形式手法の新展開
－離散と連続の融合－

平石 邦彦

北陸先端科学技術大学院大学・情報科学研究科

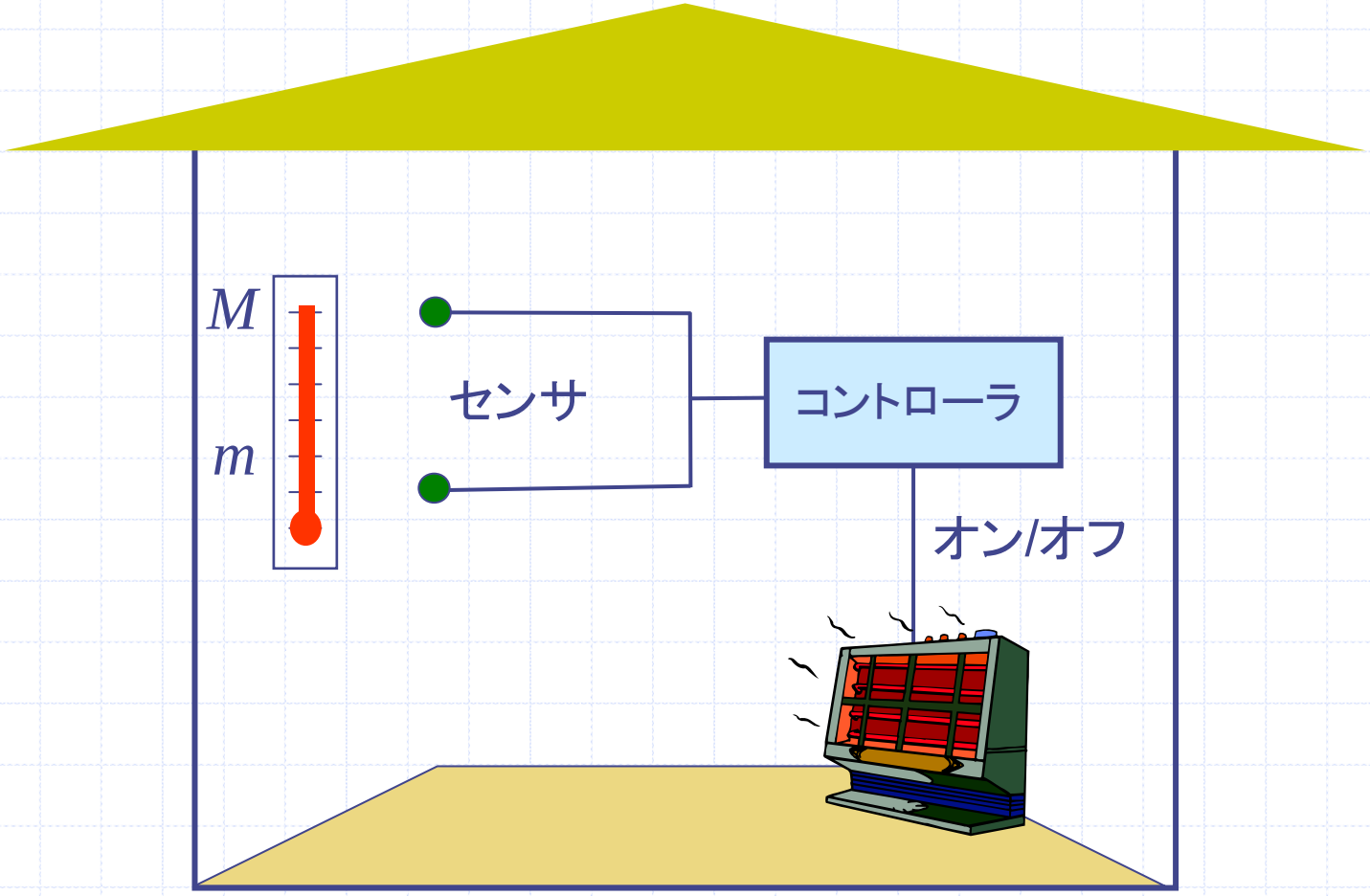
内容

- オートマトンからハイブリッドオートマトンへ
- ハイブリッドオートマトンに対するモデル検査
- 離散状態の流体近似と保証付計算

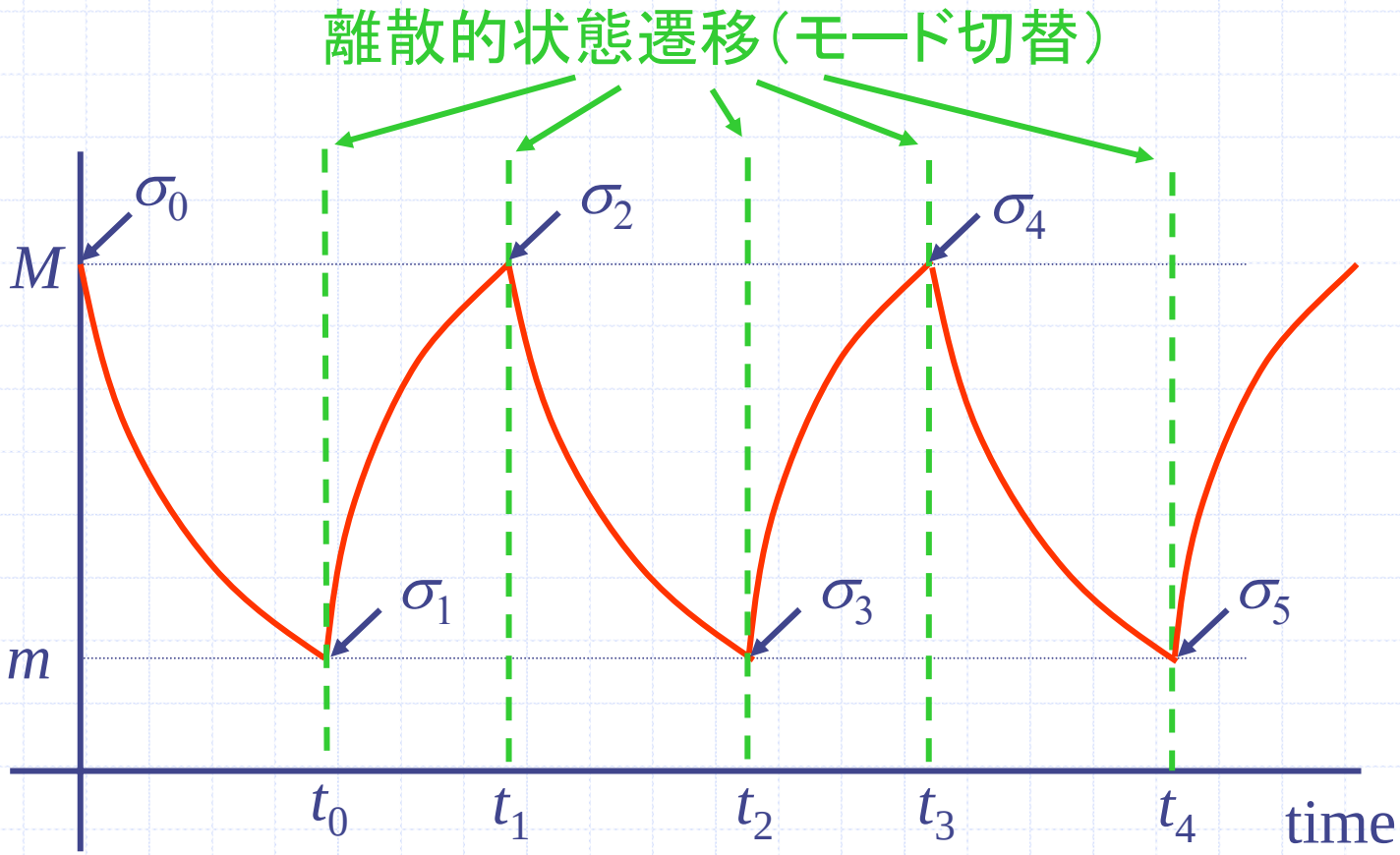
内容

- オートマトンからハイブリッドオートマトンへ
- ハイブリッドオートマトンに対するモデル検査
- 離散状態の流体近似と保証付計算

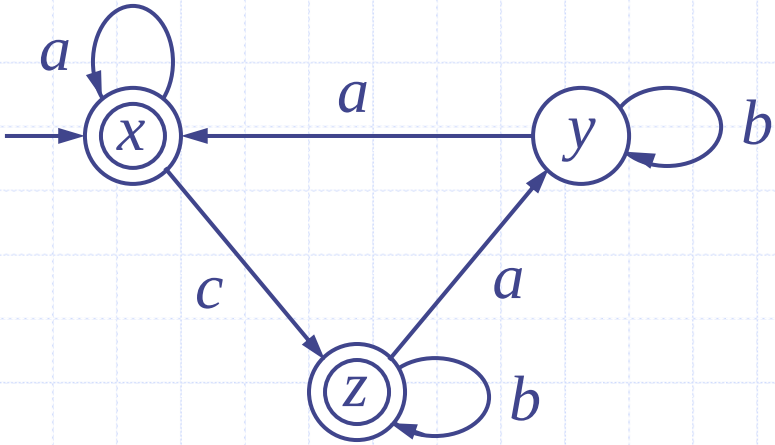
室温のオン/オフ制御



室温のオン/オフ制御

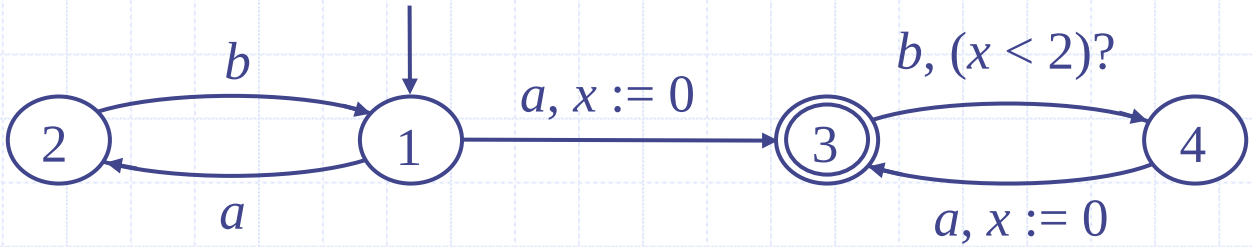

離散的状態遷移（モード切替）
σ_0
σ_2
σ_4
M
σ_1
σ_3
σ_5
m
t_0
t_1
t_2
t_3
t_4
time

オートマトンからハイブリッドオートマトンへ

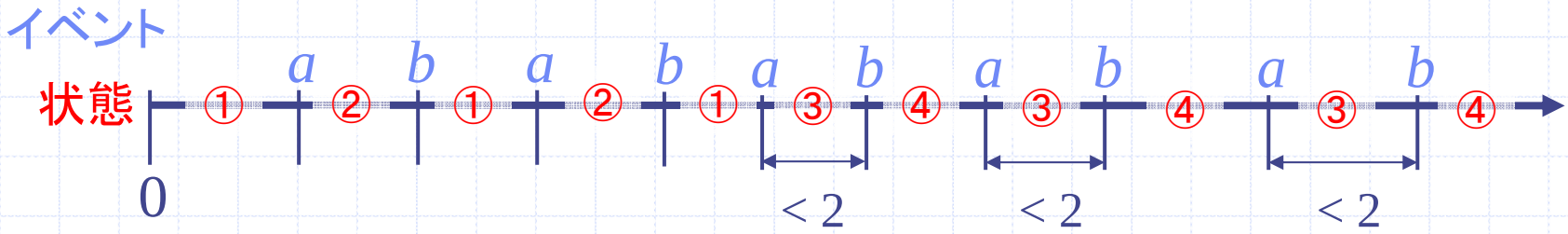


オートマトン

オートマトンからハイブリッドオートマトンへ

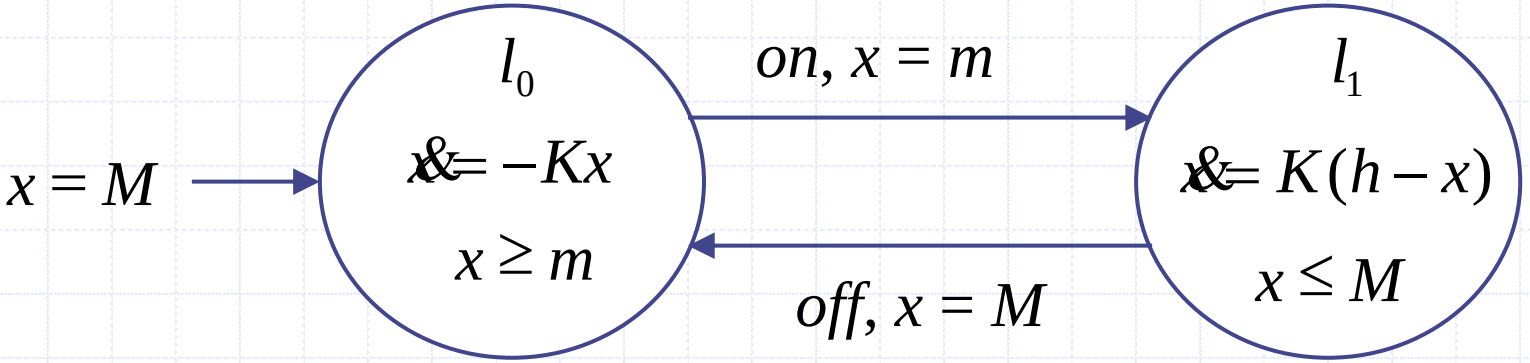


x: クロック

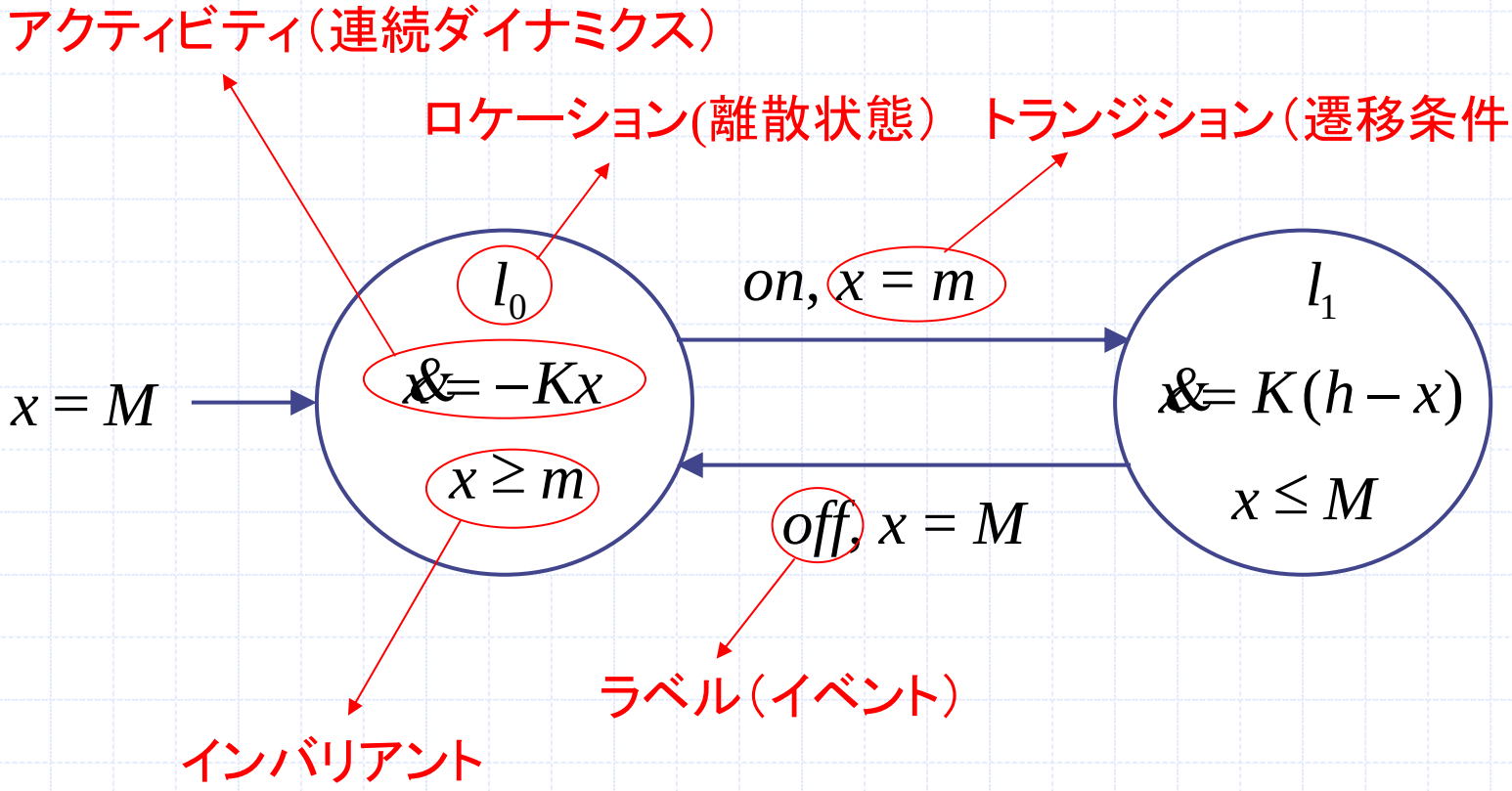


時間オートマトン

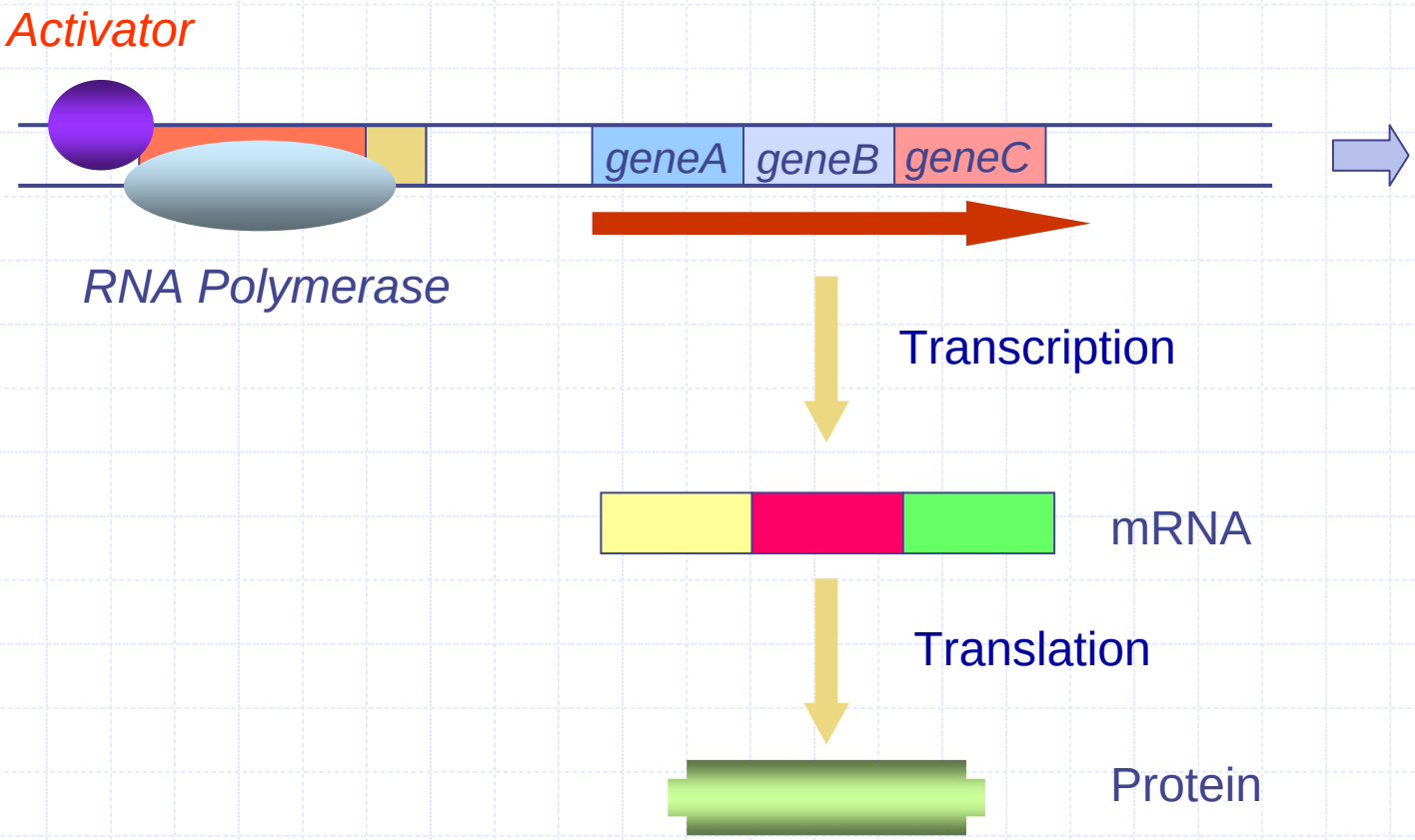
オートマトンからハイブリッドオートマトンへ



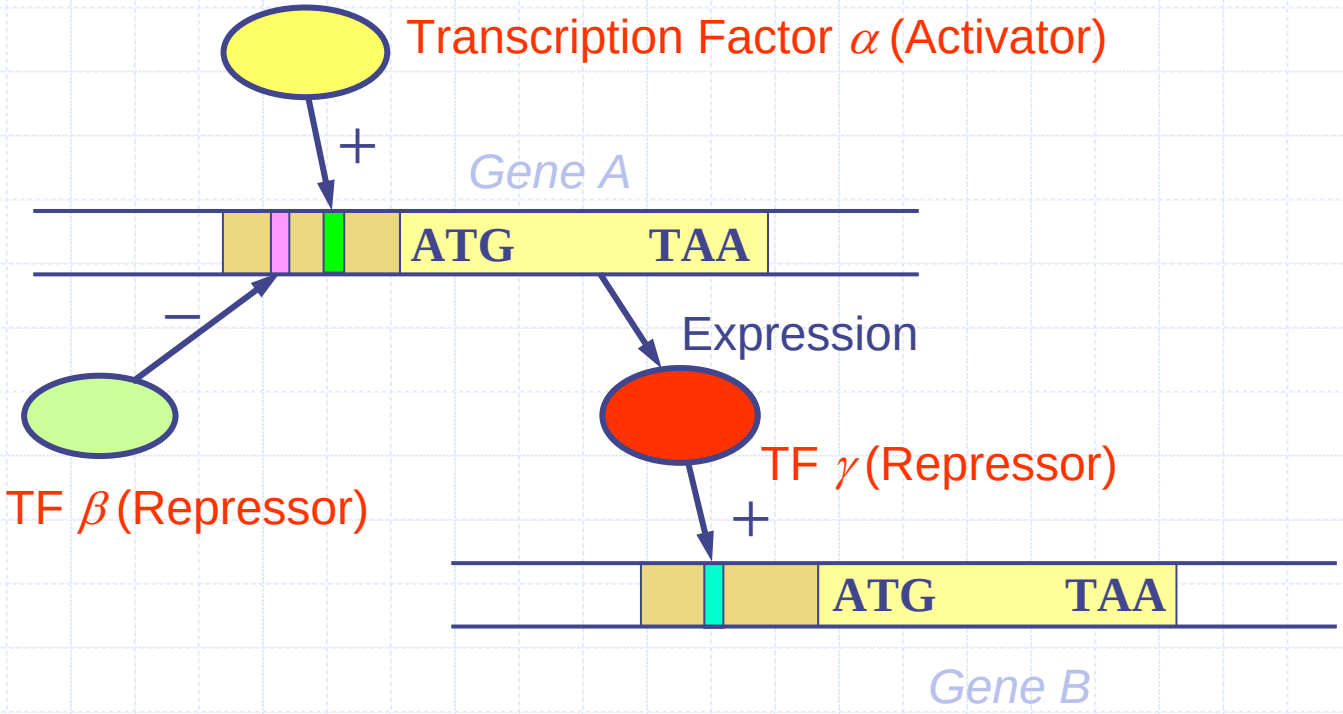
オートマトンからハイブリッドオートマトンへ



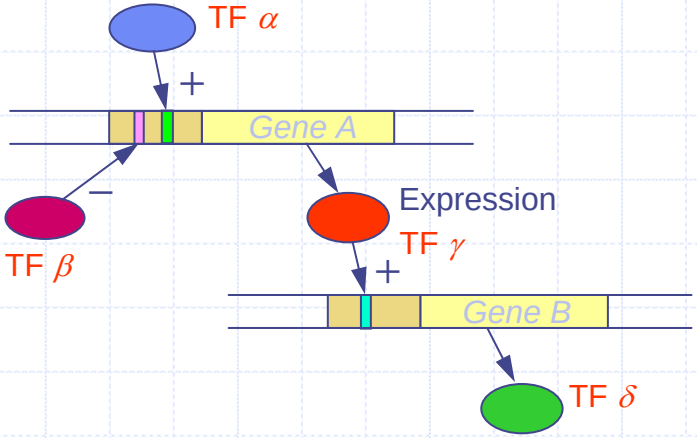
遺伝子発現

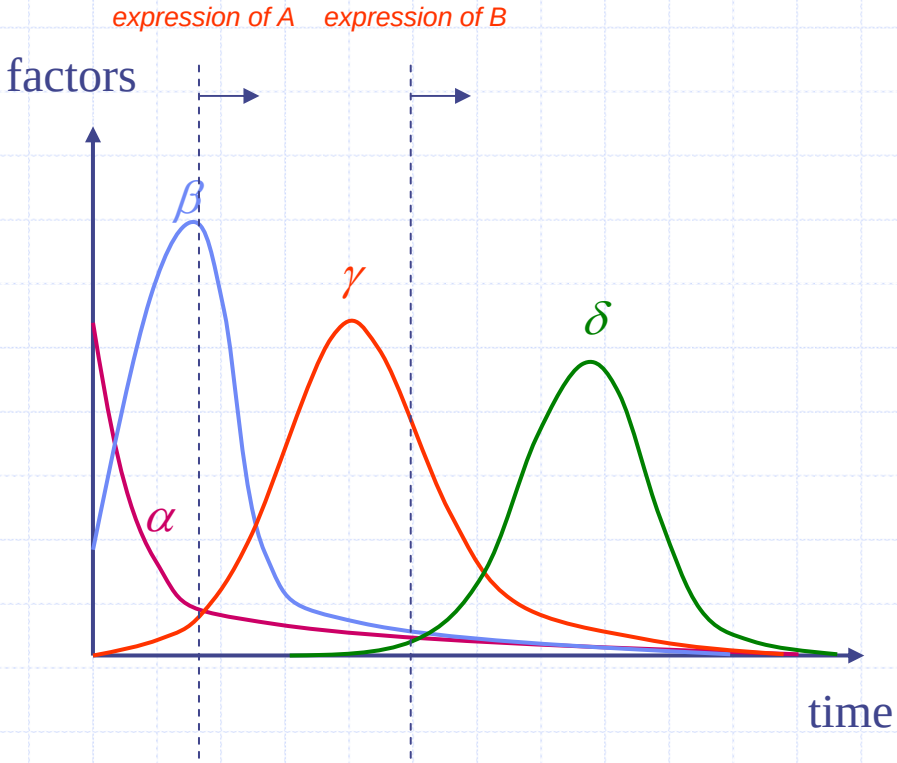

Activator
geneA
geneB
geneC
RNA Polymerase
Transcription
mRNA
Translation
Protein

遺伝子制御ネットワーク

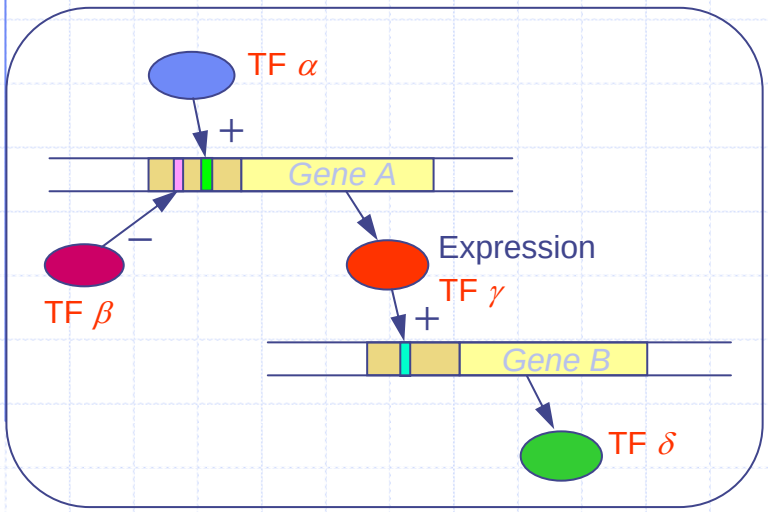


ハイブリッドシステムとしての遺伝子相互作用

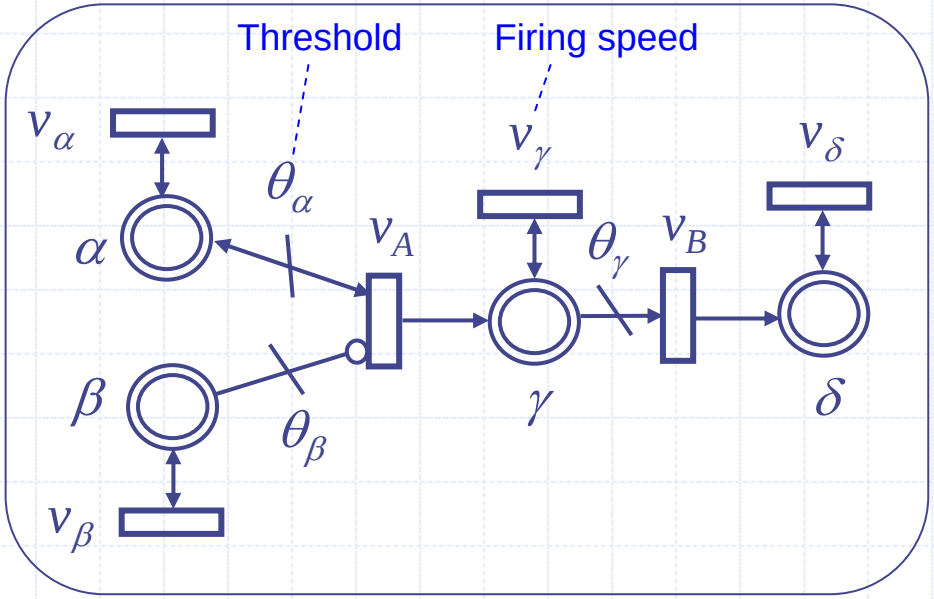




ハイブリッドシステムとしての遺伝子相互作用



Hybrid Petri net



ハイブリッドシステムー2つの流れ

- 計算機科学:リアルタイムシステムの一般化
- システム制御理論:モード切替を有する連続システム
  (例:区分的線形システム，非線形システムを線形システムの切り替えで近似など)

区分的線形システム

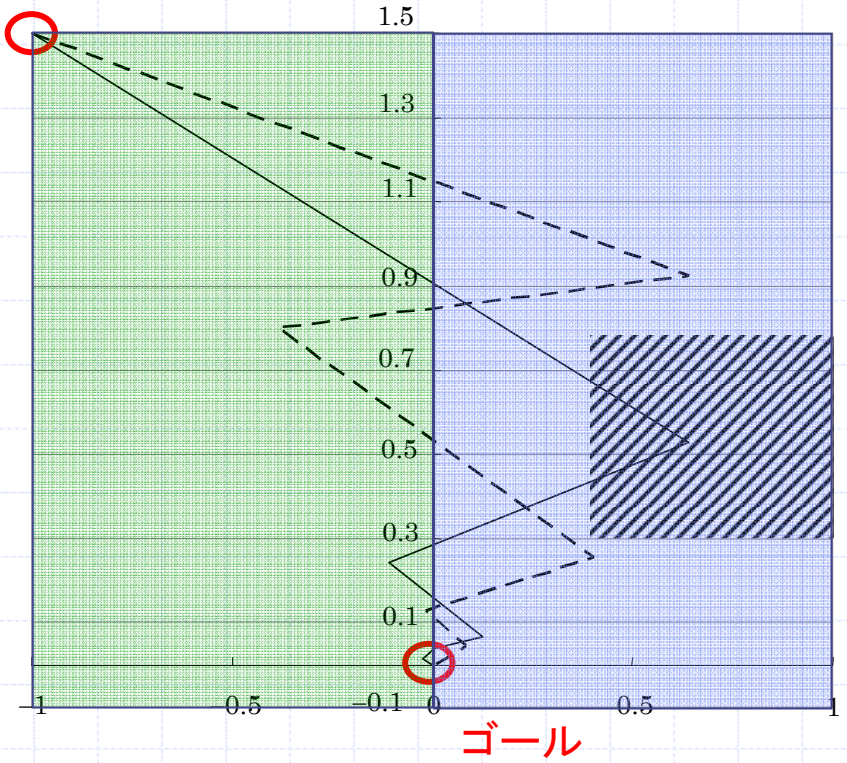
$$x(t+1) = 0.8\begin{bmatrix}\cos\alpha(t) & -\sin\alpha(t)\\ \sin\alpha(t) & \cos\alpha(t)\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

$$\alpha(t) = \begin{cases}\pi/3 & \text{if } \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t) \geq 0\\ -\pi/3 & \text{if } \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t) < 0\end{cases}$$

モード切替

スタート



ゴール

最適制御問題

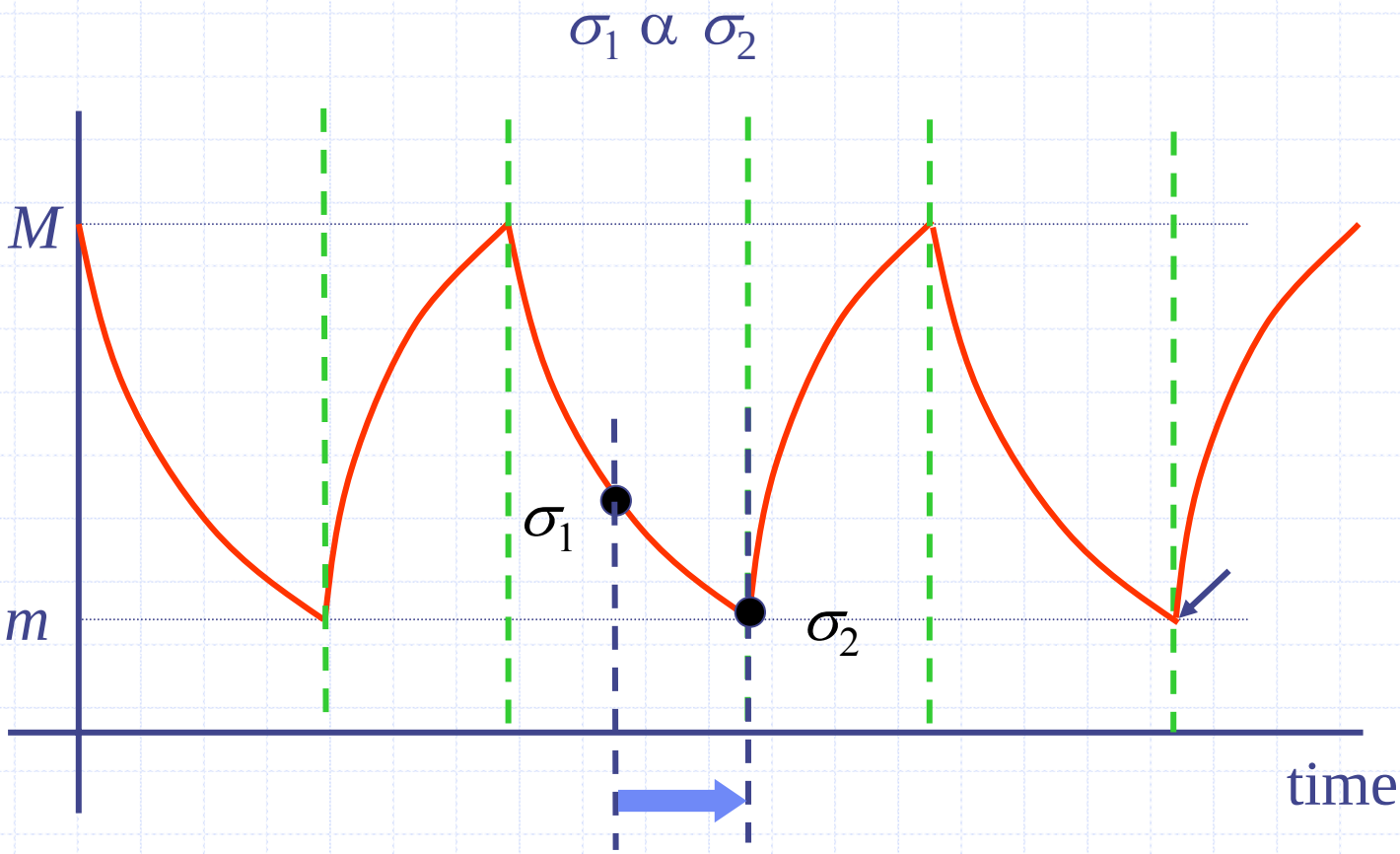
内容

- オートマトンからハイブリッドオートマトンへ
- ハイブリッドオートマトンに対するモデル検査
- 離散状態に対する流体近似と保証付計算

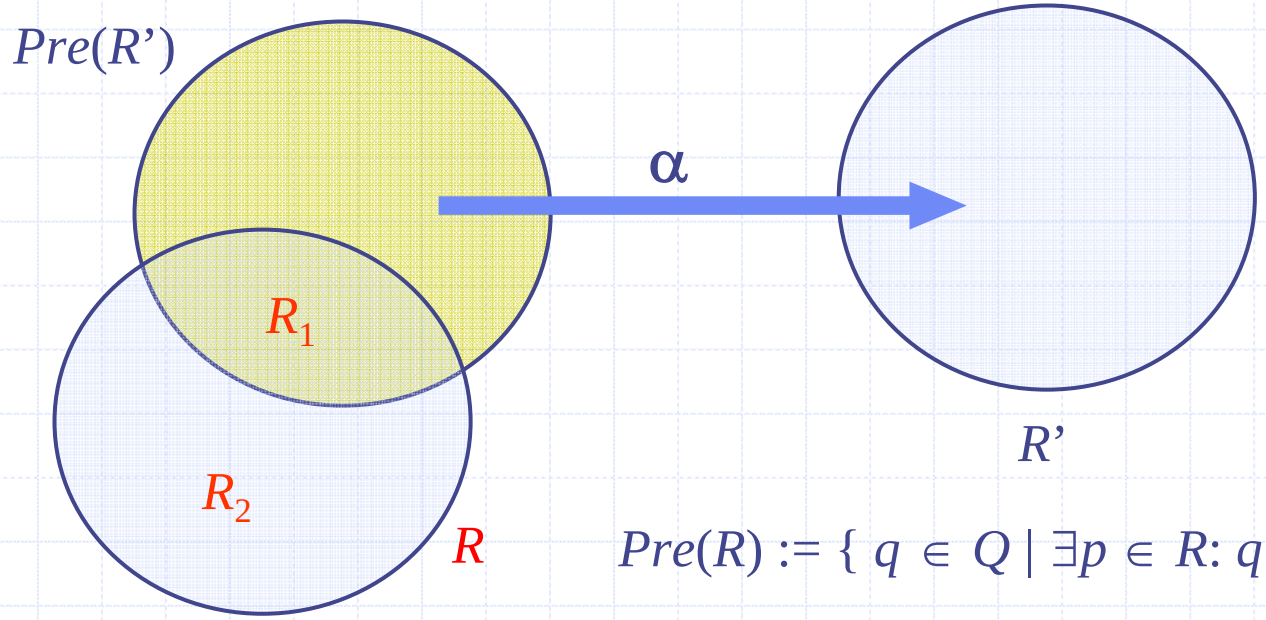
離散抽象化

- ハイブリッドオートマトンから作られるラベル付遷移システムは一般に非可算無限個の状態をもつ．また，1つの状態の次状態も一般に非可算無限個存在する．
- モデル検査アルゴリズムをハイブリッドオートマトンの検証に用いるために，状態集合を双模倣関係により分割し，離散状態のラベル付遷移システムに変換する（ただし，有限状態とは限らない）．

Next Relation α



双模倣分割



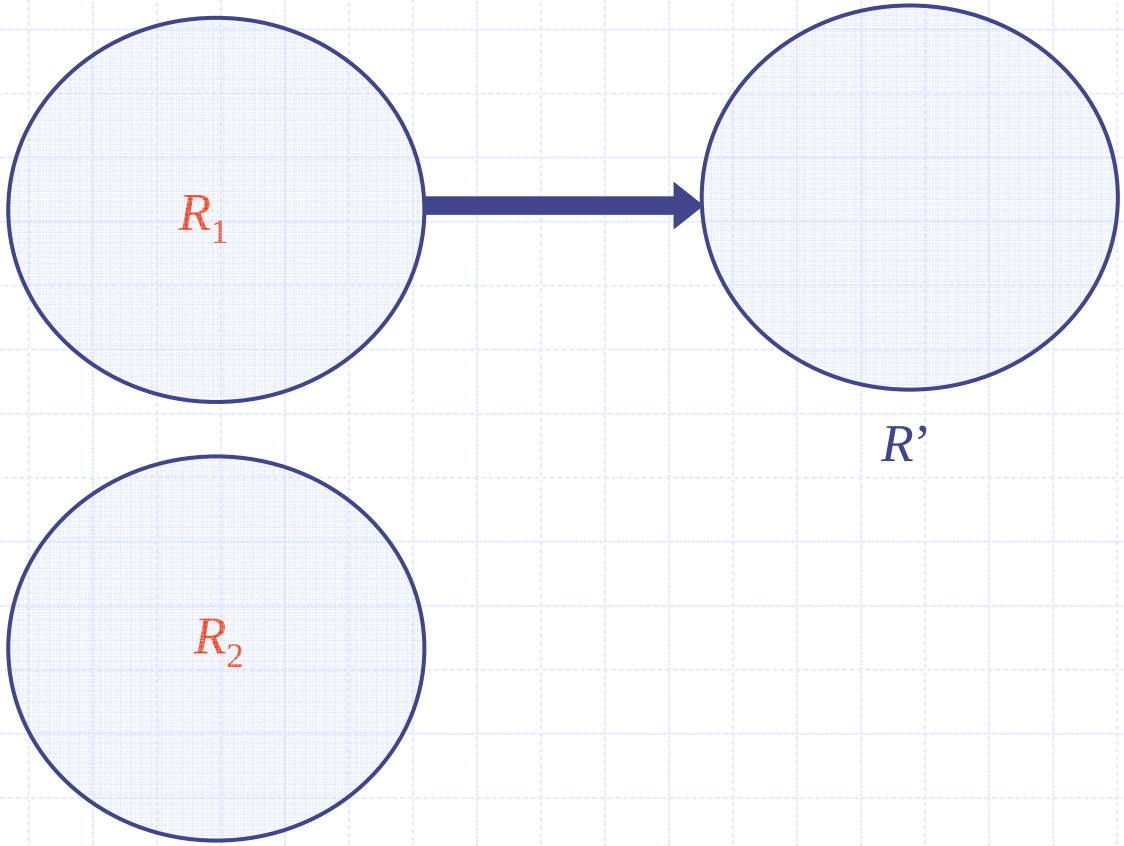
$Pre(R) := \{ q \in Q \mid \exists p \in R: q \, \alpha \, p \}$

領域 R を R_1 と R_2 に分割:

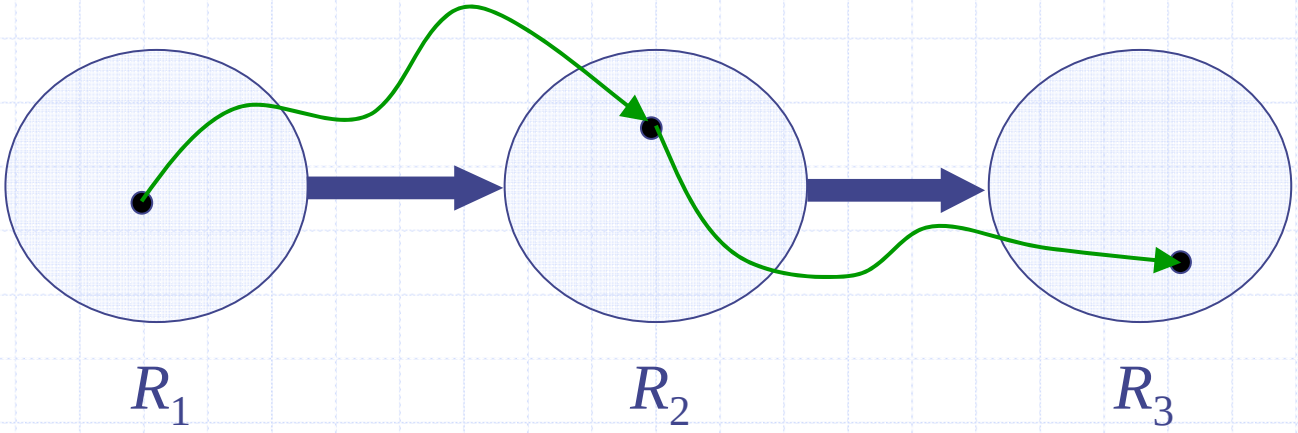
R_1 の任意の状態から R' に行ける.

R_2 のどの状態からも R' に行けない.

双模倣分割

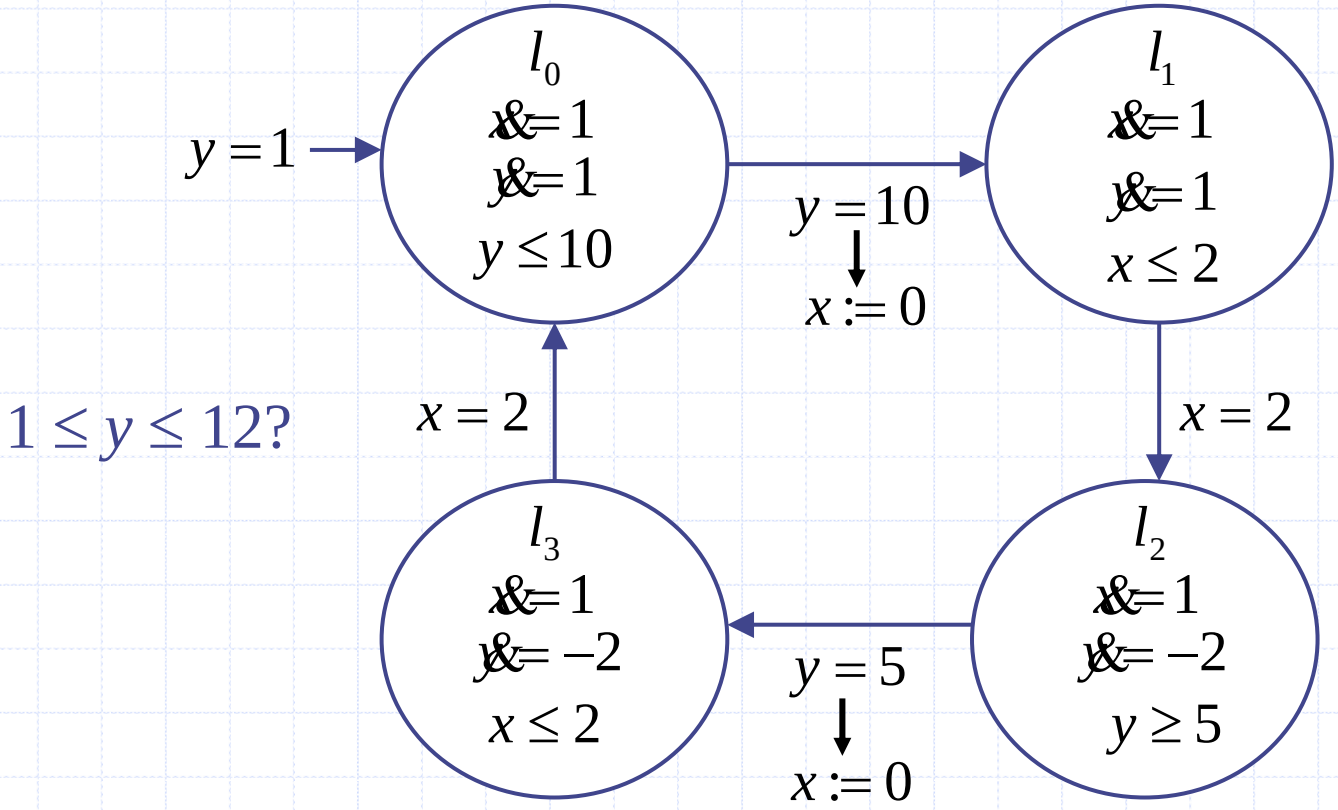


双模倣分割

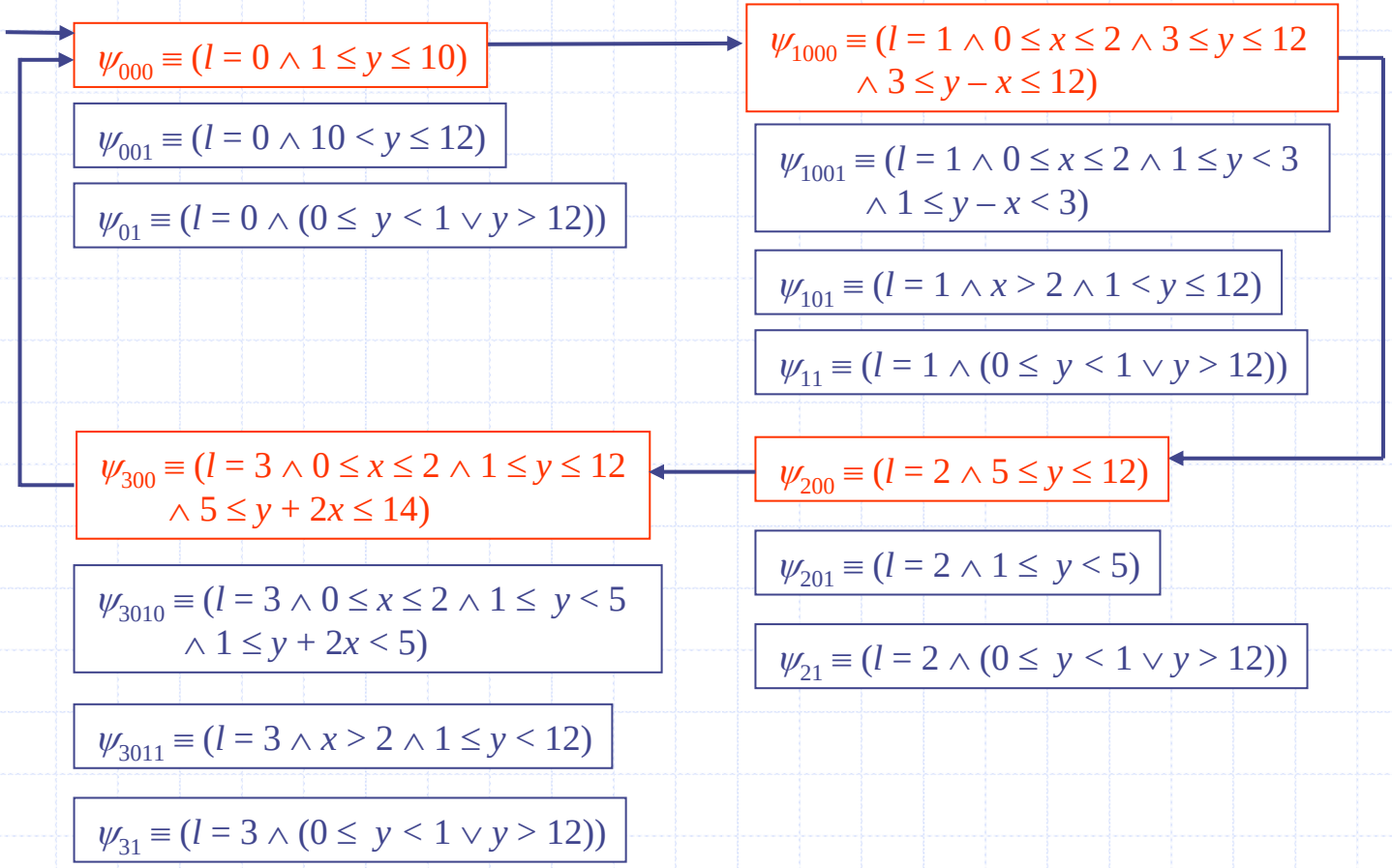


離散状態系列の存在→実行可能トレースの存在

双模倣分割の例


l_0
$\dot{x} = 1$
$\dot{y} = 1$
$y \le 10$
l_1
$\dot{x} = 1$
$\dot{y} = 1$
$x \le 2$
l_2
$\dot{x} = 1$
$\dot{y} = -2$
$y \ge 5$
l_3
$\dot{x} = 1$
$\dot{y} = -2$
$x \le 2$
$y = 1$
$y = 10$
$x := 0$
$x = 2$
$y = 5$
$x := 0$
$x = 2$
$1 \le y \le 12?$

双模倣分割の例


$\psi_{000} \equiv (l = 0 \wedge 1 \le y \le 10)$
$\psi_{001} \equiv (l = 0 \wedge 10 < y \le 12)$
$\psi_{01} \equiv (l = 0 \wedge (0 \le y < 1 \vee y > 12))$
$\psi_{1000} \equiv (l = 1 \wedge 0 \le x \le 2 \wedge 3 \le y \le 12 \wedge 3 \le y - x \le 12)$
$\psi_{1001} \equiv (l = 1 \wedge 0 \le x \le 2 \wedge 1 \le y < 3 \wedge 1 \le y - x < 3)$
$\psi_{101} \equiv (l = 1 \wedge x > 2 \wedge 1 < y \le 12)$
$\psi_{11} \equiv (l = 1 \wedge (0 \le y < 1 \vee y > 12))$
$\psi_{200} \equiv (l = 2 \wedge 5 \le y \le 12)$
$\psi_{201} \equiv (l = 2 \wedge 1 \le y < 5)$
$\psi_{21} \equiv (l = 2 \wedge (0 \le y < 1 \vee y > 12))$
$\psi_{300} \equiv (l = 3 \wedge 0 \le x \le 2 \wedge 1 \le y \le 12 \wedge 5 \le y + 2x \le 14)$
$\psi_{3010} \equiv (l = 3 \wedge 0 \le x \le 2 \wedge 1 \le y < 5 \wedge 1 \le y + 2x < 5)$
$\psi_{3011} \equiv (l = 3 \wedge x > 2 \wedge 1 \le y < 12)$
$\psi_{31} \equiv (l = 3 \wedge (0 \le y < 1 \vee y > 12))$

問題の困難さ

- 同値類が有限個であるような双模倣が存在するとは限らない. したがって, 双模倣分割の停止性は保証されない.
- 計算方法:数式処理(Quantifier Eliminationなど), 凸多面体操作アルゴリズム.
- 非線形ダイナミクスの取り扱い.

ハイブリッドシステムのモデル検査ツール

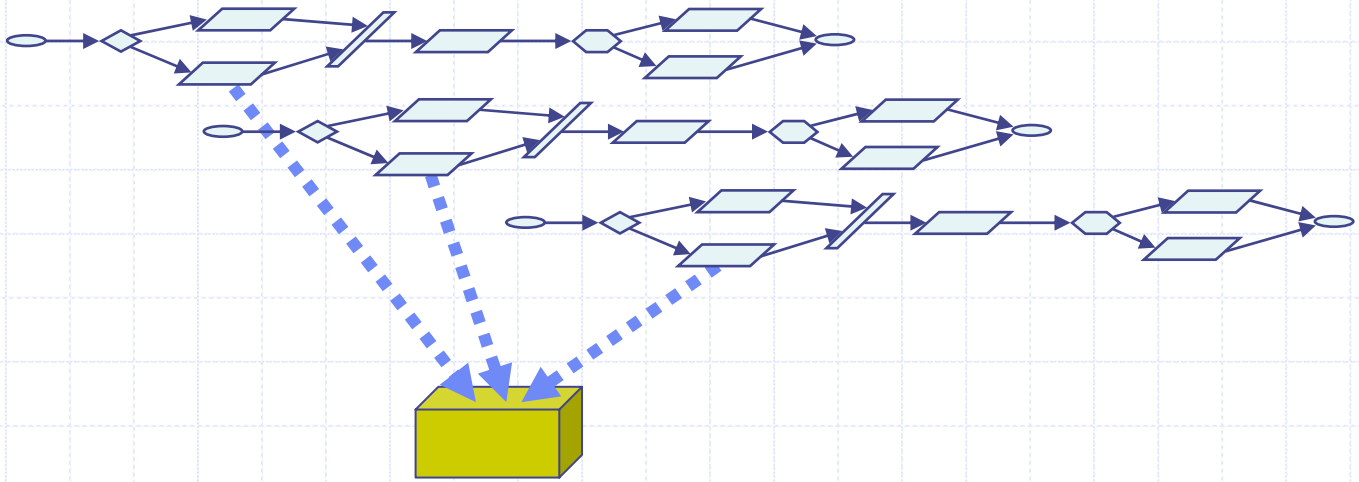
- HyTech (http://www-cad.eecs.berkeley.edu/~tah/HyTech/)
- UPPAAL (http://www.uppaal.com/)
- KRONOS (http://www-verimag.imag.fr/TEMPORISE/kronos/)
- CheckMate
- d/dt (http://www-verimag.imag.fr/~tdang/ddt.html)

内容

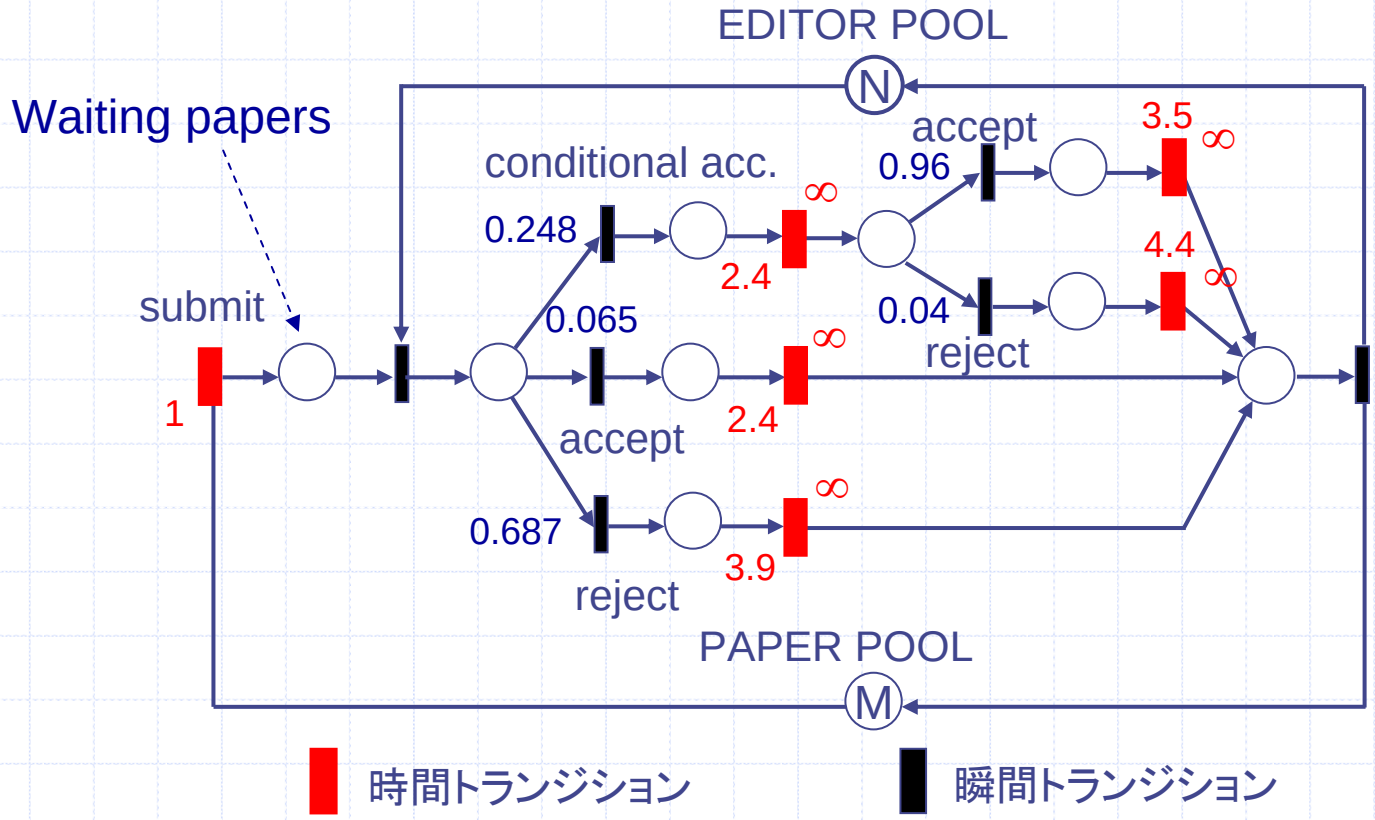
- オートマトンからハイブリッドオートマトンへ
- ハイブリッドオートマトンに対するモデル検査
- 離散状態の流体近似と保証付計算

ワークフローの性能評価

- 多くのインスタンスが同時に走る.
- 十分な量の資源を配分する必要がある.
- 定量的に求める手法は？

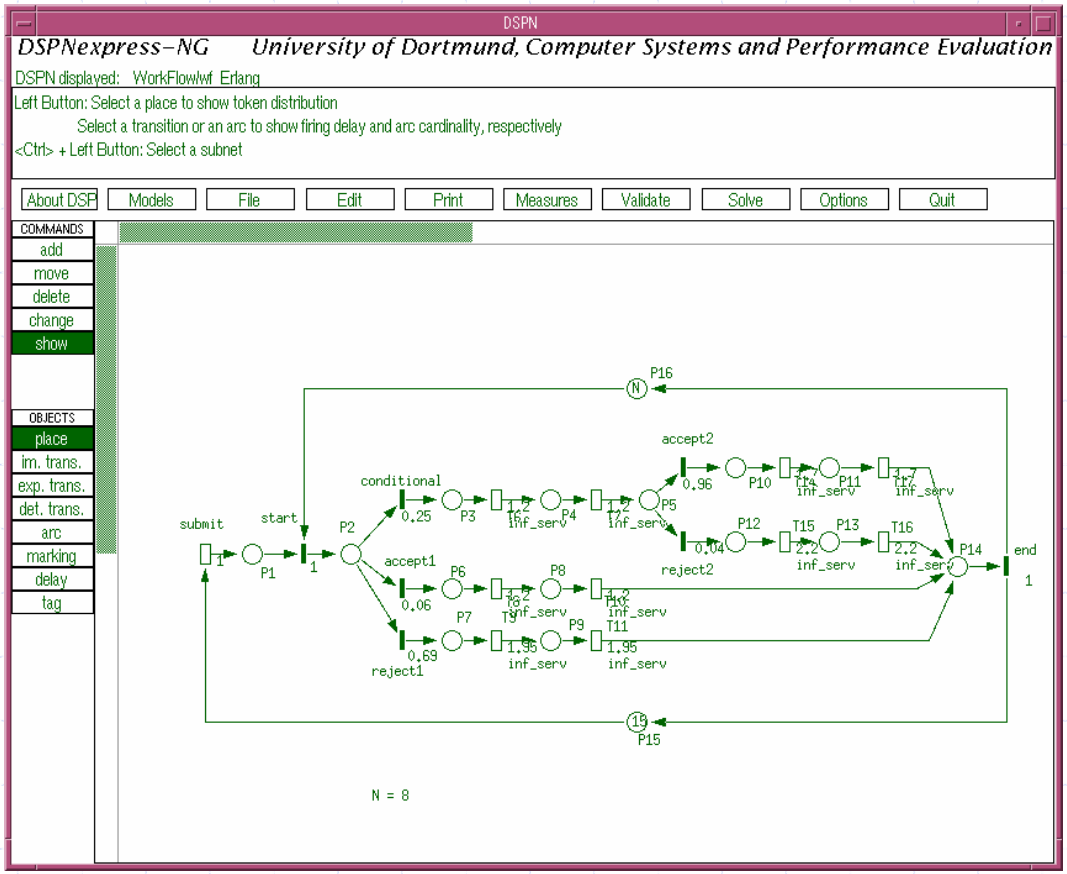


確率モデル



論文査読プロセスのGSPN(一般化確率ペトリネット)によるモデル化

ツール(DSPNExpress)

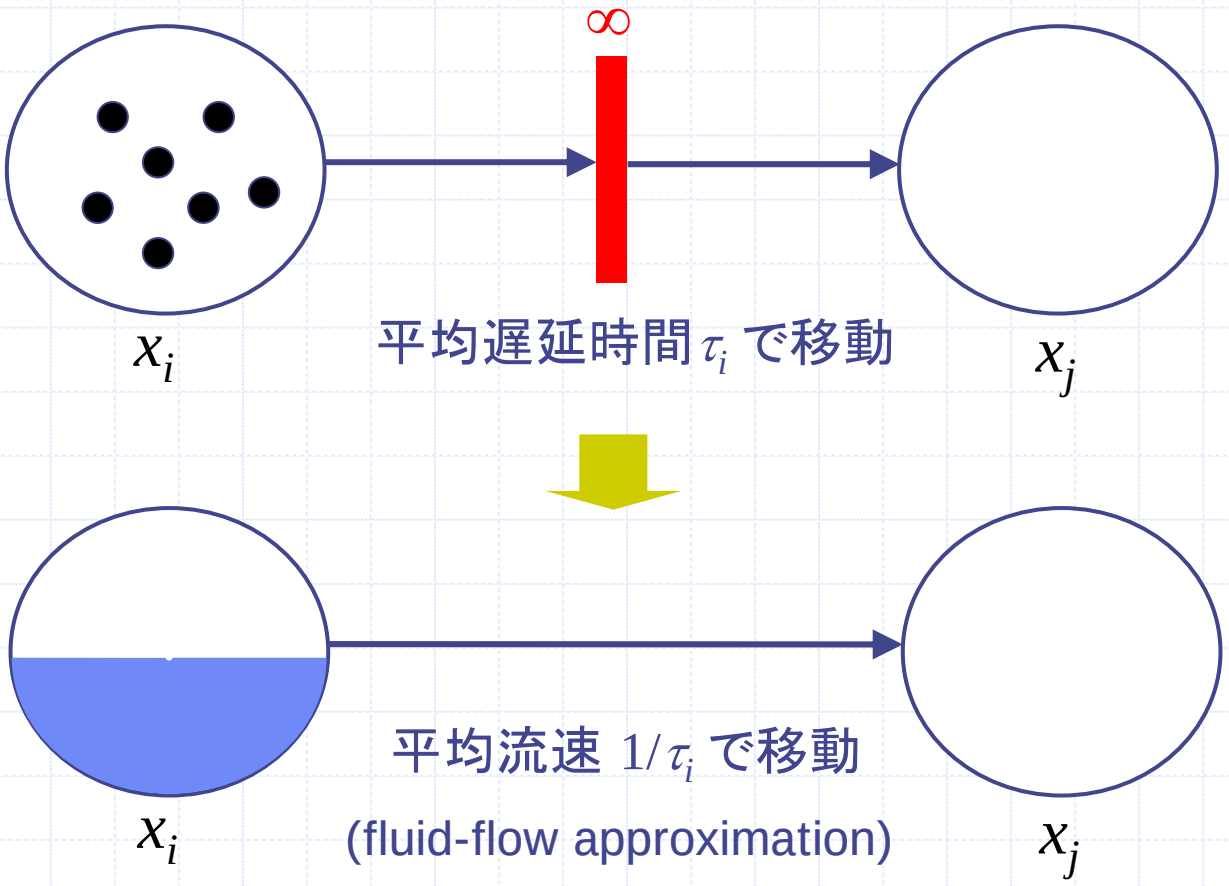


計算結果

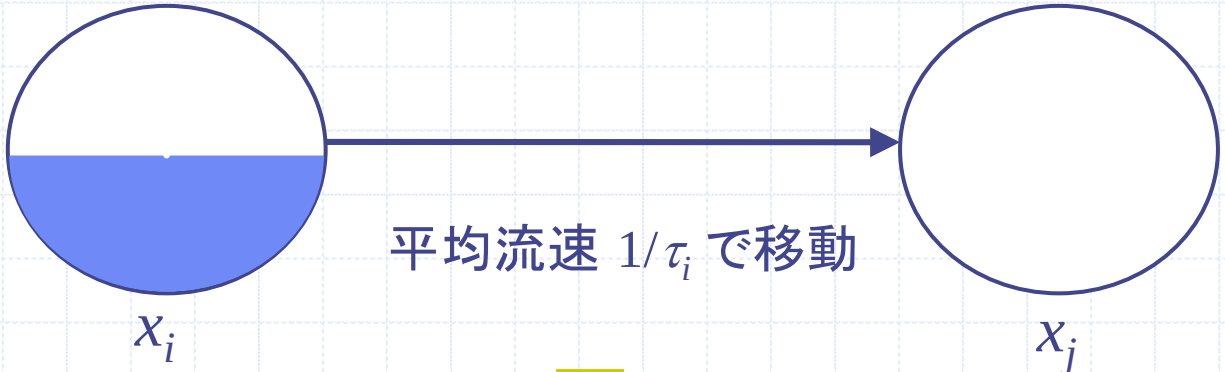
N	#states	CPU Time (sec.)	#Waiting papers	p(#paper pool = 0)
3	2926	0.3	10.18	0.30
4	8866	0.7	5.94	0.094
5	23023	2.3	1.99	0.013
6	53053	6.2	0.63	0.0021
7	110968	15	0.21	0.00049
8	213928	29	0.08	0.00020
9	384098	58	0.03	0.00010

Itanium2 1.6GHz/9MBCache, 16GB Memory

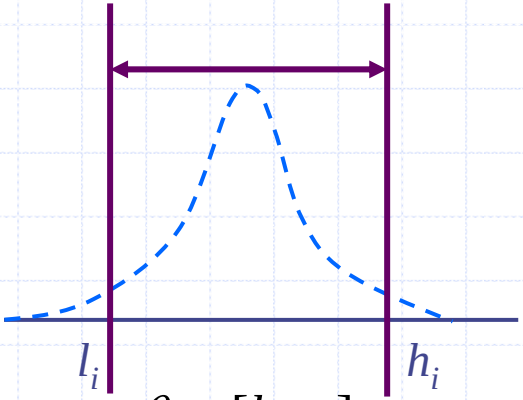
離散状態遷移の流体近似



離散状態遷移の流体近似

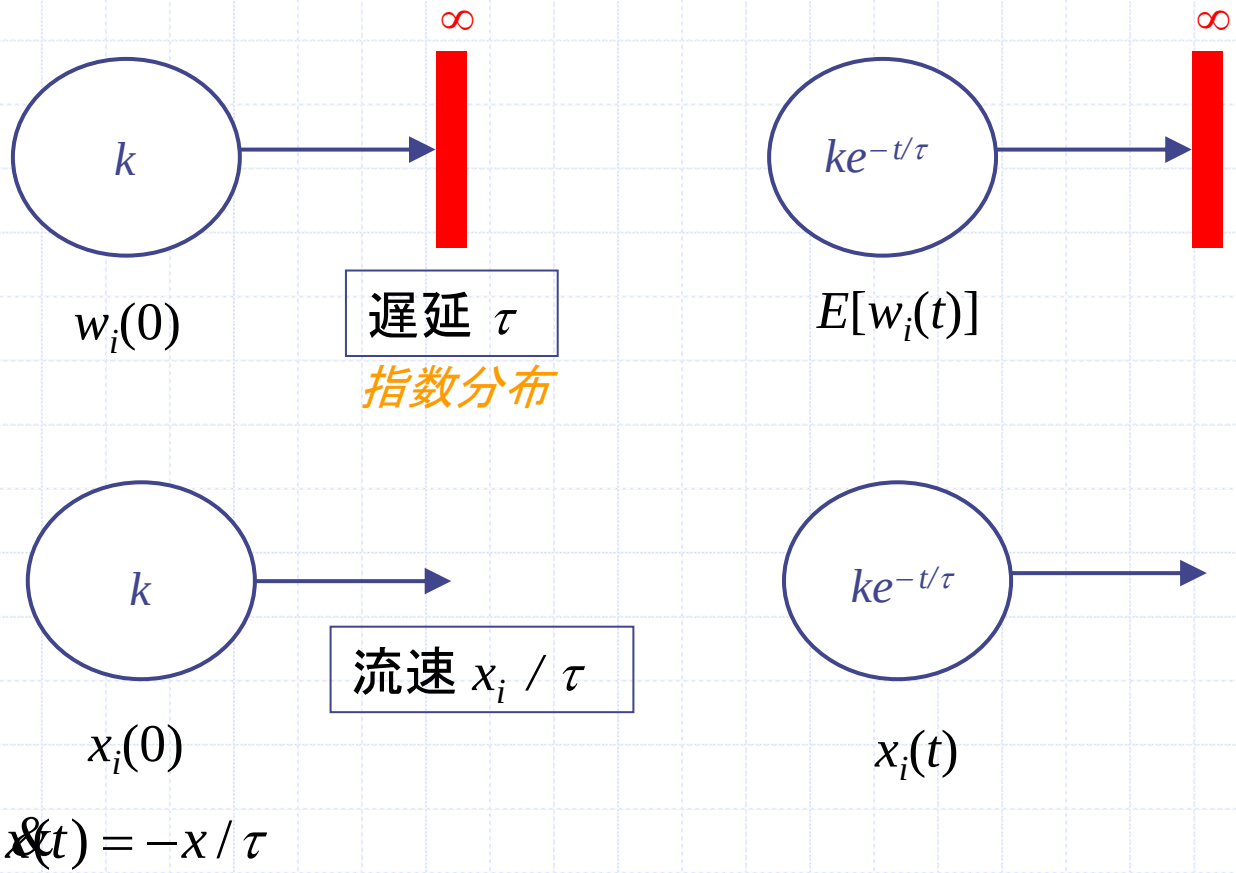


$$\dot{x}_i = \theta_i x_i / \tau_i$$

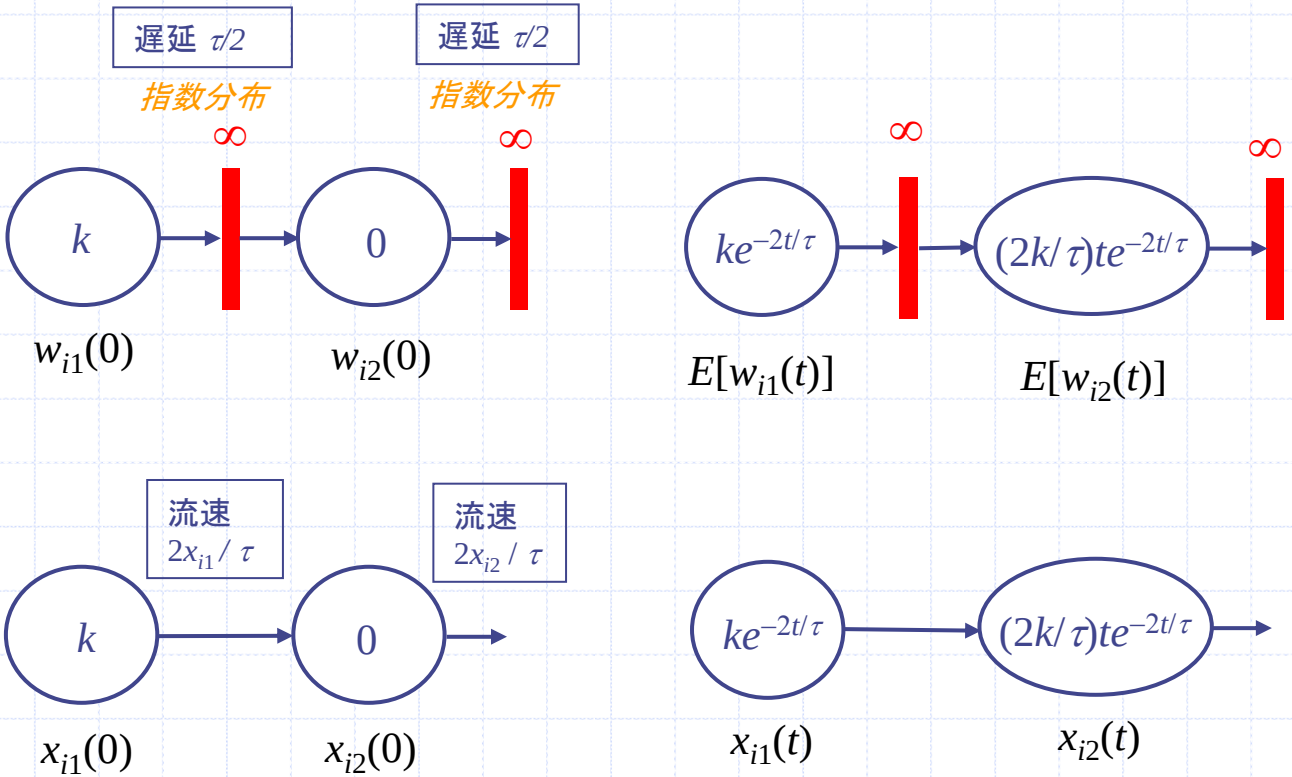


$\theta_i = [l_i, u_i]$

期待値の保存（指数分布）

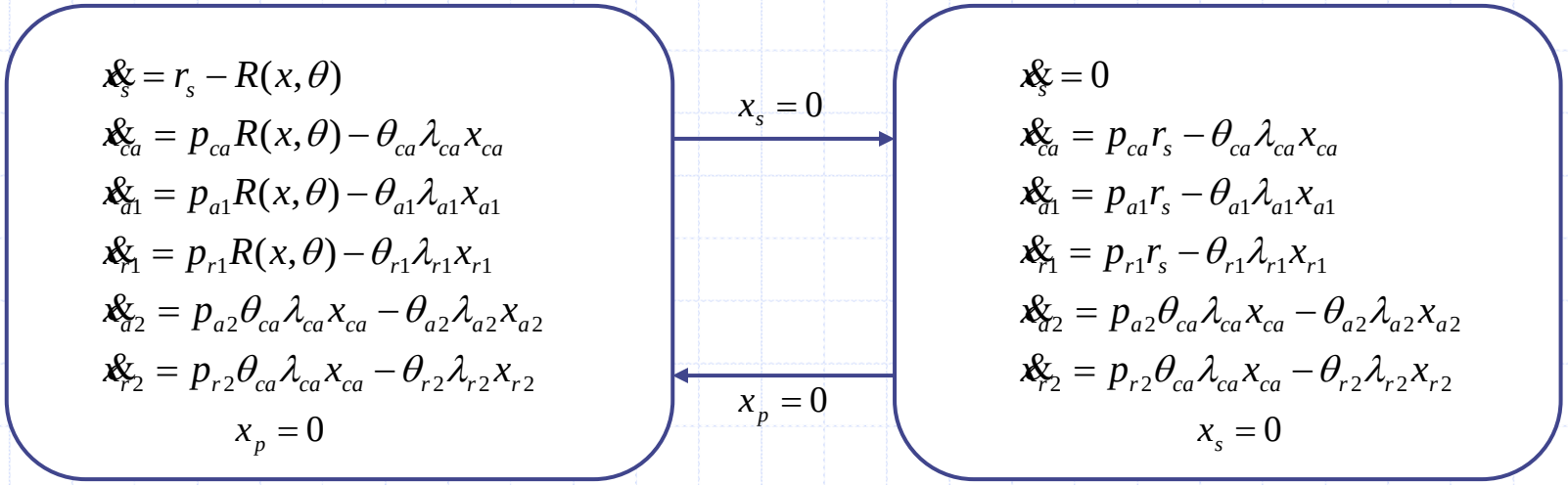

∞
k
$w_i(0)$
遅延 τ
指数分布
∞
$ke^{-t/\tau}$
$E[w_i(t)]$
k
流速 x_i / τ
$x_i(0)$
$\dot{x}(t) = -x / \tau$
$ke^{-t/\tau}$
$x_i(t)$

期待値の保存（アーラン分布）



$$\dot{x}_{i1}(t) = -2x_{i1}/\tau$$
$$\dot{x}_{i2}(t) = 2x_{i1}/\tau - 2x_{i2}/\tau,$$

ハイブリッドオートマトン表現



$$x_p = N - x_c - x_{a1} - x_{r1} - x_{a2} - x_{r2}$$

$$x_i \geq 0$$

$$R(x,\theta) = \theta_{a1}\lambda_{a1}x_{a1} + \theta_{r1}\lambda_{r1}x_{r1} + \theta_{a2}\lambda_{a2}x_{a2} + \theta_{r2}\lambda_{r2}x_{r2}$$

到達可能性の判定

- ふるまいの計算：数値解析法（離散時間表現による逐次計算）.
- パラメータ θ_i の存在⇒各時点における可能な状態は集合.
- 保証付き計算：インターバル近似法－真の値の範囲の upper approximation

インターバル近似法

常微分方程式

$$\dot{x} = f(x),\ x(0) = x_0$$

Taylor展開による状態の逐次計算

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + hf^{(0)}(x(t_k),\theta) + e(x(\xi),\theta) \quad (h = t_{k+1} - t_k,\ t_k \le \xi \le t_{k+1})$$

エラー項

Bounding Boxによるエラー項の見積り

$$e(x(\xi),\theta) \subseteq [e_k] = \frac{h^2}{2!} f^{(1)}([B_k],[\theta]) \qquad [B_k]: \forall t_k \le t \le t_{k+1}.\ x(t) \in [B_k]$$

インターバル近似法

Bounding Boxの計算：Picard operator

$$\Phi([B_k]) := [x_k] + [0,h] \cdot f([B_k],[\theta]) \subseteq [B_k]$$
$$\Rightarrow \forall t_k \le t \le t_{k+1}.\ x(t) \in [B_k].$$

インターバル近似（1階）

$$[x(t_{k+1})] = [x(t_k)] + hf^{(0)}(x,\theta) + [e_k]$$

$x(t_k) \in [x(t_k)] \Rightarrow x(t_{k+1}) \in [x(t_{k+1})]$

真の値を含むインターバルの計算が可能（upper approximation)

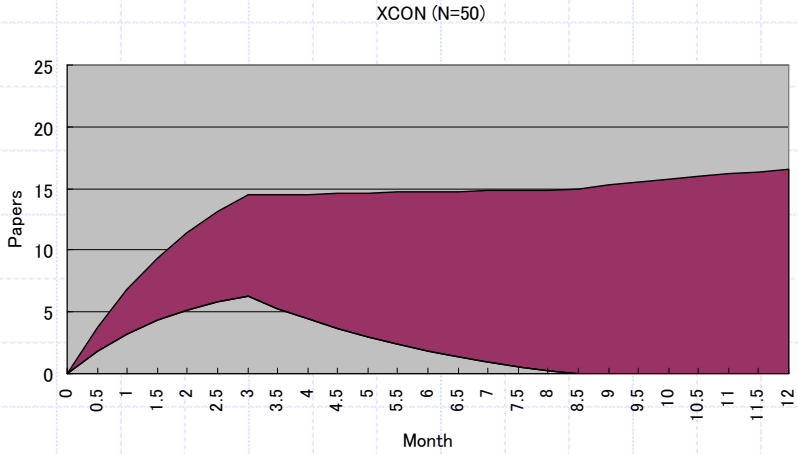
拡張と実装

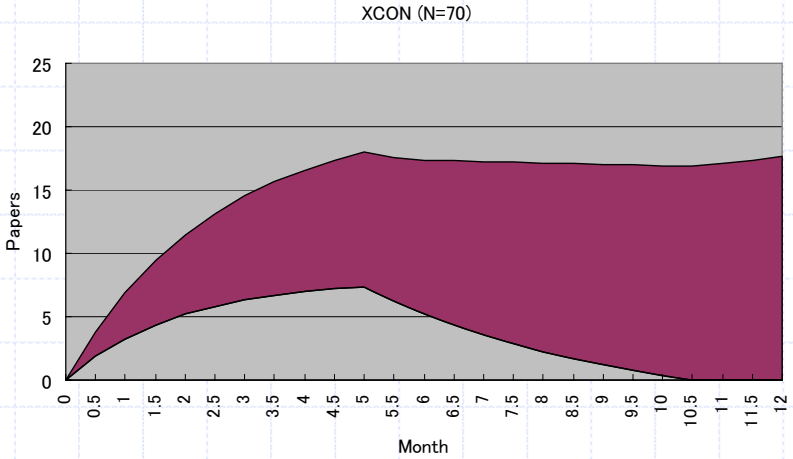
- インターバル近似法をモード切り替えを含むハイブリッドシステムに拡張.
- 各時点の状態集合をインターバルではなく, システムインバリアントを用いた凸多面体により近似.
- 近似精度が良いpiecewiseインターバル近似を採用.
- 計算ツールKCLP-HS上に実装.

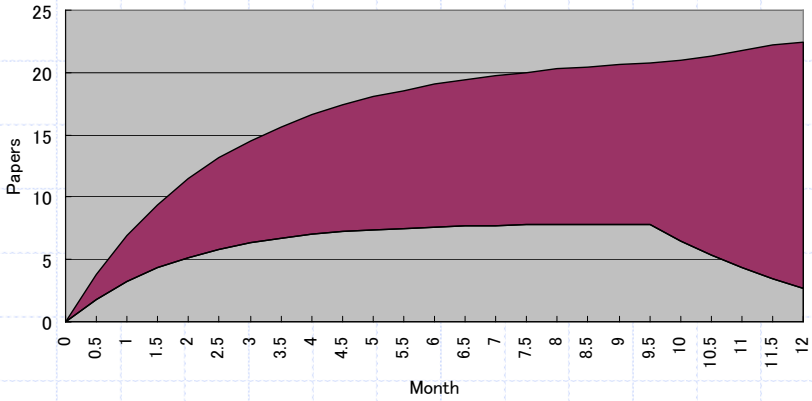
ツール

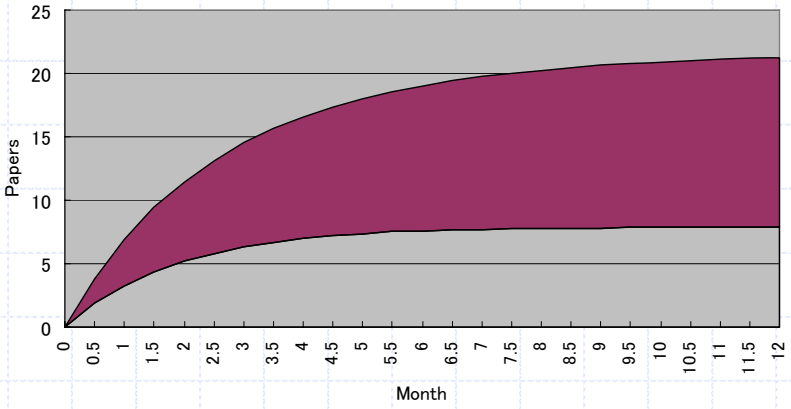
- 制約充足に基づいた計算ツール
- KCLP-HS =Prolog Interpreter
  - + Linear Constraint Solver
  - + Quadratic Programming Solver
  - + Manipulation of Convex Polyhedra
  - + Interval Arithmetic

計算結果


XCON (N=50)
Papers
Month


XCON (N=70)
Papers
Month


XCON (N=100)
Papers
Month


XCON (N=130)
Papers
Month

流体＋インターバル近似の利点

- 線形計算のみ
- リソースの量に対するスケーラビリティ
- 保証付き計算法

まとめ－離散と連続の融合

- 計算機（離散）と実世界（連続）のインタラクション
- 自然界におけるハイブリッド動作（例：遺伝子発現）
- 流体近似：状態空間爆発へのブレークスルー？