Title	Involutiveな部分構造論理に対する証明論的アプローチ
Author(s)	瀧田，康晴
Citation	
Issue Date	2008-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/4360
Rights	
Description	Supervisor:小野寛晰，情報科学研究科，修士

involutive な部分構造論理に対する証明論的アプローチ

瀧田 康晴 (510062)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2008 年 2 月 7 日

キーワード: involutive, 部分構造論理, Positive fragments, $Kolmogorov$ の定理, $Glivenko$ の定理.

1 はじめに

部分構造論理とは古典論理や直観主義論理から構造規則のうちの一部あるいは全部を取り除いた論理である. このような体系において, どのような論理的性質が成り立ち, また, どのような論理的性質が成り立たないのかを検討することは, それぞれの構造規則と論理的性質の間の関係を明らかにする手段として非常に有効である.

このような研究を展開する際の方法としては証明論的手法と代数的手法がある. 本研究では主として前者を sequent 計算に対して適用し, また involutive な部分構造論理, すなわち二重否定の公理を満たす部分構造論理を研究対象とする.

この研究の目的は, 与えられた論理に二重否定の公理を付け加えたとき, どの性質が保たれるのか, またどのようにその論理的性質が変化するかを明らかにすることである.

本研究では cut-free な部分構造論理の sequent 計算にもとづき、証明論的方法で研究を進める。commutative な部分構造論理の場合、両辺に複数の論理式を許す sequent(LK 型の sequent) を用いることにより involutive な論理の sequent 計算を導入することができる。このような sequent 計算で cut 除去定理が成り立つものを利用して、上記の研究を進める。

translation とは二つの異なる論理間の関係を明らかにするものである. 代表的な translation に, 古典命題論理と直観主義命題論理の間の translation を示した $Kolmogorov$ の定理と $Glivenko$ の定理がある. これらに対して考察, 証明を行い, さらにこれらの定理を involutive な部分構造論理とそうでない部分構造論理の間に対して拡張する.

2 部分構造論理と sequent 計算の体系

部分構造論理の中の基本的な体系である FL は簡単に言えば LJ から構造に関する推論規則をすべて除いた体系である. また, LK から構造に関する推論規則をすべて除いた体系

を CFL という. さらに, FL に二重否定の公理 (involution) $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$ を付け加えた体系を $InFL$ という.

ただし, 記述があまり複雑になることを避けるため, 今後本研究で扱う部分構造論理の体系は exchage rule を含む体系に限定して議論する.

FL, CFL, $InFL$ に exchange rule を付け加えた体系を, FLe, $CFLe$, $InFLe$ と表す. $CFLe$ は MALL(multiplicative additive linear logic), また FLe は intuitionistic linear logic ともよばれる.

3 Positive fragments

部分構造論理間の translation を研究する上で重要な結果である positive fragments について述べる. この結果を通じて, いかに $\neg$ (negation) が部分構造論理間の translation に関係しているかということを考察する.

以下に positive fragments および, positive formula の定義を述べる.

Definition 1. *(positive formula)*
論理式 φ が $\neg$ を一つを含まない *(*定数 *0* も*)* とき*,*φ を *positive formula* という*.*

Definition 2. *(Positive fragments)*
logic L に対し, L^{+} は L で証明可能な *positive formula* 全体の集合とし*,*L の *positive fragment* という

このように定義すると, 以下の Theorem が成り立つ.

Theorem 1. $CFLew^{+} \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$ *iff* $FLew^{+} \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$

Theorem 2. $CFLe^{+} \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$ *iff* $FLe^{+} \vdash \Gamma \Rightarrow \alpha$

一方, これらの Theorem で成り立つ関係は $LK^{+}(CFLecw^{+})$ と $LJ^{+}(FLecw^{+})$ の間では成り立たないことがわかった.

これらの証明を考察すると contraction 右の推論規則が positive fragments が成り立つかどうかを左右する要因となっていることがわかる.

これらの結果より, contraction 右の推論規則を持たない同士の部分構造論理の体系に関して, $\neg$, 0 を認めなければこの体系同士に違いは無いことがわかった. したがって, $\neg$ が後の章に述べる translation に対して重要な役割を持っていることがわかる.

4 $Kolmogorov$ の定理およびその応用

ここではコルモゴロフ (*A.N.Kolmogorov*) によって示された $Kolmogorov$ の定理 (The *Kolmogorov*-style translation) とそれを部分構造論理間への translation へと拡張した結果を解説する (松田 [4] 参照). さらにこれらの結果に基づいて新しく導入した translation S を解説する.

Definition 3. *(The Kolmogorov-style translation)*
*(*古典論理の*)* 各論理式 C に対し, 論理式 $T(C)$ を次のように帰納的に定義する*.*
$T(\bot) := \neg\neg\bot$
$T(\top) := \top$
$T(p) := \neg\neg p \quad$ *(*p は命題変数*)*
$T(A \wedge B) := \neg\neg(T(A) \wedge T(B))$
$T(A{\to}B) := \neg\neg(T(A){\to}T(B))$
$T(A \vee B) := \neg(\neg T(A) \wedge \neg T(B))$
$T(\neg A) := \neg T(A)$

次の結果は $Kolmogorov$ の定理として知られている. 例えば, LJ で $\neg\neg(T(A) \wedge T(B)) \Rightarrow T(D)$ が証明可能ならば LK で $A \wedge B \Rightarrow D$ が成り立つことおよびその逆を示している.

Theorem 3.
古典論理で A が証明可能となる必要十分条件は, 直観主義論理で $T(A)$ が証明可能となることである*.*

$$LJ \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D) \quad \textit{iff} \quad LK \vdash \Gamma \Rightarrow D$$

ここで Γ を空, D を A とすれば求める結果が得られる.
もともとの $Kolmogorov$ の定理は松田によって部分構造論理間の translation へと拡張された (参考文献 [4]). ここでは松田による部分構造論理への拡張を述べる.

Definition 4.
Definition 3 の *translation* T を拡張し*,* $T(0),\ T(1),\ T(A \bullet B)$ を次のように定める*.*
$T(0) := 0$
$T(1) := \neg\neg 1$
$T(A \bullet B) := \neg\neg(T(A) \bullet T(B))$

このように, T の定義を拡張すると, 先に示した Theorem 3 の証明と同様の証明により以下の結果が得られる.

Theorem 4.

$$\begin{aligned} FLe \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D) &\quad \textit{iff} \quad CFLe \vdash \Gamma \Rightarrow D \\ FLew \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D) &\quad \textit{iff} \quad CFLew \vdash \Gamma \Rightarrow D \\ FLec \vdash T(\Gamma) \Rightarrow T(D) &\quad \textit{iff} \quad CFLec \vdash \Gamma \Rightarrow D \end{aligned}$$

以下は $Kolmogorov$ の定理および松田による拡張をふまえた上で新たに導入した translation である.

Definition 5. *(translation S)*
$S(p) := \neg\neg p \quad$ *(*p は命題定数および命題変数*)*

$S(\neg A) := \neg S(A)$
$S(A \bullet B) := \neg\neg(S(A) \bullet S(B))$
$S(A \vee B) := \neg\neg(S(A) \vee S(B))$
$S(A \wedge B) := S(A) \wedge S(B)$
$S(A{\rightarrow}B) := S(A){\rightarrow}S(B)$

実際, S と T は FLe 上で同値になるので, Theorem 4 の T を S で置き換えた結果が成り立つ.

5 *Glivenko* の定理およびその応用

Theorem 5. *(Glivenko の定理)*
A を任意の命題論理の論理式とする. このとき A が LK で証明可能となる必要十分条件は $\neg\neg A$ が LJ で証明可能となることである.

この Theorem は, A に対し, $\neg\neg A$ を与える変換により古典命題論理を直観主義論理の中へ"埋め込む"ことができることを示している.

論理 L は $L \supseteq FLe$ かつ involutive(すなわち $L \supseteq CFLe = InFLe$) とし, L に関する *Glivenko* の定理が成り立つ最小の論理 K_0 を次のように定義する.

$$
\begin{array}{rcll}
K_0 & : & FLe & + \ \neg(\neg\neg\alpha{\rightarrow}\beta){\rightarrow}\neg(\alpha{\rightarrow}\neg\neg\beta) \\
 & & & + \ \neg(\alpha \wedge \beta){\rightarrow}\neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta)
\end{array}
$$

すると, 以下の Theorem を示すことができた.

Theorem 6. $CFLe \vdash \varphi$ *iff* $K_0 \vdash \neg\neg\varphi$

Theorem 7. $CFLew \vdash \varphi$ *iff* $K_0 + \neg\beta{\rightarrow}\neg(\alpha \bullet \beta) \vdash \neg\neg\varphi$

Theorem 8. $CFLec \vdash \varphi$ *iff* $K_0 + \neg(\alpha \bullet \alpha){\rightarrow}\neg\alpha \vdash \neg\neg\varphi$

6 まとめ

今回の研究で部分構造論理の間の *Kolmogorov*-style translation や *Glivenko* の定理を用いていくつかの translation についての結果を証明論的方法により得ることができた.

参考文献

[1] D.V.Dalen, *Logic and Structure -Fourth Edition-*, Springer, Utrecht University, 2003.

[2] N.Galatos, P.Jipsen, T.Kowalski and H.Ono, *Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol.151, Elsevier, April, 2007

[3] N.Galatos and H.Ono, *Glivenko theorems for substructural logics over FL*, Journal of Symbolic Logic, 71(2006), pp.1353-1384.

[4] 松田真由美, 証明論的手法を用いた部分構造論理間の埋め込みに関する研究, 北陸先端科学技術大学院大学修士論文, 2002.

[5] H.Ono, *Structural rules and a logical hierarchy*, in Mathematical Logic, edited by P.P. Petkov, Plenum Press, 1990, pp.95-104.

[6] 小野寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.

[7] H.Ono, *Proof-theoretic methods in nonclassical logic —an introduction*, in Theories of Types and Proofs, MSJ-Memoir 2, edited by M.Takahashi, M.Okada and M.Dezani, Mathematical Society of Japan, 1998, pp.207-254.

[8] 杉山貴宣, 部分構造論理への証明論的アプローチ, 北陸先端科学技術大学院大学修士論文, 2004.

[9] A.S.Troelstra, *Lectures on Linear Logic*, CSLI Lecture Notes 29, Stanford University, 1992.

[10] 鶴見卓哉, 様相演算を持つ部分構造論理の証明論的研究, 北陸先端科学技術大学院大学修士論文, 2006.