Title	直観主義論理に基づくトポス意味論に関する研究
Author(s)	平田，晋也
Citation	
Issue Date	2009-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/8144
Rights	
Description	Supervisor:石原　哉　准教授，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

直観主義論理に基づく理論のトポス意味論に関する研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

平田 晋也

2009 年 3 月

修 士 論 文

直観主義論理に基づく理論のトポス意味論に関する研究

指導教官　石原哉 准教授

審査委員主査　石原哉 准教授
審査委員　小川瑞史 教授
審査委員　金子峰雄 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

0710060 平田 晋也

提出年月: 2009 年 2 月

概 要

本稿では, 位相空間の上の層を対象とした圏である空間性トポスが圏の特別な場合であるトポスとなっていることを示し, 層の集合による位相空間の上の構造を具体的に構成することで, 直観主義論理の形式体系LJで証明不可能な論理式の存在を示す.

目 次

第1章　序論

1.1　研究の背景

Brouwer が唱えた数学的直観主義における構成的な考え方の流れを汲んで, 1920 年代の末に Heyting 等によって整備された論理が直観主義論理である．直観主義論理に基づく構成的な証明には, コンピュータの計算モデルの一種である型付き λ 計算との間に対応関係がつくという Curry-Howard の対応と呼ばれる事実が知られている．このことは数学的命題の構成的な証明を分析することにより, それに対応するプログラムが持つ性質もまた分析できること, 構成的な証明からプログラムを抽出できることなどを意味する．よって, 情報科学の立場からは, ある数学的命題が直観主義論理で証明できるということは重要である．しかしながら, 直観主義論理はその定義から古典論理よりも弱い論理であり, 古典論理で証明することができた命題のいくつかは直観主義論理で証明することができない．したがって, 古典論理では証明することができるが直観主義論理では証明することができない命題を明らかにすることは重要な意味を持っているといえる．

一方, 直観主義論理に基づく形式体系の意味論として, 従来の数学においてある種の位相的性質を分析するために考え出された層という概念が相性が良いことが知られている．また, 現在の数学において根底を成している集合概念を層として位相空間の上に拡大すると, それらは圏論的な立場で見れば一つのトポスを構成している．このトポスは空間性トポスと呼ばれ, 直観主義論理の意味論において用いられる．

1.2　本稿の概要

本研究では, 古典論理で証明可能ないくつかの数学的命題が, 直観主義論理では証明不可能であるということを意味論的な手法を用いて示す．

一般に, ある数学的命題が特定の論理の上で証明可能であるということを示すためには, その論理の形式体系を導入し, その形式体系における証明図の存在を示せば十分である．逆に, ある数学的命題が特定の論理の上で証明不可能であるということを示す際には, 構文論的な手法ではなく意味論的な手法を用いて示されることが多い．ここでの意味論的な手法とは, まず形式体系に構造という概念を用いて意味付けを行い, そこで成り立つ形式体系の健全性と呼ばれる性質, つまり「ある数学的命題が形式体系で証明可能ならば, 任意の構造においてその数学的命題は正しくなる」ということを利用したものである．

本研究では, 上記の流れに則り, 直観主義論理の形式体系LJを導入した上で, 直観主義論理の意味論として相性の良い位相空間上の層による構造を考え, 意味付けを行う. その後, 形式体系LJの健全性の対偶, つまり「ある構造において数学的命題が正しくないならば, 形式体系LJで証明不可能である」ということから, そのような具体的な構造を構成することによって, 古典論理では証明することができるが直観主義論理では証明することができない命題の存在を示す.

1.3 論文の構成

本稿では, まず第 2 章で圏という概念の定義と, そこでの中心的な話題である射の性質について言及し, 章の終わりに圏の特別な場合であるトポスの定義を与える.

次に, 第 3 章では層の定義を与えた上で, ひとつの位相空間上の層からなる圏として空間性トポスを考え, それが第 2 章の最後に定義したトポスの性質をみたすことを示す.

続いて第 4 章では直観主義論理の形式体系LJを導入し, LJの健全性を用いて特定の数学的命題が直観主義論理で証明不可能となることを意味論的な手法によって示す.

最後に, 第 5 章で本研究の成果と今後の課題について述べる.

第2章　圏

この章では, まず圏という概念を定義し, そこから圏論において中心的な話題となる射に関するいくつかの性質と, それらの間になりたつ関係について述べる. その後, 圏の特別な場合であるトポスと呼ばれる圏の定義を記す.

2.1　mono・epi

定義 2.1 (圏) $\mathbf{C}$ において以下の *1.* 〜 *5.* がなりたつとき, $\mathbf{C}$ を圏 (category) という.

1. $\mathbf{C}$ は, 対象の集まり $A, B, C, \cdots$ と射の集まり $f, g, h, \cdots$ とから構成されている.

2. $\mathbf{C}$ の任意の射 f に対して, $\mathrm{dom}f$ と $\mathrm{cod}f$ という対象が対応している. $\mathrm{dom}f = A$ かつ $\mathrm{cod}f = B$ のとき, $f : A \to B$ または $A \xrightarrow{f} B$ と表す.

3. $\mathbf{C}$ の任意の射 f, g に対して, $\mathrm{dom}g = \mathrm{cod}f$ のとき, $g \circ f : \mathrm{dom}f \to \mathrm{cod}g$ が存在する. $g \circ f$ のことを f と g との合成 (composite) という.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\
& B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

4. $\mathbf{C}$ の任意の射 f, g, h に対して, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ のとき, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ がなりたつ. また, 以下では $h \circ g \circ f$ と括弧を省略して表す.

5. $\mathbf{C}$ の任意の対象 B に対して, $f = id_B \circ f$ かつ $g = g \circ id_B$ をみたす $id_B : B \to B$ が存在する. id_B のことを B の恒等射 (identity) という.

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dd, "id_B"] \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\
& B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

圏の例

Set: 対象 $A, B, C, \cdots$ をそれぞれ集合とし, 射 $f, g, h, \cdots$ をそれぞれ集合間の写像としたとき, それらは一つの圏を構成する. この圏を集合の圏といい, **Set**と表す.

Grp: 対象 $A, B, C, \cdots$ をそれぞれ群とし, 射 $f, g, h, \cdots$ をそれぞれ群の間の準同型写像としたとき, それらは一つの圏を構成する. この圏を群の圏といい, **Grp**と表す.

Ab: 対象 $A, B, C, \cdots$ をそれぞれ Abel 群とし, 射 $f, g, h, \cdots$ をそれぞれ Abel 群の間の準同型写像としたとき, それらは一つの圏を構成する. この圏を Abel 群の圏といい, **Ab**と表す.

Top: 対象 $A, B, C, \cdots$ をそれぞれ位相空間とし, 射 $f, g, h, \cdots$ をそれぞれ位相空間の間の連続写像としたとき, それらは一つの圏を構成する. この圏を位相空間の圏といい, **Top**と表す.

$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$: $\mathbf{C}$ が圏のとき, 対象 $A, B, C, \cdots$ は $\mathbf{C}$ の対象と等しく, 射 $f, g, h, \cdots$ は $\mathbf{C}$ の射の dom と cod を入れ替えた射であって, 射の合成はその結合の順序を入れ替えるとするとき, それらは一つの圏を構成する. この圏を $\mathbf{C}$ の双対圏といい, $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ と表す. なお, 定義より明らかに $(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathbf{C}$ である.

以降では, 定義されたそれぞれの概念について, 特に **Set**における具体例を脚注にて紹介しておく. 随時, 参照されたい.

命題 2.1 任意の対象 A について, 恒等射 id_A は一意的である.

証明

id_A, id'_A をそれぞれ A の恒等射とすると, 定義 2.1 より, 下図が可換である. よって,

$$id_A = id'_A \circ id_A = id'_A$$

となり, 恒等射は一意的である.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "id'_A"] \arrow[dd, shift right, "id'_A"'] \arrow[dd, shift left, "id_A"] & \\
A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[dr, "id_A"'] & & A \\
& A \arrow[ur, "id'_A"'] &
\end{tikzcd}$$

□

定義 2.2 (mono) $C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$ なる任意の C, g, h に対して, $f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$ がなりたつとき, $f : A \to B$ を mono といい, $f : A \rightarrowtail B$ または $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$ と表す. [1]

[1] **Set**では「f は mono $\iff$ f は単射」がなりたつ.

定義 2.3 (epi) $B \xrightarrow{f} A \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C$ なる任意の C, g, h に対して, $g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$ がなりたつとき, $f : B \to A$ を epi といい, $f : B \twoheadrightarrow A$ または $B \overset{f}{\twoheadrightarrow} A$ と表す. [2]

命題 2.2 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ なる射 f, g について以下のことがなりたつ.

1. $g \circ f$ が mono ならば, f は mono である.
2. $g \circ f$ が epi ならば, g は epi である.
3. f, g がともに mono ならば, $g \circ f$ は mono である.
4. f, g がともに epi ならば, $g \circ f$ は epi である.

証明

1. について. $D \overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}} A$ とし, $f \circ h_1 = f \circ h_2$ と仮定する. 仮定より $g \circ f \circ h_1 = g \circ f \circ h_2$. よって, $g \circ f$ が mono であることから $h_1 = h_2$ となり, f は mono である.

2. について. $C \overset{k_1}{\underset{k_2}{\rightrightarrows}} E$ とし, $k_1 \circ g = k_2 \circ g$ と仮定する. 仮定より $k_1 \circ g \circ f = k_2 \circ g \circ f$. よって, $g \circ f$ が epi であることから $k_1 = k_2$ となり, g は epi である.

3. について. $D \overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}} A$ とし, $g \circ f \circ h_1 = g \circ f \circ h_2$ と仮定する. g が mono であることから $f \circ h_1 = f \circ h_2$. また, f が mono であることから $h_1 = h_2$. よって, $g \circ f$ は mono である.

4. について. $C \overset{k_1}{\underset{k_2}{\rightrightarrows}} E$ とし, $k_1 \circ g \circ f = k_2 \circ g \circ f$ と仮定する. f が epi であることから $k_1 \circ g = k_2 \circ g$. また, g が epi であることから $k_1 = k_2$. よって, $g \circ f$ は epi である.

□

定義 2.4 (同型射) $f : A \to B$ に対して, ある $g : B \to A$ が存在して $g \circ f = id_A$ かつ $f \circ g = id_B$ がなりたつとき, $f : A \to B$ を同型射 (isomorphism) という. また, 上記のような g を f の逆射 (inverse) といい, f^{-1} と表す. [3]

命題 2.3 $f : A \to B$ が同型射ならば, f は mono かつ epi である. [4]

証明

$f : A \to B$ を同型射とすると, 定義 2.4 より, $f^{-1} : B \to A$ が存在して $f^{-1} \circ f = id_A$ かつ $f \circ f^{-1} = id_B$ である. 今, $C \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} A$ として $f \circ g_1 = f \circ g_2$ と仮定する. すると,

$$g_1 = id_A \circ g_1 = f^{-1} \circ f \circ g_1 = f^{-1} \circ f \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2$$

[2]**Set**では「f は epi $\iff$ f が全射」がなりたつ.

[3]**Set**では「f は同型射 $\iff$ f は全単射」がなりたつ.

[4]**Set**では明らかに「f は同型射 $\iff$ f は mono かつ epi」がなりたつ. しかし, 圏一般において命題 2.3 の逆がなりたつわけではない.

となるので, f は mono である. 次に, $B \overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}} D$ として $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ と仮定する. すると,

$$h_1 = h_1 \circ id_B = h_1 \circ f \circ f^{-1} = h_2 \circ f \circ f^{-1} = h_2 \circ id_B = h_2$$

となるので, f は epi である.
□

命題 2.4 $f : A \to B$ の逆射 $f^{-1} : B \to A$ は, 存在すれば一意的である.

証明
$f^{-1}, (f^{-1})'$ をそれぞれ f の逆射とすると, 定義 2.4 より,

$$f^{-1} = id_A \circ f^{-1} = (f^{-1})' \circ f \circ f^{-1} = (f^{-1})' \circ id_B = (f^{-1})'.$$

よって, 逆射が存在すれば一意的である.
□

定義 2.5 (同型) 対象 A, B に対して, 同型射 $f : A \to B$ が存在するとき, A と B は同型 (isomorphic) であるといい, $A \cong B$ と表す.

2.2 終対象・直積・equalizer

定義 2.6 (終対象) 任意の対象 A に対して, $A \to B$ なる射が一意的に存在するとき, B を終対象 (terminal object) といい, 1 と表す. また, $A \to 1$ なる一意的な射を $!_A$ と表す. [5]

命題 2.5 終対象 1 について以下のことがなりたつ.

1. 任意の対象 A に対して, $f : 1 \to A$ は mono である.

2. 終対象 1 は同型を除いて一意的である.

証明
1. について. $B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} 1$ とし, $f \circ g = f \circ h$ と仮定する. 定義 2.6 より, $g = \,!_B = h$. よって, $f : 1 \to A$ は mono である.
2. について. $1, 1'$ をそれぞれ終対象とする. 定義 2.6 より, $!_1 : 1 \to 1'$ と $!_{1'} : 1' \to 1$ がそれぞれ一意的に存在する. よって, これら二つの射の合成として $!_1 \circ !_{1'} : 1 \to 1$ と $!_{1'} \circ !_1 : 1' \to 1'$ が得られる. また, 定義 2.1 より, $1, 1'$ にはそれぞれ恒等射 $id_1, id_{1'}$ が存在し, 再び定義 2.6 より, $!_1 \circ !_{1'} = id_1$ かつ $!_{1'} \circ !_1 = id_{1'}$ となる. したがって, 定義 2.5 より $1 \cong 1'$.
□

[5] **Set**では, 終対象 1 は単一集合 (singleton) に相当する.

定義 2.7 (始対象) 任意の対象 A に対して, $B \to A$ なる射が一意的に存在するとき, B を始対象 (initial object) といい, 0 と表す．また, $0 \to A$ なる一意的な射を 0_A と表す．[6]

定義 2.8 (直積) 対象 A, B に対して, 圏 $\mathbf{C}$ の中に以下の *1.* と *2.* をみたす対象 $A \times B$ が存在するとき, $A \times B$ を A と B との直積 (product) という．[7]

1. $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ なる二つの射 π_1, π_2 が存在する．

2. 下図のような C, f, g に対して, $f = \pi_1 \circ h$ かつ $g = \pi_2 \circ h$ をみたす $h : C \to A \times B$ が一意的に存在する．なお, この h を $\langle f, g \rangle$ と表す．

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[ld, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[rd, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

命題 2.6 下図において, f または g のいずれかが mono ならば, $\langle f, g \rangle$ は mono である．

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[ld, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g \rangle"] \arrow[rd, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

証明

f が mono であるとすると, 定義2.8 より $f = \pi_1 \circ \langle f, g \rangle$ であるから, $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle$ が mono である．よって, 命題2.2 の *1.* より $\langle f, g \rangle$ が mono である．g が mono である場合も同様.
□

定義 2.9 (直和) 対象 A, B に対して, 圏 $\mathbf{C}$ の中に以下の *1.* と *2.* をみたす対象 $A + B$ が存在するとき, $A + B$ を A と B との直和 (coproduct) という．

1. $A \xrightarrow{\pi_1} A + B \xleftarrow{\pi_2} B$ なる二つの射 π_1, π_2 が存在する．

[6] **Set**では, 始対象 0 は空集合 $\emptyset$ に相当する．

[7] **Set**では, A と B との直積 $A \times B$ は $\{\langle x, y \rangle | x \in A$ かつ $y \in B\}$ に相当する．また, π_1, π_2 はそれぞれ $\pi_1(x, y) = x,\ \ \pi_2(x, y) = y$ なる射影 (projection) であり, h は $z \in C$ に対して $h(z) = \langle f(z), g(z) \rangle$ なる写像である．

2. 下図のような C, f, g に対して, $f = h \circ \pi_1$ かつ $g = h \circ \pi_2$ をみたす $h : A + B \to C$ が一意的に存在する.

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\pi_1"'] & A + B \arrow[u, dashed, "h"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\pi_2"]
\end{tikzcd}$$

定義 2.10 (equalizer) $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ に対して, $C \xrightarrow{e} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ が以下の *1.* と *2.* をみたすとき, e を f と g の equalizer という. [8]

1. $f \circ e = g \circ e$.

2. 下図のような D, h に対して, $f \circ h = g \circ h$ ならば $h = e \circ k$ をみたす $k : D \to C$ が一意的に存在する.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
D \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

命題 2.7 $C \xrightarrow{e} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ なる e, f, g について, e が f と g との equalizer ならば, e は mono である.

証明

$D \underset{h_2}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{e} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ とする. e が equalizer であることから, 定義2.10 より $f \circ e = g \circ e$. よって, $f \circ e \circ h_1 = g \circ e \circ h_1$ より, 再び e が equalizer であることから, 下図を可換にする h_1 は一意的に存在している.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
D \arrow[u, "h_1"] \arrow[ur, "e \circ h_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

[8] **Set**では, equalizer e は C から A の部分集合である $\{x \in A | f(x) = g(x)\}$ に一対一に対応付ける写像に相当する.

まったく同様に, 下図を可換にする h_2 もまた一意的に存在している.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
D \arrow[u, "h_2"] \arrow[ur, "e\circ h_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

したがって, $e \circ h_1 = e \circ h_2$ を仮定すれば, $h_1 = h_2$ となり, e は mono である.
□

定義 2.11 (coequalizer) $B \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} A$ に対して, $B \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{e} C$ が以下の *1.* と *2.* をみたすとき, e を f と g の coequalizer という.

1. $e \circ f = e \circ g$.
2. 下図のような D, h に対して, $h \circ f = h \circ g$ ならば $h = k \circ e$ をみたす $k : C \to D$ が一意的に存在する.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "h"'] & C \arrow[d, dashed, "k"] \\
& & D
\end{tikzcd}$$

2.3 pullback・冪

定義 2.12 (pullback) $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ に対して, $A \xleftarrow{g'} D \xrightarrow{f'} B$ が以下の *1.* と *2.* をみたすとき, $A \xleftarrow{g'} D \xrightarrow{f'} B$ を $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ の pullback という. [9]

1. $f \circ g' = g \circ f'$.
2. 任意の E と $h : E \to A$ および $k : E \to B$ に対して, $f \circ h = g \circ k$ ならば $h = g' \circ l$ か

[9] **Set**では, $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ の pullback として $D = \{\langle x, y\rangle | x \in A$ かつ $y \in B$ かつ $f(x) = g(y)\}$, $f'(x, y) = y$, $g'(x, y) = x$ をとることができる.

つ $k = f' \circ l$ となる $l : E \to D$ が一意的に存在する.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dashed, "l"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

命題 2.8 下図が pullback であり, f が (g が) mono ならば f' も (g' も) mono である.

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pullback}"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

証明

$E \underset{l_2}{\overset{l_1}{\rightrightarrows}} D$ とし, $f' \circ l_1 = f' \circ l_2$ と仮定する. 仮定より, $g \circ f' \circ l_1 = g \circ f' \circ l_2$. また, 下図が pullback であることより, $f \circ g' = g \circ f'$ であるから, $f \circ g' \circ l_1 = g \circ f' \circ l_1$ かつ $f \circ g' \circ l_2 = g \circ f' \circ l_2$.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, shift left, "l_2"] \arrow[dr, shift right, "l_1"'] & & \\
& D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pullback}"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

よって, $f \circ g' \circ l_1 = f \circ g' \circ l_2$ となるので, f が mono であることから $g' \circ l_1 = g' \circ l_2$. 今, $h := g' \circ l_1 = g' \circ l_2$, $k := f' \circ l_1 = f' \circ l_2$ とおくと, $f \circ h = g \circ k$ より, 再び下図が pullback

であることから, $h = g' \circ l$ かつ $k = f' \circ l$ をみたす $l : E \to D$ が一意的に存在する.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dashed, "l"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pullback}"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

したがって, $l_1 = l = l_2$ となるので, f' は mono である.

□

命題 2.9 下図が可換であるとき, 二つの正方形が pullback ならば, 外枠の長方形も pullback である.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

証明

下図において, l_1 と l_2 を除いた図式が可換であるとする.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, dashed, "l_2"'] \arrow[drr, dashed, "l_1"] \arrow[drrr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
& \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

すると, 右の正方形が pullback であることから, ある l_1 が一意的に存在して l_1 を加えた図式が可換である. また, 左の正方形が pullback であることから, ある l_2 が一意的に存在してさらに l_2 を加えた図式が可換である. よって, 外枠の長方形は pullback である.

□

定理 2.1 圏 $\mathbf{C}$ において, 任意の二つの対象に対してその直積が存在し, 任意の $\bullet \rightrightarrows \bullet$ なる二つの射についてその equalizer が存在するとき, 任意の $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ に対して, $A \xleftarrow{g'} D \xrightarrow{f'} B$ なる pullback が存在する.

証明

e を $A \times B \underset{g\circ\pi_2}{\overset{f\circ\pi_1}{\rightrightarrows}} C$ の equalizer とする.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "e"] & A \times B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

その上で, 下図が pullback となることを示す.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\pi_2\circ e"] \arrow[d, "\pi_1\circ e"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

まず, 定義 2.10 より, $f \circ \pi_1 \circ e = g \circ \pi_2 \circ e$. 次に, $h : E \to A$ と $k : E \to B$ なる任意の射 h, k について, $f \circ h = g \circ k$ と仮定する. すると, 定義 2.8 より, $h = \pi_1 \circ \langle h, k\rangle$ かつ $k = \pi_2 \circ \langle h, k\rangle$ をみたす $\langle h, k\rangle$ が一意的に存在する.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rrr, bend left, "k"] \arrow[rr, dashed, "\langle h,k\rangle"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & & & \\
& D \arrow[r, "e"'] & A \times B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& & A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

よって, 仮定より $f \circ \pi_1 \circ \langle h, k\rangle = g \circ \pi_2 \circ \langle h, k\rangle$. ゆえに, e が $f \circ \pi_1$ と $g \circ \pi_2$ の equalizer であることから, $\langle h, k\rangle = e \circ l$ をみたす $l : E \to D$ が一意的に存在する.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rrr, bend left, "k"] \arrow[rr, "\langle h,k\rangle"] \arrow[r, dashed, "l"'] \arrow[drr, bend right, "h"'] & & & \\
& D \arrow[r, "e"'] & A \times B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& & A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

したがって, $h = \pi_1 \circ e \circ l$ かつ $k = \pi_2 \circ e \circ l$ をみたす l が一意的に存在するので, $A \xleftarrow{\pi_1 \circ e} D \xrightarrow{\pi_2 \circ e} B$ は $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ の pullback である.
□

定義 2.13 (pushout) $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ に対して, $A \xrightarrow{g'} D \xleftarrow{f'} B$ が以下の *1.* と *2.* をみたすとき, $A \xrightarrow{g'} D \xleftarrow{f'} B$ を $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ の pushout という.

1. $g' \circ f = f' \circ g$.
2. 任意の E と $h : A \to E$ および $k : B \to E$ に対して, $h \circ f = k \circ g$ ならば $h = l \circ g'$ かつ $k = l \circ f'$ となる $l : D \to E$ が一意的に存在する.

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "k"] & \\
A \arrow[r, "g'"'] \arrow[drr, bend right, "h"'] & D \arrow[dr, dashed, "l"] & \\
 & & E
\end{tikzcd}
$$

定義 2.14 (射の積) $f : A \to B$, $g : C \to D$ とする. このとき $\langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle : A \times C \to B \times D$ を f と g との射の積といい, $f \times g$ と表す.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \\
A \times C \arrow[u, "\pi_1"] \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "\pi_2"'] & B \times D \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}
\qquad (f \times g = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle)
$$

定義 2.15 (冪) 圏 $\mathbf{C}$ が以下の *1.* と *2.* をみたすとき, $\mathbf{C}$ は冪 (exponentiation) をもつという.

1. $\mathbf{C}$ の任意の二つの対象には, その直積が存在する.
2. $\mathbf{C}$ の任意の対象 A, B について, ある対象 B^A と射 $\mathrm{ev} : B^A \times A \to B$ が存在して, 任意の対象 C と射 $g : C \times A \to B$ に対し, 下図を可換とする $\hat{g} : C \to B^A$ が一意的に

存在する.

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[drr, "\mathrm{ev}"] & & \\
& & B \\
C \times A \arrow[uu, "\hat{g}\times id_A"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

2.4 トポス

定義 2.16 (subobject classifier) 圏 $\mathbf{C}$ には終対象 1 が存在するとした上で, ある対象 Ω に対して以下の条件をみたす射 $t : 1 \rightarrowtail \Omega$ を $\mathbf{C}$ の subobject classifier という.

- 任意の mono $f : A \rightarrowtail B$ に対して, 下図が pullback となるような $\chi_f : B \to \Omega$ が一意的に存在する.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "!_A"] \arrow[d, tail, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pullback}"] & 1 \arrow[d, tail, "t"] \\
B \arrow[r, dashed, "\chi_f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

定義 2.17 (トポス) 圏 $\mathbf{E}$ において以下の *1.* 〜 *4.* がなりたつとき, $\mathbf{E}$ をトポス (topos) という.

1. $\mathbf{E}$ には, 終対象 1 が存在する.
2. $\mathbf{E}$ には, $\mathbf{E}$ の任意の二つの対象 A, B について, その直積 $A \times B$ が存在する.
3. $\mathbf{E}$ には, $\mathbf{E}$ の任意の二つの対象 A, B について, その冪 B^A が存在する.
4. $\mathbf{E}$ には, subobject classifier $t : 1 \to \Omega$ が存在する.

第3章　空間性トポス

この章では, まず位相空間の上の層と, 層から層への射を定義する. その上で, それらから構成される空間性トポスと呼ばれる圏が第2章の最後に定義されたトポスの一つの具体例となっていることをみる.

3.1　位相空間の上の層

定義 3.1 (位相空間) *X を空でない集合とする. X の部分集合系 $\mathcal{O}$ が以下の 1. ～ 3. をみたすとき, $\mathcal{O}$ を X の上の位相 (topology) といい, $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ を位相空間 (topological space) という.*

1. $\emptyset \in \mathcal{O}$ かつ $X \in \mathcal{O}$.
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
3. $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が $\mathcal{O}$ の元からなる任意の集合族ならば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

また, $O \in \mathcal{O}$ なる集合 O を位相空間 $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ の開集合 (open set) といい, $\mathcal{O}$ を位相空間 $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ の開集合系ともいう. [1]

定義 3.2 (前層) *集合 A と $E : A \to \mathcal{O}$, $\upharpoonright : A \times \mathcal{O} \to A$ なる二つの写像が以下の 1. ～ 4. をみたすとき, $\langle A, E, \upharpoonright \rangle$ を X の上の前層 (presheaf) という.* [2]

1. 任意の $x, y \in A$ に対して, $x \upharpoonright \emptyset = y \upharpoonright \emptyset$.
2. 任意の $x \in A$ に対して, $x \upharpoonright Ex = x$.
3. 任意の $x \in A$, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して, $E(x \upharpoonright U) = Ex \cap U$.
4. 任意の $x \in A$, 任意の $U, V \in \mathcal{O}$ に対して, $(x \upharpoonright U) \upharpoonright V = x \upharpoonright (U \cap V)$.

命題 3.1 *$\langle A, E, \upharpoonright \rangle$ を X の上の前層とする. 任意の $x \in A$, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して, 以下の 1. ～ 3. がなりたつ.*

[1]以降では, 特に断りの無い限りひとつの位相空間 $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ を固定して話を進める.
[2]E と $\upharpoonright$ の二つの写像について, それぞれ $E(x)$ を Ex と表し, $\upharpoonright(x, U)$ を $x \upharpoonright U$ と表す.

1. $x \upharpoonright U = x \upharpoonright (Ex \cap U)$.

2. $Ex \subseteq U \Longleftrightarrow x \upharpoonright U = x$.

3. $U \subseteq Ex \Longleftrightarrow E(x \upharpoonright U) = U$.

証明

1. について. 定義 3.2 の *2.* と *4.* より,

$$x \upharpoonright U = (x \upharpoonright Ex) \upharpoonright U = x \upharpoonright (Ex \cap U).$$

2. について.
($\Longrightarrow$) 仮定より, $Ex \cap U = Ex$. よって, 命題 3.1 の *1.* と定義 3.2 の *2.* より,

$$x \upharpoonright U = x \upharpoonright (Ex \cap U) = x \upharpoonright Ex = x.$$

($\Longleftarrow$) 仮定と定義 3.2 の *3.* より,

$$Ex \cap U = E(x \upharpoonright U) = Ex.$$

よって, $Ex \subseteq U$.
3. について.
($\Longrightarrow$) 仮定より, $Ex \cap U = U$. よって, 定義 3.2 の *3.* より,

$$E(x \upharpoonright U) = Ex \cap U = U.$$

($\Longleftarrow$) 仮定と定義 3.2 の *3.* より,

$$Ex \cap U = E(x \upharpoonright U) = U.$$

よって, $U \subseteq Ex$.
□

定義 3.3 (両立) $\langle A, E, \upharpoonright \rangle$ を X の上の前層とする. $x, y \in A$ に対して,

$$x \upharpoonright Ey = y \upharpoonright Ex$$

がなりたつとき, x と y は両立する (compatible) という.

定義 3.4 (層) $\langle A, E, \upharpoonright \rangle$ を X の上の前層とする. A の任意の部分集合 A_0 について, A_0 の任意の二元が両立しているならば, 以下の *1.* と *2.* をみたす $y \in A$ が一意的に存在するとき, $\langle A, E, \upharpoonright \rangle$ を X の上の層 (sheaf) という.

1. $x \in A_0$ ならば, $y \upharpoonright Ex = x$.

2. $Ey = \bigcup_{x \in A_0} Ex$.

また, この一意的に定まる y を $\bigcup A_0$ と表す.

命題 3.2 $\langle A, E, \upharpoonright \rangle$ を X の上の層とする. $A_0 \subseteq A$ なる A_0 と $U \in \mathcal{O}$ に対して, $A_0 \upharpoonright U$ を以下のように定義する.

$$A_0 \upharpoonright U := \{x \upharpoonright U | x \in A_0\}.$$

このとき, A_0 の任意の二元が両立しているならば, $\bigcup A_0$ と $\bigcup (A_0 \upharpoonright U)$ がそれぞれ一意的に存在して,

$$\bigcup (A_0 \upharpoonright U) = \left(\bigcup A_0 \right) \upharpoonright U$$

がなりたつ.

証明

まず, A_0 の任意の二元が両立しているとして, $A_0 \upharpoonright U$ の任意の二元が両立することを示す. 今, $y, y' \in A_0 \upharpoonright U$ を任意にとって, $y = x \upharpoonright U, y' = x' \upharpoonright U$ とすると,

$$y \upharpoonright Ey' = (x \upharpoonright U) \upharpoonright E(x' \upharpoonright U) = (x \upharpoonright Ex') \upharpoonright U = (x' \upharpoonright Ex) \upharpoonright U = (x' \upharpoonright U) \upharpoonright E(x \upharpoonright U) = y' \upharpoonright Ey.$$

よって, $A_0 \upharpoonright U$ の任意の二元は両立しているので, $\bigcup A_0$ と $\bigcup (A_0 \upharpoonright U)$ がそれぞれ一意的に存在する.

次に, $\bigcup (A_0 \upharpoonright U) = \left(\bigcup A_0 \right) \upharpoonright U$ となることを示す. 今, 任意に $y \in A_0 \upharpoonright U$ をとって, $y = x \upharpoonright U$ とすると,

$$\begin{aligned} \left(\left(\bigcup A_0 \right) \upharpoonright U \right) \upharpoonright Ey &= \left(\left(\bigcup A_0 \right) \upharpoonright U \right) \upharpoonright E(x \upharpoonright U) = \left(\left(\bigcup A_0 \right) \upharpoonright Ex \right) \upharpoonright U \\ &= x \upharpoonright U = y. \end{aligned}$$

また, さらに,

$$\begin{aligned} E \left(\left(\bigcup A_0 \right) \upharpoonright U \right) &= E \left(\bigcup A_0 \right) \cap U = \left(\bigcup_{x \in A_0} Ex \right) \cap U = \bigcup_{x \in A_0} (Ex \cap U) \\ &= \bigcup_{x \in A_0} E(x \upharpoonright U) = \bigcup_{y \in A_0 \upharpoonright U} Ey = \bigcup (A_0 \upharpoonright U). \end{aligned}$$

したがって, $\bigcup (A_0 \upharpoonright U)$ の一意性により, $\bigcup (A_0 \upharpoonright U) = \left(\bigcup A_0 \right) \upharpoonright U$.

□

3.2 空間性トポスの終対象と直積

定義 3.5 (層から層への射) $\langle A, E, \rceil \rangle$, $\langle B, E', \rceil' \rangle$ をそれぞれ X の上の層とする. $f : A \to B$ なる写像が以下の *1.* と *2.* をみたすとき, f を層から層への射という.

1. 任意の $x \in A$ に対して, $E'f(x) = Ex$.
2. 任意の $x \in A$, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して, $f(x \rceil U) = f(x) \rceil' U$.

定義 3.6 (空間性トポス) 対象をそれぞれ X 上の層とし, 射をそれぞれ層から層への射とするとき, それらによって構成される圏を空間性トポス (spatial topos) といい, $\mathrm{Top}(X)$と表す. [3]

命題 3.3 $\mathrm{Top}(X)$には, 終対象 1 が存在する.

証明

$1 = \langle \mathcal{O}, E, \rceil \rangle$ とし, $E : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ と $\rceil : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ を以下のように定義する.

$$\text{任意の } U \in \mathcal{O} \text{ に対して,} \quad EU := U.$$

$$\text{任意の } U, V \in \mathcal{O} \text{ に対して,} \quad U \rceil V := U \cap V.$$

まず, 1 が定義 3.2 の性質をみたすことを示す.

1. について. 任意の $U, V \in \mathcal{O}$ に対して,

$$U \rceil \emptyset = U \cap \emptyset = \emptyset = V \cap \emptyset = V \rceil \emptyset.$$

2. について. 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して,

$$U \rceil EU = U \cap EU = U \cap U = U.$$

3. について. 任意の $U, V \in \mathcal{O}$ に対して,

$$E(U \rceil V) = U \rceil V = U \cap V = EU \cap V.$$

4. について. 任意の $U, V, W \in \mathcal{O}$ に対して,

$$(U \rceil V) \rceil W = (U \rceil V) \cap W = U \cap V \cap W = U \rceil (V \cap W).$$

よって, 1 は前層である.

次に, 1 が定義 3.4 の性質をみたすことを示す. 今, 任意に $\mathcal{O}_0 \subseteq \mathcal{O}$ をとり, $\mathcal{O}_0$ の任意の二元が両立していると仮定すると, $\bigcup \mathcal{O}_0$ として $\bigcup_{U \in \mathcal{O}_0} U$ をとることができる.

[3] 恒等射 id_A として恒等写像をとり, 射の合成 $g \circ f$ は f と g をそれぞれ集合間の写像と見た上で, その合成写像が再び定義 3.5 の性質をみたすことから, 容易に $\mathrm{Top}(X)$ が圏であることが確認できる.

1. について. $V \in \mathcal{O}_0$ とすると,

$$\left(\bigcup_{U \in \mathcal{O}_0} U\right) \upharpoonleft EV = \left(\bigcup_{U \in \mathcal{O}_0} U\right) \cap EV = \left(\bigcup_{U \in \mathcal{O}_0} U\right) \cap V = V.$$

2. について.

$$E\left(\bigcup_{U \in \mathcal{O}_0} U\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{O}_0} U = \bigcup_{U \in \mathcal{O}_0} EU.$$

一意性について. 定義 3.4 の性質をみたす $y' \in \mathcal{O}$ が別に存在したとすると, 定義 3.4 の *2.* より,

$$\bigcup_{U \in \mathcal{O}_0} U = \bigcup_{U \in \mathcal{O}_0} EU = Ey' = y'.$$

ゆえに, 1 は層である.

最後に 1 が定義 2.6 の性質をみたすことを示す. 今, 任意に Top(X) の対象 $A = \langle A, E', \upharpoonleft' \rangle$ をとり, f を $f : A \to 1$ なる任意の射とすると, 定義 3.5 の *1.* より, 任意の $x \in A$ に対して,

$$f(x) = Ef(x) = E'x.$$

よって, A から 1 への一意的な射 $!_A$ が存在して, それは $E' : A \to \mathcal{O}$ となる. したがって, 1 は Top(X)の終対象である.
□

命題 3.4 Top(X)には, 任意の二つの対象 A, B について, その直積 $A \times B$ が存在する.

証明

$A = \langle A, E_A, \upharpoonleft_A \rangle$, $B = \langle B, E_B, \upharpoonleft_B \rangle$ をそれぞれ Top(X) の対象とする. このとき, $A \times B = \langle A \times B, E, \upharpoonleft \rangle$ を以下のように定義する.

$$A \times B := \{\langle x, y \rangle | x \in A \text{ かつ } y \in B \text{ かつ } E_A x = E_B y\}.$$

$$\text{任意の } \langle x, y \rangle \in A \times B \text{ に対して,} \quad E\langle x, y \rangle := E_A x = E_B y.$$

$$\text{任意の } \langle x, y \rangle \in A \times B, \text{任意の } U \in \mathcal{O} \text{ に対して,} \quad \langle x, y \rangle \upharpoonleft U := \langle x \upharpoonleft_A U, y \upharpoonleft_B U \rangle.$$

まず, $A \times B$ が定義 3.2 の性質をみたすことを示す.
1. について. 任意の $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in A \times B$ に対して,

$$\langle x, y \rangle \upharpoonleft \emptyset = \langle x \upharpoonleft_A \emptyset, y \upharpoonleft_B \emptyset \rangle = \langle x' \upharpoonleft_A \emptyset, y' \upharpoonleft_B \emptyset \rangle = \langle x', y' \rangle \upharpoonleft \emptyset.$$

2. について. 任意の $\langle x, y \rangle \in A \times B$ に対して,

$$\langle x, y \rangle \upharpoonleft E\langle x, y \rangle = \left\langle x \upharpoonleft_A E\langle x, y \rangle, y \upharpoonleft_B E\langle x, y \rangle \right\rangle = \langle x \upharpoonleft_A E_A x, y \upharpoonleft_B E_B y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

3. について. 任意の $\langle x,y\rangle \in A\times B$, 任意の $U\in\mathcal{O}$ に対して,

$$E\Big(\langle x,y\rangle\urcorner U\Big) = E\Big(\langle x\urcorner_A U, y\urcorner_B U\rangle\Big) = E_A(x\urcorner_A U) = E_A x\cap U = E\langle x,y\rangle\cap U.$$

4. について. 任意の $\langle x,y\rangle \in A\times B$, 任意の $U,V\in\mathcal{O}$ に対して,

$$\begin{aligned}\Big(\langle x,y\rangle\urcorner U\Big)\urcorner V = \langle x\urcorner_A U, y\urcorner_B U\rangle\urcorner V &= \Big\langle (x\urcorner_A U)\urcorner_A V), (y\urcorner_B U)\urcorner_B\Big\rangle\\ &= \Big\langle x\urcorner_A(U\cap V), y\urcorner_B(U\cap V)\Big\rangle = \langle x,y\rangle\urcorner(U\cap V).\end{aligned}$$

よって, $A\times B$ は前層である.

次に, $A\times B$ が定義 3.4 の性質をみたすことを示す. 今, 任意に $S\subseteq A\times B$ をとり, S の任意の二元が両立していると仮定する. その上で, $A_0\subseteq A$, $B_0\subseteq B$ なる二つの集合 A_0, B_0 を以下のように定義する.

$$A_0 := \{x\in A|\ \text{ある } y\in B \text{ が存在して } \langle x,y\rangle\in S\}.$$

$$B_0 := \{y\in B|\ \text{ある } x\in A \text{ が存在して } \langle x,y\rangle\in S\}.$$

ここで, 任意に $x,x'\in A_0$ をとると, ある $y,y'\in B_0$ が存在して, $\langle x,y\rangle,\langle x',y'\rangle\in S$. $S\subseteq A\times B$ より, S の任意の二元が両立しているので, $\langle x,y\rangle\urcorner E\langle x',y'\rangle = \langle x',y'\rangle\urcorner E\langle x,y\rangle$. また, $S\subseteq A\times B$ より, $A\times B$ の定義から, $E\langle x,y\rangle = E_A x = E_B y$ かつ $E\langle x',y'\rangle = E_A x' = E_B y'$. よって,

$$\langle x,y\rangle\urcorner E\langle x',y'\rangle = \Big\langle x\urcorner_A E\langle x',y'\rangle, y\urcorner_B E\langle x',y'\rangle\Big\rangle = \langle x\urcorner_A E_A x', y\urcorner_B E_B y'\rangle,$$

$$\langle x',y'\rangle\urcorner E\langle x,y\rangle = \Big\langle x'\urcorner_A E\langle x,y\rangle, y'\urcorner_B E\langle x,y\rangle\Big\rangle = \langle x'\urcorner_A E_A x, y'\urcorner_B E_B y\rangle$$

となるから, $x\urcorner_A E_A x' = x'\urcorner_A E_A x$. したがって, A_0 の任意の二元は両立している. また, 同様に B_0 の任意の二元も両立している. ゆえに, $\langle A, E_A, \urcorner_A\rangle, \langle B, E_B, \urcorner_B\rangle$ がともに層であることから, 定義 3.4 の性質をみたす $\bigcup A_0, \bigcup B_0$ がそれぞれ一意的に存在し, $\bigcup S$ として $\Big\langle\bigcup A_0, \bigcup B_0\Big\rangle$ をとることができる.

1. について. $\langle x,y\rangle\in S$ とすると,

$$\begin{aligned}\Big\langle\bigcup A_0,\bigcup B_0\Big\rangle\urcorner E\langle x,y\rangle &= \Big\langle\Big(\bigcup A_0\Big)\urcorner_A E\langle x,y\rangle, \Big(\bigcup B_0\Big)\urcorner_B E\langle x,y\rangle\Big\rangle\\ &= \Big\langle\Big(\bigcup A_0\Big)\urcorner_A E_A x, \Big(\bigcup B_0\Big)\urcorner_B E_B y\Big\rangle = \langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

2. について.

$$E\Big\langle\bigcup A_0,\bigcup B_0\Big\rangle = E_A\bigcup A_0 = \bigcup_{x\in A_0} E_A x = \bigcup_{\langle x,y\rangle\in S} E\langle x,y\rangle.$$

一意性について. 定義3.4の性質をみたす $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \in A \times B$ が別に存在したとして, $\bigcup A_0$ と $\bigcup B_0$ それぞれの一意性を用いて示す. 今, 任意に $x \in A_0$ をとると, ある $y \in B_0$ が存在して, $\langle x, y \rangle \in S$. よって,

$$\langle \tilde{x} \upharpoonright_A E_A x, \tilde{y} \upharpoonright_B E_B y \rangle = \Big\langle \tilde{x} \upharpoonright E\langle x, y \rangle, \tilde{y} \upharpoonright E\langle x, y \rangle \Big\rangle = \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \upharpoonright E\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

となるので, $\tilde{x} \upharpoonright_A E_A x = x$. また,

$$E_A \tilde{x} = E\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \bigcup_{\langle x, y \rangle \in S} E\langle x, y \rangle = \bigcup_{x \in A_0} E_A x.$$

したがって, $\bigcup A_0$ の一意性により, $\bigcup A_0 = \tilde{x}$. まったく同様に $\bigcup B_0 = \tilde{y}$ を示すことができるので, $\Big\langle \bigcup A_0, \bigcup B_0 \Big\rangle = \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$. ゆえに, $A \times B$ は層である.

最後に $A \times B$ が定義2.8の性質をみたすことを示す. そのために, まず $\pi_1 : A \times B \to A$, $\pi_2 : A \times B \to B$ なる二つの写像を以下のように定義する.

$$\text{任意の } \langle x, y \rangle \in A \times B \text{ に対して,} \quad \pi_1(x, y) = x, \quad \pi_2(x, y) = y.$$

すると,

$$E_A \pi_1(x, y) = E_A x = E\langle x, y \rangle,$$
$$E_B \pi_2(x, y) = E_B y = E\langle x, y \rangle.$$

また, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して,

$$\pi_1\Big(\langle x, y \rangle \upharpoonright U\Big) = \pi_1(x \upharpoonright_A U, y \upharpoonright_B U) = x \upharpoonright_A U = \pi_1(x, y) \upharpoonright_A U,$$

$$\pi_2\Big(\langle x, y \rangle \upharpoonright U\Big) = \pi_2(x \upharpoonright_A U, y \upharpoonright_B U) = y \upharpoonright_B U = \pi_2(x, y) \upharpoonright_B U.$$

よって, π_1, π_2 はそれぞれ層から層への射である. 今, $C = \langle C, E_C, \upharpoonright_C \rangle$ を $\mathrm{Top}(X)$ の対象とし, f, g を $f : C \to A$, $g : C \to B$ なる射とする. その上で, $h : C \to A \times B$ なる写像を以下のように定義する.

$$\text{任意の } z \in C \text{ に対して,} \quad h(z) = \langle f(z), g(z) \rangle.$$

すると, f, g がそれぞれ射であることから,

$$Eh(z) = E\langle f(z), g(z) \rangle = E_A f(z) = E_C z.$$

また, 同様に f, g がそれぞれ射であることと E の定義から, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して,

$$\begin{aligned} h(z \upharpoonright_C U) &= \Big\langle f(z \upharpoonright_C U), g(z \upharpoonright_C U) \Big\rangle = \Big\langle f(z) \upharpoonright_A U, g(z) \upharpoonright_B U \Big\rangle \\ &= \Big\langle f(z), g(z) \Big\rangle \upharpoonright U = h(z) \upharpoonright U. \end{aligned}$$

よって, h は $h : C \to A \times B$ なる射であって, $f(z) = (\pi_1 \circ h)(z)$ かつ $g(z) = (\pi_2 \circ h)(z)$ がなりたつ. さらに, $f(z) = (\pi_1 \circ h')(z)$ かつ $g(z) = (\pi_2 \circ h')(z)$ をみたす $h' : C \to A \times B$ なる射が別に存在したとして, $h'(z) = \langle x', y' \rangle$ とすると,

$$\begin{aligned} h(z) &= \Big\langle f(z), g(z) \Big\rangle = \Big\langle (\pi_1 \circ h')(z), (\pi_2 \circ h')(z) \Big\rangle \\ &= \Big\langle \pi_1(x', y'), \pi_2(x', y') \Big\rangle = \langle x', y' \rangle \\ &= h'(z). \end{aligned}$$

ゆえに, f と g に対して, C から $A \times B$ への一意的な射 $\langle f, g \rangle$ が存在して, それは上で定義した h となる. したがって, $A \times B$ は, A と B との直積である.
□

3.3 空間性トポスの冪と subobject classifier

命題 3.5 Top(X)には, 任意の二つの対象 A, B について, その冪 B^A が存在する.

証明
$A = \langle A, E_A, \upharpoonright_A \rangle$, $B = \langle B, E_B, \upharpoonright_B \rangle$ をそれぞれ Top(X) の対象とする. このとき, $B^A = \langle B^A, E, \upharpoonright \rangle$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} B^A := \Big\{ &\langle f, V \rangle | V \in \mathcal{O} \text{ かつ}, f : A \to B \text{ かつ}, \text{任意の } x \in A, \text{任意の } U \in \mathcal{O} \text{ に対して} \\ &f(x \upharpoonright_A U) = f(x) \upharpoonright_B U \text{ かつ } E_B f(x) = V \cap E_A x \Big\}. \end{aligned}$$

$$\text{任意の } \langle f, V \rangle \in B^A \text{に対して,} \quad E\langle f, V \rangle := V.$$

$$\text{任意の } \langle f, V \rangle \in B^A, \text{任意の } U \in \mathcal{O} \text{ に対して,} \quad \langle f, V \rangle \upharpoonright U := \langle g, V \cap U \rangle.$$

ただし, $\upharpoonright$ の定義に現れる g は, 任意の $x \in A$ に対して, $g(x) = f(x) \upharpoonright_B U$ なる写像とする.
まず, 上の定義によって, $\upharpoonright$ が $\upharpoonright : B^A \times \mathcal{O} \to B^A$ なる写像になっていることを示す. 以下では, $Ef \in \mathcal{O}$ に対して, $\langle f, Ef \rangle \in B^A$ を $f \in B^A$ と表すことにする. これによって, $f \in B^A$ ということは, 任意の $x \in A$, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して,

$$f(x \upharpoonright_A U) = f(x) \upharpoonright_B U \quad \text{かつ} \quad E_B f(x) = Ef \cap E_A x$$

がなりたつことと表され, $f \upharpoonright U$ はその定義により,

$$\text{任意の } x \in A \text{ に対して,} \quad (f \upharpoonright U)(x) = f(x) \upharpoonright_B U,$$

$$E(f \upharpoonright U) = Ef \cap U$$

と表される. すると, $f \in B^A$ に対して, $f \upharpoonright U$ は明らかに $f \upharpoonright U : A \to B$ なる写像であって, 任意の $V \in \mathcal{O}$ に対して,

$$\begin{aligned}(f \upharpoonright U)(x \upharpoonright_A V) &= f(x \upharpoonright_A V) \upharpoonright_B U = \Big(f(x) \upharpoonright_B V\Big) \upharpoonright_B U \\ &= \Big(f(x) \upharpoonright_B U\Big) \upharpoonright_B V = \Big((f \upharpoonright U)(x)\Big) \upharpoonright_B V.\end{aligned}$$

また, さらに,

$$\begin{aligned}E_B\Big((f \upharpoonright U)(x)\Big) &= E_B\Big(f(x) \upharpoonright_B U\Big) = E_B f(x) \cap U \\ &= Ef \cap E_A x \cap U = E(f \upharpoonright U) \cap E_A x.\end{aligned}$$

よって, $f \upharpoonright U \in B^A$ より, $\upharpoonright : B^A \times \mathcal{O} \to B^A$ となっている.

次に, B^A が定義 3.2 の性質をみたすことを示す.

1. について. 任意の $f, f' \in B^A$, 任意の $x \in A$ に対して,

$$(f \upharpoonright \emptyset)(x) = f(x) \upharpoonright_B \emptyset = f'(x) \upharpoonright_B \emptyset = (f' \upharpoonright \emptyset)(x).$$

$$E(f \upharpoonright \emptyset) = Ef \cap \emptyset = \emptyset = Ef' \cap \emptyset = E(f' \upharpoonright \emptyset).$$

よって, $f \upharpoonright \emptyset = f' \upharpoonright \emptyset$.

2. について. 任意の $f \in B^A$, 任意の $x \in A$ に対して,

$$(f \upharpoonright Ef)(x) = f(x) \upharpoonright_B Ef.$$

ここで, $E_B f(x) = Ef \cap E_A x \subseteq Ef$ であるから, 命題 3.1 の *2.* より,

$$(f \upharpoonright Ef)(x) = f(x) \upharpoonright_B Ef = f(x).$$

また, さらに,

$$E(f \upharpoonright Ef) = Ef \cap Ef = Ef.$$

よって, $f \upharpoonright Ef = f$.

3. について. E の定義から, $E(f \upharpoonright U) = Ef \cap U$.

4. について. 任意の $f \in B^A$, 任意の $U, V \in \mathcal{O}$, 任意の $x \in A$ に対して,

$$\begin{aligned}\Big((f \upharpoonright U) \upharpoonright V\Big)(x) &= \Big((f \upharpoonright U)(x)\Big) \upharpoonright_B V = \Big(f(x) \upharpoonright_B U\Big) \upharpoonright_B V \\ &= f(x) \upharpoonright_B (U \cap V) = \Big(f \upharpoonright (U \cap V)\Big)(x).\end{aligned}$$

また, さらに,

$$E\Big((f \upharpoonright U) \upharpoonright V\Big) = E(f \upharpoonright U) \cap V = Ef \cap U \cap V = E\Big(f \upharpoonright (U \cap V)\Big).$$

よって, $(f \upharpoonright U) \upharpoonright V = f \upharpoonright (U \cap V)$. ゆえに, B^A は前層である.

続いて, B^A が定義 3.4 の性質をみたすことを示す. 今, 任意に $F \subseteq B^A$ をとり, F の任意の二元が両立していると仮定する. その上で, 任意の $x \in A$ に対し, $F_x \subseteq B$ なる集合 F_x を以下のように定義する.

$$F_x := \{f(x) | f \in F\}.$$

このとき, F_x の任意の二元が両立することを示す. 今, $y_1, y_2 \in F_x$ を任意にとって, $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x)$ とすると,

$$y_1 \upharpoonright_B E_B y_2 = f_1(x) \upharpoonright_B E_B f_2(x) = f_1(x) \upharpoonright_B (Ef_2 \cap E_A x) = \Big(f_1(x) \upharpoonright_B E_A\Big) \upharpoonright_B Ef_2.$$

ここで, $E_B f_1(x) = Ef_1 \cap E_A x \subseteq E_A x$ であるから, 命題 3.1 の *2.* より,

$$\Big(f_1(x) \upharpoonright_B E_A\Big) \upharpoonright_B Ef_2 = f_1(x) \upharpoonright_B Ef_2 = (f_1 \upharpoonright Ef_2)(x).$$

また, 同様に

$$y_2 \upharpoonright_B E_B y_1 = (f_2 \upharpoonright Ef_1)(x).$$

よって, 仮定より $f_1 \upharpoonright Ef_2 = f_2 \upharpoonright Ef_1$ であるから,

$$y_1 \upharpoonright_B E_B y_2 = y_2 \upharpoonright_B E_B y_1.$$

したがって, B が層であることから $\bigcup F_x \in B$ が一意的に存在するので, ここで g を以下のように定義する.

$$\text{任意の } x \in A \text{ に対して,} \quad g(x) := \bigcup F_x.$$

$$Eg := \bigcup_{f \in F} Ef.$$

このように定義された g が, $g \in B^A$ となることを示す. 命題 3.2 より, 任意の $x \in A$, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して,

$$g(x \upharpoonright_A U) = \bigcup F_{x \upharpoonright_A U} = \Big(\bigcup F_x\Big) \upharpoonright_B U = g(x) \upharpoonright_B U.$$

また, さらに,

$$\begin{aligned} E_B g(x) = E_B \bigcup F_x = \bigcup_{y \in F_x} E_B y = \bigcup_{f \in F} E_B f(x) \\ = \bigcup_{f \in F} (Ef \cap E_A x) = \left(\bigcup_{f \in F} Ef\right) \cap E_A x = Eg \cap E_A x. \end{aligned}$$

よって, $g \in B^A$ となり, $\bigcup F$ としてこの g をとることができる.

1. について. $f \in F$ とすると, 命題 3.1 より, 任意の $x \in A$ に対して,

$$\begin{aligned} (g \upharpoonright Ef)(x) &= g(x) \upharpoonright_B Ef = \Big(g(x) \upharpoonright_B E_A x\Big) \upharpoonright_B Ef \\ &= g(x) \upharpoonright_B E_B f(x) = \Big(\bigcup F_x\Big) \upharpoonright_B E_B f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

また,
$$E(g\upharpoonright Ef) = Eg \cap Ef = Ef.$$
よって, $g\upharpoonright Ef = f$.

2. について. g の定義から, $Eg = \bigcup_{f\in F} Ef$.

一意性について. 定義 3.4 の性質をみたす $g' \in B^A$ が別に存在したとして, $\bigcup F_x$ の一意性を用いて示す. 今, 任意に $x \in A$, $f \in F$ をとると,
$$g'(x)\upharpoonright_B E_B f(x) = g'(x)\upharpoonright_B (Ef \cap E_A x) = \Big(g'(x)\upharpoonright_B E_A x\Big)\upharpoonright_B Ef.$$
ここで, $E_B g'(a) = Eg' \cap E_A x \subseteq E_A x$ であるから, 命題 3.1 より,
$$\Big(g'(x)\upharpoonright_B E_A x\Big)\upharpoonright_B Ef = g'(x)\upharpoonright_B Ef = (g'\upharpoonright Ef)(x) = f(x).$$
また,
$$E_B g'(x) = Eg' \cap E_A x = \left(\bigcup_{f\in F} Ef\right) \cap E_A x = \bigcup_{f\in F}(Ef \cap E_A x) = \bigcup_{f(x)\in F_x} E_B f(x).$$
よって, $\bigcup F_x$ の一意性により, $g(x) = g'(x)$. さらに, 定義より,
$$Eg = \bigcup_{f\in F} Ef = Eg'.$$
したがって, g は一意的なので, B^A は層である.

最後に B^A が定義 2.15 の性質をみたすことを示す. そのために, まず $\langle B^A \times A, E', \upharpoonright' \rangle$ に対して, $\mathrm{ev} : B^A \times A \to B$ なる写像を以下のように定義する.
$$\text{任意の } \langle f, x\rangle \in B^A \times A \text{ に対して,} \quad \mathrm{ev}(f, x) := f(x).$$
すると,
$$E_B \mathrm{ev}(f, x) = E_B f(x) = Ef \cap E_A x = E'\langle f, x\rangle.$$
また, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して,
$$\begin{aligned}\mathrm{ev}\Big(\langle f, x\rangle \upharpoonright' U\Big) &= \mathrm{ev}(f\upharpoonright U, x\upharpoonright_A U) = (f\upharpoonright U)(x\upharpoonright_A U)\\ &= f(x\upharpoonright_A U)\upharpoonright_B U = f(x)\upharpoonright_B U\\ &= \mathrm{ev}(f, x)\upharpoonright_B U.\end{aligned}$$
よって, ev は層から層への射である. 今, $C = \langle C, E_C, \upharpoonright_C\rangle$ を $\mathrm{Top}(X)$ の対象とし, g を $g : C \times A \to B$ なる射とする. その上で, $\hat{g} : C \to B^A$ なる写像を以下のように定義する.
$$\text{任意の } z \in C \text{ に対して,} \quad \hat{g}(z) := \langle f, Ef\rangle.$$

ただし, 上の定義に現れる f は, ひとつの固定された $z \in C$ に対して, 以下のように定義される $f : A \to B$ なる写像である.

$$\text{任意の } x \in A \text{ に対して,} \quad f(x) := g(z \upharpoonright_C E_A x, x \upharpoonright_A E_C z).$$

$$Ef := E_C z.$$

今, このように定義された f が, $f \in B^A$ となることを示す. まず,

$$E_C(z \upharpoonright_C E_A x) = E_C \cap E_A x = E_A(x \upharpoonright_A E_C z)$$

となるから, f は上手く定義されている. 次に, 任意の $x \in A$, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して,

$$\begin{aligned} f(x \upharpoonright_A U) &= g\Big(z \upharpoonright_C E_A(x \upharpoonright_A U), (x \upharpoonright_A U) \upharpoonright_A E_C z\Big) = g\Big((z \upharpoonright_C E_A x) \upharpoonright_C U, (x \upharpoonright_A E_C z) \upharpoonright_A U\Big) \\ &= g\Big(\langle z \upharpoonright_C E_A x, x \upharpoonright_A E_C z \rangle \upharpoonright' U\Big) = g(z \upharpoonright_C E_A x, x \upharpoonright_A E_C z) \upharpoonright_B U \\ &= f(x) \upharpoonright_B U. \end{aligned}$$

また, Ef の定義から,

$$E_B f(x) = E(z \upharpoonright_C E_A x) = E_C z \cap E_A x = Ef \cap E_A x.$$

よって, $f \in B^A$.

次に, $\hat{g}$ が定義 3.5 の性質をみたすことを示す.

1. について. Ef の定義から,

$$E\hat{g}(z) = Ef = E_C z.$$

2. について. $z \in C, U \in \mathcal{O}$ とすると, 任意の $x \in A$ に対して,

$$\begin{aligned} \Big(\hat{g}(z \upharpoonright_C U)\Big)(x) &= g\Big((z \upharpoonright_C U) \upharpoonright_C E_A x, x \upharpoonright_A E_C(z \upharpoonright_C U)\Big) \\ &= g\Big((z \upharpoonright_C E_A x) \upharpoonright_C U, (x \upharpoonright_A E_C z) \upharpoonright_A U)\Big) \\ &= g\Big(\langle z \upharpoonright_C E_A x, x \upharpoonright_A E_C z \rangle \upharpoonright' U)\Big) = g(z \upharpoonright_C E_A x, x \upharpoonright_A E_C z) \upharpoonright U \\ &= \Big(\hat{g}(z) \upharpoonright U\Big)(x). \end{aligned}$$

また, さらに,

$$E\hat{g}(z \upharpoonright_C U) = E_C(z \upharpoonright_C U) = E_C z \cap U = E\hat{g}(z) \cap U = E\Big(\hat{g}(z) \upharpoonright U\Big).$$

よって, $\hat{g}$ は層から層への射である.

続いて, 下図が可換となること, およびそのような条件をみたす $\hat{g}$ の存在が一意的であることを示す.

$$
\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[dr, "\mathrm{ev}"] & \\
& B \\
C \times A \arrow[uu, "\hat{g}\times id_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\hat{g}$ の定義より, 任意の $\langle z, x\rangle \in C \times A$ に対して,

$$\mathrm{ev}\Big(\hat{g}(z), x\Big) = \Big(\hat{g}(z)\Big)(x) = g(z\rceil_C E_A x, x\rceil_A E_C z).$$

ここで, $\langle z, x\rangle \in C \times A$ より, $E_C z = E_A x$ であるから,

$$g(z\rceil_C E_A x, x\rceil_A E_C z) = g(z\rceil_C E_C z, x\rceil_A E_A x) = g(z, x)$$

となって, $\mathrm{ev} \circ (\hat{g} \times id_A) = g$. さらに, $\mathrm{ev} \circ (\hat{g}' \times id_A) = g$ をみたす $\hat{g}' : C \to B^A$ なる射が別に存在したとすると, 任意の $z \in C$, および $E_C z = E_A x$ をみたす任意の $x \in A$ に対して,

$$\Big(\hat{g}'(z)\Big)(x) = g(z, x) = g(z\rceil_C E_C z, x\rceil_A E_A x) = g(z\rceil_C E_A x, x\rceil_A E_C z) = \Big(\hat{g}(z)\Big)(x).$$

また,

$$E\hat{g}(z) = E_C z = E\hat{g}'(z).$$

よって, このような $\hat{g} : C \to B^A$ は一意的に存在する. したがって, B^A は, A と B との冪である.

□

命題 3.6 Top(X)には, subobject classifier $t : 1 \to \Omega$ が存在する.

定理 3.1 Top(X) はトポスである.

証明

命題 3.3, 命題 3.4, 命題 3.5, 命題 3.6 より, Top(X)は 定義 2.17 の性質をすべてみたす.

□

第4章　直観主義論理

この章では型付き直観主義一階述語論理の形式体系を導入し, そこで位相空間の上の層がどのように解釈されるかについて述べる. その後, 形式体系の健全性を証明し, 特定の論理式が直観主義論理において証明できないことをモデルを構成することによって示す.

4.1　型付き言語上の論理式

定義 4.1 (型) $\mathscr{T}$を任意の空でない集合とする. 型の集合 $\langle \mathscr{T}, \mathscr{F}, \mathscr{P} \rangle$ を以下のように定義する.

1. $A_1, \cdots, A_n, A \in \mathscr{T}$ $(1 \leq n)$ ならば, $\langle \langle A_1, \cdots, A_n \rangle, A \rangle \in \mathscr{F}$.
2. $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{T}$ $(1 \leq n)$ ならば, $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle \in \mathscr{P}$.

定義 4.2 (型付き言語) $\langle \mathscr{T}, \mathscr{F}, \mathscr{P} \rangle$ を型の集合とする. このとき, $\langle \mathscr{T}, \mathscr{F}, \mathscr{P} \rangle$ による型付き言語$\mathscr{L}$は以下のものから構成されているとする.

論理結合子： $\wedge$,　$\vee$,　$\rightarrow$,　$\neg$

量化記号： $\forall$,　$\exists$

対象変数： $\mathscr{T}$の任意の元 A に対して, $x, y, \cdots$ なる対象変数が与えられている. このとき, A を対象変数 $x, y, \cdots$ の型という.

対象定数： $c, d, \cdots$ なる対象定数が与えられており, いずれの対象定数にも必ず$\mathscr{T}$の元が一つ割り当てられているものとし, その元を対象定数の型という.

関数記号： $f, g, \cdots$ なる関数記号が与えられており, いずれの関数記号にも必ず$\mathscr{F}$の元が一つ割り当てられているものとし, その元を関数記号の型という.

述語記号： $P, Q, \cdots$ なる述語記号が与えられており, いずれの述語記号にも必ず$\mathscr{P}$の元が一つ割り当てられているものとし, その元を述語記号の型という. また, 特別な述語記号として, $\mathscr{T}$の任意の元 A に対して, 型が $\langle A, A \rangle$ である述語記号 $=_A$ と, 型が $\langle A \rangle$ である述語記号 E_A が与えられている.

補助記号： (,　),　,

定義 4.3 (項) 型付き言語$\mathscr{L}$上の項を以下のように定義する．

1. それぞれの対象変数，対象定数は項である．このときこの項の型は，それぞれ対象変数の型，および対象定数の型とする．

2. fを型が$\langle\langle A_1, \cdots, A_n\rangle, A\rangle$である関数記号とし，$t_1, \cdots, t_n$をそれぞれ型が$A_1, \cdots, A_n$である項とする．このとき$f(t_1, \cdots, t_n)$は項であり，その型は$A$である．

定義 4.4 (論理式) 型付き言語$\mathscr{L}$上の論理式を以下のように定義する．

1. Pを型が$\langle A_1, \cdots, A_n\rangle$である述語記号とし，$t_1, \cdots, t_n$をそれぞれ型が$A_1, \cdots, A_n$である項とする．このとき$P(t_1, \cdots, t_n)$は論理式である(この形の論理式を原子論理式という)．

2. φ_1, φ_2がともに論理式ならば，$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$，$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$，$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$，$(\neg\varphi_1)$はいずれも論理式である．

3. ψが論理式で，xが対象変数ならば，$(\forall x\psi)$，$(\exists x\psi)$はともに論理式である．

定義 4.5 (自由変数・束縛変数) 項tにおける自由変数の集合$FV(t)$，および論理式φにおける自由変数の集合$FV(\varphi)$と束縛変数の集合$BV(\varphi)$を以下のように定義する．

項tにおける自由変数の集合$FV(t)$

- $FV(x) := \{x\}$
- $FV(c) := \emptyset$
- $FV\Big(f(t_1, \cdots, t_n)\Big) := FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n)$

論理式φにおける自由変数の集合$FV(\varphi)$

- $FV\Big(P(t_1, \cdots, t_n)\Big) := FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n)$
- $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$に対して，　$FV(\varphi_1 * \varphi_2) := FV(\varphi_1) \cup FV(\varphi_2)$
- $FV(\neg\varphi_1) := FV(\varphi_1)$
- $Q \in \{\forall, \exists\}$に対して，　$FV(Qx\psi) := FV(\psi) - \{x\}$

論理式φにおける変数の集合$BV(\varphi)$

- $BV\Big(P(t_1, \cdots, t_n)\Big) := \emptyset$
- $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$に対して，　$BV(\varphi_1 * \varphi_2) := BV(\varphi_1) \cup BV(\varphi_2)$
- $BV(\neg\varphi_1) := BV(\varphi_1)$
- $Q \in \{\forall, \exists\}$に対して，　$BV(Qx\psi) := BV(\psi) \cup \{x\}$

定義 4.6 (閉じた論理式) 論理式 φ が自由変数を一つも持たないとき, φ を閉じた論理式という. 論理式 φ の自由変数が $x_1, \cdots, x_n$ のとき, $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$ を φ の閉包という. φ が閉じた論理式のときは φ の閉包は φ 自身である.

定義 4.7 (項の代入) x を変数とし, t を x と同じ型を持つ項とする. このとき, 項 s における項 t の変数 x への代入 $s[x/t]$ と, 論理式 φ における項 t の変数 x への代入 $A[x/t]$ を以下のように定義する.

項 s における項 t の変数 x への代入 $s[x/t]$

- $z[x/t] := \begin{cases} t & z = x \text{ のとき} \\ z & z \neq x \text{ のとき} \end{cases}$
- $c[x/t] := c$
- $f(s_1, \cdots, s_n)[x/t] := f(s_1[x/t], \cdots, s_n[x/t])$

論理式 φ における項 t の変数 x への代入 $A[x/t]$

- $P(s_1, \cdots, s_n)[x/t] := P(s_1[x/t], \cdots, s_n[x/t])$
- $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$ に対して, $\quad (\varphi_1 * \varphi_2)[x/t] := \varphi_1[x/t] * \varphi_2[x/t]$
- $(\neg\varphi_1)[x/t] := \neg\varphi_1[x/t]$
- $Q \in \{\forall, \exists\}$ に対して, $\quad (Qx\psi)[x/t] := \begin{cases} Qz(\psi[x/t]) & z \notin FV(t) \text{ のとき} \\ Qu(\psi[z/u][x/t]) & z \in FV(t) \text{ のとき} \end{cases}$

4.2 位相空間の上の構造

定義 4.8 ((層の集合上の) 関数) $\tilde{\mathscr{T}}$ を X の上の層を元とする任意の集合とする. このとき, $\langle A_1, E_{A_1}, \upharpoonright_{A_1}\rangle, \cdots, \langle A_n, E_{A_n}, \upharpoonright_{A_n}\rangle, \langle A, E, \upharpoonright\rangle \in \tilde{\mathscr{T}}$ に対して, f が $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to A$ なる写像で以下の条件をみたすならば, f を (層の集合 $\tilde{\mathscr{T}}$ 上の) 関数という.

任意の $x_i \in A_i \;\; (i = 1, \cdots, n)$, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して,

$$f(x_1, \cdots, x_n)\upharpoonright U = f(x_1\upharpoonright_{A_1}U, \cdots, x_n\upharpoonright_{A_n}U)\upharpoonright U.$$

定義 4.9 ((層の集合上の) 述語) $\tilde{\mathscr{T}}$ を X の上の層を元とする任意の集合とする. このとき, $\langle A_1, E_{A_1}, \upharpoonright_{A_1}\rangle, \cdots, \langle A_n, E_{A_n}, \upharpoonright_{A_n}\rangle \in \tilde{\mathscr{T}}$ に対して, P が $P : A_1 \times \cdots \times A_n \to \mathcal{O}$ なる写像で以下の条件をみたすならば, P を (層の集合 $\tilde{\mathscr{T}}$ 上の) 述語という.

任意の $x_i \in A_i \;\; (i = 1, \cdots, n)$, 任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して,

$$P(x_1, \cdots, x_n) \cap U = P(x_1\upharpoonright_{A_1}U, \cdots, x_n\upharpoonright_{A_n}U) \cap U.$$

定義 4.10 ((層の上の) 相等) $\langle A, E, \upharpoonright \rangle$ を X の上の層とする．層 $\langle A, E, \upharpoonright \rangle$ の上の相等 $=: A \times A \to \mathcal{O}$ なる述語を以下のように定義する．

$$\text{任意の } x_1, x_2 \in A \text{ に対して,}\quad = (x_1, x_2) := \bigcup \{U \in \mathcal{O} | x_1 \upharpoonright U = x_2 \upharpoonright U\}.$$

このとき, $=(x_1, x_2)$ を $x_1 = x_2$ と表すこととする．

定義 4.11 ((型付き言語$\mathscr{L}$に対する) 構造) $\mathscr{U} = \langle \tilde{\mathscr{T}}, F, I \rangle$ が型付き言語$\mathscr{L}$に対する構造であるということを, $\tilde{\mathscr{T}}$と F と I が以下の条件をみたすこととする．

1. $\tilde{\mathscr{T}}$は X の上の層を元とする空でない集合である．

2. F は $F : \mathscr{T} \to \tilde{\mathscr{T}}$ なる全単射の写像である．

3. I は型付き言語$\mathscr{L}$の対象定数, 関数記号, 述語記号のそれぞれに対し, $\tilde{\mathscr{T}}$に属す層の元, $\tilde{\mathscr{T}}$上の関数, $\tilde{\mathscr{T}}$上の述語を対応させる写像であって, 以下の条件をみたす．

   - c が型 A の対象定数のとき, $c^I \in A^F$.
   - f が型 $\langle\langle A_1, \cdots, A_n \rangle, A\rangle$ の関数記号のとき, f^I は $f^I : A_1^F \times \cdots \times A_n^F \to A^F$ なる$\tilde{\mathscr{T}}$上の関数.
   - P が型 $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ の (等号 $=$ と E 以外の) 述語記号のとき, P^I は $P^I : A_1^F \times \cdots \times A_n^F \to \mathcal{O}$ なる$\tilde{\mathscr{T}}$上の述語.
   - 任意の $A \in \mathscr{T}$ に対して, $(=_A)^I$ は層 A^F の上の相等 $=: A^F \times A^F \to \mathcal{O}$, $(E_A)^I$ は層 A^F における $E : A^F \to \mathcal{O}$.

   このとき, I を解釈という．

定義 4.12 (構造による型付き言語の拡大) $\mathscr{U} = \langle \tilde{\mathscr{T}}, F, I \rangle$ を型付き言語$\mathscr{L}$に対する構造とする．$\tilde{\mathscr{T}}$に属するすべての層 A^F のすべての元 a について, 型が A である対象定数 $\underline{a}$ を $\mathscr{L}$に付け加えて得られる言語を構造$\mathscr{U}$による型付き言語$\mathscr{L}$の拡大といい, $\mathscr{L}[\mathscr{U}]$ と表す．また, このようにして付け加えられた対象定数 $\underline{a}$ を a の名前という．このとき, 解釈 I の対象定数に関する条件として

- a の名前 $\underline{a}$ に対し, $\underline{a}^I = a$

と定めることで, 言語 $\mathscr{L}[\mathscr{U}]$ 上の解釈に拡張される．

定義 4.13 (項の意味付け) t を型が A である $\mathscr{L}[\mathscr{U}]$ 上の項とする．t が変数を一つも含まないときに, A^F の元 $t^{\mathscr{U}}$ を以下のように定義する．

1. t が対象定数 c のとき, $t^{\mathscr{U}} := c^I$.

2. t が $f(t_1, \cdots, t_n)$ のとき, $t^{\mathscr{U}} := f^I(t_1^{\mathscr{U}}, \cdots, t_n^{\mathscr{U}})$.

定義 4.14 (真理値) φ を $\mathscr{L}[\mathscr{U}]$ の閉じた論理式とする．φ の真理値 $[\varphi]$ を以下のように定義する．

φ が原子論理式のとき

- $[P(t_1, \cdots, t_n)] := P^I(t_1^{\mathscr{U}}, \cdots, t_n^{\mathscr{U}})$
- $[t_1 = t_2] := \bigcup\{U \in \mathcal{O} | t_1^{\mathscr{U}} \upharpoonright U = t_2^{\mathscr{U}} \upharpoonright U\}$
- $[Et] := E^I t^{\mathscr{U}}$

φ が $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \to \varphi_2$, $\neg\varphi_1$ のとき

- $[\varphi_1 \wedge \varphi_2] := [\varphi_1] \cap [\varphi_2]$
- $[\varphi_1 \vee \varphi_2] := [\varphi_1] \cup [\varphi_2]$
- $[\varphi_1 \to \varphi_2] := ((X - [\varphi_1]) \cup [\varphi_2])^\circ$
- $[\neg\varphi_1] := (X - [\varphi_1])^\circ$

φ が $\forall x\psi$, $\exists x\psi$ で x の型が A のとき

- $[\forall x\psi] := \left(\bigcap_{a \in A^F} [\psi[x/\underline{a}]]\right)^\circ$
- $[\exists x\psi] := \bigcup_{a \in A^F} [\psi[x/\underline{a}]]$

このように定義された真理値 $[\varphi]$ に対し，$[\varphi] = X$ となるときに φ は $\mathscr{U}$ で正しいといい，$\mathscr{U} \models \varphi$ と表す．逆に，φ が $\mathscr{U}$ で正しくないときは，$\mathscr{U} \not\models \varphi$ と表す．

4.3 形式体系LJの健全性

定義 4.15 (形式体系LJ) 形式体系LJは，以下のものから構成されているとする．ここで，推論規則に現れる Γ, Π は 0 個以上の論理式の有限列，Δ は高々一個の論理式とする．また，($\forall$ 右) と ($\exists$ 左) に現れる z は，下式に自由変数として現れないものとする．

始式

- 任意の論理式 φ について，　$\varphi \Longrightarrow \varphi$
- 任意の項 t について，　$\Longrightarrow t = t$
- 任意の項 t_1, t_2 について，　$t_1 = t_2 \Longrightarrow t_2 = t_1$
- 任意の項 t_1, t_2, t_3 について，　$t_1 = t_2, t_2 = t_3 \Longrightarrow t_1 = t_3$
- 任意の項 s, t, 任意の論理式 φ について，　$s = t \Longrightarrow \varphi[x/s] = \varphi[x/t]$
- 任意の項 s, t, 述語 E について，　$Es \vee Et \to s = t \Longrightarrow s = t$

構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ \text{(weakening 左)} \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi}\ \text{(weakening 右)}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Longrightarrow \Delta}\ \text{(exchange)} \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \varphi, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi, \Pi \Longrightarrow \Delta}\ \text{(contraction)}$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi \quad \varphi, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \Pi \Longrightarrow \Delta}\ \text{(cut)}$$

論理結合子に関する推論規則

$$\frac{\varphi_1, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ (\wedge\text{左 } 1) \qquad \frac{\varphi_2, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ (\wedge\text{左 } 2)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi_1 \quad \Gamma \Longrightarrow \varphi_2}{\Gamma \Longrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge\text{右}) \qquad \frac{\varphi_1, \Gamma \Longrightarrow \Delta \quad \varphi_2, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi_1 \vee \varphi_2, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ (\vee\text{左})$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi_1}{\Gamma \Longrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\vee\text{右 } 1) \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi_2}{\Gamma \Longrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\vee\text{右 } 2)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi_1 \quad \varphi_2, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\varphi_1 \to \varphi_2, \Gamma, \Pi \Longrightarrow \Delta}\ (\to \text{左}) \qquad \frac{\varphi_1, \Gamma \Longrightarrow \varphi_2}{\Gamma \Longrightarrow \varphi_1 \to \varphi_2}\ (\to \text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Longrightarrow}\ (\neg\text{左}) \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Longrightarrow}{\Gamma \Longrightarrow \neg\varphi}\ (\neg\text{右})$$

量化記号に関する推論規則

$$\frac{\varphi[x/t], \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\forall x\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ (\forall\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi[x/z]}{\Gamma \Longrightarrow \forall x\varphi}\ (\forall\text{右})$$

$$\frac{\varphi[x/z], \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\exists x\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ (\exists\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi[x/t]}{\Gamma \Longrightarrow \exists x\varphi}\ (\exists\text{右})$$

($\forall$ 右) と ($\exists$ 左) に現れる z をそれぞれの推論規則の固有変数という.

定義 4.16 (証明図) 形式体系LJの証明図を以下のように定義する.

1. 形式体系LJの始式は, それ自身を終式とする証明図である.

2. P_1 および P_2 はそれぞれ S_1 および S_2 をその終式とする証明図とする. さらに,

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

がLJの推論規則のひとつであれば,

$$\frac{P_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{P_1 \quad P_2}{S}$$

は S を終式とする証明図である.

式 $\Longrightarrow \varphi$ を終式とする証明図が存在するとき, 論理式 φ はLJで証明可能であるという.

定理 4.1 論理式 φ がLJで証明可能であるならば, φ は任意の構造 $\mathscr{U}$ で正しい.

4.4 直観主義論理で証明不可能な論理式

定理 4.2 以下の論理式は形式体系LJで証明不可能である.

1. $\varphi \vee \neg\varphi$

2. $\neg\neg\varphi \to \varphi$

3. $(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$

証明

まず, 位相空間 $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ が連結であるとし, 層として命題 3.3 で定義した 1 を考え, $V \in \mathcal{O}(V \neq X$ かつ $V \neq \emptyset)$ に対して, 以下のような述語 $P_V : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ を定義する.

$$\text{任意の } U \in \mathcal{O} \text{ に対して,} \quad P_V(U) := V.$$

また, 以下では $S \subseteq X$ なる S に対して, $X - S$ を S^c と表す.

1. について. $U \in \mathcal{O}$ に対して,

$$[P_V(U) \vee \neg P_V(U)] = [P_V(U)] \cup [\neg P_V(U)] = [P_V(U)] \cup ([P_V(U)]^c)^o = V \cup (V^c)^o.$$

ここで, $V \in \mathcal{O}$ より V^c は閉集合であるから, $(V^c)^o \subsetneq V^c$. よって, $V \cup (V^c)^o \neq X$.

2. について. $U \in \mathcal{O}$ に対して,

$$\begin{aligned}
[\neg\neg P_V(U) \to P_V(U)] &= ([\neg\neg P_V(U)]^c \cup [P_V(U)])^o \\
&= ([P_V(U)]^{cococ} \cup [P_V(U)]^c)^o \\
&= (V^{cococ} \cup V)^o.
\end{aligned}$$

ここで, $V \in \mathcal{O}$ より,

$$V = V^o \subsetneq \bar{V}^o = \bar{V}^{cco} = V^{coco}$$

であるから, $V^{cococ} \subsetneq V^c$. よって, $V^{cococ} \cup V \neq X$.

3. について. $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&[(P_V(U_1) \to P_V(U_2)) \to (\neg P_V(U_1) \vee P_V(U_2))] \\
&\quad = (([P_V(U_1) \to P_V(U_2)])^c \cup [\neg P_V(U_1) \vee P_V(U_2)])^o \\
&\quad = (([P_V(U_1)]^c \cup [P_V(U_2)])^{oc} \cup [\neg P_V(U_1)] \cup [P_V(U_2)])^o \\
&\quad = (([P_V(U_1)]^c \cup [P_V(U_2)])^{oc} \cup ([P_V(U_1)])^{co} \cup [P_V(U_2)])^o \\
&\quad = ((V^c \cup V)^{oc} \cup V^{co} \cup V)^o \\
&\quad = (X^{oc} \cup V^{co} \cup V)^o \\
&\quad = (\emptyset \cup V^{co} \cup V)^o \\
&\quad = (V^{co} \cup V)^o.
\end{aligned}$$

ここで, $V \in \mathcal{O}$ より,

$$V \subsetneq \bar{V} = \bar{V}^{cc} = V^{coc}$$

であるから, $V^{co} \cup V \neq X$.

□

第5章　結論

5.1　本研究の成果

本稿では, まず圏の概念を定義し, そこでなりたついくつかの性質の証明と圏の特別の場合であるトポスの定義を与えた. その上で, 層の概念を導入し, 層を対象とした空間性トポスなる圏がトポスとなっていることを示した.

また, 直観主義論理の形式体系LJを導入し, 層の集合からなる位相空間の上の構造によって論理式がどのように解釈されるのかを見た後, 具体的な構造を構成することで直観主義論理では証明不可能な論理式の存在を示した.

本研究では, 高階の直観主義述語論理の論理式がトポスによってどのように解釈されるのかについてまでは言及できなかったが, 一階の直観主義述語論理において, 論理式 $\varphi \vee \neg\varphi$, $\neg\neg\varphi \to \varphi$, $(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$ がなりたたないような層の集合からなる位相空間の上の構造を構成し, これらの論理式が直観主義論理で証明不可能であることが確認できた.

5.2　今後の課題

今後の課題としては, 高階の直観主義述語論理の論理式がトポスによってどのように解釈されるのかについて調べることが挙げられる.

本稿では, 一階の直観主義述語論理に限った層による意味論の話題に終始してしまったため, これを拡張する形で空間性トポスが高階の直観主義述語論理の意味論としてどのような対応関係となっているかについて言及することが望ましい.

参考文献

[1] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968.

[2] 竹内外史, 層・圏・トポス, 日本評論社, 1978.

[3] 小野寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.

[4] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician Second Edition, Springer-Verlag, 1998.

[5] 清水義夫, 圏論による論理学　高階論理とトポス, 東京大学出版会, 2007.