論　文

Technical Papers

時制と時区間を表現する複様相論理とその決定可能性

Many-dimensional Modal Logic of Tense and Temporal Interval and its Decidability

吉岡 卓　　日本大学文理学部情報科学研究所
Suguru Yoshioka　　Institute of Information Sciences, College of Humanities and Science, Nihon University
s-yoshio@chs.nihon-u.ac.jp

東条 敏　　北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科
Satoshi Tojo　　School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology
tojo@jaist.ac.jp

keywords: aspectual classification, interval logic, many-dimensional modal logic, sequent system, temporal logic

Summary

Linear tense logics are widely accepted for structural temporal representation, where the basic K_T has two modal operators G and H, each of which represents the future and the past, respectively. On the other hand, the temporal interval relations arranged by Allen have long been the standard of natural language semantics, though it still lacks the modal-logical foundation. Van Benthem proposed $\Box^{up}$ and $\Box_{down}$ in regard to the accessibility to overlapping intervals and subintervals, respectively; however, the logical feature of the modality has not well studied. In this study, we propose a many-dimensional logic including the conventional tense logic, together with such interval accessibility. And, we show that our logic provide a formal apparatus for a precise aspectual classification. Lastly, we introduce the sequent system for our logic. We show the subformula property holds in our system, and thus would be able to show the decidability.

1. は じ め に

人工知能の分野ではさまざま研究において時間を論理的に取り扱う必要がある．その代表的なものの一つは自然言語の意味論であり，特に動詞の時制 (tense) や動詞に内在する時間的性質 (aspect) を形式的に適切に記述する手段が研究されてきた [Kamp 79, van Benthem 91, Moens 88]．またこれらとは別に，自律的にふるまうエージェントの研究において，アクション列をプランニングする際，そのアクションのもつ時間的性質を述べる上でも論理は重要である [Shoham 88, Wooldridge 88]．ところがこれら二つの動機において共通するのは，時点の順序に関する論理のみに関心が払われてきたことである．

時間表現を構造的に扱う方法として線形時制論理が広く知られている [Goldblatt 92]．直感的には事象が未来において起こるとか過去に起こったといったように時間軸に沿った時間的様相を扱うことができる．また一般的な線形時制論理では未来や過去に対して複数の可能性を表現することが可能であり，時間軸の分岐を想定することにより表現することができる．一方区間論理の研究では事象が持つ時間区間に着目し，時間的な包含関係や時間的な交わりを扱うことができる [Allen 83, Allen 84]．

しかし先に述べたように個々の事象に内在する時間的性質まで述べようとすると，時点の連鎖の論理だけでは不足であり，具体的には事象の完結・進行・持続といった区別の記述には不向きである．このような事態を改善する一手法として時間の順序とともに時区間の間で包含の関係も取り入れることが課題となる．[van Benthem 95] は時間区間に対して様相オペレータ $\Box^{up}$，$\Box_{down}$ を定義し，それぞれ「すべての上位包含区間で」「すべての下位包含区間で」の意味を持たせることを提案した．本研究はこれらの様相オペレータを従来的な時相論理のオペレータと融合 (fusion) [Gabbay 03] させて形式的記述力を向上させることを狙うものである．すなわち，i) 包含関係を順序関係に組み合わせることで事象のある種の時間的性質すなわちアスペクトの一部を形式化できることを示し，ii) 包含関係と順序関係に関する二種のアクセス関係を持った複様相論理を提示し，iii) その最小の公理のセットに対し，その決定可能性を示すことを本稿の目標とする．論理の決定可能性については，証明探索手

続きを与え，与えられた論理式が証明可能か否かを判定し，可能ならば証明図を出力することが可能となる．

次章では，事象間にみられる時間的関係とその性質を示す．3 章 では時制区間論理の統語論と意味論を定義し公理系を示す．4 章では時相区間論理を用いた事象間の時間表現を示し，事象のアスペクト的な表現の可能性を示す．5 章では時制区間論理の公理セットと時間表現との関係を示す．6 章では, われわれの定義した時制区間論理の決定可能性と証明探索手続きを示す．最後にわれわれの理論におけるいくつかの論点を示す.

2. 時間関係と遺伝性

本章では事象間にみられる時間的関係を考察する．特にイベントと状態と呼ばれる事象が持つ上方/下方遺伝性といった時間的性質を示す.

2·1 時間区間の表現と順序関係

従来からの時間に関する研究では，時間を点として捉えるか，区間として捉えるかで広く議論されてきた．しかしわれわれは各事象に対応する時間的区間が存在していると仮定する．すなわち時間区間は事象の発生時として定義され，時間区間の関係もまた事象間の関係 [Kamp 79] と同様に定義される．すなわち事象の集合は時間軸を明確に表現する．この形式化は区間意味論 [van Benthem 91] をもととしており，時点は 2 次的な概念として導入されている．このように区間を時点の連鎖として区間内にも順序の構造を認める論理と，時点をただ小さい区間と捉え区間の内部構造を考えない論理とがある．本稿では後者の立場をとり，この混同を避けるため区間と呼ばず，*temporal extent* の翻訳として時間域と呼ぶことにする．また本稿では一般的な時間域の順序を '$\prec$' で表現する．

2·2 上方/下方 遺伝性

2 つの時間域があり 1 つが他方を含んでいるとする．このときイベントと呼ばれる継続時間が限定された出来事は上方遺伝性を持つ．例えば "Anna found a purse between 4PM and 5PM" は "Anna found a purse between 3:30PM and 5:30PM" を含意する．一方状態 (state) と呼ばれる継続時間をもつ出来事は下方遺伝性を持つ．例えば "Beth was sleeping between 3:30PM and 5:30PM" は "Beth was sleeping between 4PM and 5PM" を含意する．推論の逆転は [Kowalski 86] において時相の確実性，不確実性として論じられており，[Shoham 88] においては事象の安定性，流動性として論じられている．

上述の関係は，多くの言語学者と計算機科学者がイベントの分類として提案してきた ([McDermott 86, Kamp 93, Allen 84, Tojo 01])．しかし本稿の目的はアスペクトの明確な分類を導入することではなく，実用的な論理システムを実現することである．よってわれわれはイベントの上方遺伝性と状態の下方遺伝性に限定して着目する．ここで 2 つの事象間の時間関係 '$\subseteq$' を定義する．$l \subseteq l'$ である時，時間域 l' をもつ事象 φ は時間域 l をもつ事象 ψ を時間的に含む．このときイベントは事象の部分を言及するものではなく [Comrie 76]，瞬時的な出来事すなわち始点と終点を想起させるような事象の完結性をあらわすため，イベントは位相幾何学的に時間軸上の点と見なされる．すなわち図 1 の左側のように，もし線分 (点) がある時間域 l の中で起こるのならば，$l \subseteq l'$ を満たす時間域 l' においても起こっているといえる．一方状態は事象の非完結相として与えられ，継続性を持っていると考えられる．すなわち状態とは始点と終点を想起せず，事象の部分について言及しているとも考えられる．図 1 の右側のように，もし出来事がある時間域 l' の間持続しているのならば，それはまた $l \subseteq l'$ を満たす時間域 l においても持続しているといえる．

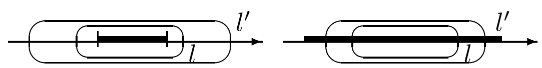

図 1 上方/下方 遺伝性

一般的にわれわれは出来事の時間域の厳密な規模を計ることはできない．しかし上方遺伝性の状況下では，ある時間域で事象が真であるならば時間域の範囲を縮小することはないし，逆に下方遺伝性の状況では正確な時間域の範囲を拡大することはない．

3. 順序と包含による複様相論理

本章では時制区間論理に対する統語論と意味論を定義する．われわれが定義する時制区間論理は，線形時間を扱う一般的な線形時制論理と，事象が持つ時間域を考慮した区間論理を融合 (fusion) させたものである．融合とは 2 つの論理からその公理の和集合をとることで新たな論理を構成する方法であり，簡単でもっとも頻繁に使われる手法である [Gabbay 03]．われわれは事象が持つ時間域の包含関係を様相オペレータとして定義することで，可能世界のアクセス関係に帰着させる．すなわち 2 章で示した時間関係 $\subseteq$，$\prec$ に対して，様相オペレータを用いることで表現する．

3·1 時制区間論理の公理系

【定義 1】（シグネチャ） 時制区間論理における言語は以下のアルファベットからなる．

命題変数	p，q，r，$\cdots$
論理結合子	$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\Rightarrow$
様相オペレータ	G，H，$\Box^{\uparrow}$，$\Box_{\downarrow}$

なお，括弧と句読点は必要に応じて加える．

われわれは命題変数，論理結合子，様相オペレータから構成されるものを論理式とし，$\varphi, \phi, \cdots$ を用いて表す．また F，P，$\Diamond^{\uparrow}$，$\Diamond_{\downarrow}$ をそれぞれ $\neg G \neg$，$\neg H \neg$，$\neg \Box^{\uparrow} \neg$，$\neg \Box_{\downarrow} \neg$ の略記とする．また様相オペレータは以下のように解釈される．

$G\varphi$	全ての未来において φ は真
$H\varphi$	全ての過去において φ は真
$\Box^{\uparrow}\varphi$	φ は φ を含む全ての広い時間域において真
$\Box_{\downarrow}\varphi$	φ は φ が含む全ての狭い時間域において真

ここで次の事に注意する．2 章で示したとおり関係 $\prec$ は 2 つの事象の時間域が共通部分を持たない*1 ことを示す．すなわち次の表現は異なる時間域をさす．

(1) $F\Box^{\uparrow}\varphi$

(2) $\Box^{\uparrow}F\varphi$

(1) は「ある未来において φ を含む任意の広い時間域で真」であり，(2) は「現在を含む任意の広い時間域のある未来において真」であることを示している．すなわち (1) が示す可能世界では現在の時間域が含まれているか不明であるが，(2) が示す可能世界に現在の時間域が含まれる事はない．同様に F を P に替えても同じことが言える．しかし以下の表現はどちらも現在の時間域は含まない．

(3) $F\Box_{\downarrow}\varphi$

(4) $\Box_{\downarrow}F\varphi$

同様に F を P に替えても同じことが言える．これらについては次節にて示す．

論理学では混乱が生じない限り，論理の公理系とその論理で証明される論理式全体の集合とを同一視する．この便宜法に従って，本稿では論理式の集合 $\mathcal{L}$ が様相オペレータ L に対して以下の (A1)，(A2)，(R1)，(R2) を満たすとき $\mathcal{L}$ を (L に対して) **正規な様相論理**であると呼ぶことにする．

(A1)	$\{\varphi \mid \varphi$ はトートロジー $\} \subseteq \mathcal{L}$
(A2)	$L(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (L\varphi \Rightarrow L\psi) \in \mathcal{L}$
(R1)	$\varphi \in \mathcal{L}$，$\varphi \Rightarrow \psi \in \mathcal{L}$ ならば $\psi \in \mathcal{L}$
(R2)	$\varphi \in \mathcal{L}$ ならば $L\varphi \in \mathcal{L}$

この L の性質は時制に関する様相オペレータ G，H や時間域に関する様相オペレータ $\Box^{\uparrow}$，$\Box_{\downarrow}$ も持っていると考えられる．よって時制論理も区間論理も正規な様相論

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& \bigcirc &&&& \\ &&&& \rotatebox{90}{$\subseteq$} &&&& \\ \bigcirc & \prec & \bigcirc & \prec & \bigcirc & \prec & \bigcirc & \prec & \bigcirc \\ &&&& \rotatebox{90}{$\subseteq$} &&&& \\ &&&& \bigcirc &&&& \end{array}$$

図 2 時相区間論理における事象の時間的性質の表現

理であるといえる．

また基本的な時制論理 K_T と区間論理 $K_\Box$ は以下の公理をもつ最小の正規な様相論理として定義する．本稿では以後，混乱の生じないかぎり $K_{\Box_\downarrow}$ と $K_{\Box^\uparrow}$ をまとめて $K_\Box$ と表す．

K_T

(A_T1)	$G\varphi \Rightarrow GG\varphi$
(A_T2)	$H\varphi \Rightarrow HH\varphi$
(A_T3)	$\varphi \Rightarrow GP\varphi$
(A_T4)	$\varphi \Rightarrow HF\varphi$

$K_\Box$

($\mathrm{A}_\Box1$)	$\Box\varphi \Rightarrow \neg\Box\neg\varphi$
($\mathrm{A}_\Box2$)	$\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$
($\mathrm{A}_\Box3$)	$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$

時制論理において公理 (A_T1) と公理 (A_T2) は推移性を表し，公理 (A_T3) と公理 (A_T4) は過去と未来の対称性を表している．区間論理において公理 ($\mathrm{A}_\Box1$) は無矛盾性*2，公理 ($\mathrm{A}_\Box2$) は推移性，公理 ($\mathrm{A}_\Box3$) *3は反射性を表している．われわれは時制論理 K_T と区間論理 $K_\Box$ の公理を組み合わせることで，時制区間論理 $K_T + K_\Box$ を定義する．

次節において時制区間論理の意味論を定義する．

3·2 時制区間論理に対するクリプキ意味論

様相論理の意味論としてクリプキ意味論が広く使われていることから，われわれの時制区間論理に対してもクリプキ意味論を拡張して用いる．すなわち時間域の順序 ($\prec$) と包含関係 ($\subseteq$) の 2 つの様相に対して，可能世界のアクセス関係へと帰着させる．可能世界のアクセス関係を図 2 に示す． 図 2 において各丸印は可能世界を表し，2 種類の時間関係は異なるアクセス関係を表す．すなわち時制区間論理に対するクリプキモデルは 6 つ組 $(W, R_F, R_P, R_{\Diamond^\uparrow}, R_{\Diamond_\downarrow}, \Vdash)$ で定義される．ただし，W は空でない集合，$R_F, R_P, R_{\Diamond^\uparrow}, R_{\Diamond_\downarrow} (\subseteq W \times W)$ は W 上の 2 項関係である．また $\Vdash$ は W の任意の要素 u と論理式の間の関係で，以下の条件を満たすものである．

---

*1 本稿で扱う時間は Dedekind complete 時間 [Gabbay 90] として定義される．我々は様相オペレータを用いることで離散的な可能世界のアクセス関係へと帰着させており，時間が離散的 (discrete) であるとする．ただし時間が連続的であるとしても，稠密性 (dense) に対応する公理 '$GG\varphi \Rightarrow G\varphi$，$HH\varphi \Rightarrow H\varphi$'[Kamp 93] を加えることで同じように可能世界のアクセス関係へと帰着させることができる．

*2 $\mathrm{A}_\Box 1$ は $\mathrm{A}_\Box 3$ から導くことができるため省略しても構わないが本稿では無矛盾性を示すために加えている．

*3 この公理は [van Benthem 95] の考えに従っている．

(M1) $u \Vdash \varphi \wedge \psi$ *iff* $u \Vdash \varphi$ かつ $u \Vdash \psi$
(M2) $u \Vdash \varphi \vee \psi$ *iff* $u \Vdash \varphi$ または $u \Vdash \psi$
(M3) $u \Vdash \varphi \Rightarrow \psi$ *iff* $u \Vdash \varphi$ ならば $u \Vdash \psi$
(M4) $u \Vdash \neg\varphi$ *iff* $u \nVdash \varphi$
(M5) $u \Vdash G\varphi$ *iff* すべての $v \in W$ に対して，$uR_F v$ ならば $v \Vdash \varphi$
(M6) $u \Vdash H\varphi$ *iff* すべての $v \in W$ に対して，$uR_P v$ ならば $v \Vdash \varphi$
(M7) $u \Vdash \Box^{\uparrow}\varphi$ *iff* すべての $v \in W$ に対して，$uR_{\Diamond^{\uparrow}} v$ ならば $v \Vdash \varphi$
(M8) $u \Vdash \Box_{\downarrow}\varphi$ *iff* すべての $v \in W$ に対して，$uR_{\Diamond_{\downarrow}} v$ ならば $v \Vdash \varphi$

ここで (M5) と (M6)，(M7) と (M8) はそれぞれ逆の関係になっている事から，以下のように変更することでクリプキモデルを 4 つ組 $(W, R_T, R_{\Diamond}, \Vdash)$ で定義することもできる [Goldblatt 92].

(M5′) $u \Vdash G\varphi$ *iff* すべての $v \in W$ に対して，$uR_T v$ ならば $v \Vdash \varphi$
(M6′) $u \Vdash H\varphi$ *iff* すべての $v \in W$ に対して，$vR_T u$ ならば $v \Vdash \varphi$
(M7′) $u \Vdash \Box^{\uparrow}\varphi$ *iff* すべての $v \in W$ に対して，$uR_{\Diamond} v$ ならば $v \Vdash \varphi$
(M8′) $u \Vdash \Box_{\downarrow}\varphi$ *iff* すべての $v \in W$ に対して，$vR_{\Diamond} u$ ならば $v \Vdash \varphi$

クリプキモデル $\mathcal{M} = (W, R_F, R_P, R_{\Diamond}, \Vdash)$ に対して，$u \Vdash \varphi$ がすべての可能世界 $u \in W$ で成り立つとき，論理式 φ は $\mathcal{M}$ において真であるといい $\mathcal{M} \models \varphi$ と表す．このとき以下の事が全て成り立つものを $K_T + K_{\Box}-$ モデル*4と呼ぶ.

(1) $\mathcal{M} \models G\varphi \Rightarrow GG\varphi$ *iff* $\forall u, v, w(uR_F v \wedge vR_F w \rightarrow uR_F w)$
(2) $\mathcal{M} \models H\varphi \Rightarrow HH\varphi$ *iff* $\forall u, v, w(wR_P v \wedge vR_P u \rightarrow wR_P u)$
(3) $\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow GP\varphi$ *iff* $\exists u \forall v(uR_F v \rightarrow vR_P u)$
(4) $\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow HF\varphi$ *iff* $\exists u \forall v(uR_P v \rightarrow vR_F u)$
(5) $\mathcal{M} \models \Box\varphi \Rightarrow \neg\Box\neg\varphi$ *iff* $\forall u \exists v(uR_{\Diamond} v)$
(6) $\mathcal{M} \models \Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$ *iff* $\forall u, v, w(uR_{\Diamond} v \wedge vR_{\Diamond} w \rightarrow uR_{\Diamond} w)$
(7) $\mathcal{M} \models \Box\varphi \Rightarrow \varphi$ *iff* $\forall u(uR_{\Diamond} u)$

このとき $\mathcal{L}$ を時制区間論理 $K_T + K_{\Box}$ とするとき，次の完全性定理が成り立つ [Goldblatt 92].

$\varphi \notin \mathcal{L} \Leftrightarrow$ ある $\mathcal{L}-$ モデル $\mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{M} \not\models \varphi$.

*4 [Goldblatt 92] では (3) と (4) の必要十分条件をそれぞれ $\forall u, v(uR_T v \rightarrow vR_T u)$，$\forall u, v(vR_T u \rightarrow uR_T v)$ としているが混乱をまねきやすいため本稿では R_F，R_P により定義した.

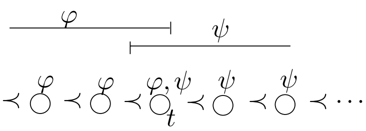

図 3 時間域間関係の時相論理への置換

4. 時間表現とアスペクト的分類

本章では本稿で提案する時制区間論理を用いることで，従来研究では表現することができなかった時間表現を示す．特にイベントと状態のアスペクト的な性質に着目する．次に時制区間論理の公理系に対する考察を与える．

一般に，2 つの時間域の関係は 2 項演算子を用いて表現される事が多い．[Allen 83] では事象の時間域間関係に対して 13 種類の区別を与えている．Allen はこの 13 種類の関係のうち双対の関係をまとめる事で 7 種類の 2 項演算子 (disjoint，overlap，meet，during，start，finish，equal) を定義し，表現している．これらの時間域間関係は，離散的な線形時間では図 3 に示すように数珠つなぎの可能世界で成り立つ命題を考えることで，F と P を用いて容易に時制論理の表現に落とすことができる．図 3 では時刻 t を現在と考えると，そこで φ と ψ があり $(\varphi \wedge \psi)$，過去のある一点からそれ以前では $\varphi \wedge \neg\psi$，未来のある一点からそれ以降では $\neg\varphi \wedge \psi$ であることから，overlap の関係は,

$$PH(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge (\varphi \wedge \psi) \wedge FG(\neg\varphi \wedge \psi)$$

のように書くことができる．全 13 種類の時間域間関係の時制論理への置換は [Blackburn 92] などに研究例がある．

われわれの時制区間論理では，以上のような単純な時間域間関係だけではなく，動作のアスペクトに関わる性質を分類できることを示す．われわれは 2 章にてイベントと状態の区別を与え上方/下方遺伝性を定義した．すなわち時間軸上，点的にイメージされる事象は上方遺伝性を充たし，区間がイメージされる事象は下方遺伝性を充たす．アスペクト的性質の最初の分類として**イベント** (event) と**状態** (state) を考えると，この分類は，以下のようにまとめられる．

$\varphi \Rightarrow \Box^{\uparrow}\varphi$ イベント
$\psi \Rightarrow \Box_{\downarrow}\psi$ 状態

もしイベントが上方遺伝性を持つなら，逆に下方に辿ったとき，そこから考えてもやはりその上方で同様に遺伝的性質が保たれる時間域が存在する．すなわち，

$$\varphi \Rightarrow \Diamond_{\downarrow}\Box^{\uparrow}\varphi.$$

このことは，さらに進んで，このイベントの性質を充たす極小の時間域を想定することができる．同様に，状態に対しても上方への可能世界を考察することにより，仮想的にこの状態が維持される極大の時間域を仮定することができる．すなわち,

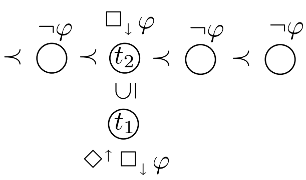

図 4 事象のアスペクト的な特徴の表現

$$\psi \Rightarrow \Diamond^{\uparrow}\Box_{\downarrow}\psi.$$

ここで $\Diamond^{\uparrow}$ で示される時間域というのは，動作の仮想される始点から終点までの時間域と考えれば，[Shoham 88] の ‘gestalt’ に相当すると考えられる．

$\psi \Rightarrow \Diamond^{\uparrow}\Box_{\downarrow}\psi$　状態の極大時間域
$\varphi \Rightarrow \Diamond_{\downarrow}\Box^{\uparrow}\varphi$　イベントの極小時間域

イベントの成り立つ可能世界を下に辿って，それが最小であるならば，以下の性質を充たすはずである．

$$\varphi \Rightarrow \Diamond_{\downarrow}(H\neg\varphi \wedge \Box^{\uparrow}\varphi \wedge G\neg\varphi)$$

これは Vendler による分類 (Activity, State, Achievement, Accomplishment) [Vendler 67a, Vendler 67b] の Achievement，すなわち達成点 (culmination) の表示と考えることができる．

また状態に対して開始点，終点のみを仮定する場合は以下のように表現することで可能となる．

始点を仮定　$\psi \Rightarrow \Diamond^{\uparrow}(H\neg\psi \wedge \Box_{\downarrow}\psi)$
終点を仮定　$\psi \Rightarrow \Diamond^{\uparrow}(\Box_{\downarrow}\psi \wedge G\neg\psi)$

これらの関係を図 4 に示す．まず時間域 t_1 で $\Diamond^{\uparrow}\Box_{\downarrow}\varphi$ であるとは「それより広い時間域で『それより狭い時間域ですべて φ』であるようなものが存在する」ということである．よってその時間域 t_2 を t_1 を包含するように仮定する．もし t_2 の前後ですべて $\neg\varphi$ であれば，すなわち $G\neg\varphi \wedge H\neg\varphi$ であれば，t_2 は φ が成り立つ最大時間域を仮定したことになる．このとき t_1 では，

$$\Diamond^{\uparrow}(H\neg\varphi \wedge \Box_{\downarrow}\varphi \wedge G\neg\varphi)$$

と書くことができる．

5. 時制区間論理における公理系の拡張

まず $K_{\Box}$ に関する追加制約として二つの時間域の包含関係に対しても，順序関係に関する (A_T3),(A_T4) と同様な公理を設けることができる．

$(\mathrm{A}_{\Box}4)$　$\varphi \Rightarrow \Box^{\uparrow}\Diamond_{\downarrow}\varphi$
$(\mathrm{A}_{\Box}5)$　$\varphi \Rightarrow \Box_{\downarrow}\Diamond^{\uparrow}\varphi$

また本稿で導入した二つのアクセス関係は，現実的な時間のモデルを持つためには互いに独立ではない．ここで時間のモデルを持つとは，線形で連続の時間軸上に各時間域が矛盾なく配置できることを言う．例えば三つの時間域 t_1, t_2, t_3 に対して t_1 が t_3 に含まれ t_2 が t_3 に先行すれば，t_2 は t_1 に対しても先行すべきである (図 5 左)．またもし t_1 が t_2 に包含され t_2 が t_3 に先行すれば，当然 t_1 は t_3 に対しても先行することが期待される (図 5 右)．抽象的な時間を議論する場合には上記のような制限を敢えて設けないような緩い公理系を仮定することとは構わないが，本稿では現実的な時間のモデルを考えて，図 5 に呼応した以下の 2 つの公理を提示する．

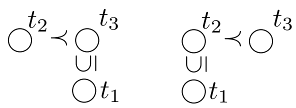

図 5 包含と順序に関わる制約

(Ax1)　$\Diamond^{\uparrow}P\varphi \Rightarrow P\varphi$
(Ax2)　$\Diamond^{\uparrow}F\varphi \Rightarrow F\varphi$

これにより，順序関係があるような二つの時間 t_2, t_3 にある時間 t_1 が含まれるような事態は避けることができる．(Ax1), (Ax2) は $K_{T\Box} + \{(\mathrm{A}_{\Box}4), (\mathrm{A}_{\Box}5)\}$ の諸公理を使うことにより，次のように変形できる．

$(\mathrm{Ax1})'$ $F\Diamond_{\downarrow}\varphi \Rightarrow F\varphi$　$(\mathrm{Ax1})''$ $P\varphi \Rightarrow \Box_{\downarrow}P\varphi$
$(\mathrm{Ax2})'$ $P\Diamond_{\downarrow}\varphi \Rightarrow P\varphi$　$(\mathrm{Ax2})''$ $F\varphi \Rightarrow \Box_{\downarrow}F\varphi$

このように時制区間論理は K_T と $K_{\Box}$ に対する最小の公理集合に $(\mathrm{A}_{\Box}4)$ と $(\mathrm{A}_{\Box}5)$，および (Ax1) と (Ax2) を追加することでより現実的な時間のモデルに発展させることができる．しかしながら，複様相論理の公理系は拡張すればするほど有意義な論理的性質を導くことも困難になる．本稿では，$K_T + K_{\Box}$ を最小の時制区間論理と捉え，その決定可能性と有限な証明探索手続きが得られることを次章において示す．

6. $K_T + K_{\Box}$ の決定可能性

本章の目的は時制区間論理 $K_T + K_{\Box}$ の決定可能性と証明手続きを示すことである．おおまかな流れは次の通りである．(i) まず初めにわれわれはシーケント体系を導入することで部分論理式性を示す．(ii) 次にわれわれのシーケント体系が $K_T + K_{\Box}$ の形式体系になっている事を示し，$K_T + K_{\Box}$ の有限モデル性を示す．(iii) 最後に有限モデル性と前章の有限公理化可能であることを用いて決定可能性を示し [Goldblatt 92]，われわれのシーケント体系を用いた証明探索手続きを示す．

6·1 $K_T + K_{\Box}$ に対するシーケント体系と部分論理式性

本章では $K_T + K_{\Box}$ に対する証明探索手続きを示すために，$K_T + K_{\Box}$ のシーケント体系を導入する．この体系は古典命題論理に対するシーケント体系 LK の拡張系として定義する．一般的にシーケント体系を用いた決定手続きは以下の手順で行われる．ただし以下の手順において Γ，Δ は論理式の集合を表し，$\rightarrow$ は導出関係 (derivation relation) を表す．また $\Gamma \rightarrow \Delta$ による表現を式 (sequent) と呼ぶ．さらに，始式から推論規則を適用していく過程を記述したものを証明図 (proof figure) と呼ぶ．

(1) カット除去定理を証明する．すなわちカット規則を用いずに証明可能であることを示す．

(2) 部分論理式性を示す．すなわち式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が証明可能なら，$\Gamma \rightarrow \Delta$ の証明図に現れる全ての式が，その部分論理式だけで構成されることを示す．

(3) 証明探索手続きの停止性を示す．すなわち与えられた式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ の証明図の探索手続きが有限であることを示す．

一般に (1) が成り立つならば (2) が成り立ち，多くの場合において (2) が成り立つならば (3) が成り立つ [Ono 80]．そして明らかに証明探索手続きの停止性が保証されれば，その探索空間の中で証明図となるものを全探索することで証明可能か否かを判定できる．そこでわれわれの時制区間論理 $K_T + K_\Box$ の決定性の証明をこの方針で行う．K_T に関するシーケント体系は [Nishimura 80] によって示されており，$K_\Box$ は様相論理 S4 に相当していることから様相論理の推論規則を参考に定義することができる．すなわち時制論理に対するシーケント体系 $G(K_T + K_\Box)$ は古典命題論理に対するシーケント体系 **LK** に以下の推論規則を加える事で得られる．

$$(\Box 1) \quad \frac{\varphi, \Sigma \rightarrow \Lambda}{\Box\varphi, \Sigma \rightarrow \Lambda}$$

$$(\Box 2) \quad \frac{\Box\Sigma \rightarrow \varphi}{\Box\Sigma \rightarrow \Box\varphi}$$

$$(T1) \quad \frac{G\Sigma, \Sigma \rightarrow H\Lambda, H\Theta, \varphi}{G\Sigma \rightarrow H\Lambda, \Theta, G\varphi}$$

$$(T2) \quad \frac{H\Sigma, \Sigma \rightarrow G\Lambda, G\Theta, \varphi}{H\Sigma \rightarrow G\Lambda, \Theta, H\varphi}$$

これらの推論規則においてギリシア大文字 Σ，Λ，Θ，Π は論理式の有限集合を表す．ただし，Θ は高々1 つの論理式からなる．このとき次の命題が成り立つ [Maruyama 01]．

〈命題 1〉 $\mathcal{L}$ を時制区間論理 $K_T + K_\Box$ とする．任意の論理式の集合 Γ，Δ に対して

$$\Gamma_* \Rightarrow \Delta^* \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad G(\mathcal{L}) \vdash \Gamma \rightarrow \Delta$$

ここで Γ_*，Δ^* はそれぞれ $\bigwedge\{\varphi | \varphi \in \Gamma\}$，$\bigvee\{\varphi | \varphi \in \Delta\}$ を表す．

しかしこのシーケント体系 $G(K_T + K_\Box)$ ではカット除去定理が成り立たない [Maruyama 01]．例えば式 '$\varphi \rightarrow G\neg H\neg\varphi$' はカット規則が無ければ証明不可能である[*5]．ただしカット除去定理は部分論理式性を導くためのものなので，初めから部分論理式性を保持する形で推論規則を定義すればよい．[Takano 92, Takano 01] ではカット規則を除去しなくても，カット規則を制限することでシーケント体系が部分論理式性を持つことを示している．これらの結果からわれわれは $G(K_T + K_\Box)$ に対して規則 $(T1)$，$(T2)$ を以下のように変更し推論規則 (AC) を加える．ただし以下の規則において，論理式 φ の部分論理式全体からなる集合を $Sub(\varphi)$ で表し，論理式の集合 Γ に対し $\bigcup\{Sub(\psi) | \psi \in \Gamma\}$ を $Sub(\Gamma)$ で表す．

$$(AC) \quad \frac{\Sigma \rightarrow \Lambda, \varphi \qquad \varphi, \Pi \rightarrow \Theta}{\Sigma, \Pi \rightarrow \Lambda, \Theta}$$
ただし，$\varphi \in Sub(\Sigma \cup \Lambda \cup \Pi \cup \Theta)$

$$(T1)' \quad \frac{G\Sigma, \Sigma \rightarrow H\Lambda, H\Theta, \varphi}{G\Sigma \rightarrow H\Lambda, \Theta, G\varphi}$$
ただし，$H\Theta \subseteq Sub(\Sigma \cup \Lambda \cup \{\varphi\})$

$$(T2)' \quad \frac{H\Sigma, \Sigma \rightarrow G\Lambda, G\Theta, \varphi}{H\Sigma \rightarrow G\Lambda, \Theta, H\varphi}$$
ただし，$G\Theta \subseteq Sub(\Sigma \cup \Lambda \cup \{\varphi\})$

このようにして得られる制限付きのシーケント体系を $G^-(K_T + K_\Box)$ で表す．(AC) は高野の研究を参考にした制限を加えたカット除去定理であり，カット論理式を下式に現れる論理式の部分論理式から選ぶように制限している．$(T1)$，$(T2)$ も同様の制限がされている．明らかに $G^-(K_T + K_\Box)$ は部分論理式性を持っている．よって以下の命題が得られる．

〈命題 2〉 $K_T + K_\Box$ に対するシーケント体系 $G^-(K_T + K_\Box)$ は部分論理式性を持つ．すなわち式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が体系 $G^-(K_T + K_\Box)$ で証明可能ならば，$\Gamma \rightarrow \Delta$ に現れる論理式の部分論理式のみで構成されるような $\Gamma \rightarrow \Delta$ の証明図が存在する．

6·2 $K_T + K_\Box$ の決定可能性

まず初めに制限されたシーケント体系の完全性定理を示す．完全性定理と前章までの命題を用いることで，制限されたシーケント体系 $G^-(K_T + K_\Box)$ が制限無しのシーケント体系と同等の証明能力を持つ事が示せる．その結果 $K_T + K_\Box$ の有限モデル性を得ることができる．

丸山らは制限されたシーケント体系に対する強い形の完全性定理を示している [Maruyama 01]．丸山らの証明では部分的付値 (partial valuation) の概念を用いることで，有限モデルに限定した完全性定理を証明している．通常の付値が全ての論理式に対して真偽を定めるのに対し，部分的付値は必ずしも真か偽を定めるとは限らない．

[*5] 始式 '$\varphi \rightarrow \varphi$' に対して規則 (¬ 左) を適用し，'$\neg\varphi, \varphi \rightarrow$' を得る．また始式 ' $H\neg\varphi \rightarrow H\neg\varphi$' に規則 (¬ 右) と $(T1)$ を適用し，' $\rightarrow \neg\varphi, G\neg H\neg\varphi$' を得る．これらに対してカット規則を用いると '$\varphi \rightarrow G\neg H\neg\varphi$' の証明図が得られる．すなわち '$\varphi \rightarrow G\neg H\neg\varphi$' は証明可能であるが，証明図中のカット規則を除くことはできない．

$\Gamma_* \Rightarrow \Delta^* \notin \mathcal{L}$	$\Leftrightarrow$	$M_{\mathcal{L}} \not\models \Gamma_* \Rightarrow \Delta^*$
$\Updownarrow$ 命題 1	3·2 節	
$G(\mathcal{L}) \not\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$		$\Uparrow$
$\Downarrow$ [Takano 92]	定理 1	
$G^{-}(\mathcal{L}) \not\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$	$\Rightarrow$	$FM_{\mathcal{L}} \not\models \Gamma_* \Rightarrow \Delta^*$

図 6 時制区間論理の有限モデル性

この部分的付値の概念を用いる事で，シーケント体系が証明可能で無い式に対して，その部分論理式全体に対する付値が有限集合であることが示せる．われわれは丸山らの定理をそのまま用いて，$K_T + K_{\Box}$ に対して以下のように述べることができる．

［定理 1］ $\mathcal{L}$ を時制区間論理 $K_T + K_{\Box}$ とする．式 $\Gamma \to \Delta$ が体系 $G^{-}(\mathcal{L})$ で証明可能でないとき，$\mathcal{M} \not\models \Gamma_* \Rightarrow \Delta^*$ となる有限な $\mathcal{L}-$ モデル $\mathcal{M}$ が存在する．

定理 1 の証明を丸山ら [Maruyama 01] に基づき*6 付録で与える．

これまで得られた結果を簡単に図 6 に示す．図 6 において $M_{\mathcal{L}}$ は $K_T + K_{\Box}$ に対するモデルを示し，$FM_{\mathcal{L}}$ は $K_T + K_{\Box}$ に対する有限モデルを示す．図 6 から制限無しのシーケント体系と制限付きのシーケント体系が同等の証明能力を持つ事が分かる．この結果を用いて部分論理式性を持つ体系 $G^{-}(\mathcal{L})$ は時制区間論理 $\mathcal{L}$ の形式体系になっていることが保証され以下の結果が得られる．

（系 1） 時制区間論理 $K_T + K_{\Box}$ は有限モデル性を持つ．すなわち $\mathcal{L}$ を $K_T + K_{\Box}$ とするとき，$\varphi \notin \mathcal{L}$ ならば $\mathcal{M} \not\models \varphi$ となる有限 $\mathcal{L}-$ モデル $\mathcal{M}$ が存在する．

3·1 節で与えた $\mathcal{L}$ の公理系は有限個である．また $\mathcal{L}$ の有限モデル性から以下の定理によって $K_T + K_{\Box}$ の決定可能性が得られる．

［定理 2］（ハロップの定理） 有限公理化可能かつ有限モデル性を持つ論理は決定可能である．
証明は [Goldblatt 92] など．

時制論理 K_T が有限モデル性を持ち決定可能であることはすでに知られている．われわれは時間域を様相としてとらえた区間論理を導入し，時制論理と区間論理を融合させた時制区間論理 $K_T + K_{\Box}$ において，その有限モデル性と決定可能性を示した．次章において実際の証明探索手続きを示す．

*6 これとは別に，部分的付値の概念を用いることで様相論理 S4 に対するクリプキモデルの木の大きさを制限し決定可能性を証明している研究もあり，その結果を用いることも可能である．

6·3 $K_T + K_{\Box}$ の証明探索手続き

本章では部分論理式性を用いた証明探索手続きについて示す．論理式の集合 Γ と Δ に対して，Γ と Δ のそれぞれに同じ論理式が 1 個だけしか現れないとき，式 $\Gamma \to \Delta$ は **1-規約**であるという．1-規約でない式に対して，contraction 規則と exchange 規則を適用することにより 1-規約式 $\Gamma' \to \Delta'$ を得ることができる．また weakening 規則を用いることにより逆も成り立つ．よって 1-規約式についてのみ証明探索の手続きを与えればよい．また $\Gamma \to \Delta$ の証明図を探索するには $\Gamma \cup \Delta$ の部分論理式のみで構成される証明図の範囲で探索すればよい．このような式を許容可能な式と呼ぶことにする．このとき証明探索手続きは以下の手順で行われる．ただし以下の手続きにおいて推論図とは求める証明図の候補となりうる未完成の証明図のことであり，各 i に対し $\mathcal{G}_i$ は $i-1$ 回の推論規則の適用を持つ推論図の有限集合である．

(1) $\mathcal{G}_1$ を $\Gamma \to \Delta$ だけからなる集合とする．$\Gamma \to \Delta$ だけからなる図式は 1 つの推論図である．
(2) $\mathcal{G}_i$ が与えられたとする．
  2.1 $\mathcal{G}_{i+1} := \mathcal{G}_i$.
  2.2 $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{G}_i$ に対して，$\mathcal{F}^{\wedge} = \mathcal{I}^{\vee}$ かつ $\mathcal{F}^{\wedge} \notin \{\mathcal{F}^{\vee}\}$ を満たす $\mathcal{I}$ が存在するならば，$\mathcal{G}_{i+1} := \mathcal{G}_{i+1} \cup \mathcal{F}'$．ただし $\mathcal{F}' - \mathcal{F} = \mathcal{I}^{\wedge}$.
(3) もし $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i$ ならば，“$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は証明可能でない” と出力し終了．
(4) もし $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_{i+1} - \mathcal{G}_i$ かつ $\mathcal{F}^{\wedge} = IS$ を満たす $\mathcal{F}$ が存在するならば，$\mathcal{F}$ は証明図である．もしなければ $i := i+1$ としステップ 2 へ戻る．

ここで $\mathcal{F}^{\wedge}$ は $\mathcal{F}$ の最上式を表し，$\mathcal{F}^{\vee}$ は $\mathcal{F}$ の下式を表す．$\mathcal{I}$ と IS は推論規則と始式を表す．許容可能な式のみからなり，繰り返しを含まない推論図の数は有限個であるから，ある自然数 n に対して $\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_n$ となる．よって上記の手続きは必ず停止する．

〔例 1〕 以下の論理式に対して証明図を得ることを考える．この式は文献 [Wooldridge 88] で議論されている例である．

$$\neg(\Box^{\uparrow}(G\varphi \wedge \varphi) \wedge (G\neg\varphi \wedge \neg\varphi))$$

この時以下のように $G^{-}(K_T + K_{\Box})-$ 証明図を得ることができる．

- $\to \neg(\Box^{\uparrow}(G\varphi \wedge \varphi) \wedge (G\neg\varphi \wedge \neg\varphi))$
  を P_1 とし $P_1 \in \mathcal{G}_1$.
- $\dfrac{\Box^{\uparrow}(G\varphi \wedge \varphi) \wedge G\neg\varphi \wedge \neg\varphi \to}{P_1}$
  を P_2 とすると $P_2 \in \mathcal{G}_2$.

$\vdots$

- $\dfrac{\Box^{\uparrow}(G\varphi \wedge \varphi), G\neg\varphi, \neg\varphi \to}{P_5}$

を P_6 とすると $P_6 \in \mathcal{G}_6$.

- $\dfrac{G\varphi \wedge \varphi, G\neg\varphi, \neg\varphi \rightarrow}{P_6}$
  を P_7 とすると $P_7 \in \mathcal{G}_7$.

同様にして以下の推論図 $P_{10} \in \mathcal{G}_{10}$ を得る．明らかに P_{10} は証明図となる．ただし証明図中の 2 重線は推論規則 $\wedge \rightarrow$ を複数回適用した事を示す．

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi \rightarrow \varphi}{\varphi, \neg\varphi \rightarrow}}{G\varphi \wedge \varphi, \neg\varphi \rightarrow}}{G\varphi \wedge \varphi, G\neg\varphi, \neg\varphi \rightarrow}}{\Box^{\uparrow}(G\varphi \wedge \varphi), G\neg\varphi, \neg\varphi \rightarrow}}{\Box^{\uparrow}(G\varphi \wedge \varphi) \wedge (G\neg\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow}}{\rightarrow \neg(\Box^{\uparrow}(G\varphi \wedge \varphi) \wedge (G\neg\varphi \wedge \neg\varphi))}
$$

よって $G^{-}(K_T + K_{\Box})$ で証明可能なことが分かる．

7. おわりに

われわれは線形時相論理に包含に関する様相を持つ論理を融合 (fusion) させる事で時制区間論理を定義し，時間的性質を様相オペレータ $G, H, \Box^{\uparrow}, \Box_{\downarrow}$ を用いて定義した．これにより時間域の順序と包含に関する関係をすべて可能世界間のアクセス関係へと帰着させ，その意味論を与えた．この方法により従来的な区間論理が扱う区間間関係はそのまま記述できる上，イベントや状態といった事象が持つアスペクト的性質も包含の関係によって表現できることを示した．さらに時間の表現として妥当である複様相論理として，包含関係と順序関係に関して矛盾が起こさない制約を加える公理を提案した．このうち，時制区間論理の中心部分 $K_T + K_{\Box}$ ついてシーケント体系 $G^{-}(K_T + K_{\Box})$ を導入することによって，時制区間論理の決定可能性と証明探索手続きを示した．本稿ではイベントと状態に対して様相オペレータ $\Box^{\uparrow}, \Box_{\downarrow}$ を導入したが，5 章で述べたとおり公理を追加することによってより現実的な時間の論理を構築することが可能である．しかしながらそのような新しい公理の追加は表現力を拡大すると同時に，決定可能性や証明探索手続きを示すことは容易ではなくなる．したがって，今後公理の追加に対する論理的性質の検証が課題となる．

◇ 参 考 文 献 ◇

[Allen 83] J. F. Allen : Maintaining knowledge about temporal intervals, *Communications of the ACM*, 26, pp. 832-843, 1983.

[Allen 84] J. F. Allen : Towards a general theory of action and time, *Artificial Intelligence*, 23:123–154, 1984.

[Blackburn 92] P. Blackburn : Fine grained theories of time, In *Procddeings of the 4th European Workshop on Semantics of Time, Space, and Movement and Spatio-Temporal Reasoning*, pp.299-320, 1992.

[Blackburn 96] P. Blackburn, C. Gardent and M. de Rijke : On rich ontologies on tense and aspect, In J. Seligman and D. Westerstahl, editors, *Logic, Language, and Computation, vol. 1.* CSLI, Stanford University, 1996.

[Comrie 76] B. Comrie : *Aspect*, Cambridge University Press, 1976.

[Gabbay 90] D. M. Gabbay and I. M. Hodkinson : An axiomatisation of Until and Since over the real numbers, *Journal of Logic and Computation 1*, pp 229-260, 1990.

[Gabbay 03] D. M. Gabbay, A. Kurucz, F. Wolter and M. Zakharyaschev : *Many-dimensional modal logics: theory and applications*, Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 148, Elsevier, 2003.

[Goldblatt 92] R. Goldblatt : *Logics of Time and Comuputation*, Second Edition, CSLI Lecture Note No.7, Center for the Study of Language and Information, Stanford University, 1992.

[Hamblin 71] C. L. Hamblin : Starting and Stopping, The Monist, liii, no.3,410-425. In E.Freeman and W.Sellars (eds.), *Basic Issues in the Philosophy of Time*(Illinois: Open Court, 1971).

[Kamp 79] H. Kamp : Some remarks on the logic of change. Part I, In Roherer (ed.), *Time, Tense and Quantifiers*, Niemeyar, Tübingen, 1979.

[Kamp 93] H. Kamp and U. Reyle : *From Discourse to Logic*, Kluwer Academic Publisher's, 1993.

[Kowalski 86] R. Kowalski and M. Sergot : A Logic-based Calculus of Events, *New Generation Computing*, 4:67–95, OHMSHA, LTD. and Springer-Verlag, 1986.

[Landman 91] F. Landman : *Structures for Semantics*, Kluwer Academic Publisher's, 1991.

[Maruyama 01] A. Maruyama, S. Tojo and H. Ono : Decidability of temporal epistemic logics for multi-agent models, *Proceedings of the ICLP'01 Workshop on Computational Logic in Multi-Agent Systems (CLIMA-01)*, pp.31-40, 2001.

[McDermott 86] D. V. McDermott : A temporal logic for reasoning about processes and plans, *Cognitive Science*, 6:101–155, 1982.

[Moens 88] M. Moens. and M. Steedman : Temporal Ontology and Temporal Reference, *Computatinal Linguistics*, 14(2), pp.15-28, 1988.

[Nishimura 80] H. Nishimura : A study of some tense logics by Gentzen's sequential method, *Publications of the Research Institute for Mathmatical Sciences*, Kyoto University 16, pp.343-353, 1980.

[Ono 80] H. Ono : Proof-theoretical methods in nonclassical logic - an introduction, em Theories of Types and Proofs, eds. by Takahashi, M. et al., MSJ Memoir 2, Mathematical Society of Japan, pp. 207-254, 1998.

[Parsons 90] T. Parsons : *Events in the Semantics of English*, MIT press, 1990.

[Shoham 88] Y. Shoham : *Reasoning about Change*, The MIT Press, 1988.

[Shvarts 62] G. F. Shvarts : Gentzen style systems for KD45 and K45D, Logic at Botik '89, *Lecture Notes in Computer Science 363*, Springer, Berlin, pp.245-256, 1962.

[Takano 92] M. Takano : Subformula property as a substitute for cut-elimination in modal propositional logics, *Mathmatica japonica Vol.37*, pp.1129-1145, 1992.

[Takano 01] M. Takano : A modified subformula property for the modal logics K5 and K5D, *bulletin of Section of Logic*, Vol. 30, pp.67-70, 2001.

[Tojo 99] S. Tojo : Event, state, and process in arrow logic, *Journal of Minds and Machines*, 9:81–103, 1999.

[Tojo 01] S. Tojo : Aspect analysis in arrow logic, In *Information-Oriented Approaches to Language, Logic, and Computation, Vol. 3*, CSLI Lecture Notes, Stanford University, 2001.

[van Benthem 91] J. van Benthem : *The Logic of Time - second edition*, Kluwer Academic Press, 1991.

[van Benthem 95] J. van Benthem : Epistemic and temporal reasoning, edited by Dov M. Gabbay, C.J. Hogger and J.A. Robinson, Oxford, Clarendon Press, *Handbook of logic in artificial intelligence and logic programming*, vol. 4, pp. 292-296, 1995.

[Vendler 67a] Z. Vendler : *Linguistics in Philosophy*, Cornell University Press, 1967.

[Vendler 67b] Z. Vendler : Verbs and times : Philosophical review, 66, pp143-160, 1967.

[Wooldridge 88] M. Wooldridge, C. Dixon and M. Fisher : A tableau-based proof method for temporal logics of knowledge and belief, *Journal of applied nonclassical logics Vol. 8*, pp. 225-258, 1998.

[Yoshioka 03] S. Yoshioka, K. Kaneiwa and S. Tojo : Occurrence Logic with Temporal Heredity, *Proceeding of the IICAI-03*, pp.1296-1309, 2003

〔担当委員：井上 克己〕

2005 年 3 月 25 日　受理

◇ 付　　録 ◇

A. 定 理 1 の 証 明

ここでは定理 1 に対する証明を与える．証明の流れは次の通りである．(1) 準備として Ξ-部分的付値の定義を示す．さらに部分論理式の集合と Ξ-部分的付値との間に見られる関係を示す．(2) 次に Ξ-部分的付値の集合に対してモデルを定義し，その集合が有限集合であることを示す．(3) 最後に Ξ- 部分的付値に対するモデルの性質と (2) の結果を用いることで定理 1 の証明となる事を示す．

A•1 Ξ-部分的付値と部分論理式の関係

【定義 2】 (Ξ-部分的付値) $\mathcal{L}$ を $K_T + K_\Box$ とする．また Ξ を部分論理式について閉じている論理式の集合とする．ここで以下の条件を満たすとき，式 $\Sigma \to \Lambda$ は体系 $G^-(\mathcal{L})$ において Ξ-部分的付値であるという．(i) $G^-(\mathcal{L}) \nVdash \Sigma \to \Lambda$，(ii) $\Sigma \cup \Lambda = Sub(\Sigma \cup \Lambda)$，(iii) $Sub(\Sigma \cup \Lambda) \subseteq \Xi$.

以後 Ξ-部分的付値を u，v，w，$\cdots$ を用いて表す．また $a(u)$，$s(u)$ によって u の左辺と右辺を表す．すなわち $a(\Sigma \to \Lambda) = \Sigma$ であり，$s(\Sigma \to \Lambda) = \Lambda$ である．いま式 $\Sigma \to \Lambda$ が体系 $G^-(\mathcal{L})$ で証明不可能であるとする．この時，$Sub(\Sigma \cup \Lambda)$ を含む任意の Ξ に対し，$\Sigma \subseteq a(u) \subseteq Sub(\Sigma \cup \Lambda)$ かつ $\Lambda \subseteq s(u) \subseteq Sub(\Sigma \cup \Lambda)$ となる Ξ-部分的付値 u が存在する．これは $Sub(\Sigma \cup \Lambda)$ に属する論理式に対して帰納法を用いることで証明できる [Maruyama 01].

A•2 Ξ-部分的付値に対するモデル

式 $\Sigma \to \Lambda$ は体系 $G^-(\mathcal{L})$ で証明不可能とする．この時，時相区間論理に対するモデル $(W, R_T, R_\Box, \Vdash)$ を以下のように定義する．

$W = \{u | u$ は $Sub(\Sigma \cup \Lambda)$-部分的付値 $\}$,

uR_Tv *iff*　全ての φ に対して，$G\varphi \in a(u)$ ならば
$G\varphi \in a(v)$ かつ $\varphi \in a(v)$，かつ
全ての φ に対して，$H\varphi \in a(v)$ ならば
$H\varphi \in a(u)$ かつ $\varphi \in a(u)$,

$uR_\Box v$ *iff*　全ての φ に対して，$\Box\varphi \in a(u)$ の時，
また，その時のみ $\Box\varphi \in a(v)$,

$u \Vdash p$　*iff*　$p \in a(u)$，ただし p は命題変数．

いま，式 $\Sigma \to \Lambda$ が証明不可能であることから，$\Sigma \subseteq a(u)$ かつ $\Lambda \subseteq s(u)$ となる $Sub(\Sigma \cup \Lambda)$-部分的付値 u が存在する．よって W は空集合ではない．また $Sub(\Sigma \cup \Lambda)$ は有限集合である事から W も有限集合である．すなわち $Sub(\Sigma \cup \Lambda)$ が k 個の論理式からなるならば，W は高々2^k 個の要素からなる集合である．ここで示したモデルは $K_T + K_\Box$-モデルであり以下の性質が成り立つ [Maruyama 01].

〈命題 3〉 $\forall u \in W$ に対して以下が成り立つ．

(1) $\varphi \wedge \psi \in a(u) \longrightarrow \varphi \in a(u)$ かつ $\psi \in a(u)$,
(2) $\varphi \wedge \psi \in s(u) \longrightarrow \varphi \in s(u)$ または $\psi \in s(u)$,
(3) $\varphi \vee \psi \in a(u) \longrightarrow \varphi \in a(u)$ または $\psi \in a(u)$,
(4) $\varphi \vee \psi \in s(u) \longrightarrow \varphi \in s(u)$ かつ $\psi \in s(u)$,
(5) $\varphi \Rightarrow \psi \in a(u) \longrightarrow \varphi \in s(u)$ または $\psi \in a(u)$,
(6) $\varphi \Rightarrow \psi \in s(u) \longrightarrow \varphi \in a(u)$ かつ $\psi \in s(u)$,
(7) $\neg\varphi \in a(u) \longrightarrow \varphi \in s(u)$,
(8) $\neg\varphi \in s(u) \longrightarrow \varphi \in a(u)$,
(9) $\Box\varphi \in a(u) \longrightarrow \forall v \in W$ に対して，$uR_\Box v$ ならば $\varphi \in a(v)$,
(10) $\Box\varphi \in s(u) \longrightarrow \exists v \in W, uR_\Box v$ かつ $\varphi \in s(v)$,
(11) $G\varphi \in a(u) \longrightarrow \forall v \in W$ に対して，uR_Tv ならば $\varphi \in a(v)$,
(12) $G\varphi \in s(u) \longrightarrow \exists v \in W, uR_Tv$ かつ $\varphi \in s(v)$,
(13) $H\varphi \in a(u) \longrightarrow \forall v \in W$ に対して，vR_Tu ならば $\varphi \in a(v)$,
(12) $H\varphi \in s(u) \longrightarrow \exists v \in W, vR_Tu$ かつ $\varphi \in s(v)$.

各命題変数 p に対して $\Vdash$ は，$u \Vdash p$ *iff* $p \in a(u)$ で定義された．この定義と命題 3 を用いることで以下の命題 4 が示せる．命題 4 は χ の構成に関する同時帰納法によって証明できる [Maruyama 01].

〈命題 4〉 $u \in W$ かつ $\chi \in Sub(\Sigma \cup \Lambda)$ のとき，

(1) $p \in s(u) \longrightarrow u \nVdash p$
(2) $\chi \in a(u) \longrightarrow u \Vdash \chi$
(3) $\chi \in s(u) \longrightarrow u \nVdash \chi$

A•3 定理 1 の証明

定義 2 より，式 $\Gamma \to \Delta$ が体系 $G^-(\mathcal{L})$ で証明不可能である時，$\Gamma \subseteq a(u) \subseteq Sub(\Gamma \cup \Delta)$ かつ $\Delta \subseteq s(u) \subseteq Sub(\Gamma \cup \Delta)$ となる $Sub(\Gamma \cup \Delta)$-部分的付値 u が存在する．全ての $\varphi \in \Gamma$ に対して $\varphi \in a(u)$ であるため，命題 4 より $u \Vdash \varphi$ である．すなわち $u \Vdash \Gamma_*$ である．一方，全ての $\varphi \in \Delta$ に対して $\varphi \in s(u)$ であるため，同様に $u \nVdash \varphi$ であり，$u \nVdash \Delta^*$ である．従って，$u \nVdash \Gamma_* \to \Delta^*$ であり，体系 $G^-(\mathcal{L})$ に対する定理 1 が示される．

著 者 紹 介

吉岡　卓(正会員)

2005 年 12 月 北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士課程修了．2006 年 1 月 日本大学文理学部学術フロンティア事業ポストドクター．博士 (情報科学)．自然言語意味論，知識表現に興味を持ち，現在時相論理，アスペクト，データベース研究に従事．電子情報通信学会，人工知能学会 各会員．

東条　敏(正会員)

1983 年東京大学大学院工学系研究科修了．1986-1988 年米国カーネギー・メロン大学機械翻訳センター客員研究員．1995 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究所助教授，2000 年同教授．1997-1998 年ドイツ・シュトゥットガルト大学客員研究員．博士 (工学)．情報処理学会，人工知能学会，ソフトウェア科学会，言語処理学会，認知学会，Folli 各会員．