wedge\cdots\wedge A_m,\cdots,A_1\wedge\cdots\wedge A_m \Rightarrow B_1,\cdots,B_n & (\wedge\text{左})\text{ を } m \text{ 回} \\
\hline\hline
A_1\wedge\cdots\wedge A_m \Rightarrow B_1,\cdots,B_n & (c\,\text{左})\text{ を } m-1 \text{ 回} \\
\hline\hline
A_1\wedge\cdots\wedge A_m \Rightarrow B_1\vee\cdots\vee B_n,\cdots,B_1\vee\cdots\vee B_n & (\vee\text{右})\text{ を } n \text{ 回} \\
\hline\hline
A_1\wedge\cdots\wedge A_m \Rightarrow B_1\vee\cdots\vee B_n & (c\,\text{右})\text{ を } n-1 \text{ 回}
\end{array}
$$

$(\Longleftarrow)$ の証明.
まず,

$$
\dfrac{\dfrac{A_1 \Rightarrow A_1}{A_1,\cdots,A_m \Rightarrow A_1}\ (w\,\text{左})\text{ を } m-1 \text{ 回} \qquad \dfrac{\dfrac{A_2 \Rightarrow A_2}{A_1,\cdots,A_m \Rightarrow A_2}\ (w\,\text{左})\text{ を } m-1 \text{ 回} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A_1,\cdots,A_m \Rightarrow A_3\wedge\cdots\wedge A_m\end{array}}{A_1,\cdots,A_m \Rightarrow A_2\wedge\cdots\wedge A_m}\ (\wedge\text{右})}{A_1,\cdots,A_m \Rightarrow A_1\wedge\cdots\wedge A_m}\ (\wedge\text{右})
$$

より, $LK \vdash A_1,\cdots,A_m \Rightarrow A_1 \wedge\cdots\wedge A_m$.　$\cdots(a)$
同様にして, $LK \vdash B_1\vee\cdots\vee B_n \Rightarrow B_1,\cdots,B_n$.　$\cdots(b)$
(a),(b) より,

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A_1,\cdots,A_m \Rightarrow A_1\wedge\cdots\wedge A_m\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ B_1\vee\cdots\vee B_n \Rightarrow B_1,\cdots,B_n\end{array}}{(A_1\wedge\cdots\wedge A_m)\rightarrow(B_1\vee\cdots\vee B_n), A_1,\cdots,A_m \Rightarrow B_1,\cdots,B_n}\ (\rightarrow\text{左})
$$

よって, $LK \vdash (A_1\wedge\cdots\wedge A_m)\rightarrow(B_1\vee\cdots\vee B_n), A_1,\cdots,A_m \Rightarrow B_1,\cdots,B_n$.
次に $\Rightarrow (A_1\wedge\cdots\wedge A_m)\rightarrow(B_1\vee\cdots\vee B_n)$ を cut formula とし, 上の式と cut を適用すると,

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A_1\wedge\cdots\wedge A_m \Rightarrow B_1\vee\cdots\vee B_n\end{array}}{\Rightarrow (A_1\wedge\cdots\wedge A_m)\rightarrow(B_1\vee\cdots\vee B_n)}\ (\rightarrow\text{右}) \quad \begin{array}{c}\vdots\\ (A_1\wedge\cdots\wedge A_m)\rightarrow(B_1\vee\cdots\vee B_n), A_1,\cdots,A_m \Rightarrow B_1,\cdots,B_n\end{array}}{A_1,\cdots,A_m \Rightarrow B_1,\cdots,B_n}\ (cut)
$$

となり, $LK \vdash A_1, \cdots, A_m \Rightarrow B_1, \cdots, B_n$. $\hfill Q.E.D$

このように連続して現れるコンマは, 左辺ならば conjunction, 右辺ならば disjunction を意味していることが分かるが, 上の証明では推論規則に weakening 規則と contraction 規則を必要とした. つまり weakening と contraction の少なくとも一方を持たない部分構造論理の体系ではコンマが conjunction や disjunction を意味しているとは限らない.

ここで, LJ のように sequent の右辺の formula の列を高々一つに制限した部分構造論理の体系を考えると, sequent の左辺のコンマを表現するため論理結合子 $\bullet$ を導入し, さらに $\bullet$ についての次の推論規則を付け加える. 論理結合子 $\bullet$ は multiplicative conjunction または fusion という.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Gamma, A \bullet B, \Sigma \Rightarrow C}\ (\bullet 左) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow A \bullet B}\ (\bullet 右)$$

この推論規則を使うと,

$$A_1, \cdots, A_m \Rightarrow B \text{ が} provable \Longleftrightarrow A_1 \bullet \cdots \bullet A_m \Rightarrow B \text{ が} provable$$

を容易に示すことができる.

2.3.3 部分構造論理の体系 $CFLe$ と体系 $InFLe$

ここで部分構造論理の体系 $CFLe$ と体系 $InFLe$ の定義を与える.

Definition 3. *(体系 CFLe)*
古典命題論理の体系 LK から exchange rule 以外のすべての構造規則を取り除き定数 1, 0 に関する始式と推論規則, fusion に関する推論規則を付け加えた体系を CFLe という.

Definition 4. *(体系 FLe および InFLe)*
直観主義命題論理の体系 LJ から exchange rule 以外のすべての構造規則を取り除き定数 1, 0 に関する始式と推論規則, fusion に関する推論規則を付け加えた体系を FLe とする.FLe にさらに二重否定の公理 (involution) $\neg\neg A \Rightarrow A$ *を付け加えた体系を InFLe という.*

2.3.4 $CFLex$ と $InFLex$ の同値性

ここでは $CFLex$ と $InFLex$ の同値性を示す.(ただし, x は c か w または cw)

$CFLe$ と $InFLe$ の場合

(1) $CFLe$ で $\neg\neg A \Rightarrow A$ が証明できること．また FLe の始式と推論規則は, $CFLe$ の始式, 推論規則になっている.

したがって

$$InFLe \vdash \Gamma \Rightarrow A \qquad \text{ならば} \qquad CFLe \vdash \Gamma \Rightarrow A$$

(2) 証明図の長さに関する帰納法により,

$$CFLe \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \text{ならば} \qquad InFLe \vdash \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow$$

とくに,

$$CFLe \vdash \Gamma \Rightarrow A$$

ならば, $\neg A, \Gamma \Rightarrow$. したがって,

$$InFLe \vdash \Gamma \Rightarrow \neg\neg A$$

となる. よって, $\neg\neg A \Rightarrow A$ と cut をとれば,

$$InFLe \vdash \Gamma \Rightarrow A$$

よって, $CFLe$ および $InFLe$ の sequent を $\Gamma \Rightarrow A$ といった形 (sequent の右辺の formula の列を高々一つに制限) で考えれば $CFLex$ と $InFLex$ は同値である.

2.3.5 様々な部分構造論理の体系

体系 $CFLe$ および体系 $(In)FLe$ にいくつかの推論規則を付け加えることにより, 部分構造論理の基本的な体系を定義することができる. それらは contraction rule, weakening rule の頭文字をそれぞれとり $CFLe$, $(In)FLe$ に付けてその論理の構造規則の有無を表わす.

以下に $CFLe$ と $(In)FLe$ にいくつかの構造規則を付けた部分構造論理の体系を挙げる.

$CFLe$ を基本とした部分構造論理の体系

$$\begin{aligned}
CFLew &= CFLe + weakening \\
CFLec &= CFLe + contraction \\
CFLec + dist. &= CFLe + contraction + \text{分配則} \cdots \text{適切論理}\ (relevant\ logic) \\
CFLecw &= CFLe + contraction + weakening \cdots LK\ \text{と同等になる}
\end{aligned}$$

FLe を基本とした部分構造論理の体系

$$\begin{aligned} FLew &= FLe + weakening \cdots BCK \text{ 論理} \\ FLec &= FLe + contraction \\ FLecw &= FLe + contraction + weakening \cdots LJ \text{ と同等になる} \end{aligned}$$

$InFLe$ を基本とした部分構造論理の体系

$$\begin{aligned} InFLew &= InFLe + weakening \\ InFLec &= InFLe + contraction \\ InFLecw &= InFLe + contraction + weakening \cdots LK \text{ と同等になる} \end{aligned}$$

ところで, これらの部分構造論理の体系で以下の定理が成り立つことが判っている.

Theorem 7.
FLe, FLew, FLec, FLecw, CFLe, CFLew, CFLecw で *cut* 除去定理が成り立つ.

第3章　Positive fragments

部分構造論理間の translation を研究する上で重要な結果である positive fragment について述べる．この結果を通じて, いかに否定 (negation) が部分構造論理間の translation に関係しているかということを考察する．

以下に positive fragment および, positive formula の定義を述べる．

Definition 5. *(positive formula)*
論理式 φ が $\neg$ を一つを含まない (定数 0 も) とき, φ を positive formula という．

Definition 6. *(Positive fragments)*
logic L に対し, L^+ は L で証明可能な positive formula 全体の集合を表わし, L^+ を L の positive fragment という．

3.1　Peirceの法則

ここでは *Peirce* の法則について述べる. この *Peirce* の法則は positive fragment を論じる上で重要な結果であるが, 具体的にどのように関連しているのかということは後に述べる.

Definition 7. *(Peirce の法則)*

$$\Rightarrow ((p \to q) \to p) \to p$$

この *Peirce* の法則は LK では provable だが, LJ では provable でない. しかし, これは当然である．そもそも直観主義論理は古典論理から *Peirce* の法則をはじめ, 二重否定 $(\neg\neg A \Rightarrow A)$, 排中律 $(\Rightarrow A \vee \neg A)$ などのいわゆる『不自然な推論法則』を取り除いた論理として導入されたからだ.

以下では LK^+ で *Peirce* の法則の証明を行う.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{p \Rightarrow q, p}\,(w\text{右})}{\Rightarrow p \to q, p}\,(\to\text{右}) \qquad p \Rightarrow p}{(p \to q) \to p \Rightarrow p, p}\,(\to\text{左})}{(p \to q) \to p \Rightarrow p}\,(c\text{右})}{\Rightarrow ((p \to q) \to p) \to p}\,(\to\text{右})$$

よって LK^+ で $Peirce$ の法則は provable.

次に LJ^+ で $Peirce$ の法則が証明できないことを背理法により示そう. いま $\Rightarrow ((p{\to}q){\to}p){\to}p$ が LJ^+ で証明できたとする. この sequent において q として 0 をとると, $\Rightarrow ((p{\to}0){\to}p){\to}p$ となり, さらに $\neg p \equiv p{\to}0$ より $\Rightarrow (\neg p{\to}p){\to}p$. $\cdots (a)$

ところで LJ で $\neg\neg p \Rightarrow \neg p{\to}p$ および $\neg p{\to}p \Rightarrow \neg\neg p$ が下記のように provable.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{\neg p, p \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg p \Rightarrow \neg p}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg p, \neg p \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\neg p, \neg p \Rightarrow p}\,(w\,\text{右})}{\neg\neg p \Rightarrow \neg p{\to}p}\,(\to\text{右})
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{\neg p, p \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg p \Rightarrow \neg p}\,(\neg\text{右}) \quad p{\to}p}{\neg p, \neg p{\to}p \Rightarrow p}\,(\to\text{左})}{\neg p, \neg p, \neg p{\to}p \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg p, \neg p{\to}p \Rightarrow}\,(c\,\text{左})}{\neg p{\to}p \Rightarrow \neg\neg p}\,(\neg\text{右})
$$

したがって $\neg p{\to}p \;\equiv\; \neg\neg p$ が成り立つ. すると, (a) の $(\neg p{\to}p)$ を $\neg\neg p$ で置き換えると, $\Rightarrow \neg\neg p{\to}p$ つまり $\neg\neg p \Rightarrow p$ となり二重否定 (involution) が導かれる.

すると論理体系は LJ ではなく LK になってしまい矛盾する. よって LJ^+ で $Peirce$ の法則は provable でない.

以上から, LK と LJ の positive fragment は異なることがわかる.

ところが次の二つの Theorem に示されるように $CFLew$ と $FLew$, $CFLe$ と FLe の positive fragment は一致する.

Theorem 8. $\quad CFLew^+ \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha \qquad$ *iff* $\qquad FLew^+ \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$

Theorem 9. $\quad CFLe^+ \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha \qquad$ *iff* $\qquad FLe^+ \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$

3.2 Theorem 8 の証明

Proof.

次に示すように Theorem 8 の右辺から左辺は明らかに導かれる.

$FLew^+$ の rule は全て $CFLew^+$ の rule の特別な場合である. よって $\Gamma \Rightarrow \alpha$ の $FLew^+$ での証明図は $CFLew^+$ の証明図となる.

次に Theorem 8 の左辺から右辺を導く.

$CFLew \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$ ならば $CFLew$ で cut 除去定理が成り立つ. したがって $CFLew$ で $\Gamma \Rightarrow \alpha$ に到る cut なしの証明図 Π が存在する. ここで, Π の中の sequent を $\Sigma \Rightarrow \Delta$ とする.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \\ \underline{\Sigma \Rightarrow \Delta} \\ \vdots \\ \hline \Gamma \Rightarrow \alpha \end{array}\right\}\Pi$$

subformula property により 0 の rule が使われたとすると, 0 は終式 $\Gamma \Rightarrow \alpha$ に現われるはずである. しかし Γ, α は positive formula なので矛盾する. したがって 0 の rule は使われていない.

ここで適用できる始式と推論規則を整理すると,

- 始式　$\beta \Rightarrow \beta$,　$\Rightarrow 1$
- 構造に関する推論規則　Exchange 左右,Weakening 左右
- 論理結合子に関する推論規則　$\neg$ を除く全て (fusion 規則を含む)

Π の証明の長さに関する帰納法により, 以下のように示せる.

(1) 下式の右辺の formula の数が上式のそれらより減る rule はない.(なぜなら $\neg$ と contraction の rule がないから).

(2) (1) と始式の形より, Δ は空にはならない.

(3) 終式 $\Gamma \Rightarrow \alpha$ の右辺の formula の数は一つである. したがって Π のどこかで右辺の formula の数がいったん二つになったら (1) よりその終式の右辺の formula の数が一つになることはない. したがって sequent $\Sigma \Rightarrow \Delta$ の Δ は一つの formula γ であり, この sequent は $\Sigma \Rightarrow \gamma$ の形である.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \\ \underline{\Sigma \Rightarrow \gamma} \\ \vdots \\ \hline \Gamma \Rightarrow \alpha \end{array}\right\}\Pi$$

以上から, (w 右) と (e 右) の rule も適用できないことがわかる. したがって Π は $FLew^{+}$ の証明図とみなすことができる.

よって Theorem 8 の左辺から右辺が導かれた.

したがって Theorem 8 は成り立つ.

Q.E.D

3.3 Theorem 9 の証明

Theorem 9 の証明は Theorem 8 と同様にできる. ここでは Theorem 8 の証明と異なるところのみ述べる. 次に示すように Theorem 9 の右辺から左辺は明らかに導かれる.

FLe^+ の rule は全て $CFLe^+$ の rule の特別な場合である. よって $\Gamma' \Rightarrow \alpha'$ の FLe^+ での証明図は $CFLe^+$ の証明図となる.

次に Theorem 9 の左辺から右辺を導く.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \\ \underline{\Sigma' \Rightarrow \Delta'} \\ \vdots \\ \hline \Gamma' \Rightarrow \alpha' \end{array}\right\}\Pi'$$

(1') Theorem 8 と同様, 下式の右辺の formula の数が上式のそれらより減る rule はない.

(2') (1') と始式の形より, Δ' は空にはならない.

(3') 終式 $\Gamma' \Rightarrow \alpha'$ の右辺の formula の数は一つである. したがって Π' のどこかで右辺の formula の数がいったん二つになったら (1)' よりその終式の右辺の formula の数が一つになることはない. したがって sequent $\Sigma' \Rightarrow \Delta'$ の Δ' は一つの formula γ' であり, この sequent は $\Sigma' \Rightarrow \gamma'$ の形である.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \\ \underline{\Sigma' \Rightarrow \gamma'} \\ \vdots \\ \hline \Gamma' \Rightarrow \alpha' \end{array}\right\}\Pi'$$

以上から, (e 右) の rule も適用できないことがわかる. さらに, 体系 $CFLe^+$ なので weakening の rule も無い. したがって Π' は FLe^+ の証明図と見なすことができる.

よって Theorem 9 の左辺から右辺が導かれた.

したがって Theorem 9 は成り立つ.

3.4 Positive fragments と contraction rule

以上から Theorem 8 と Theorem 9 は成り立つことを示せたが, 最初に述べたようにこの関係は $LK^+(CFLecw^+)$ と $LJ^+(FLecw^+)$ の間では成り立たない.

ここで LK^+ で $Peirce$ の法則を証明したところを振り返ると, 証明図の中で (c 右) の rule が適用されている.

Theorem 8 と Theorem 9 の証明を見てもわかるように, $CFLew(FLew)$ と $CFLe(FLe)$ は共に contraction の rule が無いのでこれらの部分構造論理間の体系では成り立つ. つまり (c 右) の rule が positive fragment が成り立つかどうかを左右する要因となっていることがわかった.

3.5 ¬ が translation に与える影響

本章では ¬, 0 を含まない sequent を持つ論理 (Positive fragments) について考察した. これらの結果より, (c 右) の rule を持たない同士の部分構造論理の体系に関して, ¬, 0 を認めなければこの体系同士に違いは無いことがわかった. したがって, ¬ が後の章に述べる translation に対して重要な役割を持っていることがわかる.

第4章　Kolmogorovの定理およびその応用

ここではコルモゴロフ ($A.N.Kolmogorov$) によって示された $Kolmogorov$ の定理 (The $Kolmogorov$-style translation) とそれを部分構造論理間への translation へと拡張した結果を実際に証明を与えることにより解説する (松田 [4] 参照).

さらにこれらの結果に基づいて新しく導入した translation S を示す.

その上で, $Kolmogorov$ の定理とよく似たゲーデル変換 (The *Gödel* translation) についても解説し, 対比して相違点などを探る.

4.1　Kolmogorovの定理

ここで示すのはもともとの $Kolmogorov$ の定理である.

Definition 8. *(The $Kolmogorov$-style translation)*
(古典論理の) 各論理式 C に対し, 論理式 $T(C)$ を次のように帰納的に定義する.
$T(\bot) := \neg\neg\bot$
$T(\top) := \top$
$T(p) := \neg\neg p$　*(p は命題変数)*
$T(A \wedge B) := \neg\neg(T(A) \wedge T(B))$
$T(A \to B) := \neg\neg(T(A) \to T(B))$
$T(A \vee B) := \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$
$T(\neg A) := \neg T(A)$

次の結果は $Kolmogorov$ の定理として知られている. 例えば, LJ で $\neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow T(D)$ が証明可能ならば LK で $A \wedge B \Rightarrow D$ が成り立つことを示している. ここでは sequent 計算を用いて, 次のことを示す.

Theorem 10.
古典論理で A が証明可能となる必要十分条件は, 直観主義論理で $T(A)$ が証明可能となることである.

$$LJ \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D) \qquad \textit{iff} \qquad LK \vdash \Gamma \Rightarrow D$$

ここで Γ を空, D を A とすれば求める結果が得られる.

以下ではこの Theorem　10 のを証明を与える.

4.1.1 Theorem 10 の左辺から右辺を導く

まず, Theorem 10 の左辺から右辺を導く前に, 次の二つの Lemma 1, Lemma 2 を証明する.

Lemma 1.

$$LJ \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D) \qquad \text{ならば} \qquad LK \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D)$$

LK は LJ より強い体系なのでこの Lemma 1 は, 明らかに成り立つ.
以下では体系 L で sequent $A \Rightarrow B$ および $B \Rightarrow A$ がともに証明可能であることを $L \vdash A \Leftrightarrow B$ と表わす.

Lemma 2.

$$LK \vdash D \Leftrightarrow T(D)$$

この Lemma 2 を D の構成に関する帰納法で証明する.

1). D が$\top$のとき
$T(D) := D$ なので明らかに成り立つ.

2). D が$\bot$のとき
$T(D) := \neg\neg D = D$ なので明らかに成り立つ.

3). D が p**(命題変数) のとき**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{\neg p, p \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{p, \neg p \Rightarrow}\,(e\,\text{左})}{p \Rightarrow \neg\neg p}\,(\neg\text{右}) \qquad \dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{\Rightarrow \neg p, p}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg p \Rightarrow p}\,(\neg\text{左})$$

よって,$LK \vdash p \Rightarrow \neg\neg p$ かつ $LK \vdash \neg\neg p \Rightarrow p$ であり, さらに $T(p) = \neg\neg p$ だから,
$LK \vdash p \Leftrightarrow T(p)$.

4). D が $A \wedge B$ **のとき**
帰納法の仮定より $LK \vdash A \Leftrightarrow T(A)$, $LK \vdash B \Leftrightarrow T(B)$ が成り立つ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow T(A)}{A \wedge B \Rightarrow T(A)}\,(\wedge\text{左}\,1) \quad \dfrac{B \Rightarrow T(B)}{A \wedge B \Rightarrow T(B)}\,(\wedge\text{左}\,2)}{A \wedge B \Rightarrow T(A) \wedge T(B)}\,(\wedge\text{右})}{\neg(T(A) \wedge T(B)), A \wedge B \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{A \wedge B, \neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow}\,(e\,\text{左})}{A \wedge B \Rightarrow \neg\neg(T(A) \wedge T(B))}\,(\neg\text{右})$$

よって, $LK \vdash A \land B \Rightarrow \neg\neg(T(A) \land T(B))$.
さらに定義により $T(A \land B) := \neg\neg(T(A) \land T(B))$ だから,
$LK \vdash A \land B \Rightarrow T(A \land B)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T(A) \Rightarrow A}{T(A) \land T(B) \Rightarrow A}(\land\text{左}\,1) \qquad \dfrac{T(B) \Rightarrow B}{T(A) \land T(B) \Rightarrow B}(\land\text{左}\,2)}{T(A) \land T(B) \Rightarrow A \land B}(\land\text{右})}{\Rightarrow \neg(T(A) \land T(B)), A \land B}(\neg\text{右})}{\neg\neg(T(A) \land T(B)) \Rightarrow A \land B}(\neg\text{左})
$$

よって, $LK \vdash \neg\neg(T(A) \land T(B)) \Rightarrow A \land B$.
さらに定義により $T(A \land B) := \neg\neg(T(A) \land T(B))$ だから,
$LK \vdash T(A \land B) \Rightarrow A \land B$.

5). D が $A{\rightarrow}B$ のとき
帰納法の仮定より $LK \vdash A \Leftrightarrow T(A)$, $LK \vdash B \Leftrightarrow T(B)$ が成り立つ.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T(A) \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow T(B)}{A{\rightarrow}B, T(A) \Rightarrow T(B)}(\rightarrow\text{左})}{A{\rightarrow}B \Rightarrow T(A){\rightarrow}T(B)}(\rightarrow\text{右})}{\neg(T(A){\rightarrow}T(B)), A{\rightarrow}B \Rightarrow}(\neg\text{左})}{A{\rightarrow}B, \neg(T(A){\rightarrow}T(B)) \Rightarrow}(e\,\text{左})}{A{\rightarrow}B \Rightarrow \neg\neg(T(A){\rightarrow}T(B))}(\neg\text{右})
$$

よって, $LK \vdash A{\rightarrow}B \Rightarrow \neg\neg(T(A){\rightarrow}T(B))$.
さらに定義により $T(A{\rightarrow}B) := \neg\neg(T(A){\rightarrow}T(B))$ だから,
$LK \vdash A{\rightarrow}B \Rightarrow T(A{\rightarrow}B)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow T(A) \qquad T(B) \Rightarrow B}{T(A){\rightarrow}T(B), A \Rightarrow B}(\rightarrow\text{左})}{T(A){\rightarrow}T(B) \Rightarrow A{\rightarrow}B}(\rightarrow\text{右})}{\Rightarrow \neg(T(A){\rightarrow}T(B)), A{\rightarrow}B}(\neg\text{右})}{\neg\neg(T(A){\rightarrow}T(B)) \Rightarrow A{\rightarrow}B}(\neg\text{左})
$$

よって, $LK \vdash \neg\neg(T(A){\rightarrow}T(B)) \Rightarrow A{\rightarrow}B$.
さらに定義により $T(A{\rightarrow}B) := \neg\neg(T(A){\rightarrow}T(B))$ だから,
$LK \vdash T(A{\rightarrow}B) \Rightarrow A{\rightarrow}B$.

6). D が $A \vee B$ のとき
帰納法の仮定より $LK \vdash A \Leftrightarrow T(A)$, $LK \vdash B \Leftrightarrow T(B)$ が成り立つ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow T(A)}{\neg T(A), A \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{A, \neg T(A) \Rightarrow}\,(e\,\text{左})}{A, \neg T(A) \wedge \neg T(B) \Rightarrow}\,(\wedge\text{左}\,1) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow T(B)}{\neg T(B), B \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{B, \neg T(B) \Rightarrow}\,(e\,\text{左})}{B, \neg T(A) \wedge \neg T(B) \Rightarrow}\,(\wedge\text{左}\,2)}{A \vee B, \neg T(A) \wedge \neg T(B) \Rightarrow}\,(\vee\text{左})}{A \vee B \Rightarrow \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))}\,(\neg\text{右})$$

よって, $LK \vdash A \vee B \Rightarrow \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$.
さらに定義により $T(A \vee B) := \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$ だから,
$LK \vdash A \vee B \Rightarrow T(A \vee B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T(A) \Rightarrow A}{\Rightarrow \neg T(A), A}\,(\neg\text{右})}{\Rightarrow \neg T(A), A \vee B}\,(\vee\text{右}\,1) \quad \dfrac{\dfrac{T(B) \Rightarrow B}{\Rightarrow \neg T(B), B}\,(\neg\text{右})}{\Rightarrow \neg T(B), A \vee B}\,(\vee\text{右}\,2)}{\Rightarrow \neg T(A) \wedge \neg T(B), A \vee B}\,(\wedge\text{右})}{\neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)) \Rightarrow A \vee B}\,(\neg\text{左})$$

よって, $LK \vdash \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)) \Rightarrow A \vee B$.
さらに定義により $T(A \vee B) := \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$ だから,
$LK \vdash T(A \vee B) \Rightarrow A \vee B$.

7). D が$\neg A$ のとき
帰納法の仮定より $LK \vdash A \Leftrightarrow T(A)$ が成り立つ.

$$\dfrac{\dfrac{T(A) \Rightarrow A}{T(A), \neg A \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg A \Rightarrow \neg T(A)}\,(\neg\text{右})$$

よって, $LK \vdash \neg A \Rightarrow \neg T(A)$.
さらに定義により $T(\neg A) := \neg T(A)$ だから,
$LK \vdash \neg A \Rightarrow T(\neg A)$.

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow T(A)}{A, \neg T(A) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg T(A) \Rightarrow \neg A}\,(\neg\text{右})$$

よって, $LK \vdash \neg T(A) \Rightarrow \neg A$.
さらに定義により $T(\neg A) := \neg T(A)$ だから,
$LK \vdash T(\neg A) \Rightarrow \neg A$.

よって,1).-7). より Lemma 2 が示された. さらに, この Lemma 2 から,

Corollary 2.

$$LK \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D) \qquad \textit{iff} \qquad LK \vdash \Gamma \Rightarrow D$$

が成り立つ.
すると,Lemma 1 かつ Corollary 2 から直ちに Theorem 10 の左辺から右辺が導かれる.

4.1.2 Theorem 10 の右辺から左辺を導く

まず, 次の Corollary 3, Lemma 3, Lemma 4 を証明する.
体系 LJ における命題定数の定義 $LJ \vdash \neg\bot \equiv \top$ と T の定義により次のことは明らかである.

Corollary 3. 任意の論理式 D に対し, ある論理式 E が存在して

$$LJ \vdash T(D) \Leftrightarrow \neg E$$

が成り立つ. ところで,

Lemma 3. 任意の論理式 E に対し

$$LJ \vdash \neg\neg\neg E \Leftrightarrow \neg E$$

が次のように証明できる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{E \Rightarrow E}{\neg E, E \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{E \Rightarrow \neg\neg E}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg\neg E, E \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\neg\neg E \Rightarrow \neg E}\,(\neg\text{右}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{E \Rightarrow E}{\neg E, E \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg E \Rightarrow \neg E}\,(\neg\text{右})}{\neg E, \neg\neg E \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg E \Rightarrow \neg\neg\neg E}\,(\neg\text{右})$$

ここで Corollary 3, Lemma 3 から,

Lemma 4.

$$LJ \vdash \neg\neg T(D) \Rightarrow T(D)$$

が次のように証明できる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T(D) \Rightarrow \neg E}{\neg\neg E, T(D) \Rightarrow}\,(\neg 左)}{\neg\neg E \Rightarrow \neg T(D)}\,(\neg 右)}{\neg\neg T(D), \neg\neg E \Rightarrow}\,(\neg 左)}{\neg\neg T(D) \Rightarrow \neg\neg\neg E}\,(\neg 右) \quad \neg\neg\neg E \Rightarrow \neg E}{\neg\neg T(D) \Rightarrow \neg E}\,(cut) \quad \neg E \Rightarrow T(D)}{\neg\neg T(D) \Rightarrow T(D)}\,(cut)$$

ここでさらに次の Lemma 5 を示す.

Lemma 5.

$$LK \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad ならば \qquad LJ \vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow$$

この証明は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に到る証明図の長さに関する帰納法を使って行う. まず $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が initial sequent のとき Lemma 5 の左辺から右辺への証明は明らかに成り立つ. そこで $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は initial sequent ではないとし, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図で最後に使われた推論規則を I とする.

1a).I が (w 左) のとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(w\,左)$$

帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta), T(A), T(\Gamma) \Rightarrow}\,(w\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg T(\Delta), T(A), T(\Gamma) \Rightarrow$.

1b).I が (w 右) のとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,(w\,右)$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta), \neg T(A), T(\Gamma) \Rightarrow} \ (w\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg T(\Delta), \neg T(A), T(\Gamma) \Rightarrow$.

2a).I が $(c\,左)$ のとき

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (c\,左)$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg T(\Delta), T(A), T(A), T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta), T(A), T(\Gamma) \Rightarrow} \ (c\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg T(\Delta), T(A), T(\Gamma) \Rightarrow$.

2b).I が $(c\,右)$ のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \ (c\,右)$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg T(\Delta), \neg T(A), \neg T(A), T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta), \neg T(A), T(\Gamma) \Rightarrow} \ (c\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg T(\Delta), \neg T(A), T(\Gamma) \Rightarrow$.

3a).I が $(e\,左)$ のとき

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow \Delta} \ (e\,左)$$

帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A), T(B), T(\Pi) \Rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(B), T(A), T(\Pi) \Rightarrow}\ (e\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma), T(B), T(A), T(\Pi) \Rightarrow$.

3b).I が $(e\,右)$ のとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Sigma}\ (e\,右)$$

帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\neg T(\Delta), \neg T(A), \neg T(B), \neg T(\Sigma), T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta), \neg T(B), \neg T(A), \neg T(\Sigma), T(\Gamma) \Rightarrow}\ (e\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg T(\Delta), \neg T(B), \neg T(A), \neg T(\Sigma), T(\Gamma) \Rightarrow$.

4a).I が $(\wedge 左\,1)$ のとき

$$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge 左\,1)$$

帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg T(\Delta), T(A), T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma), T(A) \wedge T(B) \Rightarrow}\ (\wedge 左\,1)}{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow \neg(T(A) \wedge T(B))}\ (\neg 右)}{\neg\neg(T(A) \wedge T(B)), \neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow}\ (\neg 左)}{\neg T(\Delta), \neg\neg(T(A) \wedge T(B)), T(\Gamma) \Rightarrow}\ (e\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg T(\Delta), \neg\neg(T(A) \wedge T(B)), T(\Gamma) \Rightarrow$.
さらに定義により $T(A \wedge B) := \neg\neg(T(A) \wedge T(B))$ だから,
$LJ \vdash \neg T(\Delta), T(A \wedge B), T(\Gamma) \Rightarrow$.

4b).I が $(\wedge 左\,2)$ のとき
$(\wedge 左\,1)$ のときと同様に示せる.

4c).I が $(\wedge 右)$ のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \ (\wedge\text{右})$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\dfrac{\neg T(\Delta), \neg T(A), T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow \neg\neg T(A)} \ (\neg\text{右}) \quad \neg\neg T(A) \Rightarrow T(A)}{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow T(A)} \ (cut)$$

Lemma 4 より, $LJ \vdash \neg\neg T(A) \Rightarrow T(A)$ なので,
$LK \vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow T(A)$. $\cdots$ (a)
同様に帰納法の仮定より,

$$\frac{\dfrac{\neg T(\Delta), \neg T(B), T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow \neg\neg T(B)} \ (\neg\text{右}) \quad \neg\neg T(B) \Rightarrow T(B)}{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow T(B)} \ (cut)$$

Lemma 4 より, $LJ \vdash \neg\neg T(B) \Rightarrow T(B)$ なので,
$LJ \vdash \neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow T(B)$. $\cdots$ (b)
(a), (b) より,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow T(A) \quad \neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow T(B)}{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow T(A) \wedge T(B)} \ (\wedge\text{右})}{\neg(T(A) \wedge T(B)), \neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow} \ (\neg\text{左})}{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow \neg\neg(T(A) \wedge T(B))} \ (\neg\text{右})}{\neg\neg\neg(T(A) \wedge T(B)), \neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow} \ (\neg\text{左})$$

よって, $LJ \vdash \neg\neg\neg(T(A) \wedge T(B)), \neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow$.
さらに定義により $T(A \wedge B) := \neg\neg(T(A) \wedge T(B))$ だから,
$LJ \vdash \neg T(A \wedge B), \neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow$.

5a). I が $(\rightarrow$左$)$ のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \ (\rightarrow\text{左})$$

帰納法の仮定より,

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg T(\Delta),\neg T(A),T(\Gamma)\Rightarrow}{\neg T(\Delta),T(\Gamma),\neg T(A)\Rightarrow}\,(e\text{左})}{\neg T(\Delta),T(\Gamma)\Rightarrow\neg\neg T(A)}\,(\neg\text{右}) \qquad \neg\neg T(A)\Rightarrow T(A)}{\neg T(\Delta),T(\Gamma)\Rightarrow T(A)}\,(cut) \qquad \neg T(\Sigma),T(B),T(\Pi)\Rightarrow}{\neg T(\Sigma),T(A)\to T(B),\neg T(\Delta),T(\Gamma),T(\Pi)\Rightarrow}\,(\to\text{左})}{\neg T(\Delta),\neg T(\Sigma),T(\Gamma),T(\Pi),T(A)\to T(B)\Rightarrow}\,(e\text{左})}{\neg T(\Delta),\neg T(\Sigma),T(\Gamma),T(\Pi)\Rightarrow\neg(T(A)\to T(B))}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg(T(A)\to T(B)),\neg T(\Delta),\neg T(\Sigma),T(\Gamma),T(\Pi)\Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg T(\Delta),\neg T(\Sigma),\neg\neg(T(A)\to T(B)),T(\Gamma),T(\Pi)\Rightarrow}\,(e\text{左})
$$

Lemma 4 より, $LJ\vdash\neg\neg T(A)\Rightarrow T(A)$ なので,
$LJ\vdash\neg T(\Delta),\neg T(\Sigma),\neg\neg(T(A)\to T(B)),T(\Gamma),T(\Pi)\Rightarrow\ .$
さらに定義により $T(A\to B):=\neg\neg(T(A)\to T(B))$ だから,
$LJ\vdash\neg T(\Delta),\neg T(\Sigma),T(A\to B),T(\Gamma),T(\Pi)\Rightarrow\ .$

5b). I が $(\to$右$)$ のとき

$$
\dfrac{A,\Gamma\Rightarrow\Delta,B}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\to B}\,(\to\text{右})
$$

帰納法の仮定より,

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg T(\Delta),\neg T(B),T(\Gamma),T(A)\Rightarrow}{\neg T(\Delta),T(\Gamma),T(A),\neg T(B)\Rightarrow}\,(e\text{左})}{\neg T(\Delta),T(\Gamma),T(A)\Rightarrow\neg\neg T(B)}\,(\neg\text{右}) \qquad \neg\neg T(B)\Rightarrow T(B)}{\neg T(\Delta),T(\Gamma),T(A)\Rightarrow T(B)}\,(cut)}{\neg T(\Delta),T(\Gamma)\Rightarrow T(A)\to T(B)}\,(\to\text{右})}{\neg(T(A)\to T(B)),\neg T(\Delta),T(\Gamma)\Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg T(\Delta),T(\Gamma)\Rightarrow\neg\neg(T(A)\to T(B))}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg\neg(T(A)\to T(B)),\neg T(\Delta),T(\Gamma)\Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg T(\Delta),\neg\neg\neg(T(A)\to T(B)),T(\Gamma)\Rightarrow}\,(e\text{左})
$$

Lemma 4 より, $LJ\vdash\neg\neg T(B)\Rightarrow T(B)$ なので,
$LJ\vdash\neg T(\Delta),\neg\neg\neg(T(A)\to T(B)),T(\Gamma)\Rightarrow\ .$
さらに定義により $T(A\to B):=\neg\neg(T(A)\to T(B))$ だから,
$LJ\vdash\neg T(\Delta),\neg T(A\to B),T(\Gamma)\Rightarrow\ .$

6a). I が $(\vee$左$)$ のとき

$$\dfrac{A,\Gamma \Rightarrow \Delta \quad B,\Gamma \Rightarrow \Delta}{A \lor B,\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\lor\text{左})$$

帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg T(\Delta),T(A),T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta),T(\Gamma),T(A) \Rightarrow}\,(e\,\text{左})}{\neg T(\Delta),T(\Gamma) \Rightarrow \neg T(A)}\,(\neg\text{右}) \quad \dfrac{\dfrac{\neg T(\Delta),T(B),T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta),T(\Gamma),T(B) \Rightarrow}\,(e\,\text{左})}{\neg T(\Delta),T(\Gamma) \Rightarrow \neg T(B)}\,(\neg\text{右})}{\neg T(\Delta),T(\Gamma) \Rightarrow \neg T(A) \land \neg T(B)}\,(\land\text{右})}{\neg(\neg T(A) \land \neg T(B)),\neg T(\Delta),T(\Gamma) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg T(\Delta),\neg(\neg T(A) \land \neg T(B)),T(\Gamma) \Rightarrow}\,(e\,\text{左})$$

よって, $LJ \vdash \neg T(\Delta),\neg(\neg T(A) \land \neg T(B)),T(\Gamma) \Rightarrow\ .$
さらに定義により $T(A \lor B) := \neg(\neg T(A) \land \neg T(B))$ だから,
$LJ \vdash \neg T(\Delta),T(A \lor B),T(\Gamma) \Rightarrow\ .$

6b).I が $(\lor$右 1) のとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \lor B}\,(\lor\text{右 }1)$$

帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg T(\Delta),\neg T(A),T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta),T(\Gamma),\neg T(A) \Rightarrow}\,(e\,\text{左})}{\neg T(\Delta),T(\Gamma),\neg T(A) \land \neg T(B) \Rightarrow}\,(\land\text{左 }1)}{\neg T(\Delta),T(\Gamma) \Rightarrow \neg(\neg T(A) \land \neg T(B))}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg(\neg T(A) \land \neg T(B)),\neg T(\Delta),T(\Gamma) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg T(\Delta),\neg\neg(\neg T(A) \land \neg T(B)),T(\Gamma) \Rightarrow}\,(e\,\text{左})$$

よって, $LJ \vdash \neg T(\Delta),\neg\neg(\neg T(A) \land \neg T(B)),T(\Gamma) \Rightarrow\ .$
さらに定義により $T(A \lor B) := \neg(\neg T(A) \land \neg T(B))$ だから,
$LJ \vdash \neg T(\Delta),\neg T(A \lor B),T(\Gamma) \Rightarrow\ .$

6c).I が $(\lor$右 2) のとき
$(\lor$右 1) のときと同様に示せる.

7a).I が $(\neg$左) のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (\neg左)$$

帰納法の仮定より,
直ちに, $LJ \vdash \neg T(\Delta), T(\neg A), T(\Gamma) \Rightarrow \ $.

7b). I が $(\neg右)$ のとき

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} \ (\neg右)$$

帰納法の仮定より,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg T(\Delta), T(A), T(\Gamma) \Rightarrow}{\neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow \neg T(A)} \ (\neg右)}{\neg\neg T(A), \neg T(\Delta), T(\Gamma) \Rightarrow} \ (\neg左)}{\neg T(\Delta), \neg\neg T(A), T(\Gamma) \Rightarrow} \ (e\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg T(\Delta), \neg T(\neg A), T(\Gamma) \Rightarrow \ $.

よって, **1).-7).** より Lemma 5 が示された.

最後に, Theorem 10 の右辺から左辺が導かれることを示す.
Lemma 5 の Δ に対する formula の列を高々一つに制限すると,

$$LK \vdash \Gamma \Rightarrow D \quad ならば \quad LJ \vdash \neg T(D), T(\Gamma) \Rightarrow$$

とできる. ここで, $LJ \vdash \neg T(D), T(\Gamma) \Rightarrow$ に $(e\,左), (\neg右)$ を適用すると,

$$LK \vdash \Gamma \Rightarrow D \quad ならば \quad LJ \vdash T(\Gamma) \Rightarrow \neg\neg T(D)$$

したがって, Lemma 4 より,

$$LK \vdash \Gamma \Rightarrow D \quad ならば \quad LJ \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D)$$

よって, Theorem 10 が示された.

4.2 松田による部分構造論理への拡張

論文 [4] において松田は $Kolmogorov$ の定理を部分構造論理間の translation への拡張を試みた. ここでは松田による部分構造論理への拡張を述べる.

Definition 9.
Definition 8 の translation T を拡張し, $T(0)$, $T(1)$, $T(A \bullet B)$ を次のように定める.
$T(0) := 0$
$T(1) := \neg\neg 1$
$T(A \bullet B) := \neg\neg(T(A) \bullet T(B))$

このように, T の定義を拡張すると, 先に示した Theorem 10 の証明と同様の証明により以下の結果が得られる.

Theorem 11.

$$\begin{array}{rcl} FLe \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D) & \textit{iff} & CFLe \vdash \Gamma \Rightarrow D \\ FLew \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D) & \textit{iff} & CFLew \vdash \Gamma \Rightarrow D \\ FLec \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D) & \textit{iff} & CFLec \vdash \Gamma \Rightarrow D \end{array}$$

4.3 translation S

ここではこれまで述べた $Kolmogorov$ の定理および松田による拡張をふまえた上で新たに translation S を導入する.

Definition 10.
$S(p) := \neg\neg p$ *(p は命題定数および命題変数)*
$S(\neg A) := \neg S(A)$
$S(A \bullet B) := \neg\neg(S(A) \bullet S(B))$
$S(A \vee B) := \neg\neg(S(A) \vee S(B))$
$S(A \wedge B) := S(A) \wedge S(B)$
$S(A \to B) := S(A) \to S(B)$

次の Lemma 6 が示すように, S と T は FLe 上では同値になることがわかる.

Lemma 6.

$$FLe \vdash S(D) \Leftrightarrow T(D)$$

この Lemma 6 は D の構成に関する帰納法により証明できる.

その証明を与える前に, 次のことを示す. 先に示した Lemma 4 $LJ \vdash \neg\neg T(D) \Rightarrow T(D)$ と同じ結果が FLe でも成り立つことが容易に示される.

Lemma 7.

$$FLe \vdash \neg\neg T(D) \Rightarrow T(D)$$

いま次のことを注意しておく. 帰納法の仮定で与えられた論理式 D について $FLe \vdash S(D) \Leftrightarrow T(D)$ が既に証明できていると仮定すると, Lemma 7 により

Lemma 8.

$$FLe \vdash \neg\neg S(D) \Rightarrow S(D)$$

が導かれることになる. この事実

$$FLe \vdash S(C) \Leftrightarrow T(C) \quad \text{ならば} \quad FLe \vdash \neg\neg S(C) \Rightarrow S(C) \quad \cdots (1)$$

(ただし, $FLe \vdash S(D) \Leftrightarrow T(D)$ は $S(D) \Rightarrow T(D)$ および $T(D) \Rightarrow S(D)$ が共に FLe で $provable$ であることを表わす.)

を, C が A と B のそれぞれについて仮定することにより次の証明で D が $A \wedge B$ および $A{\rightarrow}B$ の場合に Lemma 6 が成り立つことを証明できる.

ここで Lemma 6 を D の構成に関する帰納法により証明する.

1). D が p のとき
帰納法の仮定より, $S(p) := \neg\neg p$, $T(p) := \neg\neg p$ とでき,
明らかに $FLe \vdash S(p) \Leftrightarrow T(p)$.

2). D が $A \bullet B$ のとき
帰納法の仮定より, $FLe \vdash S(A) \Leftrightarrow T(A)$, $FLe \vdash S(B) \Leftrightarrow T(B)$ なので

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{S(A) \Rightarrow T(A) \quad S(B) \Rightarrow T(B)}{S(A), S(B) \Rightarrow T(A) \bullet T(B)}\,(\bullet\text{右})}{S(A) \bullet S(B) \Rightarrow T(A) \bullet T(B)}\,(\bullet\text{左})}{\neg(T(A) \bullet T(B)), S(A) \bullet S(B) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg(T(A) \bullet T(B)) \Rightarrow \neg(S(A) \bullet S(B))}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg(S(A) \bullet S(B)), \neg(T(A) \bullet T(B)) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\neg(S(A) \bullet S(B)) \Rightarrow \neg\neg(T(A) \bullet T(B))}\,(\neg\text{右})$$

よって $FLe \vdash \neg\neg(S(A) \bullet S(B)) \Rightarrow \neg\neg(T(A) \bullet T(B))$.
T と S の定義により $T(A \bullet B) := \neg\neg(T(A) \bullet T(B))$ および
$S(A \bullet B) := \neg\neg(S(A) \bullet S(B))$ だから, $FLe \vdash S(A \bullet B) \Rightarrow T(A \bullet B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T(A) \Rightarrow S(A) \quad T(B) \Rightarrow S(B)}{T(A), T(B) \Rightarrow S(A) \bullet S(B)}\;(\bullet\text{右})}{T(A) \bullet T(B) \Rightarrow S(A) \bullet S(B)}\;(\bullet\text{左})}{\neg(S(A) \bullet S(B)), T(A) \bullet T(B) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{\neg(S(A) \bullet S(B)) \Rightarrow \neg(T(A) \bullet T(B))}\;(\neg\text{右})}{\neg\neg(T(A) \bullet T(B)), \neg(S(A) \bullet S(B)) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{\neg\neg(T(A) \bullet T(B)) \Rightarrow \neg\neg(S(A) \bullet S(B))}\;(\neg\text{右})$$

よって $FLe \vdash \neg\neg(T(A) \bullet T(B)) \Rightarrow \neg\neg(S(A) \bullet S(B))$.
T と S の定義により $T(A \bullet B) := \neg\neg(T(A) \bullet T(B))$ および
$S(A \bullet B) := \neg\neg(S(A) \bullet S(B))$ だから, $FLe \vdash T(A \bullet B) \Rightarrow S(A \bullet B)$.
したがって $FLe \vdash S(A \bullet B) \Leftrightarrow T(A \bullet B)$.

3). D が $A \vee B$ のとき
帰納法の仮定より, $FLe \vdash S(A) \Leftrightarrow T(A)$, $FLe \vdash S(B) \Leftrightarrow T(B)$ なので

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{S(A) \Rightarrow T(A)}{S(A), \neg T(A) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{S(A), \neg T(A) \wedge \neg T(B) \Rightarrow}\;(\wedge\text{左 1}) \qquad \dfrac{\dfrac{S(B) \Rightarrow T(B)}{S(B), \neg T(B) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{S(B), \neg T(A) \wedge \neg T(B) \Rightarrow}\;(\wedge\text{左 2})}{S(A) \vee S(B), \neg T(A) \wedge \neg T(B) \Rightarrow}\;(\vee\text{左})}{\neg T(A) \wedge \neg T(B) \Rightarrow \neg(S(A) \vee S(B))}\;(\neg\text{右})}{\neg T(A) \wedge \neg T(B), \neg\neg(S(A) \vee S(B)) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{\neg\neg(S(A) \vee S(B)) \Rightarrow \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))}\;(\neg\text{右})$$

よって $FLe \vdash \neg\neg(S(A) \vee S(B)) \Rightarrow \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$.
T と S の定義により $T(A \vee B) := \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$ および
$S(A \vee B) := \neg\neg(S(A) \vee S(B))$ だから, $FLe \vdash S(A \vee B) \Rightarrow T(A \vee B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T(A) \Rightarrow S(A)}{T(A) \Rightarrow S(A) \vee S(B)}\;(\vee\text{右 1})}{T(A), \neg(S(A) \vee S(B)) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{\neg(S(A) \vee S(B)) \Rightarrow \neg T(A)}\;(\neg\text{右}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{T(B) \Rightarrow S(B)}{T(B) \Rightarrow S(A) \vee S(B)}\;(\vee\text{右 2})}{T(B), \neg(S(A) \vee S(B)) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{\neg(S(A) \vee S(B)) \Rightarrow \neg T(B)}\;(\neg\text{右})}{\neg(S(A) \vee S(B)) \Rightarrow \neg T(A) \wedge \neg T(B)}\;(\wedge\text{右})}{\neg(S(A) \vee S(B)), \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{\neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)) \Rightarrow \neg\neg(S(A) \vee S(B))}\;(\neg\text{右})$$

よって $FLe \vdash \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B)) \Rightarrow \neg\neg(S(A) \vee S(B))$.
T と S の定義により $T(A \vee B) := \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$ および
$S(A \vee B) := \neg\neg(S(A) \vee S(B))$ だから, $FLe \vdash T(A \vee B) \Rightarrow S(A \vee B)$.
したがって $FLe \vdash S(A \vee B) \Leftrightarrow T(A \vee B)$.

4).D が $A \wedge B$ のとき
帰納法の仮定より, $FLe \vdash S(A) \Leftrightarrow T(A)$, $FLe \vdash S(B) \Leftrightarrow T(B)$ なので

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{S(A) \Rightarrow T(A)}{S(A) \wedge S(B) \Rightarrow T(A)}\,(\wedge\text{左}\,1) \quad \dfrac{S(B) \Rightarrow T(B)}{S(A) \wedge S(B) \Rightarrow T(B)}\,(\wedge\text{左}\,2)}{S(A) \wedge S(B) \Rightarrow T(A) \wedge T(B)}\,(\wedge\text{右})}{\neg(T(A) \wedge T(B)), S(A) \wedge S(B) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{S(A) \wedge S(B) \Rightarrow \neg\neg(T(A) \wedge T(B))}\,(\neg\text{右})$$

よって $FLe \vdash S(A) \wedge S(B) \Rightarrow \neg\neg(T(A) \wedge T(B))$.
T と S の定義により $T(A \wedge B) := \neg\neg(T(A) \wedge T(B))$ および
$S(A \wedge B) := S(A) \wedge S(B)$ だから, $FLe \vdash S(A \wedge B) \Rightarrow T(A \wedge B)$.

(1) より $FLe \vdash \neg\neg S(A) \Rightarrow S(A)$, $FLe \vdash \neg\neg S(B) \Rightarrow S(B)$ が成り立ち,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T(A) \Rightarrow S(A)}{T(A) \wedge T(B) \Rightarrow S(A)}\,(\wedge\text{左}\,1)}{T(A) \wedge T(B), \neg S(A) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg S(A) \Rightarrow \neg(T(A) \wedge T(B))}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg(T(A) \wedge T(B)), \neg S(A) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow \neg\neg S(A)}\,(\neg\text{右}) \quad \neg\neg S(A) \Rightarrow S(A)}{\neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow S(A)}\,(cut)$$

よって $FLe \vdash \neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow S(A)$. $\cdots(a)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T(B) \Rightarrow S(B)}{T(A) \wedge T(B) \Rightarrow S(B)}\,(\wedge\text{左}\,2)}{T(A) \wedge T(B), \neg S(B) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg S(B) \Rightarrow \neg(T(A) \wedge T(B))}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg(T(A) \wedge T(B)), \neg S(B) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow \neg\neg S(B)}\,(\neg\text{右}) \quad \neg\neg S(B) \Rightarrow S(B)}{\neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow S(B)}\,(cut)$$

よって $FLe \vdash \neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow S(B)$. $\cdots(b)$
したがって (a),(b) より

$$\dfrac{\neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow S(A) \quad \neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow S(B)}{\neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow S(A) \wedge S(B)}\;(\wedge\text{右})$$

よって $FLe \vdash \neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow S(A) \wedge S(B)$.
T と S の定義により $T(A \wedge B) := \neg\neg(T(A) \wedge T(B))$ および
$S(A \wedge B) := S(A) \wedge S(B)$ だから, $FLe \vdash T(A \wedge B) \Rightarrow S(A \wedge B)$.
したがって $FLe \vdash S(A \wedge B) \Leftrightarrow T(A \wedge B)$.

5).D が $A \to B$ のとき
帰納法の仮定より, $FLe \vdash S(A) \Leftrightarrow T(A)$, $FLe \vdash S(B) \Leftrightarrow T(B)$ なので

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T(A) \Rightarrow S(A) \quad S(B) \Rightarrow T(B)}{S(A) \to S(B), T(A) \Rightarrow T(B)}\;(\to\text{左})}{S(A) \to S(B) \Rightarrow T(A) \to T(B)}\;(\to\text{右})}{\neg(T(A) \to T(B)), S(A) \to S(B) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{S(A) \to S(B) \Rightarrow \neg\neg(T(A) \to T(B))}\;(\neg\text{右})$$

よって $FLe \vdash S(A) \to S(B) \Rightarrow \neg\neg(T(A) \to T(B))$.
T と S の定義により $T(A \to B) := \neg\neg(T(A) \to T(B))$ および
$S(A \to B) := S(A) \to S(B)$ だから, $FLe \vdash S(A \to B) \Rightarrow T(A \to B)$.

(1) より $FLe \vdash \neg\neg S(A) \Rightarrow S(A)$, $FLe \vdash \neg\neg S(B) \Rightarrow S(B)$ が成り立ち,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{S(A) \Rightarrow T(A) \quad T(B) \Rightarrow S(B)}{T(A) \to T(B), S(A) \Rightarrow S(B)}\;(\to\text{左})}{T(A) \to T(B), \neg S(B), S(A) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{\neg S(B), S(A) \Rightarrow \neg(T(A) \to T(B))}\;(\neg\text{右})}{\neg S(B), \neg\neg(T(A) \to T(B)), S(A) \Rightarrow}\;(\neg\text{左})}{\neg\neg(T(A) \to T(B)), S(A) \Rightarrow \neg\neg S(B)}\;(\neg\text{右}) \quad \neg\neg S(B) \Rightarrow S(B)}{\neg\neg(T(A) \to T(B)), S(A) \Rightarrow S(B)}\;(cut)}{\neg\neg(T(A) \to T(B)) \Rightarrow S(A) \to S(B)}\;(\to\text{右})$$

よって $FLe \vdash \neg\neg(T(A)\to T(B)) \Rightarrow S(A)\to S(B)$.
T と S の定義により $T(A\to B) := \neg\neg(T(A)\to T(B))$ および
$S(A\to B) := S(A)\to S(B)$ だから, $FLe \vdash T(A\to B) \Rightarrow S(A\to B)$.
したがって $FLe \vdash S(A\to B) \Leftrightarrow T(A\to B)$.

よって, **1).-5).** より Lemma 6 $FLe \vdash S(D) \Leftrightarrow T(D)$ が示された.

4.4 The Gödel translation

ここではゲーデル変換 (The *Gödel* translation) について解説する. このゲーデル変換は *A.N.Kolmogorov* の後にゲーデル (*K.Gödel*) によって与えられた translation である.

Definition 11. *(The Gödel translation)*
$U(\bot) := \neg\neg\bot$
$U(\top) := \top$
$U(p) := \neg\neg p$
$U(A \wedge B) := U(A) \wedge U(B)$
$U(A\to B) := U(A)\to U(B)$
$U(A \vee B) := \neg(\neg U(A) \wedge \neg U(B))$
$U(\neg A) := \neg U(A)$

Theorem 12.

$$LJ \vdash U(\Gamma) \Rightarrow U(D) \quad \text{\textit{iff}} \quad LK \vdash \Gamma \Rightarrow D$$

このように *Kolmogorov* の定理の translation と定義の形こそ多少異なるが本質的には一致している. いずれにせよどちらも LK と LJ の間の translation である.

一方, 本論文で導入した translation S は FLe と $CFLe$ の間の translation といったように, 部分構造論理間の translation であり, またゲーデル変換を自然な形で拡張したものになっていることがわかる.

補足になるが, これらの結果と 2 章の結果からこれらの translation には否定 (negation) が大きく関わっているということがわかる.

第5章　Glivenkoの定理およびその応用

この章ではまず, グリベンコ ($V.Glivenko$) によって示された $Glivenko$ の定理 ($Glivenko's$ theorem) を証明論的手法によって示し, その結果を踏まえた上で, $Glivenko$ の定理を部分構造論理間への関係へと一般化した結果を述べる.

5.1　Glivenkoの定理

$V.Glivenko$ は 1929 年に次の結果を得た.

Theorem 13. *($Glivenko's$ theorem)*

$$LK \vdash A \qquad iff \qquad LJ \vdash \neg\neg A$$

この結果は, A に対し $\neg\neg A$ を与える変換により古典命題論理を直観主義命題論理の中へ"埋め込む"ことができることを示している. この定理の標準的な証明は次のように行われる.

Proof.
$\neg\neg A$ が LJ で provable ならば, 明らかに $\neg\neg A$ は LK でも provable である. ところが LK では sequent $\neg\neg A \Rightarrow A$ が provable だから, A は LK で provable になる.
よって,

Lemma 9.

$$LJ \vdash \neg\neg A \qquad ならば \qquad LK \vdash A$$

とできる.
逆を証明するために, 次の Lemma 10 を示す.

Lemma 10.

$$LK \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad ならば \qquad LJ \vdash \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow$$

この証明は$\Gamma \Rightarrow \Delta$に到る証明図の長さに関する帰納法を使って行う.

まず$\Gamma \Rightarrow \Delta$が initial sequent のとき Lemma 10 の左辺から右辺への証明は明らかに成り立つ. そこで$\Gamma \Rightarrow \Delta$は initial sequent ではないとし, $\Gamma \Rightarrow \Delta$の証明図で最後に使われた推論規則を$I$とする.

1a).Iが$(w$ 左$)$のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (w\text{ 左})$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow}\ (w\text{ 左})$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow\ $.

1b).Iが$(w$ 右$)$のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (w\text{ 右})$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow}\ (w\text{ 左})$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow\ $.

2a).Iが$(c$ 左$)$のとき

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (c\text{ 左})$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, A, A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow}\ (c\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow$.

2b).I が $(c$ 右$)$ のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (c\,右)$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, \neg A, \neg A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow}\ (c\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow$.

3a).I が $(e$ 左$)$ のとき

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow \Delta}\ (e\,左)$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, \Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow}{\neg\Delta, \Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow}\ (e\,左)$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, \Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow$.

3b).I が $(e$ 右$)$ のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Sigma}\ (e\,右)$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, \neg A, \neg B, \neg\Sigma, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg B, \neg A, \neg\Sigma, \Gamma \Rightarrow}\ (e\,\text{左})$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, \neg B, \neg A, \neg\Sigma, \Gamma \Rightarrow$.

4a). I が $(\wedge$左 $1)$ のとき

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge\text{左}\,1)$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, A \wedge B, \Gamma \Rightarrow}\ (\wedge\text{左}\,1)$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, A \wedge B, \Gamma \Rightarrow$.

4b). I が $(\wedge$左 $2)$ のとき
$(\wedge$左 $1)$ のときと同様に示せる.

4c). I が $(\wedge$右$)$ のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ (\wedge\text{右})$$

ところで,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\ (w\,\text{左}) \quad \dfrac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B}\ (w\,\text{左})}{A, B \Rightarrow A \wedge B}\ (\wedge\text{右})}{\neg(A \wedge B), A, B \Rightarrow}\ (\neg\text{左})}{\neg(A \wedge B), A \Rightarrow \neg B}\ (\neg\text{右})}{\neg(A \wedge B), A, \neg\neg B \Rightarrow}\ (\neg\text{左})}{\neg(A \wedge B), \neg\neg B \Rightarrow \neg A}\ (\neg\text{右})}{\neg(A \wedge B), \neg\neg A, \neg\neg B \Rightarrow}\ (\neg\text{左})}{\neg(A \wedge B), \neg\neg A, \neg\neg A \wedge \neg\neg B \Rightarrow}\ (\wedge\text{左}\,2)}{\neg\neg A \wedge \neg\neg B, \neg\neg A \wedge \neg\neg B, \neg(A \wedge B) \Rightarrow}\ (\wedge\text{左}\,1)}{\neg\neg A \wedge \neg\neg B, \neg(A \wedge B) \Rightarrow}\ (c\,\text{左})$$

より, $LJ \vdash \neg\neg A \wedge \neg\neg B, \neg(A \wedge B) \Rightarrow$.
この結果と帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow \neg\neg A}\,(\neg\text{右}) \quad \dfrac{\neg\Delta, \neg B, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow \neg\neg B}\,(\neg\text{右})}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow \neg\neg A \wedge \neg\neg B}\,(\wedge\text{右}) \quad \neg\neg A \wedge \neg\neg B, \neg(A \wedge B) \Rightarrow}{\neg(A \wedge B), \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}\,(cut)$$

よって, $LJ \vdash \neg(A \wedge B), \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow$.

5a). I が $(\vee$左$)$ のとき

$$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\vee\text{左})$$

帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow \quad \neg\Delta, B, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, A \vee B, \Gamma \Rightarrow}\,(\vee\text{左})$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, A \vee B, \Gamma \Rightarrow$.

5b). I が $(\vee$右 $1)$ のとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\,(\vee\text{右}\,1)$$

ところで,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \vee B}\,(\vee\text{右}\,1)}{\neg(A \vee B), A \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A}\,(\neg\text{右}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B \Rightarrow A \vee B}\,(\vee\text{右}\,2)}{\neg(A \vee B), B \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg B}\,(\neg\text{右})}{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B}\,(\wedge\text{右})$$

より, $LJ \vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$.
この結果と帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B \qquad \dfrac{\neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg A \wedge \neg B, \Gamma \Rightarrow}\,(\wedge\text{左 }1)}{\neg\Delta, \neg(A \vee B), \Gamma \Rightarrow}\,(cut)$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, \neg(A \vee B), \Gamma \Rightarrow$.

5c).I が $(\vee$右 $2)$ のとき
$(\vee$右 $1)$ のときと同様に示せる.

6a).I が $(\rightarrow$左$)$ のとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(\rightarrow\text{左})$$

ところで,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A \rightarrow B, A \Rightarrow B}\,(\rightarrow\text{左})}{A \rightarrow B, A, \neg B \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A}\,(\neg\text{右})}{A \rightarrow B, \neg\neg A, \neg B \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{A \rightarrow B, \neg\neg A, \neg\neg A \wedge \neg B \Rightarrow}\,(\wedge\text{左 }2)}{A \rightarrow B, \neg\neg A \wedge \neg B, \neg\neg A \wedge \neg B \Rightarrow}\,(\wedge\text{左 }1)}{A \rightarrow B, \neg\neg A \wedge \neg B \Rightarrow}\,(c\text{ 左})$$

より, $LJ \vdash A \rightarrow B, \neg\neg A \wedge \neg B \Rightarrow$.
この結果と帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg A, \neg\Sigma, \Gamma \Rightarrow}\,(w\text{ 左})}{\neg\Delta, \neg A, \neg\Sigma, \Gamma, \Pi \Rightarrow}\,(w\text{ 左})}{\neg\Delta, \neg\Sigma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \neg\neg A}\,(\neg\text{右}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\Sigma, B, \Pi \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg\Sigma, B, \Pi \Rightarrow}\,(w\text{ 左})}{\neg\Delta, \neg\Sigma, B, \Gamma, \Pi \Rightarrow}\,(w\text{ 左})}{\neg\Delta, \neg\Sigma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \neg B}\,(\neg\text{右})}{\neg\Delta, \neg\Sigma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \neg\neg A \wedge \neg B}\,(\wedge\text{右}) \qquad A \rightarrow B, \neg\neg A \wedge \neg B \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg\Sigma, A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow}\,(cut)$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, \neg\Sigma, A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow$.

6b).I が $(\rightarrow$右$)$ のとき

$$\dfrac{A,\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A{\to}B}\ (\to\text{右})$$

ところで,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}\ (\neg\text{左})}{\neg A, A \Rightarrow B}\ (w\,\text{右})}{\neg A \Rightarrow A{\to}B}\ (\to\text{右})}{\neg A, \neg(A{\to}B) \Rightarrow}\ (\neg\text{左})}{\neg(A{\to}B) \Rightarrow \neg\neg A}\ (\neg\text{右}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B, A \Rightarrow B}\ (w\,\text{左})}{B \Rightarrow A{\to}B}\ (\to\text{右})}{B, \neg(A{\to}B) \Rightarrow}\ (\neg\text{左})}{\neg(A{\to}B) \Rightarrow \neg B}\ (\neg\text{右})}{\neg(A{\to}B) \Rightarrow \neg\neg A \wedge \neg B}\ (\wedge\text{右})$$

より, $LJ \vdash \neg(A{\to}B) \Rightarrow \neg\neg A \wedge \neg B$.
この結果と帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\neg(A{\to}B) \Rightarrow \neg\neg A \wedge \neg B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\Delta, \neg B, A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg B, \Gamma \Rightarrow \neg A}\ (\neg\text{右})}{\neg\Delta, \neg B, \neg\neg A, \Gamma \Rightarrow}\ (\neg\text{左})}{\neg\Delta, \neg\neg A \wedge \neg B, \neg\neg A, \Gamma \Rightarrow}\ (\wedge\text{左}\,2)}{\neg\Delta, \neg\neg A \wedge \neg B, \neg\neg A \wedge \neg B, \Gamma \Rightarrow}\ (\wedge\text{左}\,1)}{\neg\Delta, \neg\neg A \wedge \neg B, \Gamma \Rightarrow}\ (c\,\text{左})}{\neg\Delta, \neg(A{\to}B), \Gamma \Rightarrow}\ (cut)$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, \neg(A{\to}B), \Gamma \Rightarrow$.

7a).I が $(\neg\text{左})$ のとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg\text{左})$$

帰納法の仮定より,
直ちに, $LJ \vdash \neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow$.

7b).I が $(\neg\text{右})$ のとき

$$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\neg\text{右})$$

帰納法の仮定より,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow \neg A}\,(\neg 右)}{\neg\neg A, \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}\,(\neg 左)}{\neg\Delta, \neg\neg A, \Gamma \Rightarrow}\,(e\, 左)$$

よって, $LJ \vdash \neg\Delta, \neg\neg A, \Gamma \Rightarrow \ \Rightarrow$.

よって, **1).-7).** より Lemma 10 が示された.
したがって, Lemma 9 と Lemma 10 より Theorem 13 は成り立つ.

$Q.E.D$

5.2 Glivenko の定理への証明論的アプローチ

ここでは先に述べた *Glivenko* の定理をふまえた上で, *Glivenko* の定理を部分構造論理間への関係へと一般化した結果を述べる.

5.2.1 Glivenko property と strong Glivenko property

Glivenko の定理の一般化の為に次の定義が必要になる.

Definition 12. *(Glivenko property)*
K が L に関して *Glivenko property(*以降, *G.p.)* を持つ
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \ \forall\varphi \quad L \vdash \varphi \quad iff \quad K \vdash \neg\neg\varphi$

このように定義すると, Definition 12 は先に述べた *Glivenko* の定理の形そのものであり, *Glivenko* の定理は「直観主義論理は, 古典論理に関して G.p. を持つ」と呼ぶことができる.
しかし, G.p. の定義は sequent 計算を使って証明を行う上で扱いにくいので, 下記の strong *Glivenko* property を導入する.

Definition 13. *(strong Glivenko property)*
K が L に関して *strong Glivenko property(*以降, *strongG.p.)* を持つ
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \ \forall\psi, \varphi \quad L \vdash \psi \Rightarrow \varphi \quad iff \quad K \vdash \neg\varphi \Rightarrow \neg\psi$
すなわち $\quad L \vdash \psi \to \varphi \quad iff \quad K \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$

Lemma 11. 次の三つの条件は同値である.

(a) $K \vdash \neg\varphi \Rightarrow \neg\psi$

(b) $K \vdash \psi \Rightarrow \neg\neg\varphi$

(c) $K \vdash \psi, \neg\varphi \Rightarrow$

以下でこの Lemma 11 を示す.

Proof.

1). (a) から (b) を示す

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\neg\psi, \psi \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\psi \Rightarrow \neg\neg\psi}\,(\neg\text{右}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi}{\neg\neg\psi, \neg\varphi \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\neg\psi \Rightarrow \neg\neg\varphi}\,(\neg\text{右})}{\psi \Rightarrow \neg\neg\varphi}\,(cut)$$

2). (b) から (c) を示す

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\neg\varphi}\,(\neg\text{右}) \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \neg\neg\varphi}{\neg\neg\neg\varphi, \psi \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\psi, \neg\varphi \Rightarrow}\,(cut)$$

3). (c) から (a) を示す

$$\dfrac{\psi, \neg\varphi \Rightarrow}{\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi}\,(\neg\text{右})$$

よって, (a), (b), (c) は同値である. *Q.E.D*

Lemma 12. L が *involutive* のとき, 次の二つは同値である.

1). K は L に関し G.p. を持つ

2). K は L に関し strongG.p. を持つ

以下でこの Lemma 12 を示す.

Proof.

1). strongG.p. から G.p. を示す
Lemma 11 の (a), (b) は同値なので strongG.p. は,

$$L \vdash \psi \Rightarrow \varphi \quad \text{iff} \quad K \vdash \psi \Rightarrow \neg\neg\varphi$$

とでき, ψ を空とすると明らかに G.p. が成り立つ.

2). G.p. から strongG.p. を示す
K が L に関して G.p. を持つと仮定する. すると,

$$[\mathbf{a}] \qquad L \vdash \psi{\to}\varphi \qquad \textit{iff} \qquad K \vdash \neg\neg(\psi{\to}\varphi)$$

とできる. ここで L が involutive であるという仮定を用いると,

$$[\mathbf{b}] \qquad K \vdash \neg\neg(\psi{\to}\varphi) \qquad \textit{iff} \qquad K \vdash \neg\varphi{\to}\neg\psi$$

が成り立つことを示す.

(i). [**b**] の左辺から右辺を導く

$$\dfrac{\Rightarrow \neg\neg(\psi{\to}\varphi) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi \quad \varphi \Rightarrow \varphi}{\psi, \psi{\to}\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\to\text{左})}{\neg\varphi, \psi, \psi{\to}\varphi \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\varphi, \psi \Rightarrow \neg(\psi{\to}\varphi)}\,(\neg\text{右})}{\neg\varphi, \psi, \neg\neg(\psi{\to}\varphi) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi, \psi \Rightarrow}{\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi}\,(\neg\text{右})}{\Rightarrow \neg\varphi{\to}\neg\psi}\,(\to\text{右})}\,(cut)$$

よって, [**b**] の左辺から右辺が導かれる.
ところで, この結果から一般に,

$$K \vdash \neg\neg(\alpha'{\to}\beta') \Rightarrow \neg\beta'{\to}\neg\alpha' \cdots (*)$$

とできる.

(ii). [**b**] の右辺から左辺を導く

$K \vdash \neg\varphi{\to}\neg\psi$ とすると, Lemma 11 の (a), (b) は同値なので,

$$K \vdash \psi{\to}\neg\neg\varphi\ . \cdots (\mathrm{d})$$

L は involutive だから, $L \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ とでき, したがって,

$$L \vdash (\psi \to \neg\neg\varphi) \to (\psi \to \varphi)$$

が成り立つ. ここで G.p. より,

$$K \vdash \neg\neg((\psi \to \neg\neg\varphi) \to (\psi \to \varphi))$$

ここで $(*)$ を使うと,

$$K \vdash \neg(\psi \to \varphi) \to \neg(\psi \to \neg\neg\varphi)$$

すなわち,

$$K \vdash \psi \to \neg\neg\varphi, \neg(\psi \to \varphi) \Rightarrow$$

(d) を使って,

$$K \vdash \neg(\psi \to \varphi) \Rightarrow$$

ゆえに, $K \vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$ とでき, **[b]** の右辺から左辺が導かれた.
よって, **(i)**, **(ii)** より,

[b] $\quad K \vdash \neg\neg(\psi \to \varphi) \quad$ *iff* $\quad K \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$

が成り立つ. よってこの $K \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$ に対して G.p. を使うと,

$$L \vdash \psi \to \varphi$$

とでき, strongG.p. が成り立つ.

したがって, **1)**, **2)** から Lemma 12 は成り立つ.

Q.E.D

5.2.2 杉山による拡張

Glivenko の定理の拡張については杉山による研究がある (参考文献 [8]). ここでは杉山による拡張を述べる.

Definition 14.
体系 $FLew$ より強い論理のうち, LK に関する *Glivenko* の定理が成立する最小の論理を

L_1 と, 体系 FLe より強い論理のうち, LK に関する *Glivenko* の定理が成立する最小の論理を L_2 を次のように定義する.

$$L_1 \quad : \quad FLew \quad + \quad \neg(A \wedge \neg A)$$

$$\begin{array}{lllll} L_2 & : & FLe & + & \neg(A \wedge \neg A) \\ & & & + & \neg B \to (A \to B) \\ & & & + & \neg(A \wedge B) \to \neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \\ & & & + & \neg(A \to B) \to \neg(\neg\neg A \to \neg\neg B) \end{array}$$

このように定義すると以下の Theorem 14 が得られる.

Theorem 14.

$$\begin{array}{lll} LK \vdash A & \textit{iff} & L_1 \vdash \neg\neg A \\ LK \vdash A & \textit{iff} & L_2 \vdash \neg\neg A \end{array}$$

この結果は正しいが, L_1, L_2 は「最小の論理」という点では正しくない.
次の節ではより正確な証明を与える.

5.2.3 Glivenko の定理が成り立つ最小の論理の一般化

Glivenko の定理が成り立つ最小の論理を一般化した定理を述べる前準備として, 以下にいくつかの定義と定理を述べる.

Definition 15. (公理 $(A\to)$ と $(A\wedge)$)

$$\neg(\neg\neg\alpha \to \beta) \to \neg(\alpha \to \neg\neg\beta) \ \cdots \ (A\to)$$
$$\neg(\alpha \wedge \beta) \to \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta) \ \cdots \ (A\wedge)$$

Definition 16. (推論規則 $(R\to)$ と $(R\wedge)$)

$$\frac{\neg\neg A \to B, \Gamma \Rightarrow}{A \to \neg\neg B, \Gamma \Rightarrow} \ (R\to) \qquad \frac{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow}{\neg\neg A \wedge \neg\neg B, \Gamma \Rightarrow} \ (R\wedge)$$

このように定義すると以下の Theorem が得られる.

Theorem 15. FLe で $(A\to)$ と $(R\to)$ は等価である.

Theorem 16. FLe で $(A\wedge)$ と $(R\wedge)$ は等価である.

以下で Theorem 15 と Theorem 16 を示す.

Theorem 15 の証明
I). FLe において, $(A{\to})$ から $(R{\to})$ を導出する.

$$\dfrac{A\to\neg\neg B \Rightarrow \neg\neg(A\to\neg\neg B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A\to B,\Gamma\Rightarrow}{\Gamma\Rightarrow\neg(\neg\neg A\to B)}\,(\neg\text{右}) \qquad \neg(\neg\neg A\to B)\Rightarrow\neg(A\to\neg\neg B)}{\Gamma\Rightarrow\neg(A\to\neg\neg B)}\,(cut)}{\neg\neg(A\to\neg\neg B),\Gamma\Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{A\to\neg\neg B,\Gamma\Rightarrow}\,(cut)$$

II). FLe において, $(R{\to})$ から $(A{\to})$ を示す.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg A\to B\Rightarrow\neg\neg A\to B}{\neg\neg A\to B,\neg(\neg\neg A\to B)\Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{A\to\neg\neg B,\neg(\neg\neg A\to B)\Rightarrow}\,(R{\to})}{\neg(\neg\neg A\to B)\Rightarrow\neg(A\to\neg\neg B)}\,(\neg\text{右})$$

よって, I), II) から Theorem 15 は成り立つ.

Theorem 16 の証明
I). FLe において, $(A\wedge)$ から $(R\wedge)$ を導出する.

$$\dfrac{\neg\neg A\wedge\neg\neg B \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg A\wedge\neg\neg B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\wedge B,\Gamma\Rightarrow}{\Gamma\Rightarrow\neg(A\wedge B)}\,(\neg\text{右}) \qquad \neg(A\wedge B)\Rightarrow\neg(\neg\neg A\wedge\neg\neg B)}{\Gamma\Rightarrow\neg(\neg\neg A\wedge\neg\neg B)}\,(cut)}{\neg\neg(\neg\neg A\wedge\neg\neg B),\Gamma\Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\neg A\wedge\neg\neg B,\Gamma\Rightarrow}\,(cut)$$

II). FLe において, $(R{\to})$ から $(A{\to})$ を示す.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\wedge B\Rightarrow A\wedge B}{A\wedge B,\neg(A\wedge B)\Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg\neg A\wedge\neg\neg B,\neg(A\wedge B)\Rightarrow}\,(R\wedge)}{\neg(A\wedge B)\Rightarrow\neg(\neg\neg A\wedge\neg\neg B)}\,(\neg\text{右})$$

よって, I), II) から Theorem 16 は成り立つ.

ここで次のように contraction と weakening を制限した推論規則である (Rlc) と (Rlw) を定義する.

Definition 17. (推論規則 (Rlc) と (Rlw))

$$\dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow}{A, \Gamma \Rightarrow}\,(Rlc) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow}{A, \Gamma \Rightarrow}\,(Rlw)$$

さらに次のように公理 (Alc) と (Alw) を定義する.

Definition 18. (公理 (Alc) と (Alw))

$$\neg(\alpha \bullet \alpha) \rightarrow \neg\alpha \cdots (Alc)$$
$$\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \bullet \beta) \cdots (Alw)$$

このように定義すると以下の Theorem が得られる.

Theorem 17. FLe で (Alc) と (Rlc) は等価である.

Theorem 18. FLe で (Alw) と (Rlw) は等価である.

以下で Theorem 17 と Theorem 18 を示す.

Theorem 17 の証明
I). FLe において, (Alc) から (Rlc) を導出する.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A \bullet A) \Rightarrow \neg A \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{\neg(A \bullet A), A \Rightarrow}\,(cut)}{A \Rightarrow \neg\neg(A \bullet A)}\,(\neg\text{右}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow}{A \bullet A, \Gamma \Rightarrow}\,(\bullet\text{左})}{\Gamma \Rightarrow \neg(A \bullet A)}\,(\neg\text{右})}{\neg\neg(A \bullet A), \Gamma \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{A, \Gamma \Rightarrow}\,(cut)$$

II). FLe において, (Rlc) から (Alc) を示す.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A \bullet A}\,(\bullet\text{右})}{A, A, \neg(A \bullet A) \Rightarrow}\,(\neg\text{左})}{A, \neg(A \bullet A) \Rightarrow}\,(Rlc)}{\neg(A \bullet A) \Rightarrow \neg A}\,(\neg\text{右})$$

よって, I), II) から Theorem 17 は成り立つ.

Theorem 18 の証明

I). FLe において, (Alw) から (Rlw) を導出するが, その前に以下のことを証明する.

$\Gamma\ :\ D_1, \cdots, D_n$

$\Gamma^*\ :\ D_1 \bullet \cdots \bullet D_n$ とすると,

$$
\dfrac{\dfrac{\vdots\ \dfrac{\dfrac{D_1 \Rightarrow D_1 \quad D_2 \Rightarrow D_2}{D_1, D_2 \Rightarrow D_1 \bullet D_2}(\bullet\text{右}) \qquad D_3 \Rightarrow D_3}{D_1, D_2, D_3 \Rightarrow D_1 \bullet D_2 \bullet D_3}(\bullet\text{右})}{}(\bullet\text{右})}{}
$$

$$
\dfrac{D_1, \cdots, D_{n-1} \Rightarrow D_1 \bullet \cdots \bullet D_{n-1} \qquad D_n \Rightarrow D_n}{D_1, \cdots, D_n \Rightarrow D_1 \bullet \cdots \bullet D_n}(\bullet\text{右})
$$

が証明可能であり, したがって $\Gamma \Rightarrow \Gamma^*$ が証明可能.

この結果を用いると,

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma^* \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg\Gamma^*}(\neg\text{右}) \quad \neg\Gamma^* \Rightarrow \neg(A \bullet \Gamma^*)}{\Rightarrow \neg(A \bullet \Gamma^*)}(cut) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad \Gamma^* \Rightarrow \Gamma^*}{\Gamma^*, A \Rightarrow A \bullet \Gamma^*}(\bullet\text{右})}{\Gamma^*, A, \neg(A \bullet \Gamma^*) \Rightarrow}(\neg\text{左})}{A, \neg(A \bullet \Gamma^*) \Rightarrow \neg\Gamma^*}(\neg\text{右})}{\dfrac{A \Rightarrow \neg\Gamma^*}{\neg\neg\Gamma^*, A \Rightarrow}(\neg\text{左})}(cut) \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Gamma^*}{\Gamma, \neg\Gamma^* \Rightarrow}(\neg\text{左})}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg\Gamma^*}(\neg\text{右})}{A, \Gamma \Rightarrow}(\bullet\text{右})
$$

II). FLe において, (Rlw) から (Alw) を示す.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B, \neg B \Rightarrow}(\neg\text{左})}{A, B, \neg B \Rightarrow}(Rlw)}{A \bullet B, \neg B \Rightarrow}(\bullet\text{左})}{\neg B \Rightarrow \neg(A \bullet B)}(\neg\text{右})
$$

よって, I), II) から Theorem 18 は成り立つ.

Definition 15, 16, 17, 18 および，Theorem 15, 16, 17, 18 を踏まえた上で, 下記のような定義を導入する.

論理 L を $L \supseteq FLe$ かつ involutive(すなわち $L \supseteq CFLe = InFLe$) とし，L に関して *Glivenko* の定理が成り立つ最小の論理 K_0 を次のように定義する.

Definition 19.

$$\begin{array}{lllll} K_0 & : & FLe & + & \neg(\neg\neg\alpha\to\beta)\to\neg(\alpha\to\neg\neg\beta) \cdots (A\to) \\ & & & + & \neg(\alpha\wedge\beta)\to\neg(\neg\neg\alpha\wedge\neg\neg\beta) \cdots (A\wedge) \end{array}$$

また, 次のように K_0 と同等の強さを持つ論理 K_0' を導入する.

Definition 20.

$$\begin{array}{lllll} K_0' & : & FLe & + & \dfrac{\neg\neg A\to B,\Gamma\Rightarrow}{A\to\neg\neg B,\Gamma\Rightarrow}\ (R\to) \\ & & & + & \dfrac{A\wedge B,\Gamma\Rightarrow}{\neg\neg A\wedge\neg\neg B,\Gamma\Rightarrow}\ (R\wedge) \end{array}$$

先に示した Theorem 15, Theorem 16 により, この K_0 と K_0' は同等であることがわかる. さて, この節でここまで述べた定義や定理から次の Theorem が成り立つ.

Theorem 19. $CFLe \vdash \varphi \quad$ *iff* $\quad K_0 \vdash \neg\neg\varphi$

Theorem 20. $CFLew \vdash \varphi \quad$ *iff* $\quad K_0 + (Alw) \vdash \neg\neg\varphi$

Theorem 21. $CFLec \vdash \varphi \quad$ *iff* $\quad K_0 + (Alc) \vdash \neg\neg\varphi$

Theorem 22. $LK(= CFLecw) \vdash \varphi \quad$ *iff* $\quad K_0 + (Alc) + (Alw) \vdash \neg\neg\varphi$

以下で Theorem 19 を示す.

Proof.
$\neg\neg\varphi$ が K_0 で provable ならば, 明らかに $\neg\neg\varphi$ は $CFLe$ でも provable である．ところが $CFLe$ は involutive なため, sequent $\neg\neg\varphi\Rightarrow\varphi$ が provable だから，φ は L で provable になる.

よって,

Lemma 13.

$$K_0 \vdash \neg\neg\varphi \qquad \text{ならば} \qquad CFLe \vdash \varphi$$

とできる.

逆を証明するために, 次の Lemma 14 を示す.

Lemma 14.

$$CFLe \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \text{ならば} \qquad K_0 \vdash \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow$$

この証明は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に到る証明図の長さに関する帰納法を使って行う.

まず $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が initial sequent のとき Lemma 10 の左辺から右辺への証明は明らかに成り立つ. そこで $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は initial sequent ではないとし, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図で最後に使われた推論規則を I とする.

1a). I が (e 左) のとき

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow \Delta}\ (e\ \text{左})$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, \Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow}{\neg\Delta, \Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow}\ (e\ \text{左})$$

よって, $K_0 \vdash \neg\Delta, \Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow$.

1b). I が (e 右) のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Sigma}\ (e\ \text{右})$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, \neg A, \neg B, \neg\Sigma, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg B, \neg A, \neg\Sigma, \Gamma \Rightarrow}\ (e\ \text{左})$$

よって, $K_0 \vdash \neg\Delta, \neg B, \neg A, \neg\Sigma, \Gamma \Rightarrow$.

2a). I が ($\wedge$左 1) のとき

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \land B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\land左1)$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, A \land B, \Gamma \Rightarrow}\ (\land左1)$$

よって, $K_0 \vdash \neg\Delta, A \land B, \Gamma \Rightarrow$.

2b).I が $(\land$左$2)$ のとき
$(\land$左$1)$ のときと同様に示せる.

2c).I が $(\land$右$)$ のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \land B}\ (\land右)$$

ところで,

$$\frac{\dfrac{A \land B \Rightarrow A \land B}{A \land B, \neg(A \land B) \Rightarrow}\ (\neg左)}{\neg\neg A \land \neg\neg B, \neg(A \land B) \Rightarrow}\ (R\land)$$

より, $K_0 \vdash \neg\neg A \land \neg\neg B, \neg(A \land B) \Rightarrow$.
この結果と帰納法の仮定より,

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow \neg\neg A}\ (\neg右) \quad \dfrac{\neg\Delta, \neg B, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow \neg\neg B}\ (\neg右)}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow \neg\neg A \land \neg\neg B}\ (\land右) \quad \neg\neg A \land \neg\neg B, \neg(A \land B) \Rightarrow}{\neg(A \land B), \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}\ (cut)$$

よって, $K_0 \vdash \neg(A \land B), \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow$.

3a).I が $(\lor$左$)$ のとき

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \lor B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\lor左)$$

帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow \quad \neg\Delta, B, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, A \vee B, \Gamma \Rightarrow}\ (\vee\text{左})$$

よって, $K_0 \vdash \neg\Delta, A \vee B, \Gamma \Rightarrow$.

3b).I が $(\vee$右 $1)$ のとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (\vee\text{右 } 1)$$

ところで,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \vee B}\ (\vee\text{右 } 1)}{\neg(A \vee B), A \Rightarrow}\ (\neg\text{左})}{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A}\ (\neg\text{右}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B \Rightarrow A \vee B}\ (\vee\text{右 } 2)}{\neg(A \vee B), B \Rightarrow}\ (\neg\text{左})}{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg B}\ (\neg\text{右})}{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B}\ (\wedge\text{右})$$

より, $K_0 \vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$.
この結果と帰納法の仮定より,

$$\dfrac{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B \quad \dfrac{\neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg A \wedge \neg B, \Gamma \Rightarrow}\ (\wedge\text{左 } 1)}{\neg\Delta, \neg(A \vee B), \Gamma \Rightarrow}\ (cut)$$

よって, $K_0 \vdash \neg\Delta, \neg(A \vee B), \Gamma \Rightarrow$.

3c).I が $(\vee$右 $2)$ のとき
$(\vee$右 $1)$ のときと同様に示せる.

4a).I が $(\rightarrow$左$)$ のとき

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\rightarrow\text{左})$$

ところで,

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\AxiomC{$B \Rightarrow B$}
\RightLabel{(¬右)}
\UnaryInfC{$\neg B, B \Rightarrow$}
\RightLabel{(¬左)}
\UnaryInfC{$B \Rightarrow \neg\neg B$}
\RightLabel{(→左)}
\BinaryInfC{$A, A{\to}B \Rightarrow \neg\neg B$}
\RightLabel{(→右)}
\UnaryInfC{$A{\to}B \Rightarrow A{\to}\neg\neg B$}
\RightLabel{(¬左)}
\UnaryInfC{$A{\to}B, \neg(A{\to}\neg\neg B) \Rightarrow$}
\end{prooftree}
$$

より, $K_0 \vdash A{\to}B, \neg(A{\to}\neg\neg B) \Rightarrow$.
この結果と帰納法の仮定と, さらに $(A{\to})$ より,

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg A, \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow$}
\RightLabel{(¬右)}
\UnaryInfC{$\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow \neg\neg A$}
\AxiomC{$\neg\Sigma, B, \Pi \Rightarrow$}
\RightLabel{(→左)}
\BinaryInfC{$\neg\neg A{\to}B, \neg\Sigma, \neg\Delta, \Gamma, \Pi \Rightarrow$}
\RightLabel{(¬右)}
\UnaryInfC{$\neg\Sigma, \neg\Delta, \Gamma, \Pi \Rightarrow \neg(\neg\neg A{\to}B)$}
\AxiomC{$\neg(\neg\neg A{\to}B) \Rightarrow \neg(A{\to}\neg\neg B)$}
\RightLabel{(cut)}
\BinaryInfC{$\neg\Sigma, \neg\Delta, \Gamma, \Pi \Rightarrow \neg(A{\to}\neg\neg B)$}
\AxiomC{$A{\to}B, \neg(A{\to}\neg\neg B) \Rightarrow$}
\RightLabel{(cut)}
\BinaryInfC{$\neg\Sigma, \neg\Delta, A{\to}B, \Gamma, \Pi \Rightarrow$}
\end{prooftree}
$$

よって, $K_0 \vdash \neg\Sigma, \neg\Delta, A{\to}B, \Gamma, \Pi \Rightarrow$.

4b). I が (→右) のとき

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$}
\RightLabel{(→右)}
\UnaryInfC{$\Gamma \Rightarrow \Delta, A{\to}B$}
\end{prooftree}
$$

ところで,

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{(¬左)}
\UnaryInfC{$\neg A, A \Rightarrow$}
\RightLabel{(¬右)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow \neg\neg A$}
\AxiomC{$B \Rightarrow B$}
\RightLabel{(→左)}
\BinaryInfC{$A, \neg\neg A{\to}B \Rightarrow B$}
\RightLabel{(→右)}
\UnaryInfC{$\neg\neg A{\to}B \Rightarrow A{\to}B$}
\RightLabel{(¬左)}
\UnaryInfC{$\neg\neg A{\to}B, \neg(A{\to}B) \Rightarrow$}
\RightLabel{(¬右)}
\UnaryInfC{$\neg(A{\to}B) \Rightarrow \neg(\neg\neg A{\to}B)$}
\end{prooftree}
$$

より, $K_0 \vdash \neg(A{\to}B) \Rightarrow \neg(\neg\neg A{\to}B)$.
この結果と帰納法の仮定と, さらに $(A{\to})$ より,

$$
\dfrac{\neg(A\to B) \Rightarrow \neg(\neg\neg A\to B) \qquad \dfrac{\neg(\neg\neg A\to B) \Rightarrow \neg(A\to\neg\neg B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B, \neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow \neg\neg B}\ (\neg 右)}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow A\to\neg\neg B}\ (\to 右)}{\neg(A\to\neg\neg B), \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}\ (\neg 左)}{\neg(\neg\neg A\to B), \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}\ (cut)}{\neg\Delta, \neg(A\to B), \Gamma \Rightarrow}\ (cut)
$$

よって, $K_0 \vdash \neg\Delta, \neg(A\to B), \Gamma \Rightarrow$.

5a).I が $(\neg$左$)$ のとき

$$
\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg 左)
$$

帰納法の仮定より,
直ちに, $K_0 \vdash \neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow$.

5b).I が $(\neg$右$)$ のとき

$$
\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\neg 右)
$$

帰納法の仮定より,

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow \neg A}\ (\neg 右)}{\neg\neg A, \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}\ (\neg 左)}{\neg\Delta, \neg\neg A, \Gamma \Rightarrow}\ (e\ 左)
$$

よって, $K_0 \vdash \neg\Delta, \neg\neg A, \Gamma \Rightarrow\ \Rightarrow$.

よって, **1).-5).** より Lemma 14 が示された.
したがって, Lemma 13 と Lemma 14 より Theorem 19 は成り立つ.

Q.E.D

同様な証明で Theorem 20, 21, 22 が成り立つが, 左辺から右辺を導く際には同様に証明図

の長さに関する帰納法で証明を行う. その際の I が (w 左), (w 右), (c 左), (c 右) の場合の証明を以下に示す.

Proof.
I が (w 左) のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (w\,\text{左})$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow}\ (Rlw)$$

よって, $K_0\ +\ (Alw) \vdash \neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow\ $.

I が (w 右) のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (w\,\text{右})$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow}\ (Rlw)$$

よって, $K_0\ +\ (Alw) \vdash \neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow\ $.

I が (c 左) のとき

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (c\,\text{左})$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, A, A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow}\ (Rlc)$$

よって, $K_0\ +\ (Alc) \vdash \neg\Delta, A, \Gamma \Rightarrow\ $.

I が (c 右) のとき

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (c\text{右})$$

帰納法の仮定より,

$$\frac{\neg\Delta, \neg A, \neg A, \Gamma \Rightarrow}{\neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow}\ (Rlc)$$

よって, $K_0\ +\ (Alc) \vdash \neg\Delta, \neg A, \Gamma \Rightarrow\ $.

Q.E.D

Glivenko の定理の一般化

先の Theorem 19, 20, 21, 22 を一般的な形にすると,

Theorem 23.

$$CFLe + \alpha \vdash \varphi \quad \textit{iff} \quad K_0 + \neg\neg\alpha \vdash \neg\neg\varphi$$

(ただし, α は公理)

とできる. 以下でこの Theorem 23 を示す.

Proof.

sequent 計算を用いると, $CFLe + \alpha$ は $CFLe$ に $\Rightarrow \alpha^*$ の形の任意の sequent を initial sequent として付け加えることにより定義される (ただし, α^* は α の代入例). 同様に $K_0 + \neg\neg\alpha$ は K_0 に $\Rightarrow \neg\neg\alpha^*$ を付け加えることにより定義される。ところで, 先に示した Theorem 19 により,

$$CFLe \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \textit{iff} \qquad K_0 \vdash \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow$$

を帰納法で証明できた. この証明と同様にして,

$$CFLe + \alpha \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \textit{iff} \qquad K_0 + \neg\neg\alpha \vdash \neg\Delta, \Gamma \Rightarrow$$

が証明できる.

右辺から左辺は明らかである.

逆の証明は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に到る証明図の長さに関する帰納法を使って行う.
$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\Rightarrow \alpha^*$ の形のとき.
このとき, $\neg\neg\alpha^*$ は $\neg\neg\alpha$ の代入例であるから, $K_0+\neg\neg\alpha$ の定義により $\Rightarrow \neg\neg\alpha^*$ は $K_0+\neg\neg\alpha$ の initial sequent である. したがって, $\neg\alpha^* \Rightarrow$ は $K_0+\neg\neg\alpha$ で provable.
$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が他の場合に関しては Theorem 19 の証明と同様である.
したがって, $K_0+\neg\neg\alpha$ は $CFLe+\alpha$ に関して G.p. を持つ.
よって, Theorem 23 は成り立つ. *Q.E.D*

5.2.4 最小性の証明

ここでは K_0 が最小であるということの証明 (最小性の証明) を行うが, 例として Theorem 19 においての証明を行う.

Proof.

$K \supseteq FLe$, K_0 : $FLe + (A\to) + (A\wedge)$ として
$CFLe$ に関して K が G.p. を持つと仮定する.
つまり, $CFLe \vdash \varphi \quad \textit{iff} \quad K \vdash \neg\neg\varphi$ が成り立つと仮定する.
すると, $CFLe$ は involutive なので $CFLe$ で $(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta)\to(\alpha \wedge \beta)$ が provable.
すると, 仮定より K で $\neg\neg((\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta)\to(\alpha \wedge \beta))$ が provable となる.

ところが, $FLe \vdash \neg\neg(\varphi\to\psi) \Rightarrow \neg\psi\to\neg\varphi$. $\cdots$ $(*)$
が下記のように provable.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \quad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \varphi\to\psi \Rightarrow \psi}\ (\to左)}{\varphi, \varphi\to\psi, \neg\psi \Rightarrow}\ (\neg左)}{\varphi, \neg\neg(\varphi\to\psi), \neg\psi \Rightarrow}\ (\neg 2\text{回})}{\neg\neg(\varphi\to\psi), \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi}\ (\neg右)}{\neg\neg(\varphi\to\psi) \Rightarrow \neg\psi\to\neg\varphi}\ (\to右)}{}$$

ここで φ として $\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$ をとり, ψ として $\alpha \wedge \beta$ をとると,
$(*)$ から $FLe \vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta)$.
つまり, $K \vdash (A\wedge)$ が得られる.
同様な証明で $K \vdash (A\rightarrow)$ も得られる.
よって, K は FLe も $(A\wedge)$ も $(A\rightarrow)$ も含まなくてはならない.
したがって, $K \supseteq K_0$ とでき, K_0 は最小であると言える. $Q.E.D$

第6章　まとめ

これまでの研究により, 部分構造論理の諸性質, positive fragments, $Kolmogorov$ の定理, ゲーデル変換, $Glivenko$ の定理における基本的な知識を得ることができた.

また, 本研究の成果としては, The $Kolmogorov$-style translation の定義の形をより単純に再定義した translation S を与えた. また, CFLex(x には c または w が入る) に関して $Glivenko$ の定理が成立する最小の論理 K_0 を与え, それを証明論的アプローチにより示した証明がある.

本研究ではこれまで, 扱う部分構造論理を commutative なものに限定してきたので, 今後の課題としては, non-commutative な論理についても考察していきたい.

謝辞

本研究を行う上で, 日頃から丁寧なご指導をして下さいました小野 寛晰教授に深く感謝いたします. また, 数理論理学の基礎的な部分を指導して下さいました相馬 大輔さん, さらに研究全体を支えて下さいました木原 均さんの二人の小野研究室の先輩方に厚くお礼申し上げます.

参考文献

[1] D.V.Dalen, *Logic and Structure,Fourth Edition*, Springer, Utrecht University, 2003.

[2] N.Galatos, P.Jipsen, T.Kowalski and H.Ono, *Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol.151, Elsevier, April, 2007

[3] N.Galatos and H.Ono, *Glivenko theorems for substructural logics over FL*, Journal of Symbolic Logic, 71(2006), pp.1353-1384.

[4] 松田真由美, 証明論的手法を用いた部分構造論理間の埋め込みに関する研究, 北陸先端科学技術大学院大学修士論文, 2002.

[5] H.Ono, *Structural rules and a logical hierarchy*, in Mathematical Logic, edited by P.P. Petkov, Plenum Press, 1990, pp.95-104.

[6] 小野寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.

[7] H.Ono, *Proof-theoretic methods in nonclassical logic —an introduction*, in Theories of Types and Proofs, MSJ-Memoir 2, edited by M.Takahashi, M.Okada and M.Dezani, Mathematical Society of Japan, 1998, pp.207-254.

[8] 杉山貴宣, 部分構造論理への証明論的アプローチ, 北陸先端科学技術大学院大学修士論文, 2004.

[9] A.S.Troelstra, *Lectures on Linear Logic*, CSLI Lecture Notes 29, Stanford University, 1992.

[10] 鶴見卓哉, 様相演算を持つ部分構造論理の証明論的研究, 北陸先端科学技術大学院大学修士論文, 2006.