Title	適正在庫数の理論値導出に関する研究
Author(s)	齊藤，武史
Citation	
Issue Date	2003-06
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/490
Rights	
Description	Supervisor:吉田　武稔，知識科学研究科，修士

修　士　論　文

適正在庫数の理論値導出に関する研究

指導教官　　吉田　武稔　教授

北陸先端科学技術大学院大学
知識科学研究科知識社会システム学専攻

150035　齊藤　武史

審査委員：　吉田　武稔　教授　（主査）
國藤　進　　教授
藤波　努　　助教授
遠山　亮子　助教授

2003 年 5 月

目　次

第 1 章 はじめに

1.1 研究の背景と目的

近年，製造業，流通業，卸売業，そして小売業において需要予測は在庫管理する上で欠かせない業務となっている．たとえば，2002 年 3 月 5 日の日本経済新聞（次項図 1.1 参照）によるとオフィス文具の通信販売の大手企業, アスクル[*1]は過去の販売実績から割り出す需要予測を取引業者に公開している．この需要予測に対してのリスクの評価が必要とされている．特に，在庫切れに対するリスクを評価することが望まれている．また，消費者のニーズは多様化するだけでなく，ライフサイクルが短縮化されつつあり，図 1.2 に示されるようにリスクを考慮した需要予測が今後大切になるだろう．その需要予測から生まれる在庫切れリスクを計量的に推し量る方法論を金融工学が寄与できる技術に則り提案することが本研究の目的である．

需要予測 ■ 販売実績

取引先メーカーに公開

アスクル 在庫管理を効率化

オフィス用品通販のアスクルは、五月から商品別・地域別の需要予測や過去の販売実績などの情報を、インターネット経由で取引先メーカー四百社に全面公開する。リアルタイムのデータを公開することで、メーカー側の生産・在庫管理を効率化、アスクルの在庫数量も三〇%程度削減する。情報共有化で欠品を少なくして販売を増やす。

五月に本格稼働させるデータ共有化システム「シンクロマート」を通じてメーカーにデータを公開する。メーカーはアスクルが設けるサイトに接続してパスワードを入力すれば、自社製品の過去の販売実績や今後六カ月の需要予測を地域別・商品別で見ることができる。

一万二千五百品目の取り扱い商品すべてを公開、全国を五ブロックに分けて表示する。過去の受発注ミスなどの記録もわかるようにする。個別の顧客の購買情報は公開しない。メーカーに対しては、取引数量に応じて月額数万円のデータ利用料を徴収することも検討している。

メーカーはデータをもとに効率的な生産・販売計画を立てることができるようになる。アスクルはメーカーの生産効率化を促すことで、仕入れ価格の引き下げ交渉にも役立てたい考えだ。

メーカーと一体になった在庫管理ができるため、アスクル自身の在庫数量も現在の〇・七カ月分から〇・五カ月分に圧縮できるとみている。現在は欠品が一日当たり数十件あるが、情報公開で一週間当たりの欠品を数件に減らし、売り上げの拡大を目指す。

需要予測と販売のデータは当面、毎週日曜日に更新するが、今後一年以内に毎日更新できるようにする。共有データを活用してメーカーとの商品共同開発などにも生かす考えだ。

アスクルの情報公開の仕組み

メーカー（400社）

販売実績

需要予測（ネット公開）

利用料

アスクル

オフィス用品のネット・FAX販売

顧客企業

図 1.1 平成 14 年 3 月 5 日付け日本経済新聞

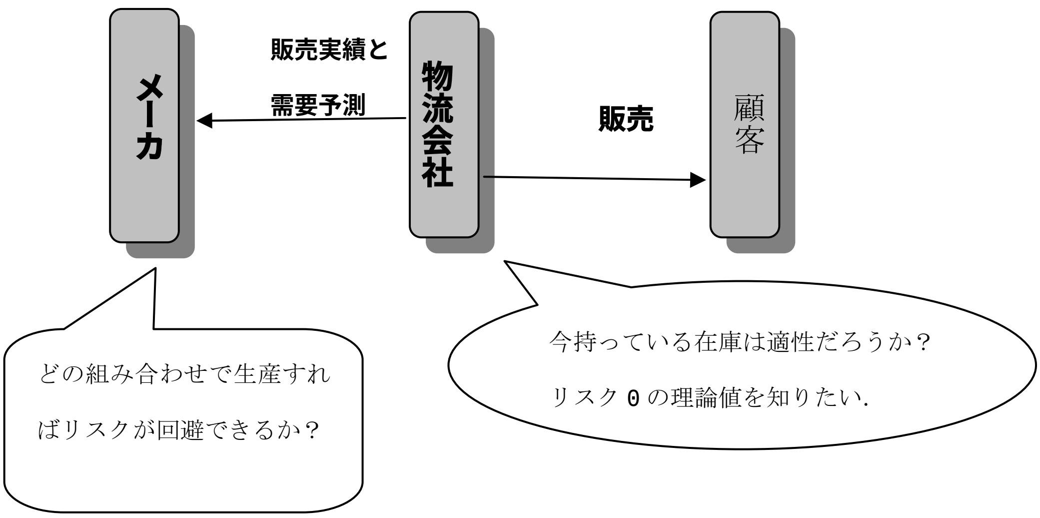

図 1.2 **需要予測**

1.2 本論文の構成

本論文は，前節における，本研究における社会的背景と本研究の目的が説明されていることに続き，1 章以下，全 6 章より構成される．

第 2 章では，本研究の問題定義として取り上げる在庫管理全般について論じ，特に本研究で最も注目される定期発注法の概要と問題点そして，定期発注法における在庫量のリスクの理論値について説明される．

第 3 章では，本研究で扱う基礎方法論について述べる．本研究において扱う理論は，確率論，確率過程，確率微分方程式，リスクの計量的評価法である VaR である．そのそれぞれについて詳しく説明される．

第 4 章では，本研究で扱う応用方法論について述べる．本章で扱う内容は，金融工学確立された，資産価格の時間的変遷における評価法を述べる．

第 5 章では，第 2 章における在庫管理の問題点を解決するために，第 3,4 章の確率論と金融工学的アプローチを適用したシミュレーションについて論じる．

第 6 章では，本研究のまとめとして，結論と今後の展望について論じられる．

1.3 本論文で扱う記号

確率　P

確率密度関数 f(x)

確率分布関数 F(x)

確率変数（売上個数，在庫数量）　X（第 3 章，第 4 章），S（第 5 章）

期待値（平均値）　E または μ

分散　Var

標準偏差　σ (= + $\sqrt{Var}$)

バリュー・アット・リスク　VaR

時間　T(未来),t(現在)

微小単位　Δ

ウィーナ過程　W(t)

注）確率変数と売上個数は同等である．

第 2 章 在庫管理

必要な時に必要な量だけ円滑に製品を流通させるためには，受注が予想される製品をあらかじめ準備して保管する必要がある．また製品を顧客の手元に届ける中間流通段階では，倉庫や流通業者の手元で製品が一時的に止め置かれることがある．これら保管や停滞を，意図して行う場合もあれば，意図せずにそれが起きる場合もある．いずれの状況でも保管や停滞が生じた場合，それらを在庫と呼ぶ.

在庫には, 資材供給業者から工場に運ばれ製造を待つ調達プロセスの結果としての「資材在庫」，製造プロセスの途中にあって次の作業を待つ「仕掛在庫」，完成品となった製品が工場の製品倉庫などで出荷を待つ「製品在庫」，顧客にわたるまでに工場と顧客の中間地点の倉庫や流通業者の手にある流通プロセス段階での「流通在庫」などがある．本研究では流通在庫に関して述べている．

ここで, 在庫量とは次のように考えるが, 日本生産管理学会[*1]によると在庫レベルと呼ばれる．

（仕入数量）— （売上数量）＝（在庫数量）

在庫数量(stock level)が少なすぎると，受注しているにもかかわらず品切れという事態が起こり得る．つまり販売機械の損失というリスクを背負うことになる．一方，在庫量が多すぎると，それを維持しているための費用が発生し経営効率が悪くなるリスクを背負うことになる．従って，受注に対して品切れにならない程度に在庫量は少ない方が良いことになる．このように，在庫品を合理的に管理し，費用を節約することにより経営効率を高めることを在庫管理と呼ぶ.

また，日本経営工学会[*2]によると，在庫管理(inventory management, inventory control)とは，次のような定義である．

> 必要な資材を，必要なときに，必要な量を，必要な場所へ供給できるように，各種品目の在庫を好ましい水準に維持するための諸活動.

在庫を合理的に管理していくためには，品物をいつ，どのくらい発注（生産）すべきかの規則を作り，在庫が自然に過不足ない合理的な水準に保たれるようにしなければならない．この，「いつ，どのくらい発注（生産）すべきか」という，発注時期と適切な発注数量を意思決定することが，在庫管理の醍醐味である．そして，本研究では，この意思決定に対する理論的指標をいかに決めるかを論じることにする．つまり，本研究では，従来から行われている需要見込み生産において中間流通業者が抱える在庫の理論的最適レベルの指標を求めることにする．そのためのアプローチとして金融工学で使われている確率論を用いる．

意思決定をする値として「発注時期」，「発注数量」があると述べたが，品切れが起こった時点でその都度一定量を発注する方式を発注点法[*3]といい，予め，発注時期は固定されており，需要予測を行い，その都度，発注量を変更する在庫管理法を定期発注法[*3]という．

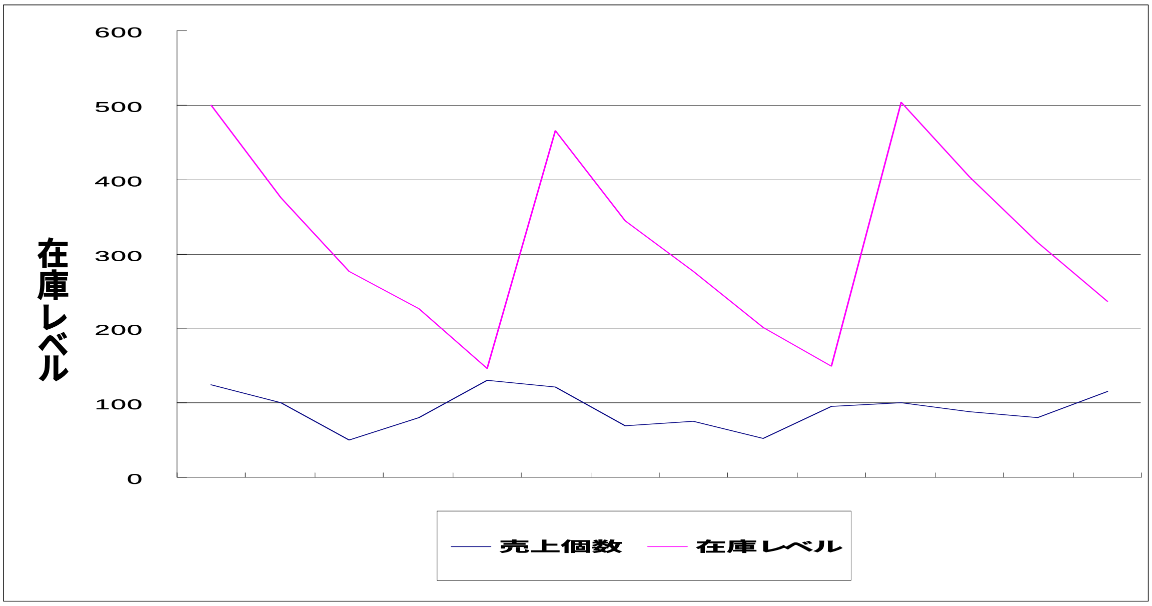

図 2.1 定期発注法

定期発注法は，予め発注日を決めておき在庫管理を行う手法である．その予め決めておく発注日の間隔を発注サイクル期間という. 発注日から納品日までの期間をリードタイムという. なお，納品日と製品の販売が可能な日が異なる場合は，発注日から，販売可能日の間をリードタイムとする．このような関係が図 2.1 に示される．発注量はその時期ごとに需要予測を行い決めることになる．発注量は一般的に式 2.1 で与えられるが，本研究はその発注量を求める研究ではないの

で，式を紹介するだけでと留めておく．本研究は，発注量が何らかの方法で求められたときの在庫レベルのリスク値を導出する研究である．

[発注量]=[(リードタイム+発注サイクル期間)の需要の推定値]-[現在の発注残]
-[現在の在庫量]+[安全余裕]　--------------------[2.1]

また，発注量は需要予測により決められることを述べたが，その需要予測にはいくつかの方法がある．過去の月間または週間需要の算術平均値を使用する方法，累積法，直接推定法などがある．需要予測に関してはこれ以上触れないことにする．なぜならば，本研究は予測値導出することが直接の目的ではなく，ある予測値に対し理論評価を与えることを目的としているためである．理論評価は確率微分方程式を導入し，金融工学の分野で確立されたリスクヘッジ理論を応用し導出することができる．とくに本論文の第 5 章では VaR というリスク評価指標を導入し，リスクとなっている在庫数量，すなわち在庫数量のリスクの理論値を導出する方法を提案している．

従来，定期発注法では急激な需要の変化や需要変動が大きいマーケットやばらつき度が高い商品の在庫管理には不向きであると思われがちである．それは，発注できる日が予め決められており，急な重要増に対しての融通が利きにくいからである．その都度需要は異なるけれども需要がある程度一定したマーケットでよく用いられる手法である．また，発注時期を固定するため，流通費用を抑えることができる．しかしながら，21 世紀になり，大量生産は通用しなくなり，商品のライフサイクルも短くなると，需要動向もなかなか一定しなくなり，予め発注日を固定しておく発注方式では，需要予測が重要になってくる．すなわち，需要予側の精度の向上が求められる．

本研究において提案される金融工学的アプローチを適用し，VaR による在庫数量のリスクの理論値が求まれば（発注量のリスク理論値），2 つのメリットが生まれてくる．1 つは，需要予測の助成である．伊藤型確率微分方程式の理論に則り，確率微分方程式に需要データを当てはめ未来の在庫数量の VaR 値を求め，すでに確立されている需要予測による予測値との比較が可能になるのである．2 つ目は，需要変動が大きな商品でも，定期発注法での在庫管理が可能になる．定期発注法のメリットは，発注日を固定することにより自動的に納品日も固定されることになる．例えば，コンビニエンスストアの場合，チェーン店が多くあるので，一度の配送で，多くの店に納品できることになりなる．もし，これが発注法の場合，各々の店によって発注日が異なってくるので，一度の配送でその発注店にのみ配送をすることなり，極端に配送効率が悪くなる．

第 3 章 確率論

3.1 背景

金融工学の無裁定価格理論の考え方は, 資産価格の時間的変動を確率的変動としてモデル化し, 複数の資産間に，裁定機会を求める．資産価格が確率変動するということは，株価や為替レートの変動を思い起こせばよい．図 3.1 は月次ベースの日経平均（1991 年 1 月-2003 年 3 月の約 10 年間分）の変動である．このような変動は，事前に予想しがたい非常に多くの要因が関係した変動である．したがって，株の保有や外貨の購入には価格変動リスクが伴う．

さて，本研究の対象として，製造業者や中間流通業者にとって問題である在庫に視点を置く．市場における ’もの’ の売上は消費者のニーズ次第では, 需要が事前には予想されにくい. つまり, 消費需要が確率的に変動すると考えるならば，この金融工学で確立された資産価格理論を用いて実証分析することにより，将来を推し量ることができるのである．そのときの確率変数は在庫数量(stock level)となる．単純に，[売上]＝[単価]×[売上数量]と考えるならば，売上を確率変数として考えることもできる．なお，[全体の数量]=[在庫数量]+[売上数量]と考えている．

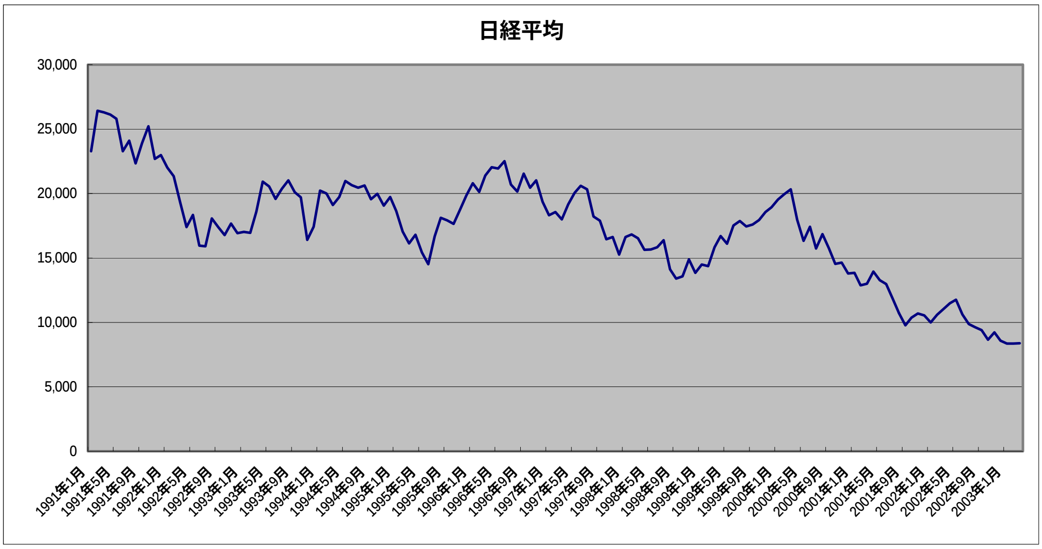

図 3.1 日経平均[1991.1-2003.3]

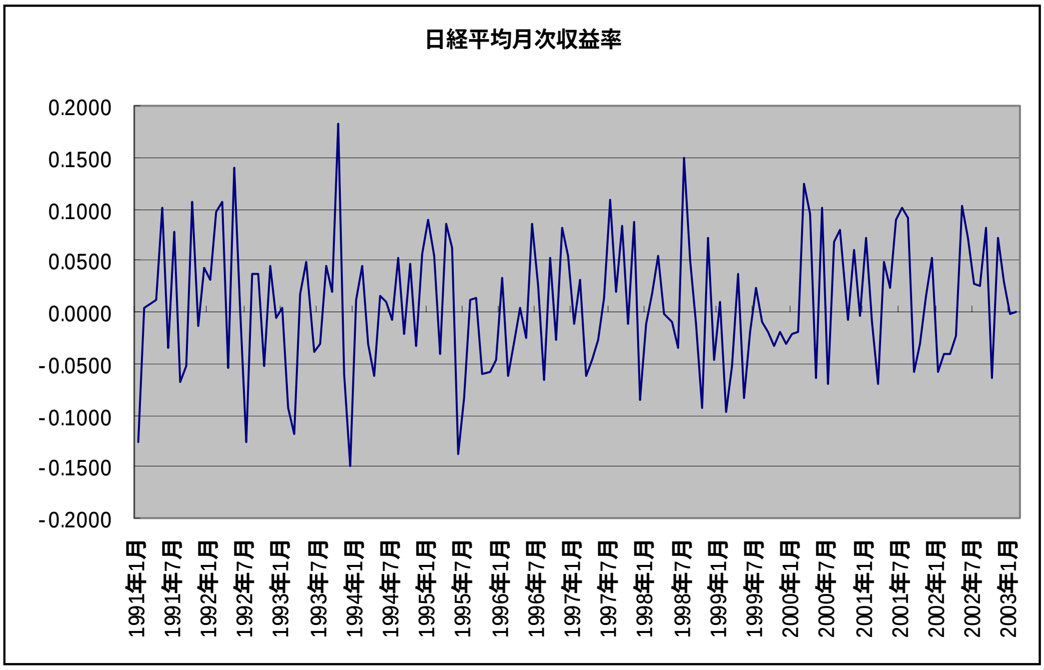

図 3.2 日経月次収益率平均[1991.1-2003.3]

3.2 シミュレーションする方法

売上数量を S とする．時点 n において S n をその確率分布に従って 1 つ実現させる．同様に，各時点の売上数量の確率変動を表現しモデル化する．このモデル化の意味するところは，次のとおりである．

「n 時点までの売上数量 $S_0, S_1, \bullet\bullet\bullet, S_n$ が実現されたときの将来の売上数量 $S_{n+1}, S_{n+2}, \bullet\bullet\bullet, S_N$ の条件付確率分布が得られる．」

ここで，このモデル化を 1 期間モデルに簡単化して考える．つまり，n=0,N=1 の場合を考える．そのためには，株価などの資産価格確率モデルを構築する場合に用いる収益率の理解が必要となる．本モデルでは，その収益率のことを，価格変動率という概念で置き換える．とくに連続複利表現の価格変動率 R_n として表現するならば，R_n は式 3.1 で与えられる．

$$R_n = \log(\frac{S_n}{S_{n-1}}) \text{------------------}[3.1]$$

[3.1]式を変形させると，式[3.2]となり，

$S_n = S_{n-1}\exp(R_n)$------------------[3.2]

S_{n-1}が与えられたときのS_nの確率分布は，S_{n-1}が与えられたときの価格変動率R_nの確率分布を考えることと同等である．よって，S_{n-1}が与えられたときのS_nのモデル化は，収益率R_nのモデル化と同じである．さらに，S_nに対し，対数変換したものを式 1.3 としてZ_nとして

$Z_n = \log S_n$------------------[3.3]

と置くと，[1.1]式は，

$R_n = Z_n - Z_{n-1} \equiv \Delta Z_n$------------------[3.4]

と同等になる．

S を日経平均として置き換えるときの価格変動率（月次収益率）のグラフが図 3.2 に示される．

さて，ここまで，株式のような不確実な価格変動を伴う資産を，金融工学では確率変数で表され，例えば日経平均を考えた場合，図 3.1,3.2 に示されるとおりであることを論じた．そして，単に価格自体の変動を見るだけではなく，それの対数をとって差分を考えた値を収益率と考えることも論じた．もちろん，本研究では，そのような確率変数は在庫数量で置き換えられる．そのとき，収益率は在庫数量の変動率と考える．次節からは，金融工学における資産価格の確率的変動をモデル化でするために理解すべき確率分布に関して連続型と離散型に分け説明する．

3.3 離散型確率分布

3.3.1 離散型確率分布の定義

本研究で取り上げる商品の売上数量のような不確実な変動を伴う資産の将来価値を考える場合，確率変数が導入される．その将来価値は実現可能な値として複数個あり，一定の確率分布に従って 1 つの値が実現される．たとえば，表 3.1 には，ある期間後の数量をX（個）として，そのとり得る値とそのときの確率が示されている．このように有限個の離散的な値のみを正の確率でとる確率変数を離散型確率変数という．離散型確率変数Xの値が m 個存在するとき，3.5 式のように表される．

$x_1, x_2, \bullet\bullet\bullet, x_m$ に対し，

$$\sum_{i=1}^{m} p(x_i) = 1 \text{ --------------------[3.5]}$$

表 3.1 の場合， $\sum_{i=1}^{3} p(x_i) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$ となる．

表 3.1 ある期間後の売上Xの確率分布

とり得る値 個)	確率
400	$\frac{1}{4}$
500	$\frac{1}{2}$
600	$\frac{1}{4}$

3.3.2 期待値と分散

確率変数Xの関数として Y=g(X)を定義し，Xの取り得る値が， $x_1, x_2, \bullet\bullet\bullet, x_m$ ならば，Yの取り得る値は式 3.6 で示される．

$y_i = g(x_i)$ [i=1,2,…,m] --------------------[3.6]

このとき，Yの期待値 E[Y]は，式 3.7 で示される．

$$\mathrm{E[Y]} = \mathrm{E[g(X)]} = \sum_{i=1}^{m} g(x_i) p_i \text{ --------------------[3.7]}$$

3.7 式はYの取り得る値にそのときの確率を掛け合わせた和であり，平均値とも呼ばれる．表 3.1 の例の場合，Xの平均 E[X]は，

$E[X] = 400 \times \frac{1}{4} + 500 \times \frac{1}{2} + 600 \times \frac{1}{4} = 500$ （個）と計算される．

E[X]葉確率変数Xが将来取り得る値の平均値であり，Xの特性をもっとも良く表す尺度の一つである．なお，本研究では，第 5 章，第 6 章において，平均値のことを期待収益率と呼び，μ で表されている．しかし，実際に実現される値は，必ずしも平均値に一致しない．概して，そのばらつき度を分散と呼ぶが，本研究ではその点に注目し，バラツキの度合いをリスクと考える．X の分散は次式 3.で定義される．

$$\mathrm{Var[X]} = \mathrm{E}[(\mathrm{X} - \mu)^2] = \sum_{i=1}^{m} g(x_i - \mu)^2 p_i$$ --------------------[3.8]

式のとおり，分散は確率変数（X-μ）の平均値であり，Xのそれぞれの値 xi の平均値 μ からの乖離の 2 乗で測り確率 pi を掛けて合計したものと考えられる．表 3.1 の例の場合，Xの分散 V[X]は，$V[X] = (400-500)^2 \times \frac{1}{4} + (500-500)^2 \times \frac{1}{2} + (600-500)^2 \times \frac{1}{4} = 5000$（個）2 と計算される．分散 V[X]の平方根を標準偏差と呼び，σ で与える．このとき標準偏差の単位は，確率変数Xの単位と同じく「個」となる．表 3.1 の例の場合，$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var[X]}} = \sqrt{5000}$　70.8 と計算される．ここで，基準化変量Ｚを導入し，μ と σ を 3.9 式により変数変換する．

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$ --------------------[3.9]

このとき，E(Z)=0, Var(Z)=1 となる．Xが収益率ならば，Ｚは標準偏差 1 単位あたりの期待収益率からの超過収益率を示すことになる．

3.4 連続型確率分布

3.4.1 連続型確率分布の定義

　確率変数Xの取り得る値が有限個ではなく実数全体と考え非加算無限個とする．このときの確率変数を，2.1 節の離散型に対して，連続型確率変数という．Xがある値 x 以下になる確率を関すとして式 3.10 で示され，その関数をXの確率分布関数といい，図 3.1 に略図が示されている．

$$F(x) = P(X \le x)$$ --------------------[3.10]

3.10 式は確率変数Xが区間(-∞,x)に入る確率を示す．また，大小関係が a<b である値 a,b に対し，F(b)-F(a)=P(a<X<b)は，Xが区間(a,b)の中に入る確率を示す．また，確率分布関数の導関数が式 3.11 に示されるが，それを確率密度関数という．略図が第 4 章図 4.3 に示される．

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$ --------------------[3.11]

変形すると，3.12 式が成立する．

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$$ --------------------[3.12]

3.4.2 期待値と分散

離散型確率分布では，その期待値は，取り得る値と確率の積の和であると考えたが，連続型悪率分布では，区間[-∞,+∞]における取り得る値と確率密度関数の積分と考えることができるので，式 3.13 には期待値が示される．連続型確率変数 X の関数 : Y=g(X)についても同様に考えると 3.14 式に期待値が示される．なお，この証明(参考文献番号 : 刈屋先生の金融工学入門)に関しては本論文では省略する．離散型確率分布と同様に考え，式 3.15 には分散が示されている．

$$\mu=E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$ --------------------[3.13]

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$ --------------------[3.14]

$$\sigma=Var[X]=E[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$ --------------------[3.15]

本研究では，連続型確率分布の代表例として正規分布を使う．次節はその正規分布について述べる．

3.5 正規分布

確率変数 X の平均値を μ，標準偏差を σ，X の確率密度関数が数式 3.16 で与えられるならば，

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$ --------------------[3.16]

X は平均が μ，分散が σ^2，の正規分布に従い，X～N(μ，σ^2)と表現する．そして，正規分布の特別な形として，μ＝１，σ＝０のときの正規分布を標準正規分布という．図 3.3 に正規分布の密度関数が示されている．

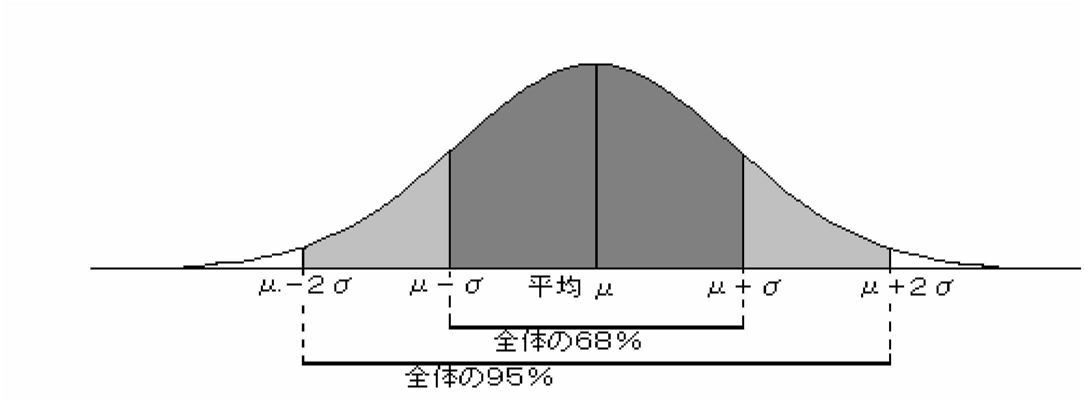

図 3.3 正規分布

第 4 章　金融理論

4.1 バリュー・アット・リスク

4.1.1VaR の概要

本研究では，在庫リスクの指標として，VaR：バリュー・アット・リスクを用いる．バリュー・アット・リスクは日本語では「リスクにさらされている価値」と解釈できる．つまり，ある資産，本研究では在庫数量の中でリスクを背負っている部分の価値と考えられる．具体的な例を図 4.1 に示す．

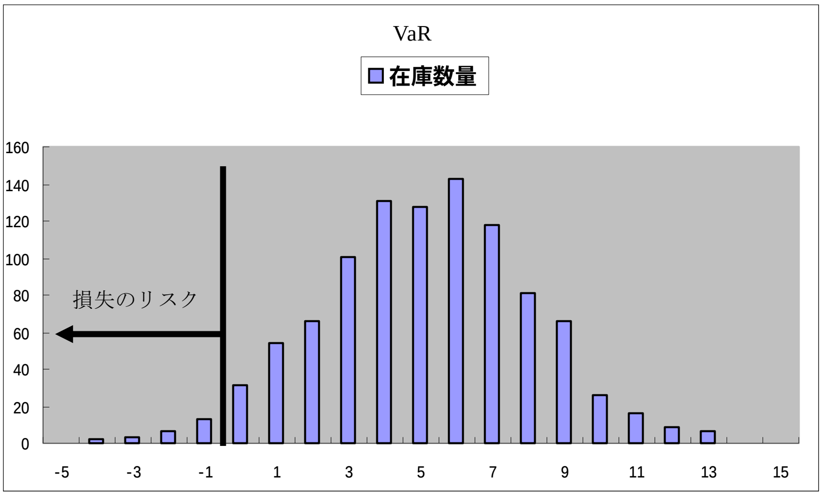

図 4.1VaR

図 4.1 は，ある確率分布に従う在庫数量が，0 以下になるレベルを表している．図で使用したデータで言えば，図で示されるリスクにあたる部分のデー多数は 24 個であり，全体では，1000 個の確率分布であるので，次のように表現する．

ある会社が抱える在庫数量の在庫切れの VaR は 97.6％の信頼区間で 976 個である．

言い換えれば，市場が平常の状況にあれば，在庫切れを起こす可能性は 100 回に 2.4 回ということである．このひとつの数字が不利益を被る可能性とともに流通会社の市場リスクを表している．

4.1.2VaR **の数学的定義**

VaR とは，他の技術分野で日常的に使われている標準的な統計手法により，リスクを評価する方法である．理論的に言えば，VaR は一定の期間において，一定の信頼区間のもと，市場が平常の状況にある場合に基づき，VaR はそれを使用する者に市場リスク量を要約して知らしめるものである．

保有ポートフォリオの現在価値を V とする．現時点を t とし，将来のある時点 T におけるこのポートフォリオの価値の変化額ΔVが, ある規準-x を下回るという事象が確率αで生起するとき，x をこのポートフォリオの水準 100(1-α)%の期間 T の VaR といい，式 4.1 に示される．

$P\{\Delta V \le -x\} = \alpha$ --------------------[4.1]

ここで，例をあげて説明する．仮に，α=0.05，T=1(日)が設定されているなら，95%の確率で 1 日に起こりうる最大損失が-x であると解釈できる．

本研究においてはΔVは正規分布の確率的性質を有する確率変数と考える．もしΔVの従う分布関数 F(X)が与えられるなら，VaR は式 4.2 で与えられ，略図が図 4.2 に示されている．また，もしΔVが密度関数 f(x)として与えられるなら，VaR は式 4.3 で与えられ，略図が図 4.3 に示されている．なお，一般的に F(X)と f(x)の関係は式 4.4 に示されている．

$F(-x) = \alpha$ --------------------[4.2]

$P\{\Delta V \le -x\} = \int_{-\infty}^{-x} f(y)dy = \alpha$ --------------------[4.3]

現実的には，市場データから変動額 ΔV の従う分布関数 F(x)または密度関数 f(x)を推定し，4.2 または 4.3 式，と図 4.2 または 4.3 より，VaR の値 x を計算できる．

F(x)= $\int_{-\infty}^{x} f(x)$ --------------------[4.4]

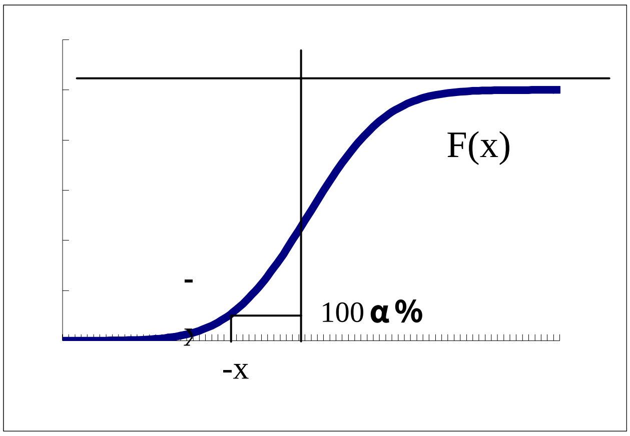

図 4.2 確率分布関数

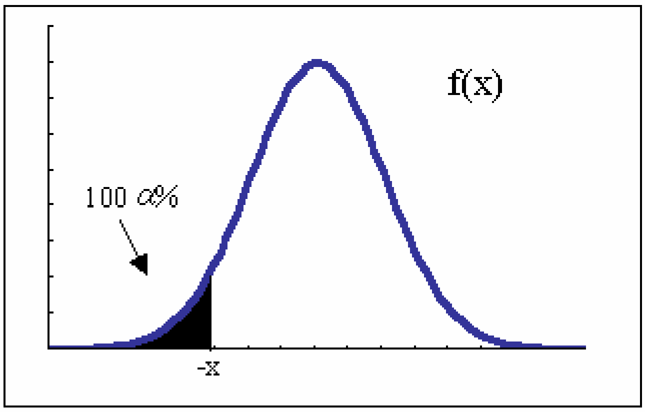

図 4.3 確率密度関数

4.2 確率微分方程式

本章では，ランダム・ウォークにおける時間過程を，離散過程から連続過程に変換することによりブラウン運動を導出する．株，為替などの金融市場における価格変動にはこのブラウン運動が応用されている．金融市場においては，価格変動を決定する要因は無数にある．要因とは，過去の市場の動きにより情報セットとして与えられている場合もある．しかし，人為的な原因や未来に起こり得る出来事は誰も予測不可能である．そこで，ランダム・ウォークあるいはブラウン運動は確率的性質を有する市場価格変化の確率法則を導き出す理論の基礎となっている．

本研究は中間流通業者やメーカが抱える在庫問題についてであるが，在庫レベルの変動は，消費者の購買意欲やニーズによる影響を受けると考えられる．この影響は，金融市場で置き換えるなら「人為的な原因や未来に起こり得る出来事」に相当すると考えることができるので，確率的法則を利用し，数学的に評価することは，在庫管理をする上の意思決定に大変有効である．また，消費者ニーズが多様化し，商品のライフサイクルも短命化している現在，このように，在庫レベルの変動を確率的に数学的定式化することが必要とされている．

時間間隔を Δt と考えた確率過程のモデルがランダム・ウォークであるが，連続時間間隔[0,t]を n 個の十分小さな Δt に分割するモデルがブラウン運動になる[*8].

ある商品の売り上げ S(t)の対数 logS(t)がランダム・ウォークするとき，W(t)を標準ブラウン運動とするなら，連続変数の売り上げモデルは，式[4.4]および[4.5]で定式化できる．

$$\frac{dS(\mathrm{t})}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad \text{--------------------[4.4]}$$

$$W(t) \sim N(0,t) \quad \text{--------------------[4.5]}$$

式[4.4]は，式[4.5]に変形することもできる．

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad \text{--------------------[4.6]}$$

式[4.5]は，W(t)は標準ブラウン運動であり，平均 0，分散 t の正規分布に従うことを意味する．4.6 式において，μ は売上の平均，σ は売上の標準偏差を表す．この確率微分方程式 4.6 はブラウン運動の標本過程であるので，一般的なリーマン積分やスティルチェス積分を定義することができない．それは，ブラウン運動過程が有界変動でもなく微分可能でないためである．ブラウン運動を仮定しているときの微分方程式を解く手段として伊藤積分[*8]がある. その伊藤の理論に沿って 4.6 式の解は式 4.7 で与えられ,ブラック・ショールズ過程と呼ばれている．

$$S(\mathrm{T}) = S(t)\exp[(\mu - \sigma^2/2)\tau + \varepsilon\sigma\sqrt{\tau}]$$ --------------------[4.7]

（ただし τ=T-t，現在時刻を t,未来のある時点を T としている.）

μ および σ について，過去のデータより推定し，シミュレーションにより計算をくり返せばよい．また，4.6 式において，両辺の対数をとると，

$$\log\frac{S(T)}{S(t)} = (\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \varepsilon\ \sigma\sqrt{(T-t)}$$ となり，

logΔS は，正規分布 N($(\mu - \sigma^2/2)$ (T-t), σ (T-t))に従っていることが分かる.

第 5 章　シミュレーション分析

本章では，第 3 章から第 4 章において説明した確率理論に則り，第 2 章で問題定義した定期発注法における在庫数量の推移がウィーナ過程に従うと仮定するときの，在庫数量の確率分布をモデル化し，正規分布乱数を使い，シミュレーションした結果を示す．

5.1 モデル化

ウィーナ過程に従う変数（売上数[額]またはそれの差分）を S とする．微小の時間を Δt とし，Δt 間の S の変化を ΔS とすると，Δt と Δz の関係は式 5.1 に示される．

$\Delta S = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ ------------------[5.1]　　ただし，ε は標準正規分布からの無作為抽出

式 5.1 より，ΔS の平均＝0，ΔS の標準偏差＝$\sqrt{\Delta t}$ であることが分かる．また，異なる 2 つの微小時間 Δt に対する 2 つの ΔS の値は互いに独立である．このことは，ΔS がマルコフ過程に従っていることを意味する．

ここで，ある程度長い時間 T を導入し，T 間における S の変化を式 5.2 で定義すると，式 5.2 は微小時間 t 間の変化が N 個合計されると考えられる．数式で示すなら，T=Δt*N と考えられる．

$\mathrm{S(T)} - \mathrm{S(0)} = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$ ------------------[5.2]

なお，式 5.2 は平均が 0，標準偏差が $\sqrt{T}$ の正規分布に従う．

例えば，初期値（本日）の売上数量が 100（個），時間の単位を週で考えるならば，1 週間後の S の値は平均 100（個），標準偏差 1.0 の正規分布に従うことになり，2 週間後の S の値は平均 100（個），標準偏差 $\sqrt{2}$，つまり約 1.41 の正規分布に従うことになる．

ここまでの理論では，売上モデルに現実性や一般性がない．なぜなら，将来のどの時点をとっても S の期待値は現在値に等しいことを，本理論は意味しているからである．つまり，売上が上昇傾向にある，または下降気味であるという傾向を考えていない．ここでいう傾向とは，確率過程の世界では趨勢またはドリフト率という．よって，本理論をさらに発展させることにする．

売上 S の期待値は微小時間 Δt 当たり μ だけ変化すると考えれば，次式 5.3 が成り立つ．

$\Delta S = \mu\Delta t + \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ ------------------[5.3]

今，5.3 式の右辺において μΔt 項に注目して考えるため，$\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ を無視すると，5.4 式になる．

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \mu \text{ ------------------[5.4]}$$

5.4 式を積分すると，S の初期値を S_0 とし，5.5 式が成立する．

$$S = S_0 + \mu t \qquad \text{------------------[5.5]}$$

1 節と同様に時間 T をとると，S の値の期待値は T 間に μT だけ増えると考えられる．

現実的には $\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ の確率変動は無視されないので，Δx と x の変化について次のようにまとめられる．なお，5.3 式，5.4 式，そして $\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ に関して，図 5.1 にグラフが示されている．

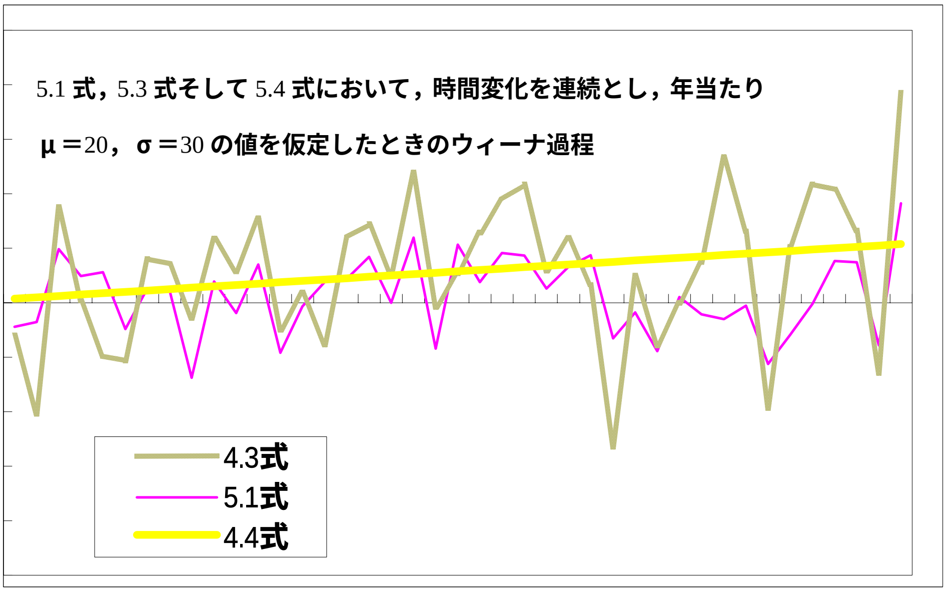

図 5.1 一般化ウィーナ過程

微小時間を Δt，その Δt における微小変化を Δx，そして Δt の N 個の合計時間 T における x の変化について次のようにまとめておく．

Δx の平均	：μΔt
Δx の標準偏差	：$\sqrt{\Delta t}$
x の変化の平均	：μT
x の変化の標準偏差	：$\sqrt{T}$

以下，$\sqrt{\Delta t}$ を σ で表すことにする．標準偏差が示される場合，σ を用いることが一般的であるためである．ここまでは，売上が一般化したウィーナ仮定し従うと考え，定式化した．定式化では，ドリフト率 μ およびバラツキ度合い σ は一定の定数と考えているが，現実問題では，それぞれの定数に対し，売上の値 S を乗じ，実際の売り上げ S とその変化 ΔS が一定になるという伊藤過程[*8]を用い，売上の確率的変動を式 5.6 として，再定義する．

$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ ------------------[5.6]

ここまでで，ウィーナ過程に従う確率変数の推移を示すための確率微分方程式の立て方を述べた．次節では，具体的に問題を設定し，シミュレーションすることにする．

5.2 シミュレーション

本節では，在庫数量を確率変数と考え，確率微分方程式を立て，4.3 節でも論じた通りモンテカルロシミュレーションにより確率分布を得る．そして，VaR によりリスク評価を行う．

次のような問題を設定する．

年率 20%のボラティリティ，年率 14%の期待収益率の売上が予想される商品があるとする．この商品は定期発注法で 1 週ごとに注文することになっているとするならば，1 週間後の売上の確率分布はいかに表せるか．

上記問題を数学的表現を使いモデル化する．μ＝0.14，σ=0.20 のある商品の売上の推移過程を考えればよい．5.6 式に則って数式を立てると，式 5.7 のように表せる．

$\frac{\Delta S}{S} = 0.14\Delta t + 0.20\Delta z$ ------------------[5.7]

S をある時点 t での売上，ΔS を次の瞬間 T までの Δt 間の売上の変化とすると，5.7 式は次のように書き直せる．

$\frac{\Delta S}{S} = 0.14\Delta t + 0.20\varepsilon\sqrt{t}$ ------------------[5.8]

5.8 式は，ΔS は平均年率 14％で増加する傾向にあるが，同時に，標準偏差が 20％でバラツキが発生することを意味する．なお，ε～N(0,1)である．今，シミュレーションは毎日実施するものと考え，期間を 1 日，年換算すると 0.00274 年とするなら，5.7 式は，$\Delta S = S(0.000378 + 0.011\varepsilon)$ となり，1 週後の売上の増減の確率分布は，平均 0.000378*S,標準偏差 0.0011*S の正規分布から無作為抽出すればよい．今，仮に現時点 t における在庫数量が 500（個）であるとし，そのシミュレーションした結果を，表 5.1 に示す.

表 5.1　1 期間を 1 日（0.00274 年）としたときの在庫数量シミュレーション

S	v1	v2	dS
500	-0.158435	-0.0013648	-0.6823925
499.317608	-0.775699	-0.0081547	-4.0717798
495.245828	-0.319747	-0.0031392	-1.5546841
493.691144	0.612595	0.00711655	3.51337524
497.204519	-0.919586	-0.0097374	-4.8415022
492.363017	0.330153	0.00400968	1.97421962
494.337236	-0.52738	-0.0054232	-2.6808798
491.656356	-0.602139	-0.0062455	-3.070654

表 5.1 により，毎日シミュレーションを繰り返し，最終的には 7 日後の，在庫数量のサンプルが 1 つ得られる．これを繰り返し行うことにより，1 週間後の完全な在庫数量の確率分布が得られることになる．なお，時間 Δt を限りなく 0 に近づけるとき，在庫数量は真の幾何ブラウン運動に従うと言うことができる．　実際に 1000 個の正規分布乱数を発生させ，シミュレーションを行った結果が，表 5.2 に示される．

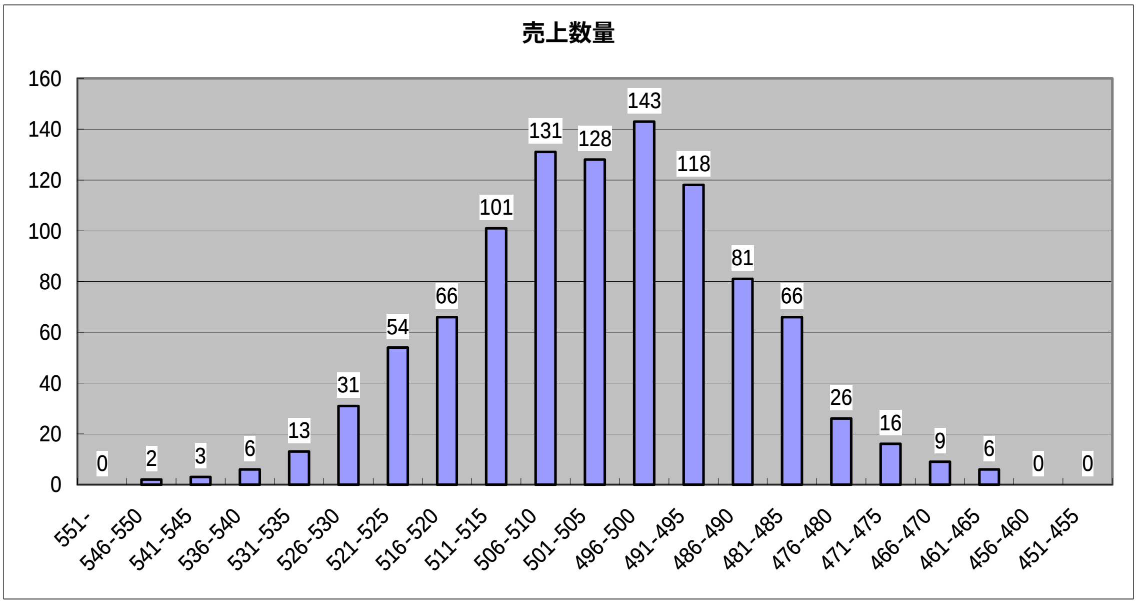

図 5.2 売上数量の VaR

次に VaR により，リスクの理論値を求める．つまり，100α%点となる水準を選択する必要がある．ここでは，α＝0.97 として考えて，上限 3%分をリスクとして，考えることとする．

よって，このシミュレーションの場合，97%の信頼水準で，在庫切れが起こさない程度の売上の範囲に収まるといえる．

具体的に α＝0.97 で計算するなら，全体の数量が 1000 であるので，図 5.2 において左裾 30 個が在庫数量の理論的リスクの評価値となる．

第 6 章　まとめ

6.1 結論

売上数量が確率変数と考え，幾何ブラウン運動しているという仮定をおき，伊藤型確率微分方程式に則り，在庫数量のリスクを VaR という指標を用い算出する方法を提案した.

6.2 今後の展望

VaR でリスク指標を計量するだけでなく，ブラック・ショールズのオプション理論の考え方[*9]を基礎におき，在庫管理における，在庫切れや在庫余りというリスクを回避できる在庫管理のポートフォリオとはどのように考えるべきかの理論展開を今後考えなければならない.

おわりに

本論文は，まず本研究が望まれる社会的背景と本研究の目的について説明した．次に，第 2 章では，本研究の問題定義として取り上げる在庫管理全般について論じ，特に本研究で最も注目される定期発注法の概要と問題点そして，定期発注法における在庫量のリスクの理論値について説明した．第 3 章では，本研究で扱う確率論について述べた．第 4 章では，本研究で扱う応用方法論として，VaR や確率微分方程式について論じた．第 5 章では，正規分布乱数によるシミュレーションの方法論，結果をまとめた．

謝辞

本研究において，熱心にご指導くださいました吉田武稔先生に心より御礼申し上げます．

参 考 文 献

[1]井関，緒方，アスクル，PHP 研究所(2001)

[2]日本経営工学会，生産管理辞典（2002）

[3]日本生産管理学会，生産管理時辞典(1999)

[4]水野,在庫管理入門,日科技連出版社,(1974)

[5]刈屋，金融工学入門，東洋経済新報社(2002)

[6]フィリップ・ジョリオン， バリュー・アット・リスクのすべて,シグマベイスキャピタル,(1999)

[7]ジョン・ハル，フィナンシャルエンジニアリング(1998)

[8]蓑谷，よくわかるブラック・ショールズモデル，東洋経済新報社 pp.1-100(2000)

[9]吉田，生産計画における金融オプションと VaR に関する考察，システム制御情報学会研究発表講演会(2002)