日本ファジィ学会誌 Vol.10, No.2, pp.215-224(1998)

ファジィ測度の同定と解釈†

中森 義輝*

1. はじめに

人間がある対象を評価するとき，対象の属性の個別評価を統合し総合評価をする。近年，このような主観評価のモデリングに対して，属性間の相互作用を表現できるファジィ測度とショケ積分(Choquet Integral)を用いた研究がなされている。

人間の平均的主観評価構造を分析するためのファジィ測度の同定においては，通常，多くの回答者から得たアンケートデータを用いて，ショケ積分モデルによる予測残差2乗和を最小化するというアプローチがとられる。そのため，得られた構造は同定の定式化に依存した相互作用を表現している。モデルの中の「測度たち」は，予測誤差最小化という至上命令により，互いに譲り合ったり，過大な自己主張を行い，新たな組織化を開始する。このような「数合わせ」をそのまま構造化であると考えると落とし穴に落ちてしまう。

ある人間集団の総合評価値の平均的予測については，評価項目を適切に選べば線形荷重和で十分であるという報告が多数ある。ただし，データベクトル間に相関が存在する以上，やはり「数合わせ」を行っていることを自覚しておかなければならない。にもかかわらず，線形重回帰分析が多用される理由は「限られた範囲」で予測を行うには，多くの場合それで十分であるからである。このとき当然，予測式の係数の意味を理解しようとしたり，モデリングに用いたデータの範囲外を無条件で予測するのは注意を要する。

ショケ積分モデルは非線形モデルであるから，まちがいなく手持ちのデータに対する予測精度は高くなる。しかし，説明変数と用いるデータを適切に選べば，線形回帰モデルでもかなりの精度が期待できることが多い。わざわざショケ積分による評価モデルを持ち出すのは，変数間の関わり方を探求したいからである。そしてまた，構造を十分に把握して，データの範囲外を予測したいからである。ところが，説明変数間の関わり方に関する事前情報がない以上，予測誤差最小化という同定法に頼らざるを得ない。しかし，予測誤差最小化という規範に従う限り，構造同定ができたかどうかの不安がつねに残る。ここに大きなジレンマが存在する。

個人の選好を扱うのであれば，一対比較法や対話的手法が有効となることがありうるが，個人の選好構造から集団の選好構造を導くというアプローチは，労力と集計法の関係から放棄せざるを得ない。したがって，「数合わせ」の危険性を承知の上で，データの構造化に立ち向かわざるをえない。

筆者らは，アンケート結果のような主観評価データから被験者の主観評価構造を解読するために，ショケ積分モデルを適用し，その同定法として予測残差の2乗和を最小化する凸2次計画問題を，線形相補性問題に帰着しレムケ(Lemke)法で解く方法[1]を用いてきた[2]。しかし，この方法では一意的に解が求まる反面，ノイズの影響を強く受けてしまったり，モデル作成時に一度も使われない測度についての取り扱いに困ることがある。

本稿では，凸2次計画法による同定法[1]と，学

---

† Identification and Interpretation of Fuzzy Measures
Yoshiteru NAKAMORI

* 北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科
School of Knowledge Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology

習的にファジィ測度を同定していく方法[3]を紹介し，簡単な例を用いて比較検討する。

2．ファジィ測度とショケ積分

2.1 定義

本稿で扱うファジィ測度とショケ積分は以下のように定義される[4][5][6]。

ファジィ測度：$(X,\boldsymbol{A})$を可測空間とするとき，μが$\boldsymbol{A}$上のファジィ測度であるとは，μが$\boldsymbol{A}$から$[0,\infty)$への関数で，２つの条件

1．$\mu(\emptyset)=0$
2．$A,B\in\boldsymbol{A},\ A\subset B\Rightarrow\mu(A)\leq\mu(B)$

を満たすことをいう。また，$(X,\boldsymbol{A},\mu)$をファジィ測度空間とよぶ。

ショケ積分：$(X,\boldsymbol{A},\mu)$をファジィ測度空間，fをX上の非負実数値可測関数とするとき，fのμに関するショケ積分は次式で定義される[7]。

$$(c)\int f\,d\mu=\int_0^{\infty}\mu(\{x\,|\,f(x)\geq r\})\,dr \tag{1}$$

ここで，fがXの単関数

$$f(x)=\sum_{j=1}^{m}h_j I_{A_j}(x),\quad 0\leq h_1\leq\cdots\leq h_m \tag{2}$$

であるとする。ただし，$I_{A_j}(x)$はA_jの特性関数，$j\neq j'$のとき$A_j\cap A_{j'}=\phi$とする。このとき，ショケ積分は次式で与えられる。

$$(c)\int f\,d\mu=\sum_{j=1}^{m}(h_j-h_{j-1})\,\mu(X_j) \tag{3}$$

ただし，

$$X_j=\bigcup_{j'=j}^{m}A_{j'},\quad h_0=0 \tag{4}$$

2.2 問題

以下では，ショケ積分モデルにおけるファジィ測度の同定問題を取り扱う。ただし，以下のような２相データ(評価項目×評価者または対象)を考える。

1．評価する対象は１つであり，複数の評価者に共通のファジィ測度を求める場合
2．評価する対象(サンプル)が複数あり，ある１人の評価者のファジィ測度を求める場合

2.3 記号

以下のような記号を導入する。

・評価項目集合

$$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\} \tag{5}$$

・評価者，または対象の集合

$$A=\{a^1,a^2,\cdots,a^n\} \tag{6}$$

・評価者a^iがつけた項目s_jの評価点，または対象a^iにつけられた項目s_jの評価点

$$h_j^i,\quad(0\leq h_j^i\leq 1) \tag{7}$$

・評価者a^iがつけた総合評価点，または対象a^iにつけられた総合評価点

$$e^i,\quad(0\leq e^i\leq 1) \tag{8}$$

・評価点を並び替えるための置換

$$\sigma^i:(1,\cdots,m)\rightarrow(\sigma_1^i,\cdots,\sigma_m^i) \tag{9}$$

・大きさの順に並び替えられた評価点

$$h_{\sigma_1^i}^i\leq h_{\sigma_2^i}^i\leq\cdots\leq h_{\sigma_m^i}^i \tag{10}$$

・ファジィ測度を割り当てる部分集合

$$S_j^i=\{s_{\sigma_j^i},s_{\sigma_{j+1}^i},\cdots,s_{\sigma_m^i}\} \tag{11}$$

・同定すべきファジィ測度

$$\mu(\cdot):2^S\rightarrow[0,1] \tag{12}$$

ただし，2^SはSのすべての部分集合からなる集合。

・ショケ積分モデル

$$\hat{e}^i=\sum_{j=1}^{m}(h_{\sigma_j^i}^i-h_{\sigma_{j-1}^i}^i)\,\mu(S_j^i) \tag{13}$$

ただし，

$$h_{\sigma_0^i}^i=0 \tag{14}$$

3．ファジィ測度同定法(最適化)

この分野の先駆的研究者である室伏俊明氏によるファジィ測度同定の定式化[1]を紹介する。

3.1 定式化

同定すべきファジィ測度ベクトルを

$$\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_{2^m-1})^{\top} \tag{15}$$

とおく。ただし，g_kはkの２進数表現

$$\delta_m^k \delta_{m-1}^k \cdots \delta_1^k,\ \ \delta_l^k = 0 \text{ or } 1 \tag{16}$$

において $\delta_l^k=1$ に対応する項目 s_l を含む集合のファジィ測度を表す。すなわち，

$$k = \delta_m^k \times 2^{m-1} + \cdots + \delta_1^k \times 2^0 \tag{17}$$

とするとき，

$$g_k = \mu(\{s_l \mid \delta_l^k = 1,\ l = 1, 2, \cdots, m\}) \tag{18}$$

ショケ積分モデルにおいて g_k の係数となるデータを成分とする列ベクトルを $\boldsymbol{\beta}_k$ とする。このとき，データ行列は n 行×(2^m-1) 列で

$$X = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{2^m-1}) \tag{19}$$

となる。さらに，評価者(または対象) a^i の総合評価点 e^i を第 i 成分とする列ベクトルを

$$\boldsymbol{\eta} = (e^1, e^2, \cdots, e^n)^\top \tag{20}$$

とする。$\boldsymbol{\beta}_k$ の定義がここではわかりにくいかもしれないが，後で具体例を示す。

ファジィ測度ベクトル $\boldsymbol{g}$ の同定はつぎの凸2次計画問題に帰着される[1]。

Problem (P_0)

$$\text{Minimize} \quad J(\boldsymbol{g}) = \|\boldsymbol{\eta} - X\boldsymbol{g}\|^2$$

$$\text{subject to} \quad \begin{cases} g_k \geq 0 & k = 1, 2, \cdots, 2^m - 1 \\ g_k \leq g_h & \text{if } \delta_l^k \leq \delta_l^h,\ \forall l \end{cases}$$

3.2 行列表現

Problem (P_0) はつぎのような形式に書き直せる。

Problem (P_1)

$$\text{Minimize } J'(\boldsymbol{g}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^\top D\boldsymbol{g} + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{g}$$

$$\text{subject to} \quad A\boldsymbol{g} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{g} \geq \boldsymbol{0}$$

ここに，

$$D = X^\top X,\ c = -X^\top \boldsymbol{\eta} \tag{21}$$

A は $m(2^{m-1}-1)$ 行×(2^m-1) 列の行列で，各行はファジィ測度の単調性に関する拘束を表す。

3.3 拘束条件の数

拘束条件の必要最小数は，順序の推移性より，ある部分集合のファジィ測度が，その部分集合から1要素を取り除いた部分集合のファジィ測度以上であるという拘束の数に等しい。それは，

$$\sum_{k=1}^{m} {}_mC_k \times {}_kC_1 = m \times 2^{m-1} \tag{22}$$

と計算される。ただし，これは m 個のファジィ測度の非負条件を含む。念のために，上の等式は

$$f(x, y) = (x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k x^k y^{m-k} \tag{23}$$

を x で偏微分し，$x=y=1$ を代入して得られる。記号の簡単化のために以後

$$p = 2^m - 1,\ \ q = m(2^{m-1} - 1) \tag{24}$$

とおく。

3.4 拘束条件の例

簡単な例で拘束条件の作り方を示そう。評価項目の集合を $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ とし，以下のような対応を導入する。

$$1 \to (0,0,1) \to g_1 = \mu(\{s_1\})$$
$$2 \to (0,1,0) \to g_2 = \mu(\{s_2\})$$
$$3 \to (0,1,1) \to g_3 = \mu(\{s_1, s_2\})$$
$$4 \to (1,0,0) \to g_4 = \mu(\{s_3\})$$
$$5 \to (1,0,1) \to g_5 = \mu(\{s_1, s_3\})$$
$$6 \to (1,1,0) \to g_6 = \mu(\{s_2, s_3\})$$
$$7 \to (1,1,1) \to g_7 = \mu(\{s_1, s_2, s_3\})$$

評価者 a^i の評価順序が $h_1^i \leq h_2^i \leq h_3^i$ であれば，総合評価モデルは

$$\hat{e}^i = h_1^i\,\mu(\{s_1, s_2, s_3\}) + (h_2^i - h_1^i)\,\mu(\{s_2, s_3\}) + (h_3^i - h_2^i)\,\mu(\{s_3\}) \tag{25}$$

と想定される。そこで，データ行列 X の第 i 行を

$$\boldsymbol{\alpha}^i = (0, 0, 0, h_3^i - h_2^i, 0, h_2^i - h_1^i, h_1^i) \tag{26}$$

とおく。$\boldsymbol{\alpha}^i$ のパターンは上記以外に5通りある。

- $h_1^i \leq h_3^i \leq h_2^i$ の場合

$$\boldsymbol{\alpha}^i = (0, h_2^i - h_3^i, 0, 0, 0, h_3^i - h_1^i, h_1^i)$$

- $h_2^i \leq h_1^i \leq h_3^i$ の場合

$$\boldsymbol{\alpha}^i = (0, 0, 0, h_3^i - h_1^i, h_1^i - h_2^i, 0, h_2^i)$$

- $h_2^i \leq h_3^i \leq h_1^i$ の場合

$$\boldsymbol{\alpha}^i = (h_1^i - h_3^i, 0, 0, 0, h_3^i - h_2^i, 0, h_2^i)$$

- $h_3^i \leq h_1^i \leq h_2^i$ の場合

$$\boldsymbol{\alpha}^i = (0, h_2^i - h_1^i, h_1^i - h_3^i, 0, 0, 0, h_3^i)$$

- $h_3^i \leq h_2^i \leq h_1^i$ の場合

$$\boldsymbol{\alpha}^i = (h_1^i - h_2^i, 0, h_2^i - h_3^i, 0, 0, 0, h_3^i)$$

以上から，拘束条件の係数行列はつぎのようになる。

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 必要十分条件

$\boldsymbol{g}\in R^p$が Problem(P_1)の最適解であるための必要十分条件は Kuhn-Tucker の条件より，ある$\boldsymbol{v}\in R^q$が存在して，

$$\begin{cases} A\boldsymbol{g}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{g}\geq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v}^\top A\boldsymbol{g}=0,\ \boldsymbol{v}\geq 0 \\ \boldsymbol{g}^\top(D\boldsymbol{g}-A^\top\boldsymbol{v}+\boldsymbol{c})=0 \\ D\boldsymbol{g}-A^\top\boldsymbol{v}+\boldsymbol{c}\geq\boldsymbol{0} \end{cases}$$

が成立することである。ここで，

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}=D\boldsymbol{g}-A^\top\boldsymbol{v}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{\nu}=A\boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{\nu}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix} \\ \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{o}\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}D & -A^\top\\ A & O\end{pmatrix} \end{cases}$$

とおけば，必要十分条件は

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}=\boldsymbol{q}+M\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{w}=0,\ \boldsymbol{w}\geq\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0} \end{cases}$$

と表せる。すなわち，線形方程式 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{q}+M\boldsymbol{z}$ の非負解 $\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}$ のうち，相補性の条件 $\boldsymbol{z}^\top w=0$ を満たすものを求めることと同値である。

線形相補性問題を解く1つの方法として，レムケ(Lemke)による相補的軸演算法[8][9][10]がある。レムケ法の基本的な考え方とアルゴリズムは文献[11][12][13][14]などに詳しい。

4．簡単な例

文献[15]の例を用いて，具体的に解説する。

4.1 住宅評価問題

家を購入するに際し，複数の物件から所望の条件を最も満たす物件を選ぶ場合を考える。評価項目は

s_1：価格，　s_2：通勤時間，　s_3：広さ

の3つである。評価条件は,「各項目ごとの評価値に対し，価格を最も重視し，通勤時間と広さは価格ほど重視しないが，同程度重視し，バランスがとれていることを重視する」とする。いま，物件1から物件4までが存在するものとし，各々の評価項目ごとの評価値は表1のようであるとする。

表1 住宅の評価値

評価項目	価格(s_1)	通勤時間(s_2)	広さ(s_3)
物件1 (a^1)	$h_1^1=0.82$	$h_2^1=0.40$	$h_3^1=1.00$
物件2 (a^2)	$h_1^2=0.82$	$h_2^2=0.50$	$h_3^2=0.90$
物件3 (a^3)	$h_1^3=0.82$	$h_2^3=0.60$	$h_3^3=0.80$
物件4 (a^4)	$h_1^4=0.82$	$h_2^4=0.70$	$h_3^4=0.70$

表1から以下のような考察ができる。

- 単純平均はすべて0.74で，物件1から物件4までの優劣がつけられない。
- 価格，通勤時間，広さの重みをそれぞれ0.5，0.25，0.25として加重平均すれば，いずれも0.76でやはり優劣がつけられない。

4.2 ファジィ測度の仮定

そこで，つぎのようなファジィ測度を考える。

$$\begin{aligned} g_1&=\mu(\{s_1\}) &&=0.50 \\ g_2&=\mu(\{s_2\}) &&=0.25 \\ g_3&=\mu(\{s_1,s_2\}) &&=0.50 \\ g_4&=\mu(\{s_3\}) &&=0.25 \\ g_5&=\mu(\{s_1,s_3\}) &&=0.50 \\ g_6&=\mu(\{s_2,s_3\}) &&=1.00 \\ g_7&=\mu(\{s_1,s_2,s_3\}) &&=1.00 \end{aligned}$$

このとき，ショケ積分による評価値は

物件1＝0.655，　物件2＝0.680，
物件3＝0.710，　物件4＝0.760

この結果は評価条件にあった結果である。はたしてそうだろうか？

上記の評価値はショケ積分により以下のように

計算される。データベクトルは

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (0, 0, h_1^3 - h_3^3, h_1^4 - h_3^4)^\top = (0.000,\ 0.000,\ 0.020,\ 0.120)^\top$$

$$\boldsymbol{\beta}_4 = (h_3^1 - h_1^1, h_3^2 - h_1^2,\ 0,\ 0)^\top = (0.180,\ 0.080,\ 0.000,\ 0.000)^\top$$

$$\boldsymbol{\beta}_5 = (h_1^1 - h_2^1, h_1^2 - h_2^2, h_3^3 - h_2^3, h_3^4 - h_2^4)^\top = (0.420,\ 0.320,\ 0.200,\ 0.000)^\top$$

$$\boldsymbol{\beta}_7 = (h_2^1, h_2^2, h_2^3, h_2^4)^\top = (0.400,\ 0.500,\ 0.600,\ 0.700)^\top$$

と与えられるから，

$$(0.655,\ 0.680,\ 0.710,\ 0.760)^\top = \mu(\{s_1\})\boldsymbol{\beta}_1 + \mu(\{s_3\})\boldsymbol{\beta}_4 + \mu(\{s_1, s_3\})\boldsymbol{\beta}_5 + \mu(\{s_1, s_2, s_3\})\boldsymbol{\beta}_7$$

物件4の評価値が高くなったのは $h_2^4 = 0.7$ がきいているからである。肝心の $\mu(\{s_2, s_3\})$ の情報を用いていない。評価順序は通勤時間で決まり，Max-Min 法による順序になっている。

4.3 最適化法による解

表1のデータに対して，Lemke 法のアルゴリズムを用いれば，表2のように9回のイテレーションで収束した。g_2 と g_6 が再現されていないことに注意する。

4.4 いくつかの注意

1. $g_6 = \mu(\{s_2, s_3\})$ はデータから推定できないが，つぎの不等式は成り立つ。

$$\max\{g_2, g_4\} \le g_6 \le g_7$$

2. 零と無知が区別できない。すなわち，$g_2 = \mu(\{s_2\}) = 0$ かどうかはこのデータからは断定できない。つぎのことは言える。

$$0 \le g_2 \le \min\{g_3, g_6\}$$

3. 価格の評価値が一定であるため，価格，通勤時間，広さの3項目による線形荷重和モデル(回帰モデル)の同定はできない。
4. データベクトル間に線形関係(共線性)

$$70\boldsymbol{\beta}_1 - 41\boldsymbol{\beta}_4 + 29\boldsymbol{\beta}_5 - 12\boldsymbol{\beta}_7 = \mathbf{0}$$

が存在するので，$g_7 = \mu(\{s_1, s_2, s_3\}) = 1.0$ とおく。この教訓は，非正則な状況を避けるためには，$\mu(S) = 1.0$ とした方がよいということである。

5. $\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\beta}_7$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_4, g_5)^\top$ とおけば，最小2乗法により，

$$g_1 = \mu(\{s_1\}) = 0.50$$
$$g_4 = \mu(\{s_3\}) = 0.25$$
$$g_5 = \mu(\{s_1, s_3\}) = 0.50$$

と再現できる。

表 2　Lemke 法によるファジィ測度の同定

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.140
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.485	0.000	1.062
3	0.000	0.000	0.000	0.008	0.482	0.000	1.063
4	0.000	0.000	0.000	0.362	0.360	0.361	1.077
5	0.000	0.000	0.000	0.362	0.361	0.361	1.077
6	0.001	0.000	0.000	0.362	0.361	0.361	1.077
7	0.001	0.000	0.000	0.363	0.363	0.363	1.077
8	0.250	0.000	0.250	0.396	0.396	0.396	1.043
9	0.500	0.000	0.500	0.250	0.500	0.250	1.000
10	0.500	0.000	0.500	0.250	0.500	0.250	1.000
11	0.500	0.000	0.500	0.250	0.500	0.250	1.000
12	0.500	0.000	0.500	0.250	0.500	0.250	1.000

5. ファジィ測度同定法(逐次法)

ここでは，データが与えられるごとにファジィ測度を修正していくアルゴリズムを紹介する。

5.1 Grabisch の方法

Grabisch の方法[3]は文献[16]の逐次同定法を改良したもので，均衡状態にある測度

$$g_{2^{l-1}} = \mu(\{s_l\}) = \frac{1}{m}, \quad \forall l \tag{30}$$

に可能な限り近い測度を求めるという目的を持つ。

アルゴリズムの基本ステップは以下の2段階からなる。

1. 1組のデータ $\{h_1^i, \cdots, h_m^i, e^i\}$ が与えられ，評価順序が

$$h^i_{\sigma^i_1} \le h^i_{\sigma^i_2} \le \cdots \le h^i_{\sigma^i_m} \tag{31}$$

であるとき，m 個の部分集合 $S^i_1, S^i_2, \cdots, S^i_m$ に対応する測度のみを，単調性を満たすようにしながら勾配法により修正する。ただし，

$$S^i_j = \{s_{\sigma^i_j}, s_{\sigma^i_{j+1}}, \cdots, s_{\sigma^i_m}\} \tag{32}$$

2. データが少ないとき，上の方法だけでは修正されない測度が存在することになる。そこで，そのような測度をラティス構造(図1参照)における近隣の測度からできるだけ等距離になるように修正する。

5.2 アルゴリズム

Step 0：均衡状態に初期化する。

$$g_{2^{l-1}} = \mu(\{s_l\}) = \frac{1}{m},\ l = 1, 2, \cdots, m$$

他の測度は加法性を仮定して初期化する。

Step 1.1：1組のデータ $\{h^i_1, \cdots, h^i_m, e^i\}$ が与えられたとき，モデル誤差

$$f^i = \hat{e}^i - e^i$$

を計算する。

Step 1.2：以下のように測度を修正する。

$$\mu^{new}(S^i_j) = \mu^{old}(S^i_j) - \alpha \frac{f^i}{f^{max}}(h^i_{\sigma^i_j} - h^i_{\sigma^i_{j-1}})$$

ここで，$\alpha \in [0,1]$ はパラメータで，f^{max} は誤差の最大値である。ただし，$e^i \in [0,1]$ のときは $f^{max} = 1$ とする。これは，誤差規範を $(\hat{e}^i - e^i)^2$ とし，学習率を $\alpha/(2f^{max})$ とした場合の勾配法である。

Step 1.3：前ステップで修正した測度に関連して，必要ならば以下のような修正を行う。

・もし

$$\mu^{new}(S^i_j) < \mu(S^i_j \cup \{s_l\}),\ s_l \in S - S^i_j$$

かつ

$$f^i > 0$$

ならば，$\mu(S^i_j \cup \{s_l\}), s_l \in S - S^i_j$ の値を $\mu^{new}(S^i_j)$ の値に置き換える。

・もし

$$\mu(S^i_j - \{s_l\}) < \mu^{new}(S^i_j),\quad s_l \in S^i_j$$

かつ

$$f^i < 0$$

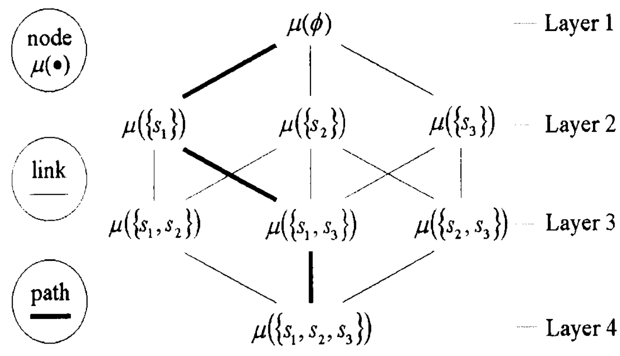


図1　ファジィ測度のラティス構造

ならば，$\mu(S^i_j - \{s_l\}), s_l \in S^i_j$ の値を $\mu^{new}(S^i_j)$ の値に置き換える。

Step 1.2 と Step 1.3 を $j = 1, 2, \cdots, m$ について繰り返す。ただし，

・もし，$f^i > 0$ ならば，

$$\mu(S^i_m), \mu(S^i_{m-1}), \cdots, \mu(S^i_1)$$

の順に修正を行う。

・もし，$f^i < 0$ ならば，

$$\mu(S^i_1), \mu(S^i_2), \cdots, \mu(S^i_m)$$

の順に修正を行う。

Step 1.1 から Step 1.3 までを，すべてのデータ $i = 1, 2, \cdots, n$ について繰り返す。これを1回のイテレーションと呼ぶ。同じデータを用いて何回もイテレーションを行ってもよい。

Step 2.1：Step 1.1 から Step 1.3 によって変更されなかった測度について，もし単調性が満たされていなければ，Step 1.3 のようにして修正する。

Step 2.2：Step 1.1 から Step 1.3 によって変更されなかった測度を以下のように調整する。いま，$\mu(S^i_j)$ を調整の対象とし，以下の量を定義する。

・$m_u = \dfrac{1}{|S^i_j| + 1} \displaystyle\sum_{s_l \in S - S^i_j} \mu(S^i_j \cup \{s_l\})$

・$m_l = \dfrac{1}{|S^i_j| - 1} \displaystyle\sum_{s_l \in S^i_j} \mu(S^i_j - \{s_l\})$

・$d_u = \displaystyle\min_{s_l \in S - S^i_j} \{\mu(S^i_j \cup \{s_l\}) - \mu(S^i_j)\}$

・$d_l = \displaystyle\min_{s_l \in S^i_j} \{\mu(S^i_j) - \mu(S^i_j - \{s_l\})\}$

これらを用いて以下のように調整する。

・もし $m_u+m_l-2\mu(S_j^i)>0$ ならば,

$$\mu^{new}(S_j^i)=\mu^{old}(S_j^i)+\beta\frac{(m_u+m_l-2\mu(S_j^i))\,d_u}{2(m_u+m_l)}$$

・もし $m_u+m_l-2\mu(S_j^i)<0$ ならば,

$$\mu^{new}(S_j^i)=\mu^{old}(S_j^i)+\beta\frac{(m_{u+ml}-2\mu(S_j^i))\,d_l}{2(m_{u+ml})}$$

ここで，$\beta\in[0,1]$はパラメータである。

Step 2.1 と Step 2.2 を Step 1 で修正されなかった測度について繰り返す。これを1回のイテレーションと呼ぶ。何回もイテレーションを行うことも可能である。

5.3 住宅評価

住宅評価の例を再び用いる。Grabisch の方法によれば表3の結果を得る。

数値計算では Step 1 のパラメータを $\alpha=0.5$, Step 2 のパラメータを $\beta=0.5$ としている。収束までのイテレーション回数は Step 1 で 1935 回, Step 2 では 10 回であった。パラメータの設定値によってイテレーション回数は異なるが，一般に, Grabisch の方法は収束が緩やかである。ちなみに，上記の例では，50 から 100 回のイテレーションで最終収束値にかなり近づくが，そこからが遅い傾向にあった。

表 3 Grabisch の方法による同定

				初期値		収束値
g_1	=	$\mu(\{s_1\})$	=	0.333	→	0.500
g_2	=	$\mu(\{s_2\})$	=	0.333	→	0.336
g_4	=	$\mu(\{s_3\})$	=	0.333	→	0.250
g_3	=	$\mu(\{s_1,s_2\})$	=	0.667	→	0.696
g_5	=	$\mu(\{s_1,s_3\})$	=	0.667	→	0.500
g_6	=	$\mu(\{s_2,s_3\})$	=	0.667	→	0.652
g_7	=	$\mu(\{s_1,s_2,s_3\})$	=	1.000	→	1.000

6. シャプレイ値

項目の数が多くなれば，ファジィ測度の数は増え，そのためにファジィ測度から評価構造を解析するのは困難になる。そこで，ファジィ測度を読む技術として，ゲーム理論におけるシャプレイ(Shapley)値を用いることが提案されている[17]。シャプレイ値とは特性関数型ゲームにおける概念であり，つぎのように定義される。

$$\psi(\mu)(s_j)=\sum_{T\subset S-\{s_j\}}\gamma(T)(\mu(T\cup\{s_j\})-\mu(T))$$

ただし,

$$\gamma(T)=\frac{(m-|T|-1)!\,|T|!}{m!}$$

であり，$|T|$は S の部分集合 T の要素数を表す。シャプレイ値は「s_jが加わることによる効果」の重み付き平均と解釈できる。

住宅評価問題における同定された測度に基づいたシャプレイ値は表4のようになった。

表 4 シャプレイ値の比較

	Lemke 法	*Grabisch* 法
s_1	0.6250	0.3843
s_2	0.2500	0.3783
s_3	0.1250	0.2373

それぞれの方法で同定された測度を比較すれば, Grabisch 法の方が納得できる結果になっている。

7. 同定された測度の解釈

「線形回帰モデルは項目間の相互作用を表現していない」という批判があるが，データベクトル間の線形な関わり方は表現している。つまり，総合評価に対して複合した寄与の平均担当分が係数

として現れている。ファジィ測度は確かに相互作用を表現するが，それは複合評価項目という新たな変数を導入することによってなされる。そしてそれらの新変数に対するデータを直接入手できないことから，単独評価項目に対するデータの差をとるということでなされる。最小2乗法で同定すれば，単独もしくは複合項目ベクトルの総合評価に対する平均担当分が係数として現れる。

以下では，ファジィ測度を実測データから同定するときに，筆者の感じるストレスをいくつか紹介する。

1．総合評価における単独あるいは複合項目の寄与度を求めることにどういう意義があるか。

総合評価値を予測するという目的で，与えられたデータから推定される役割分担の構造を，評価構造であると断定することはできない。それを評価構造と言ってよいならば，線形荷重和モデルの係数も，そう呼んでもおかしくない。非線形モデルにすればデータの説明力は増加する。それを構造を言い当てたからであると解釈すると落とし穴に落ちてしまう。

2．項目間の独立性とは総合評価するときに他の項目と相互作用をしないことである，と定義してよいか。

項目の評価における独立性と，データベクトルの直交性とは異なる概念であり，決して混同してはいけない。最小2乗法で同定する限り，独立に評価されていても，ほとんど必ず存在するデータベクトル間の相関により，独立なものとして同定できない。この意味では,「項目を適切に選べば単純荷重和モデルでよい」というのも，あくまでも総合評価値の予測にはよいということであり，モデル構造がよいと言っているわけではない。

3．ショケ積分モデルでは，相関のあるデータベクトルをわざわざ作って，固有の単独測度を見えなくしている。

「総合評価をする際の寄与度を表しているのだからそれでよい」という主張にも，それなりの正当性はある。しかし，同定は限られたデータを用いて行われることに注意しなければならない。また，最小2乗法は「ちょっとした相関の違い」や「はずれ値」の影響により，大きく異なる結果を招くことがある。

以上のような筆者の問題提起[18]に対する，高萩，室伏両氏による回答[19]は示唆に富んでいる。そこでは，最適化手法を利用する際の注意事項と改善案，および包除被覆[20][21][22]の利用について参考になる提案がなされている。彼らの凸2次計画法改善案[19]を以下に紹介する。

1．サンプル数が十分そろっているか検討する。
2．各説明変数の値の増大が，被説明変数の値の増大の方向に動くか調べる。簡易な方法として，それぞれの説明変数と被説明変数の間の単相関を求める。もし，減少させる方向であれば，その説明変数の符号を逆転させるか，正の相関になるように変換する。
3．それぞれの説明変数と被説明変数の間に，他の説明変数を一定にしたとき，区分線形の関係が成り立つかどうかを検討する。もし，成り立たなければ，区分線形の関係が成り立つように変換する。
4．各説明変数が同じ評価単位を持っているか。持っていれば，ステップ7へ。
5．評価単位のそろえ方がわかっている，もしくは，混合比率がわかっているか。わかっていれば適当なアフィン変換を行って，評価単位をそろえ，ステップ7へ。
6．簡便な方法として，z値を使う。すなわち，各説明変数の値を平均0，分散1になるように，アフィン変換を行う。
7．単調性，非負制約を課さないで，最小2乗法における正規方程式を利用した方法で，各ファジィ測度を求める。
8．各ファジィ測度について，何個のサンプルで同定されたのか調べる。
9．ファジィ測度が単調性や非負制約を満たして

いるかどうかチェックする。もし，満たしていなければ，ステップ2からステップ6の前処理や説明変数の選択，サンプル収集に不適切な点がなかったかどうか検討する。ただし，単調性や非負制約を満たさないファジィ測度が，ステップ8で調べたサンプル数が少ない場合，それが原因でファジィ測度の値が不安定になったことが考えられる。

10. どうしても単調性を満たすようにできない場合やサンプル数不足の場合，単調性の制約を入れて，凸2次計画法で，もう一度ファジィ測度を同定する。
11. 構造を読み取ろうとする場合，ステップ8で調べたサンプル数を参考にする。少ないサンプルで同定されたファジィ測度は，信頼性が低い。

なお，参考までに，筆者らは，地域環境の主観評価モデルをショケ積分によって構築する際，総合評価の予測精度を高めるとともに，納得できるモデル構造・ファジィ測度を得るために，つぎのようなアプローチを提案している[23]。

主観評価データの地域性を考慮して，数本のショケ積分モデルを構築し，それらをif-then型ファジィモデルとして統合する。各ショケ積分モデルを構築するための部分データセットは，物理的・客観的データに基づく地域のクラスタリングにより決定する。ファジィ測度の同定は凸2次計画法による。また，ファジィモデルの前件部を多次元メンバシップ関数を用いて表現し，メンバシップ関数のチューニングにより予測モデルの精度を高める。一方，得られたファジィ測度により地域の個性を分析し，同定されたファジィ測度の妥当性を検討する。

謝辞

本稿をまとめるにあたり，三菱電機株式会社の岩本直子さんに多大の協力を得た。ここに感謝の意を表します。

参考文献

[1] 室伏俊明：ファジィ測度とファジィ積分．講習会「応用のためのファジィ理論の基礎テキスト」，日本ファジィ学会，pp.62-73，1994．

[2] 中森義輝・岩本直子・内藤正明：ショケ積分モデルによる都市環境主観評価構造の分析．環境科学会誌，Vol.8，No.1，pp.11-24，1995．

[3] M. Grabisch：A new algorithm for identifying fuzzy measures and its application to pattern recognition. Proc. of 4th FUZZ-IEEE, pp.145-150，Yokohama, March 20-24，1995．

[4] T. Murofushi and M. Sugeno：An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.29，pp.201-227，1989．

[5] 室伏俊明・菅野道夫：ファジィ測度論入門［4］．日本ファジィ学会誌，Vol.3，No.3，pp.452-463，1991．

[6] 室伏俊明・菅野道夫：ファジィ測度論入門［5］．日本ファジィ学会誌，Vol.3，No.4，pp.673-682，1991．

[7] G. Choquet：Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier*, Vol.5，pp.131-295，1953．

[8] C. E. Lemke：Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science*, Vol.11，pp.681-689，1965．

[9] C. E. Lemke：On complementary pivot theory. *Mathematics of the Decision Science*, Part 1 (Dantzing and Veinott eds.)，*American Mathematical Society*, pp.95-114，1968．

[10] R. W. Cottle and G. B. Dantzing：Complementary pivot theory of mathematical programming. *Linear Algebra and Its Applications*, Vol.1，pp.103-124，1968．

[11] 今野浩・山下浩：非線形計画法．日科技連，1978．

[12] 小島政和：相補性と不動点，アルゴリズムによるアプローチ．産業図書，1981．

[13] 刀根薫：数理計画．理工系基礎の数学11，朝倉書店，1988．

[14] 茨木俊秀・福島雅夫：FORTRAN77 最適化プログラミング．岩波書店，1991．

[15] 深海悟・米田稔：意思決定支援システム．国際ファジィ工学研究所編「ファジィ技術の先端的応用」2章，日刊工業新聞社，pp.19-75，1993．

[16] 森勉・室伏俊明：ファジィ測度・Choquet積分を用いた評価モデルの解析．第5回ファジィシステムシンポジウム講演文集，pp.207-212，1989．

[17] 室伏俊明：ファジィ測度を読む技術［1］ファジィ測度の Shapley 値．第2回ファジィワークショップ講演論文集，pp.39-48，1992．

[18]中森義輝：ファジィ測度同定におけるジレンマとストレス．第5回ノンエンジニアリングファジィワークショップ講演論文集，pp.90-91，1995．

[19]高萩栄一郎・室伏俊明：ファジィ測度の同定について．第5回インテリジェント・システム・シンポジウム講演論文集，pp.463-468，1995．

[20]M. Sugeno, K. Fujimoto and T. Murofushi：Hierarchical decomposition of Choquet integral models. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Vol.3, pp.1-15, 1995．

[21]室伏俊明・荻野充弘：モデル構造を考慮したファジィ測度の同定．第9回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，pp.697-700，1993．

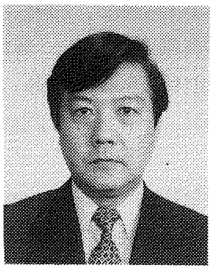
[22]M. Sugeno and S. H. Kwon：A clusterwise regression-type model for subjective evaluation. 日本ファジィ学会誌，Vol.7，No.2，pp.291-310，1995．

[23]岩本直子・領家美奈・中森義輝：都市環境主観評価のファジィモデル．日本ファジィ学会誌，Vol.9，No. 2，pp.279-286，1997．

(1998年3月8日　受付)

[問い合わせ先]
〒923-1292
石川県能美郡辰口町旭台1-1
北陸先端科学技術大学院大学
知識科学研究科
中森 義輝
TEL ：0761-51-1755
FAX ：0761-51-1116
E-mail：nakamori@jaist.ac.jp

著者紹介



中森 義輝（なかもり よしてる）

北陸先端科学技術大学院大学知識科学研究科

1979年 京都大学大学院工学研究科数理工学専攻博士課程修了。工学博士。甲南大学理学部応用数学科勤務を経て，1998年4月より北陸先端科学技術大学院大学教授。 1984年10月より1985年11月まで，国際応用システム解析研究所研究員。1986年4月より環境庁国立環境研究所客員研究員。1992年9月より大連理工大学客員教授。日本ファジィ学会，計測自動制御学会，環境科学会，IEEEなどの会員。