

Title	非線形TRSのE重なり性について
Author(s)	松浦, 邦博; 大山口, 通夫; 太田, 義勝; 小川, 瑞史
Citation	電子情報通信学会論文誌 D, J80-D1(11): 847-855
Issue Date	1997-11-20
Type	Journal Article
Text version	publisher
URL	http://hdl.handle.net/10119/7925
Rights	Copyright (C)1997 IEICE. 松浦 邦博, 大山口 通夫, 太田 義勝, 小川 瑞史, 電子情報通信学会論文誌 D, J80-D1(11), 1997, 847-855. http://www.ieice.org/jpn/trans_online/
Description	

非線形 TRS の E 重なり性について

松浦 邦博[†] 大山口通夫[†] 太田 義勝[†] 小川 瑞史^{††}

On the E-Overlapping Property of Nonlinear Term Rewriting Systems

Kunihiro MATSUURA[†], Michio OYAMAGUCHI[†], Yoshikatsu OHTA[†],
and Mizuhito OGAWA^{††}

あらまし 項書換えシステム (TRS) の重要な性質の一つに合流性があり、最近、非線形 TRS においては非 E 重なり性はその合流性と密接に関係していることが報告された。しかし、非 E 重なり性は一般に非可解な問題である。本論文では、まず「深さ保存」の概念を導入し、TRS が深さ保存的であるとき、非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを示す。非 ω 重なり性は判定可能な性質であることから、この結果を用いて、合流性を保証する判定可能な十分条件をいくつか導くことができることを示す。次に、右定項 TRS のクラスに限定すれば非 E 重なり性判定問題が可解であることを明らかにする。

キーワード 項書換えシステム、深さ保存、非 E 重なり、非 ω 重なり、右定項 TRS

1. ま え が き

項書換えシステム (以下、TRS と呼ぶ) は方向付けされた等式の集合と定義される。TRS は等式上で推論や項の単純化などを行うための計算モデルであり、これまで盛んに研究されてきた。TRS の重要な性質として合流性がある。TRS の合流性判定問題は一般に非可解であるが、停止性を満たす場合は判定可能であり、また、線形の場合は合流性を保証する十分条件がいくつか与えられている (例えば、非重なりな線形 TRS は合流性を満たす)。しかし、非線形かつ非停止 TRS の場合は、非重なりの場合でも合流性を満たさないときがあるためより強い条件が必要となる。最近、TRS が非線形かつ非停止な TRS のいくつかの部分クラスに対して、非重なりよりも強い条件である非 E 重なりの条件を満たせば合流性を満たすという結果が報告されている [3], [4]。ここで、非 E 重なり性の概念は小川ら [1] によって与えられたもので、書換え規則の左辺に対して、その真部分項の書換えを許しても他の規則の左辺 (または、その非変数部分) と重ならないとき、と定義される。しかし、TRS の非 E 重なり性を判定する問題は一般に非可解であり、また右定

項 TRS のクラスに限定した場合の可解性については、これまで未解決であった。

また、非 E 重なり性は非 ω 重なり性 (循環的な無限項の代入を許して重なりがない) と密接な関係があり、小川ら [1] は「非 ω 重なりならば非 E 重なりである」と予想した。

本論文では、深さ保存的な TRS のクラスを導入して、「TRS が深さ保存的であるとき、非 ω 重なりならば非 E 重なりである (定理 1)」ことを示す。ここで、深さ保存的とは各規則 $\alpha \rightarrow \beta$ と β に出現する変数 x に対して x が β 中に出現する深さ $|u|$ ($\beta/u = x$) の最大値は α 中に出現する深さ $|v|$ ($\alpha/v = x$) の最大値以下であることを言う。定義より右定項 TRS は深さ保存的であるので、右定項 TRS に対して非 ω 重なり性は非 E 重なり性 (従って、合流性) を保証する十分条件である。なお、非 ω 重なり性についてはほとんど線形時間で判定できるアルゴリズムが知られている [5]。

次に、本論文では「右定項 TRS において非 E 重なり性が判定可能である (定理 2)」ことを示す。この結果は、この問題が判定可能な項合流性問題に還元可能であることを示すことによって、得られる。

以下、本論文では、2. で定理の証明に必要な項書換えシステムに関する定義、および、記法について述べ、3. で ω 単一化アルゴリズムについて述べる。4. で定理 1 の証明、5. で定理 2 の証明を述べる。

[†] 三重大学工学部情報工学科, 津市
Faculty of Engineering, Mie University, Tsu-shi, 514 Japan
^{††} NTT 基礎研究所, 厚木市
NTT Basic Laboratories, Atsugi-shi, 243-01 Japan

2. 定義と記法

本章では、定理の証明に必要な定義、および、記法について述べる。本論文では、以下に説明する用語、記法以外については[3]で用いられたのと同じ用語、記法を用いる。

[定義 1] (重なり) 規則対 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2$ は $\sigma(\alpha_1/u) = \sigma'(\alpha_2)$ となる代入 σ, σ' と出現 $u \in \mathcal{O}(\alpha_1)$ が存在するとき、「重なる」と言う。但し、 α_1/u は変数ではない。

[定義 2] (ω 重なり) 変数 $x \in V$ に対して、 $x = f(y, x)$ のような循環的な参照を許す代入を ω 代入と言う。但し、 $f \in F$ は関数記号。規則対 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2$ は $\sigma(\alpha_1/u) = \sigma'(\alpha_2)$ となる ω 代入 σ, σ' と出現 $u \in \mathcal{O}(\alpha_1)$ が存在するとき、「 ω 重なり」とあると言う。但し、 α_1/u は変数ではない。

[定義 3] (E 重なり) 規則対 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2$ は ε -不変^(注1)な E-系列 $\sigma(\alpha_1/u) \xrightarrow{*} \sigma'(\alpha_2)$ と代入 σ, σ' と出現 $u \in \mathcal{O}(\alpha_1)$ が存在するとき、「E 重なり」とあると言う。但し、 α_1/u は変数ではない。この E-系列を「E 重なり系列」と言う。

重なる規則対は ω 重なり、かつ、E 重なりする規則対でもある。TRS は自明な場合を除いて重なる (ω 重なりする、E 重なりする) 規則対が存在しないとき、「非重なり」(「非 ω 重なり」、 「非 E 重なり」) であると言い、存在するとき「重なり」(「 ω 重なり」、 「E 重なり」) と言う。

[定義 4] (深さ保存的) TRS R は次の条件が成立するとき、「深さ保存的」と言う。

$$\forall \alpha \rightarrow \beta \in R \forall x \in \text{Var}(\beta) \\ \text{MAX}_{v \in \mathcal{O}_x(\beta)} |v| \leq \text{MAX}_{u \in \mathcal{O}_x(\alpha)} |u|$$

すなわち、すべての変数について規則の右辺に現れる深さ (の最大値) は左辺に現れる深さ (の最大値) 以下である。

[定義 5] (項 $M \in T(F, V)$ の高さ $h(M)$)

$$h(M) = \text{MAX}_{u \in \mathcal{O}(M)} |u|$$

[定義 6] (E-系列 $\gamma: M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$ の高さ $H(\gamma)$)

$$H(\gamma) = \text{MAX}_{0 \leq i \leq n} h(M_i)$$

$$\bar{H}(\gamma) = \begin{cases} H(\gamma) & (n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \text{(注2)}$$

$$H_{min} = \begin{cases} \text{MIN}\{\bar{H}(\gamma) | \gamma \text{ は E 重なり系列} \\ \text{(E 重なり系列が存在するとき)} \\ \infty & \text{(そうでないとき)} \end{cases}$$

TRS が重なるのと $H_{min} = 0$ は同値である。
[定義 7] (規則左辺の真部分項の集合)

$$PL_R = \{\alpha/u | \alpha \rightarrow \beta \in R, u \in \mathcal{O}(\alpha) - \{\varepsilon\}\}$$

[定義 8] (要素対集合) $\Gamma \subseteq V \times T(F, V)$ を「要素対集合」と言う。要素対集合 Γ はそのすべての要素 (x, M) に対して $M \in PL_R$ のとき、「左要素対集合」とあると言う。要素対集合 Γ に対して自然数の多重集合 $size(\Gamma)$ と要素対集合 Γ_V, Γ_T を次のように定義する。

$$size(\Gamma) = \{h(M) | (x, M) \in \Gamma\}_m$$

$$\Gamma_V = \Gamma \cap V \times V, \quad \Gamma_T = \Gamma - \Gamma_V$$

本論文では、多重集合を $\{\dots\}_m$ と表す。 Γ_V から得られる変数間の同値関係を \sim_{Γ_V} と表す (Γ_V が明らかかな場合は、単に \sim と表す)。すなわち、 \sim_{Γ_V} は Γ_V の反射対称推移閉包である。

左要素対集合 Γ 、代入 θ に対して、項対集合 $\Gamma\theta$ を以下のように定義する。

$$\Gamma\theta = \{(\theta(x), \theta(M)) | (x, M) \in \Gamma\}$$

また、 $\forall (x, M) \in \Gamma \exists \gamma: \theta(x) \xrightarrow{*} \theta(M)$ のとき、 $\Gamma\theta$ は「簡約可能である」と言う。項対集合の高さ $H(\Gamma\theta)$ を次のように定義する。

$$H(\Gamma\theta) = \text{MAX}_{(x, M) \in \Gamma} \text{MIN}_{\gamma: \theta(x) \xrightarrow{*} \theta(M)} \bar{H}(\gamma)$$

要素対集合 Γ は、ある ω 代入 σ が存在して、そのすべての要素 (x, M) に対して、 $\sigma(x) = \sigma(M)$ となるとき、「 ω 単一化可能」とあると言う。

3. ω 単一化アルゴリズム

本章では、本論文で ω 重なり判定に使用する ω 単一化アルゴリズムについて述べる。

[定義 9] (O_Γ)

$$O_\Gamma(M, N) = \text{MIN}(\mathcal{O}_{\text{Var}}(M) \cup \mathcal{O}_{\text{Var}}(N))$$

(注1) : E-系列はその系列中に出現 ε からの簡約がないとき、 ε -不変と言う。文献[3]では ε 自由と呼んだ。

(注2) : $n = 0$ のとき、E-系列は $\gamma: M_0$ であり、その長さは 0 である (すなわち、何も行われぬ)。

ここで, $O_{Var}(M)$ は変数出現の集合 $\cup_{x \in Var(M)} O_x(M)$ である。MIN は関係 \leq のもとで極小な要素の集合を与える関数である。

[定義 10] ($Common(M, N)$) $Common(M, N)$ は項 M, N の非変数部分の整合性をチェックするもので、次のように定義される。

$$\begin{aligned} Common(M, N) &\Leftrightarrow \\ M[u \leftarrow c | u \in O_\Gamma(M, N)] & \\ = N[u \leftarrow c | u \in O_\Gamma(M, N)] & \end{aligned}$$

ここで, c はある定数関数記号である。また, $M[u \leftarrow c | u \in \{u_1, \dots, u_n\}]$ は $M[u_1 \leftarrow c] \dots [u_n \leftarrow c]$ を表す。

[定義 11] ($\Gamma(M, N)$) $\Gamma(M, N)$ は $Common(M, N)$ が true のときにのみ、次のように定義される。

$$\Gamma(M, N) = \{(M/u, N/u) | u \in O_\Gamma(M, N)\}$$

但し, M/u が変数でない場合は $(N/u, M/u)$ を $\Gamma(M, N)$ の要素とする。従って, $\Gamma(M, N)$ は要素対集合である。

次に, 項 M, N が ω 単一化可能かどうかを判定する ω 単一化アルゴリズムを示す。

[ω 単一化アルゴリズム]

入力: 項 M, N

出力: M, N が ω 単一化可能であるとき成功, そうでないとき失敗で終了する。

```

if  $Common(M, N)$  then begin
   $\Gamma := \Gamma(M, N)$ 
  if  $\omega$ -unify( $\Gamma$ ) then 成功で終了
  else 失敗で終了
end
else 失敗で終了
    
```

ここで, ω -unify は次のように定義される。

[述語 ω -unify の計算アルゴリズム]

入力: 要素対集合 $\Gamma (= \Gamma_T \cup \Gamma_V)$

出力: Γ が ω 単一化可能であるとき true, そうでないとき false,

```

while  $\exists (x, P), (y, Q) \in \Gamma_T$ 
   $[x \sim_{\Gamma_V} y \wedge P \neq Q]$  do
  begin
  if  $Common(P, Q)$  then begin
   $\Gamma := (\Gamma - \{(x, P)\}) \cup \Gamma(P, Q) (*)$ 
  end
  else return false
  
```

end
return true

ここで, (\bar{x}, \bar{P}) は

$$(\bar{x}, \bar{P}) = \begin{cases} (x, P) & (h(P) > h(Q) \text{ のとき}) \\ (y, Q) & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

このアルゴリズムは文献 [5] とほぼ同じアルゴリズムである。文献 [5] では (*) の部分が「 $(z, L) \in \Gamma(P, Q)$ かつ L が P の部分項であるすべての (z, L) に対して, P の部分項 L を z に置き換えた項を \bar{P} とし, $\Gamma := (\Gamma - \{(x, P), (y, Q)\}) \cup \Gamma(P, Q) \cup \{(x, \bar{P})\}$ 」としている。文献 [5] のアルゴリズムを一部変更したのは, Γ が常に左要素対集合であることを保証するためである。なお, (*) の実行により Γ が更新されるので, それに伴って, Γ_T と Γ_V も更新されると仮定する。

ω 単一化アルゴリズムが成功で終了した時点の Γ を M, N の ω 単一化の解集合と言う。解集合では次の ω 単一化可能条件が成立する。

(ω 単一化可能条件)

$$\forall (x, P), (y, Q) \in \Gamma_T P \neq Q \Rightarrow x \not\sim_{\Gamma_V} y$$

文献 [5] と同様の議論により,

M, N が ω 単一化可能である \Leftrightarrow

M, N の ω 単一化の解集合が存在する

が言える。また, この ω 単一化アルゴリズムが常に有限で停止することも容易に示すことができる。すなわち, (*) の代入が i (≥ 0) 回行われた後の Γ の内容を Γ_i とすると, すべての $(z, M) \in \Gamma(P, Q)$ に対して $MAX(h(P), h(Q)) > h(M)$ であること, ならびに, (\bar{x}, \bar{P}) の決め方より, $i > 0$ に対して $size(\Gamma_{i-1}) \gg size(\Gamma_i)$ が成立する。ここで, \gg は自然数の多重集合順序である。 \gg は整礎であるので, (*) の代入が有限回で停止することが保証される。

4. 深さ保存的 TRS の E 重なり性と非 ω 重なり性

本章では, 「TRS が深さ保存的であるとき, 非 ω 重なりならば非 E 重なりである (定理 1)」ことを示す。重なる TRS は ω 重なり, すなわち, 非 ω 重なりではないので, 以下では重ならない TRS, すなわち, $H_{min} > 0$ である TRS のみを考える。

[定義 12] (並列 E 簡約) E-系列 $\gamma : M_0 \xrightarrow{\omega} M_1 \xrightarrow{\omega}$

... $\xrightarrow{*} M_n$ において $\forall i, j (1 \leq i < j \leq n) u_i | u_j$ (すなわち, $u_i \preceq u_j$ かつ $u_j \preceq u_i$) であるとき, M_0 と M_n は並列 E 簡約されると言い, $M_0 \leftrightarrow M_n$ と表す. $\mathcal{R}(\gamma)$ で簡約の出現位置の集合 $\{u_1, \dots, u_n\}$ を表す $\delta: N_0 \leftrightarrow N_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N_k$ のとき, $\delta: N_0 \leftrightarrow^* N_k$ と表し, 並列 E 簡約列と呼ぶ. 並列 E 簡約列の長さを $|\delta|_p = k$ と表す. また, $\mathcal{R}(\delta)$ を δ における簡約の出現位置の集合とする.

[補題 1] 深さ保存的な TRS R において, 項 $M, N \in PLR - V$, 代入 θ, θ' で $\gamma: \theta(M) \leftrightarrow^* \theta'(N)$, $H(\gamma) < H_{min}$ を満たす並列 E 簡約列 γ が存在するならば, 次の二つの条件 (A), (B) を満たす並列 E 簡約列 δ が存在する.

- (A) $\delta: \theta(M) \leftrightarrow^* \theta'(N)$,
 $H(\delta) \leq H(\gamma) < H_{min}, |\delta|_p \leq |\gamma|_p$
- (B) $\forall u \in \mathcal{R}(\delta) \exists v \in O_\Gamma(M, N) v \leq u$

(証明) $\gamma: \theta(M) = N_0 \leftrightarrow N_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N_k = \theta'(N)$ とする. $(H(\gamma), |\gamma|_p)$ に関する帰納法で証明する. 但し, 順序は辞書的順序とする. $H(\gamma) = 0$ かつ $|\gamma|_p = 0$ のとき, 補題は明らかに成立する. $(H(\gamma), |\gamma|_p) > (0, 0)$ のとき, $U = \{u \in MIN(\mathcal{R}(\gamma)) | \forall v \in O_\Gamma(M, N) v \not\leq u\}$ とおく. $U = \phi$ の場合, $\delta = \gamma$ とすれば補題が成立する. それで $U \neq \phi$ とする. $U \neq \{\varepsilon\}$ のとき, 各 $u \in U$ に対して並列 E 簡約列 $\gamma_u: \theta(M)/u = N_0/u \leftrightarrow N_1/u \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N_k/u = \theta'(N)/u$ を考える. ここで, M/u と N/u が $PLR - V$ の要素であり, $H(\gamma_u) < H_{min}$, $|\gamma_u|_p \leq |\gamma|_p$ が成り立つ. 帰納法の仮定よりすべての γ_u に対して補題が成立するので, γ についても補題が成立する. それで $U = \{\varepsilon\}$ の場合のみが残る.

- (1) $|\gamma|_p = 0$ の場合
 明らか.
- (2) $|\gamma|_p > 0$ の場合

$I_R = \{i | N_i \xrightarrow{\varepsilon} N_{i+1}\}$, $I_L = \{i | N_i \xleftarrow{\varepsilon} N_{i+1}\}$ とする. $\varepsilon \in \mathcal{R}(\gamma)$ より $I_R \cup I_L \neq \emptyset$ である.

- (1) $I_L = \emptyset$ の場合

$i = MIN(I_R)$ とすると, $\gamma': \theta(M) = N_0 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N_i \xrightarrow{\varepsilon} N_{i+1}$ は M が $PLR - V$ の要素であるので $H(\gamma') \leq H(\gamma) < H_{min}$ となる E 重なり系列となり, 仮定に矛盾するのでこの場合はあり得ない.

- (2) $I_L \neq \emptyset$ の場合

$i = MAX(I_L)$, $I'_R = \{j | j > i, j \in I_R\}$ とする. $I'_R = \emptyset$ の場合は, $\gamma': N_i \xleftarrow{\varepsilon} N_{i+1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N_k = \theta'(N)$ を考えると, $I_L = \emptyset$ の場合と同様に仮定と矛盾するので, $I'_R \neq \emptyset$ でなければならない. $j = MIN(I'_R)$ とする.

並列 E 簡約列 $\gamma_1: N_i = \sigma(\beta) \xleftarrow{\varepsilon} N_{i+1} = \sigma(\alpha) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N_j = \sigma'(\alpha') \xrightarrow{\varepsilon} N_{j+1} = \sigma'(\beta')$ を考える. ε 不変な部分並列 E 簡約列 $\gamma_2: N_{i+1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N_j$ は $H(\gamma_2) < H_{min}$ より E 重なりではないので, 規則 $\alpha \rightarrow \beta, \alpha' \rightarrow \beta'$ は同じ規則でなければならない. $\alpha = f(L_1, \dots, L_k)$ とする. 但し, f はある関数記号. 各 $l (1 \leq l \leq k)$ に対して $\gamma'_{2l}: N_{i+1}/l \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N_j/l$ は $H(\gamma'_{2l}) < H(\gamma)$ より, N_{i+1}/l と N_j/l がともに $PLR - V$ の要素ならば, 帰納法の仮定より, (A), (B) の条件を満たす $\delta_{2l}: N_{i+1}/l \leftrightarrow^* N_j/l$ が存在する. $|\gamma_2|_p < |\gamma|_p$ なので γ_2 に帰納法の仮定を用いると, (A), (B) の条件を満たす並列 E 簡約列 $\delta_2: N_{i+1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N_j$ が得られる. δ_{2l} は (B) の条件を満たすので, 従ってすべての $x \in Var(\alpha)$ について $\delta_x: \sigma(x) \leftrightarrow^* \sigma'(x)$ となる並列 E 簡約列 δ_x が存在する.

δ_x を用いて, $\delta_1: \sigma(\beta) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \sigma'(\beta)$ となる並列 E 簡約列を作ることができる. ここで深さ保存の仮定より $H(\delta_1) \leq H(\gamma_1)$ であり, また, $\xleftarrow{\varepsilon}, \xrightarrow{\varepsilon}$ の簡約がなくなるので $|\delta_1|_p < |\gamma_1|_p$ である.

γ においてその部分並列 E 簡約列 γ_1 を δ_1 に置き換えたものを γ' とする. $H(\gamma') \leq H(\gamma)$ かつ $|\gamma'|_p < |\gamma|_p$ であるので γ' に帰納法の仮定を用いて条件 (A), (B) を満たす並列 E 簡約列 δ が得られる. □

[系 1] 深さ保存的な TRS R において, $M, N \in PLR - V$, 代入 θ, θ' で $\gamma: \theta(M) \leftrightarrow^* \theta'(N)$, $\bar{H}(\gamma) < H_{min}$ を満たす E-系列 γ が存在するならば次の条件を満たす E-系列 δ が存在する.

- (A) $\delta: \theta(M) \leftrightarrow^* \theta'(N)$, $\bar{H}(\delta) \leq \bar{H}(\gamma) < H_{min}$
- (B) $\forall u \in \mathcal{R}(\delta) \exists v \in O_\Gamma(M, N) v \leq u$

(証明) E 系列 $M \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N$ は並列 E 簡約列 $M \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N$ とみることができるので, 補題 1 より明らか. □

[補題 2] 深さ保存的な TRS R において, $M, N \in PLR - V$, 代入 θ で $\gamma: \theta(M) \leftrightarrow^* \theta(N)$, $\bar{H}(\gamma) < H_{min}$ を満たす E-系列 γ が存在するならば, 次の三つの条件 (A), (B), (C) が成立する.

- (A) $Common(M, N) = true$
- (B) $\Gamma(M, N)\theta$ は簡約可能
- (C) $H(\Gamma(M, N)\theta) < H_{min}$

(証明) 系 1 より明らか。 □

[補題 3] TRS が深さ保存的であるとする。左要素対集合 Γ , 代入 θ に対して, $\Gamma\theta$ が簡約可能であり, $H(\Gamma\theta) < H_{min}$ ならば, Γ は ω 単一化可能である。

(証明) $size(\Gamma_T)$ に関する帰納法で証明する。 $size(\Gamma_T) = \{ \}_m$ のときは明らかである。 $size(\Gamma_T) \gg \{ \}_m$ のときを考える。

(1) $\exists(x, M), (y, N) \in \Gamma_T, M \neq N, x \sim_{\Gamma_V} y$ の場合

$\Gamma\theta$ は簡約可能であるから, $\exists\gamma : \theta(M) \leftrightarrow^* \theta(x) \leftrightarrow^* \theta(y) \leftrightarrow^* \theta(N), \bar{H}(\gamma) < H_{min}$, 補題 2 より $\Gamma_1 = \Gamma(M, N)$ が定義でき, $\Gamma_1\theta$ は簡約可能かつ $H(\Gamma_1\theta) < H_{min}$ を満たす。

また, (\bar{x}, \bar{M}) を $h(M) > h(N)$ ならば (x, M) , そうでなければ (y, N) とする。このとき, $\Gamma' = (\Gamma - (\bar{x}, \bar{M})) \cup \Gamma_1$ とおくと, $size(\{(\bar{x}, \bar{M})\}) \gg size(\Gamma_1)$ より $size(\Gamma) \gg size(\Gamma')$ となり, かつ, 代入 θ で $\Gamma'\theta$ は簡約可能かつ $H(\Gamma'\theta) < H_{min}$ となるので, 帰納法の仮定より, Γ' は ω 単一化可能である。その ω 代入を σ とすると $\forall(x', M') \in \Gamma_1 \sigma(x') = \sigma(M')$, $\sigma(x) = \sigma(y)$, 更に, $(\bar{x}, \bar{M}) = (x, M)$ ならば $\sigma(y) = \sigma(N)$, そうでないとき $\sigma(x) = \sigma(M)$, よって, Γ も ω 単一化可能である。

(2) そうでない場合

要素対集合 ω 単一化アルゴリズムは true を返すので, Γ は ω 単一化可能である。 □

[補題 4] 規則対 $\alpha_i \rightarrow \beta_i (i = 1, 2)$ が代入 θ , 出現 u で E 重なりであり, E 重なり系列 $\gamma : \theta(\alpha_1/u) \overset{*}{\rightarrow} \theta(\alpha_2)$ が $H(\gamma) = H_{min}$ を満たすとき, 次の三つの条件 (A), (B), (C) が成立する。

- (A) $Common(\alpha_1/u, \alpha_2) = true$
- (B) $\Gamma(\alpha_1/u, \alpha_2)\theta$ は簡約可能
- (C) $H(\Gamma(\alpha_1/u, \alpha_2)\theta) < H_{min}$

(証明) γ が ε 不変より f をある関数記号とするとき, $\alpha_1/u = f(M_1, \dots, M_n), \alpha_2 = f(N_1, \dots, N_n)$ となり, $\gamma_i : \theta(M_i) \leftrightarrow^* \theta(N_i), \bar{H}(\gamma_i) < H_{min} (1 \leq i \leq n)$ である。従って, 項 M_i, N_i が変数でない場合は補題 2 より $\Gamma_i = \Gamma(M_i, N_i)$ に対して $Common(M_i, N_i) = true, \Gamma_i\theta$ が簡約可能かつ

$H(\Gamma_i\theta) < H_{min}$ である。また, $M_i \in V$ の場合は $\Gamma_i = \{(M_i, N_i)\}, N_i \in V$ のときは $\Gamma_i = \{(N_i, M_i)\}$ とおくと $\Gamma_i\theta$ が簡約可能かつ $H(\Gamma_i\theta) < H_{min}$ である。従って, $\Gamma = \cup_{1 \leq i \leq n} \Gamma_i$ とおくと, $\Gamma = \Gamma(\alpha_1/u, \alpha_2)$ かつ $Common(\alpha_1/u, \alpha_2) = true$ であり, $\Gamma\theta$ は簡約可能, $H(\Gamma\theta) < H_{min}$ が成り立つ。 □

[定理 1] TRS が深さ保存的であるとき, 非 ω 重なりならば非 E 重なりである。

(証明) 補題 3 と補題 4 より E 重なりする規則対は ω 重なりする規則対でもあるので明らか。 □

非線形 TRS が合流性を満たす十分条件として,

- 単純右線形かつ非 E 重なり (文献 [4])
- 強深さ保存的かつ非 E 重なり (文献 [6])

が知られている。ここで, 「単純右線形」な TRS とは, すべての規則について, 右辺が線形で左辺に 2 度以上現れる変数は右辺に現れない TRS を言う。また, 「強深さ保存」な TRS とは, 深さ保存かつ左辺の同じ変数の出現の深さが等しい TRS を言う。定義より強深さ保存的な TRS は深さ保存的である。

非 E 重なり性は一般に判定不能であるので, 上記の十分条件は TRS が合流性を満たすかどうかの判定に一般的には利用することができない。しかし, 定理 1 を上記の十分条件に適用することにより非線形 TRS が合流性を満たす判定可能な十分条件として次のものが得られる。

- 深さ保存的かつ単純右線形かつ非 ω 重なり
- 強深さ保存的かつ非 ω 重なり

5. 右定項 TRS の非 E 重なり性判定問題

本章では, 「右定項 TRS の非 E 重なり性が判定可能である (定理 2)」ことを示す。TRS が重なるかどうかは判定可能であり, 重なる場合は非 E 重なりでないので, 以下では重ならない TRS, すなわち, $H_{min} > 0$ の TRS のみを考える。

[補題 5] 右定項 TRS R で E-系列 $\gamma : M \leftrightarrow^* N$ が $\bar{H}(\gamma) < H_{min}$ ならば, $M \downarrow N$ である。

(証明) 証明は文献 [3] とほとんど同じであるが, 文献 [3] の命題 P(n), Q(n), S(n) と少し異なるところがあるので以下にそれを示す。そのために E-系列の高さを拡張して E-グラフ $G = (V_N, V_E)$ [3] の高さ $H(G)$ を $H(G) = MAX_{M \in V_N} h(M)$ と定義する。変更点は Q(n) と S(n) においては条件 $H(G) < H_{min}$ を追加したこと, P(n) においては条件 $H(\gamma) < H_{min}$ を追加したことのみである。

(1) 命題 Q(n)

E-グラフ $G = (V_N, V_E)$ に対して $\|V_N\| = n$ かつ $H(G) < H_{min}$ を満たすならば、 V_N の項はすべて合流する。

(2) 命題 P(n)

長さ n かつ $H(\gamma) < H_{min}$ を満たす ϵ 不変な E-系列 $\gamma: M_1 \leftrightarrow M_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow M_{n+1}$ に対して、ある規則 $\alpha \rightarrow \beta$ と代入 σ が存在して $M_1 = \sigma(\alpha)$ を満たすならば、すべての i ($1 \leq i \leq n+1$) について $M_i \rightarrow^* \beta$ が成立する。

(3) 命題 S(n)

極小 E-グラフ $G = (V_N, V_E)$ に対して、 $\|V_N\| = n$ かつ $H(G) < H_{min}$ を満たすとき、 $\sigma(\alpha)$ が V_N の要素で、かつ、 $\beta \notin V_N$ を満たす規則 $\alpha \rightarrow \beta$ と代入 σ が存在するならば、すべての V_N の要素 M について $M \rightarrow^* \beta$ が成立する。

文献 [3] の証明において、この新しい命題 Q(n), P(n), S(n) を用いて、「非 E 重なり」という仮定を用いている部分を「 H_{min} より高さの小さい E 重なり系列は存在しない」という仮定に置き換えることにより同じ議論で証明できる。 □

[定義 13] (C_i) 項の集合 C_i ($i \geq 0$) を以下のように定義する。

$$C_0 = \cup_{\alpha \rightarrow \beta \in R} sub(\beta)$$

$$C_{i+1} = C_i \cup (\cup_{\tau \in [V \rightarrow C_i], \alpha \rightarrow \beta \in R} sub(\tau(\alpha)))$$

ここで、 $sub(M)$ は項 M の部分項の集合、 $[V \rightarrow C_i]$ は V から C_i へのすべての代入の集合を表す。例えば、 $R = \{f(x) \rightarrow c\}$ のときは、 $C_0 = \{c\}$, $C_1 = \{c, f(c)\}$, $C_2 = \{c, f(c), f(f(c))\}$, ... となる。ここで f, c は関数記号である。

[定義 14] (線形) 左要素対集合 $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_V$ が「線形である」とは、 Γ_T に同じ変数が 2 回以上現れないことを言う。また、 Γ_T に k (≥ 2) 回以上現れるすべての変数 x に対して、そのうちの $k-1$ 個を新しい変数 x_1, \dots, x_{k-1} に置き換えて Γ_T を再定義し、 Γ_V に $\{(x, x_i) | i = 1, \dots, k-1\}$ を加えた左要素対集合を $\bar{\Gamma}$ で表す。 $\bar{\Gamma}$ は線形である。

例. $\Gamma_T = \{(x, f(y)), (z, g(x))\}$ 但し、 $V = \{x, y, z\}$. このとき、 Γ_T は線形ではない。 $\Gamma'_T = \{(x, h(y, y))\}$, $\Gamma''_T = \{(x, f(x))\}$ も同様。

[定義 15] ($y \mapsto x$) $(x, M), (y, N) \in \Gamma_T, \exists z \in Var(M), z \sim_{\Gamma_V} y$ のとき、 $y \mapsto x$ と記す。すなわち、ある代入 θ が存在して、 $\Gamma\theta$ が簡約可能なら

ば $\theta(x) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M)[u \leftarrow \theta(y)] \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M)[u \leftarrow \theta(N)]$ が成り立つ。ここで、 $z = M/u$.

[補題 6] 右定項 TRS R において、線形な左要素対集合 $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_V$ が次の条件 (1), (2)

(1) $\forall (x, M) \in \Gamma_T, x \mapsto y_1 \mapsto \dots$ となる無限列が存在する

(2) 代入 θ で $\Gamma\theta$ は簡約可能でかつ $H(\Gamma\theta) < H_{min}$ を満たすならば、次の条件 (A), (B) を満たす代入 θ' が存在する。

(A) $\Gamma\theta'$ は簡約可能でかつ $H(\Gamma\theta') < H_{min}$

(B) $\forall x \in Var(\Gamma), \theta'(x) \in C_0$

(証明) $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_V$ に現れる変数の集合 V_i , ($1 \leq i \leq 4$) を次のように定義する。

$$V_1 = \{x | \exists M (x, M) \in \Gamma_T\}$$

$$V_2 = \{y | \exists x, M (x, M) \in \Gamma_T, y \in Var(M)\}$$

$$V_{12} = V_1 \cup V_2$$

$$V_3 = \{z \in Var(\Gamma) | \exists x z \sim x, \exists x \in V_{12}\} - V_{12}$$

$$V_4 = \{z \in Var(\Gamma) | \exists x z \not\sim x, \forall x \in V_{12}\} - V_{12}$$

Γ の線形性より、 $V_i \cap V_j = \emptyset$ ($1 \leq i < j \leq 4$) であり、 $Var(\Gamma) = \cup_{i=1}^4 V_i$ である。

証明は以下の順に行う。

(i) $x \in V_1$ に対して $\theta'(x) \in C_0$ である代入が存在する

(ii) (i) ならば $x \in V_2$ に対して $\theta'(x) \in C_0$ である代入が存在する

(iii) (i) かつ (ii) ならば $x \in V_3 \cup V_4$ に対して $\theta'(x) \in C_0$ である代入が存在する

以下において、 S_i は変数の集合 $S_i = \{x \in V_i | \theta(x) \notin C_0\}$ ($i = 1, \dots, 4$) を表す。

(i) の証明

$m = \sum_{x \in V_{ar}(\Gamma)} |\theta(x)|$, $n = \|S_1\|$ とおく。 $< n, m >$ に関して $N \times N$ の辞書的順序に基づく帰納法で証明する。 $n = 0$ のときは明らかである。 $n > 0$ のときを考える。

$y_0 \in S_1$ とする。 仮定より、 $\exists y_0, y_1, \dots (y_0 \mapsto y_1 \mapsto y_2 \mapsto \dots)$ が成立する。 すなわち、各 y_k ($k \geq 0$) に対して、ある Γ_T の要素 (y_{k+1}, M_k) が存在して、 $y_k \sim_{\Gamma_V} z_k, z_k = M_k/s_k, \gamma_k: \theta(y_{k+1}) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M_k) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M_k)[s_k \leftarrow \theta(y_k)]$.

(1) $\exists k > 0 \exists u \in R(\gamma_k) u < s_k \dots s_0$ が成立する場合

この条件を満たす k のうち最小のものを改めて k とする。また、 $\gamma_k : \theta(y_{k+1}) = N_0 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N_l = \theta(M_k)[s_k \leftarrow \theta(y_k)]$ とし、 $N_{d-1} \xrightarrow{u_d} N_d$ ($1 \leq d \leq l$) のリデックス出現を u_d とする。 $d = \text{MAX}(\{d | u_d < s_k \dots s_0, 1 \leq d \leq l\})$ とする。 H_{min} より高さの小さい E 重なり系列が存在しないという仮定から、その簡約はある規則 $\alpha \rightarrow \beta$ と代入 σ で $N_{d-1}/u_d = \sigma(\alpha) \rightarrow \beta = N_d/u_d$ となる。 $s_k \dots s_0 = u_d \cdot t$ とおけば $\delta : \beta/t \xrightarrow{*} \theta(y_0)$, $H(\delta) < H_{min}$ である。 $\theta_1 = \theta[y_0 \rightarrow \beta/t]$ (すなわち、 $\theta_1(y_0) = \beta/t$, $y \neq y_0$ のとき $\theta_1(y) = \theta(y)$) と定義すれば、 Γ_{θ_1} は簡約可能で $H(\Gamma_{\theta_1}) < H_{min}$ が成立する。なぜなら Γ の線形性より y_0 は Γ_T において 1 度のみ出現し、 $(y_0 M_0) \in \Gamma_T$ に対して $\gamma_0 : \theta(y_0) \xrightarrow{*} \theta(M_0)$, $H(\gamma_0) < H_{min}$ であり、かつ $\delta : \theta_1(y_0) \xrightarrow{*} \theta(y_0)$, $H(\delta) < H_{min}$ が成立するからである。 θ_1 においては条件 (B) を満たさない変数の個数 ($|\{x \in V_1 | \theta_1(x) \notin C_0\}|$) が $n-1$ となるので、帰納法の仮定より、条件 (A), (B) を満たす代入 θ' が存在する。

(2) (1) の条件が成立しない場合

$l \geq \|V_1\|$ のとき、 $\exists i, j$ ($0 \leq i < j \leq l$) $y_i = y_j$ が成立する。

(a) $y_i \notin S_1$ (すなわち、 $\theta(y_i) \in C_0$) の場合

$\gamma : \theta(y_i)/s_{i-1} \dots s_0 \xrightarrow{*} \theta(y_0)$ かつ $H(\gamma) < H_{min}$ を満たす E 系列 γ が存在する。 $\theta_1 = \theta[y_0 \rightarrow \theta(y_i)/s_{i-1} \dots s_0]$ と定義すると先の議論と同様に、 Γ_{θ_1} は簡約可能で、 $H(\Gamma_{\theta_1}) < H_{min}$ 、かつ条件 (B) を満たさない V_1 の要素数が 1 減少する。従って、帰納法の仮定より (A), (B) を満たす代入 θ' が存在する。

(b) $y_i \in S_1$ の場合

$\gamma : \theta(y_j)/s_{j-1} \dots s_i \xrightarrow{*} \theta(y_i) (= \theta(y_j))$, $H(\gamma) < H_{min}$ を満たす E 系列 γ が存在する。 $\theta_1 = \theta[y_i \rightarrow \theta(y_j)/s_{j-1} \dots s_i]$ と定義すると、 Γ_{θ_1} は簡約可能で、 $H(\Gamma_{\theta_1}) < H_{min}$ かつ $\sum_{x \in \text{Var}(\Gamma)} |\theta_1(x)| < m$ となるので、帰納法の仮定より (A), (B) を満たす代入 θ' が存在する。

(ii) の証明

Γ の線形性より $y \in S_2$ に対して、 $(x, M) \in \Gamma_T$ かつ $y \in \text{Var}(M)$ を満たす x と M が丁度 1 つ存在する。(i) より $\gamma : \theta(x) \xrightarrow{*} \theta(M)$, $x \in V_1$, $\theta(x) \in C_0$ が成り立っている。 y の M 中の出現位置を u とするとき、

(1) $\forall v \in R(\gamma) v \not\prec u$ のときは、 $\theta' = \theta[y \rightarrow \theta(x)/u]$ とおけばよい。

(2) $\exists v \in R(\gamma) v < u$ のときは、 v を $v < u$ を満たす最大のリデックス出現 $\text{MAX}\{v \in R(\gamma) | v < u\}$ として、その簡約のうち最右のものに着目する。 $H(\gamma) < H_{min}$ より、 γ は E 重なり系列ではないのでリデックス出現 v の最右簡約は右向き ($\sigma(\alpha) \rightarrow \beta$) でなければならない。従って、 $\theta' = \theta[y \rightarrow \beta/w]$ とおけばよい。ここで、 $v \cdot w = u$ 。

(iii) の証明

変数 $z \in S_3$ についてはある $x \in V_1 \cup V_2$, $\theta(x) \in C_0$ が存在して、 $x \sim z$ が成立するので、 $\theta' = \theta[z \rightarrow \theta(x)]$ とおけばよい。

また、 c を任意の (0 引数) 関数記号 $\in C_0$ とすると、すべての変数 $y \in S_4$ に対して $\theta' = \theta[y \rightarrow c]$ とおけばよい。従って補題 6 が成立する。□

[補題 7] 右定項 TRS R において、線形な左要素対集合 Γ 、代入 θ に対して、 $\Gamma\theta$ が簡約可能かつ $H(\Gamma\theta) < H_{min}$ であり、更に Γ が ω 単一化可能条件を満たすならば、次の条件を満たす代入 θ' が存在する。

(A) $\Gamma\theta'$ は簡約可能で $H(\Gamma\theta') < H_{min}$

(B) $\forall x \in \text{Var}(\Gamma)\theta'(x) \in C_{\|\Gamma_T\|}$

(証明) $\|\Gamma_T\|$ に関する帰納法で証明する。 $\|\Gamma_T\| = 0$ のときは明らか。

$\|\Gamma_T\| = 1$ のとき、 $\Gamma_T = \{(x, M)\}$ とする。補題 6 の条件 (1) を満たせば、補題 6 より、この補題が成立する。補題 6 の条件 (1) を満たさないとき、 $c \in C_0$ を 0 引数関数記号とする。 $\forall y \in \text{Var}(\Gamma) y \not\sim_{\Gamma_V} x$ ならば $\theta_1(y) = c$ とする。このとき、 $\theta_1(M) \in C_1$ が成立する。 $z \sim_{\Gamma_V} x$ を満たす任意の $z \in \text{Var}(\Gamma)$ に対して、 $\theta_1(z) = \theta_1(M)$ とする。そのとき、 $\forall (y, N) \in \Gamma$ $\theta_1(y) = \theta_1(N)$ 。従って、 Γ_{θ_1} は簡約可能、かつ、 $H(\Gamma_{\theta_1}) < H_{min}$ が成立する。故にこの補題が成立する。

$\|\Gamma_T\| > 1$ のとき、 $\Gamma_1 = \{(x, M) \in \Gamma_T | \forall (y, N) \in \Gamma_T \forall z \in \text{Var}(N) x \not\sim_{\Gamma_V} z\}$ とする。

$\Gamma_1 = \emptyset$ ならば $\forall (x, M) \in \Gamma_T \exists (y, N) \in \Gamma_T x \sim y$ 。従って、補題 6 の条件 (1) が成立する。故に補題 6 よりこの補題が成立する。

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ のとき、

$\Gamma_{V_1} = \{(y, z) \in \Gamma_V | \exists (x, M) \in \Gamma_1 x \sim_{\Gamma_V} y\}$

$\Gamma' = \Gamma - (\Gamma_1 \cup \Gamma_{V_1})$

とする。ここで、 Γ_1 の定義と Γ が ω 単一化可能条件

を満たすことより, $(\{x|(x, M) \in \Gamma_1\} \cup \text{Var}(\Gamma_{V_1})) \cap \text{Var}(\Gamma') = \emptyset$ が成立する. 帰納法の仮定より, この補題の (A), (B) が成立する. すなわち, $\Gamma'\theta'$ は簡約可能で $H(\Gamma'\theta') < H_{min}$, $\forall x \in \text{Var}(\Gamma') \theta'(x) \in C_{\|\Gamma_T\|}$.

$c \in C_0$ を 0 引数関数記号とする. $\forall (x, M) \in \Gamma_1$ に対して, $\text{Var}(M) - \text{Var}(\Gamma') \neq \emptyset$ ならば $\forall y \in \text{Var}(M) - \text{Var}(\Gamma') \theta_1(y) = c$ とする ($y \sim_{\Gamma_V} z$ かつ $z \in \text{Var}(\Gamma')$ を満たす z は存在しない. なぜなら, $y \sim_{\Gamma_V} z$ ならば $y \in \text{Var}(\Gamma_V)$ かつ $y \notin \text{Var}(\Gamma_{V_1})$. その結果 $y \in \text{Var}(\Gamma')$ となり矛盾が生じる). $\forall z \in \text{Var}(\Gamma') \theta_1(z) = \theta'(z)$. そのとき, $\theta_1(M) \in C_{\|\Gamma_T\|+1} \subseteq C_{\|\Gamma_T\|}$. Γ (従って, Γ_1) が ω 単一化可能条件を満たすことより, $\forall (x, M) \in \Gamma_1 \theta_1(x) = \theta_1(M)$. $x \sim_{\Gamma_V} z$ を満たす $\forall z \in \text{Var}(\Gamma_{V_1})$ に対して, $\theta_1(z) = \theta_1(x)$ とおけば $\Gamma_1 \cup \Gamma_{V_1}$ は簡約可能, $H((\Gamma_1 \cup \Gamma_{V_1})\theta_1) < H_{min}$ かつ $\forall x \in \text{Var}(\Gamma_1 \cup \Gamma_{V_1}) \theta_1(x) \in C_{\|\Gamma_T\|}$. 従って, この結果と帰納法の仮定を合わせるにより, この補題が成立する. \square

[定義 16] (Γ_i) 入力項 M, N に対して ω 単一化アルゴリズムが, ω -unify 中の **while** ループを $n (\geq 0)$ 回実行後, 成功で終了したとする. **while** ループの $i (0 \leq i \leq n)$ 回目の実行で得られた要素対集合を Γ_i とする. 但し, $\Gamma_0 = \Gamma(M, N)$ である.

[補題 8]

- (1) $\bar{\Gamma}_n\theta$ が簡約可能ならば $\Gamma_n\theta$ は簡約可能.
- (2) $\Gamma_n\theta$ が簡約可能ならば $\Gamma_0\theta$ は簡約可能.

(証明)

(1) Γ_n から $\bar{\Gamma}_n$ を作るときに $x, y \dots$ を $x_i, y_j \dots$ と名前を変えたとする. $\theta(x_i) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(x), \dots$ より, $\theta(x) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(\bar{M}) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M)$ が成り立つ.

(2) 「 $\Gamma_{i+1}\theta$ が簡約可能 $\Rightarrow \Gamma_i\theta$ が簡約可能」が $i = 0, \dots, n-1$ で成り立つことを示す. $\Gamma_{i+1} = \Delta \cup \{(y, N)\} \cup \Gamma(M, N)$, $\Gamma_i = \Delta \cup \{(x, M), (y, N)\}$ より, $\theta(x) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M)$ が言えればよい. $x \sim y$ より, $\theta(x) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(y) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(N) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M)$ が成り立つ. \square

[補題 9]

- (1) $\Gamma_0\theta$ が簡約可能で $H(\Gamma_0\theta) < H_{min}$ ならば $\Gamma_n\theta$ は簡約可能で $H(\Gamma_n\theta) < H_{min}$.
- (2) $\Gamma_n\theta$ が簡約可能で $H(\Gamma_n\theta) < H_{min}$ ならば $\exists \theta' \bar{\Gamma}_n\theta'$ は簡約可能で $H(\bar{\Gamma}_n\theta') < H_{min}$.
- (3) Γ_n が ω 単一化可能ならば $\bar{\Gamma}_n$ は ω 単一化可能.

(証明)

(1) 「 $\Gamma_i\theta$ が簡約可能で $H(\Gamma_i\theta) < H_{min}$ ならば $\Gamma_{i+1}\theta$ は簡約可能で $H(\Gamma_{i+1}\theta) < H_{min}$ 」が $i = 0, \dots, n-1$ で成り立つことを示せばよい. $\Gamma_{i+1} = \Delta \cup \{(y, N)\} \cup \Gamma(M, N)$, $\Gamma_i = \Delta \cup \{(x, M), (y, N)\}$ より, $\Gamma(M, N)\theta$ が簡約可能, かつ, $H(\Gamma(M, N)\theta) < H_{min}$ が言えればよい. $x \sim y$ より, $\gamma : \theta(M) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(x) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(y) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(N)$, $H(\gamma) < H_{min}$ が成り立つ. 従って, 補題 2 より $\Gamma(M, N)\theta$ が簡約可能, かつ, $H(\Gamma(M, N)\theta) < H_{min}$ が成り立つ.

(2) Γ_n から $\bar{\Gamma}_n$ を作るときに $x, y \dots$ を $x_i, y_j \dots$ と名前を変えたとする. $\theta' = \theta[x_1 \leftarrow \theta(x), \dots, y_1 \leftarrow \theta(z), \dots]$ とすれば明らかに成り立つ.

(3) $\bar{\Gamma}_n$ の作り方から明らか. \square

[補題 10] TRS R が E 重なりならば, ある ω 重なり of 規則対 $(\alpha_1/u, \alpha_2)$ が存在して, その ω 単一化の解集合を Γ とするとき, $\exists \theta \in [V \rightarrow C_{\|\Gamma_T\|}] \forall (x, M) \in \bar{\Gamma} \theta(x) \downarrow \theta(M)$ が成り立つ. また, 逆も成り立つ.

(証明)

(\Rightarrow の証明)

TRS R が E 重なりより, ある規則対 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2$, 代入 θ, θ' および $u \in \mathcal{O}(\alpha_1)$ が存在して, $\theta(\alpha_1/u) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(\alpha_2)$ が成り立つ. そのような E 系列のうち高さが最小なものを γ とすると, H_{min} の定義より $H(\gamma) = H_{min}$ が成り立つ. ここで, 一般性を失うことなく変数名の変更により, $\theta = \theta'$ と仮定できる. 補題 4 より $\Gamma_0\theta$ は簡約可能で, $H(\Gamma_0\theta) < H_{min}$ である. ここで, $\Gamma_0 = \Gamma(\alpha_1/u, \alpha_2)$ である. 補題 9 と補題 3 よりある代入 θ' が存在して $\bar{\Gamma}_n\theta'$ は簡約可能, $H(\bar{\Gamma}_n\theta') < H_{min}$, $\bar{\Gamma}_n$ は線形かつ ω 単一化可能条件を満たす. ここで, Γ_n は $(\alpha_1/u, \alpha_2)$ の ω 単一化の解集合である. 補題 7 より, ある $\theta'' \in [V \rightarrow C_{\|\Gamma_T\|}]$ が存在して, $\bar{\Gamma}_n\theta''$ は簡約可能で $H(\bar{\Gamma}_n\theta'') < H_{min}$ が成り立つ. 従って, 補題 5 より $\forall (x, M) \in \bar{\Gamma}_n\theta''(x) \downarrow \theta''(M)$ が成り立つ.

(\Leftarrow の証明)

入力項 $\alpha_1/u, \alpha_2$ に対して ω 単一化アルゴリズムを適用して, ω -unify 中の **while** ループを $n (\geq 0)$ 回実行した後, 成功で終了し, ω 単一化の解集合 $\Gamma = \Gamma_n$ が得られるとする. 但し, $\Gamma_0 = \Gamma(\alpha_1/u, \alpha_2)$. ある代入 θ が存在して $\forall (x, M) \in \bar{\Gamma}_n\theta(x) \downarrow \theta(M)$ が成り立つので, 明らかに $\bar{\Gamma}_n\theta$ は簡約可能である. 補題 8 より $\Gamma_0\theta$ は簡約可能となるので, 明らかに $\theta(\alpha_1/u) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(\alpha_2)$ が成り立つ. 従って, TRS R は E 重なりである. \square

[定理 2] 右定項 TRS において非 E 重なり性が判定可能である。

(証明) 規則対が ω 重なりするかどうかは判定可能であり, ω 重なりするときにはその ω 単一化の解集合 Γ が計算可能である。この Γ により決まる代入の集合 $[V \rightarrow C_{\|\Gamma_T\|}]$ は定義より有限集合である。また, 右定項 TRS においては項 M, N に対して $M \downarrow N$ が判定可能 [2] であるので, 補題 10 より非 E 重なり性が判定可能である。

次に非 E 重なり性判定アルゴリズムを示す。

[TRS の非 E 重なり性判定アルゴリズム]

入力: 右定項 TRS R

出力: TRS R が非 E 重なりするとき **true**, そうでないとき **false**

for 各 ω 重なり規則対 p **do**

begin

p の ω 単一化解集合を Γ とする。

for 各代入 $\theta \in [V \rightarrow C_{\|\Gamma_T\|}]$ **do**

begin

if すべての $\bar{\Gamma}$ の要素 (x, M) に対して

$\theta(x) \downarrow \theta(M)$

then return false

end

end

return true □

6. む す び

本論文では, 深さ保存の概念を導入することにより, TRS が深さ保存的であるとき, 非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを明らかにした。また, 右定項 TRS の非 E 重なり性判定問題が可解であることを明らかにした。なお, 深さ保存の条件だけでは非 E 重なり性の判定は不能である。

今後の課題としては, 定理 1 において「深さ保存的」という条件を取り除いて「非 ω 重なりならば非 E 重なりである」を証明することが挙げられる。

文 献

- [1] M. Ogawa and S. Ono, "On the uniquely converging property of nonlinear term rewriting system." 情報処理学会, ソフトウェア基礎論研究会研究報告, pp.61-70, May 1989.
- [2] M. Oyamaguchi, "The reachability and joinability problems for right-ground term-rewriting systems," Journal of Information Processing, vol.13, no.3, 1990.
- [3] 大門口通夫, 太田義勝, "右定項-項書換えシステムの合流性について," 信学論 (D-I), vol.J76-D-I, no.2, pp.39-45,

Feb. 1993.

- [4] 太田義勝, 大門口通夫, 外山芳人, "単純右線形-項書換えシステムの合流性について," 信学論 (D-I), vol.J78-D-I, no.3, pp.263-268, March 1995.
- [5] A. Martelli and G. Rossi, "Efficient unification with infinite terms in logic programming," ON FIFTH GENERATION COMPUTER SYSTEMS, pp.202-209, 1984.
- [6] H. Gomi, M. Oyamaguchi, and Y. Ohta, "On the church-rosser property of non-E-overlapping and depth-preserving TRS's," 情処学論, vol.37, no.12, pp.2147-2160, Dec. 1996.

(平成 8 年 9 月 25 日受付, 9 年 4 月 8 日再受付)



松浦 邦博

平 5 三重大学院修士課程 (電子工学専攻) 了。項書換えシステムに関する研究に従事。現在, アドバンテスト (株) 勤務。



大門口通夫 (正員)

昭 52 東北大学院博士課程了。工博。同年名古屋大学助手。昭 53 三重大学工学部助教授。平 2 同大教授。現在に至る。理論計算機科学, 特にオートマTON・形式言語理論, 代数的仕様記述, 項書換えシステム, 言語処理系, プログラム意味論などの研究に従事。情報処理学会, ソフトウェア科学会, EATCS 各会員。



太田 義勝 (正員)

昭 51 名大・工・電気卒。昭 53 同大学院博士 (前期) 課程 (情報工学専攻) 了。同年三重大学工学部助手。昭 55 名大情報処理教育センター助手。昭 60 同大大型計算機センター助手。平 2 三重大学工学部情報工学科助教授。現在に至る。工博。計算機科学, 特に項書換えシステム, 言語処理系, 分散システムに関する研究に従事。情報処理学会会員。



小川 瑞史

昭 58 東大・理・数学卒。昭 60 同大学院修士課程了 (数学専攻)。同年 NTT 武蔵野電気通信研究所入所。現在 NTT 基礎研究所主任研究員。計算機科学, 特に項書換え系, 関数型プログラムの解析・検証・合成などの研究に従事。情報処理学会, ソフトウェア科学会各会員。