Title	グループ意志決定におけるAHP重要度の感度係数を用いたトレードオフ分析支援法
Author(s)	加藤, 直孝; 平石, 邦彦; 國藤, 進
Citation	Technical memorandum (School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology), IS-TM-97-0001T: 1-7
Issue Date	1997-04-15
Type	Others
Text version	publisher
URL	http://hdl.handle.net/10119/8443
Rights	
Description	テクニカルメモランダム（北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科）

グループ意思決定における AHP 重要度の感度係数を用いたトレードオフ分析支援法

加藤 直孝　平石邦彦　國藤 進

April, 15 1997
IS-TM-97-0001T

School of Information Science
Japan Advanced Institute of Science and Technology, Hokuriku
Asahidai 1-1, Tatsunokuchi-machi
Nomi-gun, Ishikawa, 923-12, JAPAN
nkato@jaist.ac.jp

ISSN 0918-7561

グループ意思決定におけるＡＨＰ重要度の感度係数を用いたトレードオフ分析支援法

北陸先端科学技術大学院大学　加藤直孝
北陸先端科学技術大学院大学　平石邦彦
北陸先端科学技術大学院大学　國藤 進

1. まえがき

本報告では，グループ意思決定のプロセスで一般に発生するコンフリクト状態の解消を図るために用いるトレードオフ分析の一手法について提案する．グループ意思決定では，各参加者の意思決定テーマに対する視点 (立場や価値観に基づく考え方あるいは選好) を全員が把握し，互いに尊重しながら，妥協と自己主張を繰り返して合意形成を図ることが必要である．また合意形成プロセスの質 (合意結果に対する満足度，納得度) を高めることも重要である．参加者の合意形成を試みるには，まずそれぞれの参加者の価値観を明確に示し，それらを参加者間で共有化することで共通認識を形成する段階を踏む．しかし個人の持つ価値観は，立場，考え方あるいは信念により異なるうえに，定量的に的確に表現することは簡単ではない．本手法では，意思決定構造を形成する評価要因群に意思決定者が主観的判断に基づいて割り振る重要度 (重み付け) をその意思決定者の価値観を反映したものと定義する．そしてこの重要度情報を利用して，グループ間の交渉プロセスを重視した合意形成支援のためのコンフリクトの解消および妥協点の探索に関する分析方法について考察する．さらに合意形成への収束を早めるためのアイデアとして感度分析を応用したトレードオフ分析方法について述べる．

2. 重要度に基づく個人の選好および効用の表現

さまざまなグループ意思決定問題における合意形成を支援するためには，意思決定問題を構成する選好関係やある状況に対する意思決定者の満足度を数量化する必要がある．意思決定者の満足度を定量的に表したものは, 効用と呼ばれるが、これを定義し, 測定することは容易ではない．一方, システムズ・アプローチと主観的判断を組み合わせた意思決定法に AHP (Analytic Hierarchy Process)[1][2] がある．AHP は, 決定問題を階層的に整理し，あるレベルの要素間の一対比較を，その一つ上のレベルにある要素を評価基準として用いて行なう．そして階層全体，すなわち意思決定問題から見た代替案の評価は，各評価基準ごとに得られた優先度を合成することにより求まる．

AHP で得られる重要度は，評価者の価値観，具体的には評価基準間の選好関係を表すものであり，また効用を定量的に表現するための一つの尺度として利用可能と考えられる．そこで，AHP 評価構造を構成する評価要素群に割り振られる重要度の配分情報を以下では，視点と呼ぶことにする．

3. グループの重要度の算出方法

3.1. 従来の算出方法

一般にグループで用いられる AHP による重要度の算出方法を以下に簡単に示す．(詳細は付録Ａ：ＡＨＰの理論を参照)

1. 各参加者ごとに，評価項目間の一対比較値を入力する．
   参加者 $x(=1,2,\cdots,p)$ の注目している評価項目に従属する評価項目 $A_1^x, A_2^x, \cdots, A_n^x$ の一対比較値を a_{ij}^x(評価項目 A_i と A_j の一対比較値) とする．
2. 全ての参加者の評価項目のペアの一対比較値について幾何平均をとる．
   グループの一対比較値を a_{ij}^G とすると，
   $$a_{ij}^G = \sqrt[p]{\prod_{x=1}^{p} a_{ij}^x} \qquad (1)$$
   となる．
3. 求まったグループの評価項目間の一対比較値から固有値問題を解き評価項目の重要度 $(w_1^x, w_2^x, \cdots, w_n^x)$

を得る.

この方法は，幾何平均法 (GMM：Geometric Mean Method) と呼ばれる.

以下に，もうひとつのグループの重要度の算出方法を述べる.

1. 参加者 $x(=1,2,\cdots,p)$ の注目している評価項目に従属する評価項目 $A_1^x, A_2^x, \cdots, A_n^x$ についてAHP計算により算出された重要度を $(w_1^x, w_2^x, \cdots, w_n^x)$ とする.
   但し，それぞれの代替案の重要度は1で正規化されているものとする.
2. 注目している観点から見た評価項目の重要度を全参加者において算術平均をとり，これをグループにおけるその評価項目の重要度 w^G とする.

$$w^G = (\sum_{x=1}^{p} w_1^x/p, \sum_{x=1}^{p} w_2^x/p, \cdots, \sum_{x=1}^{p} w_n^x/p) \quad (2)$$

この方法は，ウエイト付き算術平均法 (Weighted Arithmetic Mean Method:WAMM) と呼ばれる。[3][4] 図1に概念図を示す.

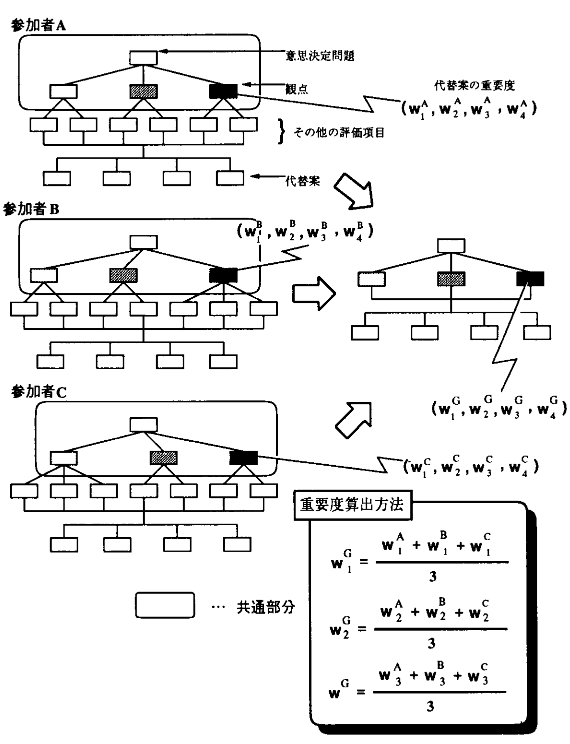

図 1: WAMMによる重要度算出方法

前者の方法が，評価項目間の一対比較値の幾何平均から評価項目のグループとしての重要度を得るのに対し，後者の重要度の算出法は，各参加者が入力した一対比較値から求まる評価項目の重要度の算術平均をグループとしての重要度としている.

本論文ではWAMMを採用しており，GMMに対するWAMMの利点を以下に示す.

- GMMは，パレート最適性公理を常に満足しないが，WAMMは満足している [4].
- GMMは，全参加者がすべての一対比較値を入力する必要があり，未決定の一対比較値を補完するHarker法 [5][6] を適用できないが，WAMMではそのまま利用できる.

3.2. 従来の算出方法の問題点

グループの中に両極端の意見を持つ参加者が存在する場合，あるいは各参加者の評価が分散している場合，全体の平均値を用いることは適切ではない場合がある [7]. 実際，グループ間で事前に評価構造について共通認識の徹底を図ったにもかかわらず，視点のばらつきは大きいことが報告されている [8]. またグループ意思決定プロセスの特性として，参加者個人の意思はもちろんグループ全体の意思の動きは刻一刻変化する. 言い換えれば，各参加者間のコミュニケーションによる相互作用が意思決定結果に大きく影響を与える. したがって，グループ意思決定にいたるまでの合意形成プロセスをより重視した支援方法の検討が必要である.

4. 重要度の感度係数を利用したトレードオフ分析

4.1. 基本概念と感度係数の算出方法

それぞれの参加者の視点は一般に異なるため，合意形成プロセスにおいて参加者間でコンフリクトが発生する. このコンフリクトを解消しようとするとトレードオフの分析が必要になる. また参加者単独においても一対比較の結果得られた重要度に対してトレードオフを意識したり，納得あるいは満足できない場合がある. この2つの場合に重要度の感度係数を用いたトレードオフ分析が有効と考えられる.

本章では，この一手法を提案する. 以下，参加者が三者以上の場合を想定する.

グループにおける合意形成プロセスにおいては，合意形成を行なう相手の間で交渉を行なわなければならない. 交渉の手順として，次の項目を考える.

1. 参加者各自が自分自身の AHP 評価を行なう.
2. AHP 評価構造をサブブロック化し，ブロック単位で合意形成を試みる.
3. 自分と他者との重要度の違いを観察して，他者それぞれに自分の要求を与える.
同様に，他者それぞれからの要求を受ける.
4. 他者からの要求に対して，自分の重要度を変更する. 但し，ここでは協調的問題解決に向けた歩みよりを前提とする.
5. 変更結果は，全員に提示される.
6. それぞれが変更した結果をそれぞれが参照し，両者が納得すれば 交渉が成立し，一人でも参加者が納得しなければ，交渉は不成立となる.

まず相手から提示された自分の視点に対する要求と自分の視点を形成する評価項目の重要度の感度係数を用いて，自分の評価構造の任意の階層レベルの任意の評価項目 kにおける式 (3) の値を算出する.

$$g_{ij}^{x}(y,k) = h^{x}(k)\hat{\boldsymbol{w}}_{ij}^{x}(k)\boldsymbol{S}^{x}(k)\boldsymbol{r}^{x}(y,k) \qquad (3)$$

ここで，$x, y \in G$（G : 参加者の集合）

- $h^{x}(k)\cdots$評価構造の任意レベルにある評価項目 k に参加者 x が与えた重要度スカラー
- $\boldsymbol{w}^{x}(k)\cdots$
評価項目 kに直属する n 個の評価項目の重要度ベクトル $(w_1^x(k), w_2^x(k), \cdots, w_n^x(k))$
- $\hat{\boldsymbol{w}}_{ij}^{x}(k)\ \left(= \partial \boldsymbol{w}^{x}(k)/\partial a_{ij}^{x}(k)\right)\cdots$
評価項目 kに直属する評価項目 i と評価項目 jにおいて参加者 x が一対比較値 $a_{ij}^{x}(k)$ を変更した場合の$\boldsymbol{w}^{x}(k)$ の変化の感度係数を表す n 次元行ベクトル [9](算出方法は付録B参照)
- $\boldsymbol{S}^{x}(k)\cdots$評価項目 kに直属する n 個の評価項目から見た参加者 x の代替案 (m 個) の重要度ベクトル $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \cdots, \boldsymbol{s}_n$を行方向に並べて構成される $n \times m$ 行列
- $\boldsymbol{r}^{x}(y,k)\cdots$参加者 yが参加者 x に評価項目 kから見た m 個の代替案の重要度に対して与える増減要求の強さを表す m 次元列ベクトル（$-1 \le r_i^x(y,k) \le 1$，0：要求無し，正：増，負：減）

図2に，評価構造のある部分における各変数の関係を示す. $\hat{\boldsymbol{w}}_{ij}^{x}(k)\boldsymbol{S}^{x}(k)$ は，評価項目 i と評価項目 jの一対比較値に関して，現在の値よりも評価項目 i を評価項目 jよりも重視した場合の代替案の重要度の変化量である. この変化量は，代替案の重要度が増加する方向に変化する場合には，正の値を示し，代替案の重要度が減少する方向に変化する場合には，負の値を示す. $\hat{\boldsymbol{w}}_{ij}^{x}(k)\boldsymbol{S}^{x}(k)$ に$\boldsymbol{r}^{x}(y,k)$ を掛け合わせることにより，$\boldsymbol{r}^{x}(y,k)$ で 1 を指定すれば，重要度を上げる方向に要求された代替案の重要度の変化量については加算され，-1 を指定すれば，重要度を下げる方向に要求された代替案の重要度の変化量については減算されることになる. また，0 を指定すれば，代替案の重要度の変化量を無視することになる. したがって，式 (3) は，注目している評価項目の重要度 $h^{x}(k)$ を掛けることによって，評価項目 i を評価項目 jよりも重視するように一対比較値を変化させた時に意思決定問題全体として相手の要求に満足する方向への変化量，すなわち相手に与える効用の度合を示すことになる.

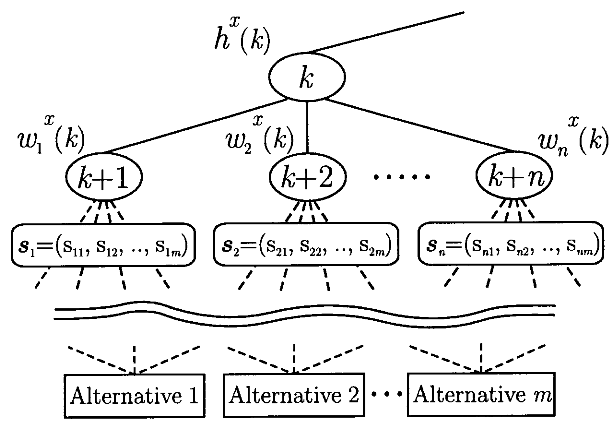

図 2: 評価構造における感度係数の算出

即ち，$g_{ij}^{x}(y,k)$ は，参加者 x が相手 yの要求に対して一対比較値 $a_{ij}^{x}(k)$ を変えた場合に相手 yに歩み寄る効果の度合を表し，正値は歩み寄りを，負値は反発を意味する.

図3に問題構造のサブブロックである観点1における相手からの要求を満たす方向に変化する一対比較ペアとその効用値を探索し、これを参考にして自分の一対比較値を変更するモデル図を示す。

4.2. 合意形成のプロトコル手順

ここでは，提案方法を用いて参加者がどのように合意形成を進めていき，またシステムがどのように参加者間の合意形成プロセスを支援するかについて説明する.

まず参加者 x は，今着目している共通の評価項目 k について相手 y (複数) に対して要求$\boldsymbol{r}^{y}(x,k)$ を提示し，

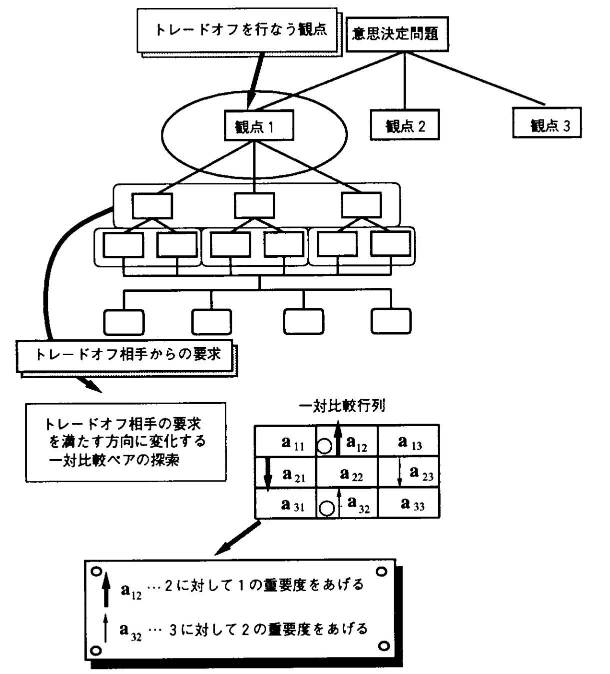

図 3: トレードオフ分析による重要度変更操作の概念

また y も x に対して同様に要求を提示する．この結果，参加者 x は相手 y から自分の代替案の評価値に対する要求 $r^x(y,k)$ をシステムを介して受け取る．システムは，それぞれの相手 y ごとに評価項目 k から見た $g_{ij}^x(y,k)$ を算出して，この値の大きい順（相手の要求に歩み寄る効果が大きい順）に一対比較値の変更要求候補リストを参加者 x に提示する．これにより，参加者が相手に歩み寄るために変更可能な一対比較ペアの候補を探索する負担を低減させることが可能となる．参加者 x はこのリストを参考にして妥協可能な一対比較候補を選択し，一対比較値をシステムからのガイドを参考に変更する．この時，もし一対比較の判断に信念が持てないため，一対比較補完機能 (Harker 法) を利用して仮の一対比較値をシステムが整合性がとれるように与えた一対比較候補が存在した場合には，これらは妥協可能な一対比較候補として優先的にリストアップされる．そして，一対比較値の変更に伴い参加者 x の代替案の評価値は相手 y が提示した要求に沿う方向へ修正されることになる．

4.3. 特 徴

本方法の特徴は，相手の評価項目における重要度に直接要求を与えるのではなく，相手の代替案の重要度に対して要求を与えることで，評価構造を構成する全ての評価項目について $g_{ij}^x(y,k)$ を算出することにある．これにより，一対比較のレベルで他者とのコンフリクトの強弱関係の全体把握が可能となると同時に，他者との協調効果の高い一対比較の変更候補を絞り込むことが可能となり，トレードオフ分析のための有益な情報として得ることができる．さらにこのコンフリクト部分について一対比較の変更を行なった前後における全参加者の評価基準間の重要度の差分を求め，これをトレードオフ比を表す情報としてグラフ表示することで，トレードオフ分析のためのヒューリスティックな判断情報として利用することも可能となる．したがって，一対比較という判断の容易なレベルでトレードオフ分析が行なえ，かつ複雑な評価構造であるほど (一対比較の組合せが多いほど) 効果的な分析が行なえる方法といえる．

なお，ヒストリ機能およびアンドゥ/リドゥ機能を実現して，過去のトレードオフ操作の任意の段階まで戻って再び合意形成をやり直すことができるようにするために参加者のトレードオフ操作の履歴情報は蓄積しておく．

4.4. 合意形成の判断支援情報

4.4.1. 非合意度と不満度の定義

合意形成の判断支援情報として，視点の重要度の変移，非合意度および妥協度を視点の重要度のベクトル間距離により算出し全員に提示する．

式 (4) に評価項目 k における参加者 x の妥協度 $d(x,k)$, 式 (5) に評価項目 k における参加者 x と参加者 y の非合意度 $e(x,y,k)$ を定義する．$e(x,y,k)$ は他者との価値観の違いの大きさを表すものとも言え，合意形成を試みる評価項目の絞り込みの判断にも用いる．

$$d(x,k) \quad = \quad |c(x,k) - \hat{c}(x,k)| \tag{4}$$

$$e(x,y,k) \quad = \quad |c(x,k) - c(y,k)| \tag{5}$$

ここで $c(x,k)$ は，合意形成途中段階における参加者 x の評価項目 k に直属する評価項目間の重要度ベクトル，$\hat{c}(x,k)$ は，合意形成プロセスに入る直前の同重要度ベクトルである．参加者は，妥協度 $d(x,k)$ により他者との妥協の度合の違いを判断し，非合意度 $e(x,y,k)$ により他者との合意への収束度合を判断する．

また，式 (6) に評価要素 k におけるグループ全体の不満度 $d(k)$, 式 (7) に評価要素 k におけるグループ全体の非合意度 $e(k)$ を定義する．

$$d(k) = \sum_{x} |c(x,k) - \hat{c}(x,k)| \tag{6}$$

$$e(k) = \sum_{x,y \in G, x \neq y} |c(x,k) - c(y,k)| \tag{7}$$

さらに，参加者全員の評価構造全体における不満度 d^s は，

$$d^s = \sum_{x} |c(x) - \hat{c}(x)| \tag{8}$$

ここで $c(x)$ は，参加者 x の評価構造の最下位レベルの評価基準の重要度ベクトルである．

また参加者全員の評価構造全体に対する非合意形成度 e^s は，

$$e^s = \sum_{x} \sum_{y} |c(x) - c(y)|/2 \quad (y \neq x) \tag{9}$$

と定義する．

4.4.2. 代替案重要度による非合意度と不満度の定義

評価項目 k と同様に，評価項目 k から見た代替案の重要度ベクトル $a(x,k)$ を用いて，非合意度および妥協度を重要度のベクトル間距離により定義することができる．

評価項目 k における参加者 x の妥協度 $d_a(x,k)$

$$d_a(x,k) = |a(x,k) - \hat{a}(x,k)| \tag{10}$$

評価項目 k における参加者 x と参加者 y の非合意度 $e_a(x,y,k)$

$$e_a(x,y,k) = |a(x,k) - a(y,k)| \tag{11}$$

ここで $a(x,k)$ は，合意形成途中段階における参加者 x の評価項目 k から見た代替案の重要度ベクトル，$\hat{a}(x,k)$ は，合意形成プロセスに入る直前の同重要度ベクトルである．

表 1: レベル 1 (k=0) の重要度

評価基準	重要度	代替案	重要度
生命	0.227	神奈川県	0.326
安定性	0.539	静岡県	0.332
発展性	0.170	京都府	0.341
生きがい	0.064		

表 2: レベル 2 生命 (k=1) の重要度

評価基準	重要度	代替案	重要度 (s_{21})
健康	0.250	神奈川県	0.348
安全	0.750	静岡県	0.288
		京都府	0.363

5. 例題

例題として，各都道府県の行政課題である「住みやすさ」[10] について参加者間で候補に挙がった都道府県に合意のとれた順位付けを行なうテーマを想定する．

また AHP 評価構造における視点の違いのみが代替案評価に明確に反映されるように，評価項目からみた都道府県の重要度には，個人の一対比較による主観評価の代わりに客観的な統計データ [11] から算出した重要度を用いた．したがって，統計値自体が比較的分散が小さいため，代替案の重要度の分散も小さくなっている．評価構造の各レベルにおける重要度を表 1～表 6 のように仮定する．

この時レベル 1 の意思決定テーマ ($k=0$) に直属する評価基準 4 項目に関する感度係数は，表 7で与えられる．

相手 y から自分の代替案重要度に対して要求 $\boldsymbol{r}^x(y,0)$ =(-0.1,0.4,-0.5) がきたとする．この時，k=0 における $g^x_{ij}(y,0)$ の値は，表 2～表 5の $s_{21}, s_{22}, \cdots, s_{24}$ および表 7の $\frac{\partial w_n}{\partial a_{ij}}$ を用いて次式で得られる．なお意思決定テーマでの重要度は 1.0 であるから $h^x(0) = 1.0$ である．

$$g^x_{ij}(y,0) = h^x(0)\hat{\boldsymbol{w}}^x_{ij}(0)\boldsymbol{S}^x(0)\boldsymbol{r}^x(y,0) \tag{12}$$

表 3: レベル 2 安定性 (k=2) の重要度

評価基準	重要度	代替案	重要度 (s_{22})
就労	0.251	神奈川県	0.318
所得・消費	0.673	静岡県	0.345
家庭・福祉	0.075	京都府	0.336

表 4: レベル 2 発展性 (k=3) の重要度

評価基準	重要度	代替案	重要度 (s_{23})
学校教育	0.297	神奈川県	0.327
居住環境	0.540	静岡県	0.341
交通・通信	0.163	京都府	0.330

表 5: レベル 2 生きがい (k=4) の重要度

評価基準	重要度	代替案	重要度 (s_{24})
参加・連帯	0.143	神奈川県	0.317
文化・余暇	0.857	静岡県	0.351
		京都府	0.331

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial a_{ij}} & \frac{\partial w_2}{\partial a_{ij}} & \frac{\partial w_3}{\partial a_{ij}} & \frac{\partial w_4}{\partial a_{ij}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \\ s_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.4 \\ -0.5 \end{bmatrix} \tag{13}$$

ここで表 2～表 5から，

$$S^x(0) = \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \\ s_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.348 & 0.288 & 0.363 \\ 0.318 & 0.345 & 0.336 \\ 0.327 & 0.341 & 0.330 \\ 0.317 & 0.351 & 0.331 \end{bmatrix} \tag{14}$$

である．

以上から，意思決定テーマ (k=0) から見た代替案の重要度に対して，相手 yから受けた神奈川 -0.1，静岡 0.4，京都府 -0.5 の要求に対して評価基準 i を評価基準 jよりも重視した場合に，相手の要求にどの程度沿うかという変化量 $g^x_{ij}(y,0)$ を算出した値を表8に示す．同表で負の値は相手の要求に反発することを意味している．したがってこの表から相手の要求に沿う場合に最も効果の高い一対比較の変更候補は $g^x_{41}(= 7.0)$ で，生命よりも生きがいを重視することであることがわかる．また逆に最も相手の要求に反発する結果となる一対比較の変更候補は $g^x_{12}(= -12.0)$ で，生命を安定性よりも重視することであることがわかる．

表 6: レベル 3 の代替案重要度

評価基準	神奈川県	静岡県	京都府
健康	0.336	0.328	0.336
安全	0.352	0.275	0.373
就労	0.299	0.386	0.315
所得・消費	0.326	0.331	0.343
家庭・福祉	0.310	0.344	0.346
学校教育	0.298	0.360	0.341
居住環境	0.328	0.345	0.327
交通・通信	0.380	0.296	0.324
参加・連帯	0.305	0.357	0.338
文化・余暇	0.319	0.351	0.330

表 7: 参加者 x のレベル 1 の感度係数

a_{ij}	$\frac{\partial w_1}{\partial a_{ij}}$	$\frac{\partial w_2}{\partial a_{ij}}$	$\frac{\partial w_3}{\partial a_{ij}}$	$\frac{\partial w_4}{\partial a_{ij}}$
(1,1)	0.000	0.000	0.000	0.000
(1,2)	0.305	-0.428	0.096	0.027
(1,3)	0.029	-0.005	-0.022	-0.002
(1,4)	0.010	-0.001	-0.005	-0.004
(2,1)	-0.019	0.027	-0.006	-0.002
(2,2)	0.000	0.000	0.000	0.000
(2,3)	-0.009	0.026	-0.017	0.000
(2,4)	-0.004	0.013	-0.003	-0.005
(3,1)	-0.116	0.021	0.087	0.008
(3,2)	0.078	-0.236	0.156	0.003
(3,3)	0.000	0.000	0.000	0.000
(3,4)	-0.002	-0.006	0.012	-0.004
(4,1)	-0.165	0.018	0.076	0.070
(4,2)	0.099	-0.314	0.080	0.135
(4,3)	0.027	0.094	-0.184	0.062
(4,4)	0.000	0.000	0.000	0.000

同様の感度計算を任意の k(この例では k=0,1,2,3,4) について $g^x_{ij}(y,k)$ を求めることができる．すなわち，AHP 評価構造の任意のレベルの任意の評価基準において相手と自分の要求が一対比較レベルで明確に把握することが可能となる．さらに重要度の相違点について $g^x_{ij}(y,k)$ を参照しながら妥協可能な一対比較候補を絞り込み，さらにその一対比較値を変更して重要度を修正することで合意に向けた収束のプロセスを早めることが可能となる．

なお代替案に関しては，式 (3) において $n = m$ となり，$S^x(k)$ は単位行列とみなして算出する．

さらに$r^x(y,k)$ において $y = x$ とおくことで，自分自身の評価構造に要求を与えて，自己の評価に満足がいかない場合や評価の整合が取れていない場合における重要度の修正に役立てることができる．

表 8: 相手 y の要求に対するレベル 1 における感度

一対比較 a_{ij}	感度 $g_{ij}^{x}(y,0)$(x1000)
(1, 1)	0.0
(1, 2)	-12.0
(1, 3)	-1.2
(1, 4)	-0.4
(2, 1)	0.7
(2, 2)	0.0
(2, 3)	0.4
(2, 4)	0.1
(3, 1)	4.7
(3, 2)	-3.1
(3, 3)	0.0
(3, 4)	0.1
(4, 1)	7.0
(4, 2)	-3.3
(4, 3)	-0.7
(4, 4)	0.0

相手が複数人の場合は，$g_{ij}^{x}(y_A,k),\cdots,g_{ij}^{x}(y_p,k)$ をそれぞれの要求 $\boldsymbol{r}^{x}(y_A,k),\cdots,\boldsymbol{r}^{x}(y_p,k)$ から算出し，同時に参照できるようにする．

6. 関連研究

本方法の特徴は，AHP 重要度の感度係数を用いたトレードオフ分析にあるが，関連研究として以下のものがある．

- グループ MCDM 法を利用した研究
  例：日本的グループ意思決定支援方式 [12] 渡部ほか (1989)
  例： MEDIATOR(1987)
- 効用理論を利用した研究
  例：グループ意思決定における交渉シミュレーション 松村 (1994)
- 決定分析を利用した研究
  例：DECISIONMAKER(1986)

7. おわりに

本報告では，グループ意思決定支援における重要度の感度係数を用いたトレードオフ分析法を提案し，例題を用いてその有用性を示した．実際の有用性を確認するためには，提案方法を実装したシステムにより，多くの例題および多人数グループでの評価実験を重ねる必要がある．

参考文献

[1] 刀根薫: ゲーム感覚意思決定法-AHP 入門-, 日科技連出版社 (1986)

[2] 刀根薫, 眞鍋龍太郎 (編): 階層化意思決定法 AHP 事例集, 日科技連出版社 (1990)

[3] Yung-Chin Alex Tung: Group Decision Making using AHP, Anual meeting proceedings of the decision science institute, Vol.1993,No.Vol.2(1993)

[4] Ramanathan,R. and Ganesh,L.S.: Group Preference Aggregation Methods employed in AHP:An evaluation and an intrinsic process for deriving members' weightages, Decision Support System, Vol.8, 99-124(1992)

[5] Harker,P.T.: Alternative Modes of Questioning in the Analytic Hierarchy Process, Math. Modeling,9,353-360(1987)

[6] 不完全一対比較行列における AHP ウェイトの計算法, オペレーションズ・リサーチ, Vol.34, No.4, pp.169-172(1989)

[7] 高野伸栄, 今尚之, 加賀屋誠一, 佐藤馨一: AHP 算出クラスタリングに関する基礎 的研究, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会講演論文集, pp.84-86(1996)

[8] 八巻直一, 杉山学, 山田善靖, 加藤久仁明: グループ AHP を用いた人事評価に対する合意形成手法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会講演論文集, pp.218-219(1995)

[9] 増田達也: AHP における整合度および相対的重要度の感度係数, 電子情報通信学会論文誌 A Vol.J70-A, No.11, pp.1562-1567(1987)

[10] 新国民生活指標 (平成 4 年版), 経済企画庁国民生活局編 (1992)

[11] 地域経済総覧'96, 社会調査研究所 (1995)

[12] 渡部和雄: グループＭＣＤＭ法に基づく日本的意思決定支援方式, 情報処理学会情報システム研究会, 89-IS-25, pp.1-10(1989)

付録 A　AHP の理論

A.1　AHP

AHP[1] による重みの算出方法は、以下のようにして行なう. 項目 $A_1, A_2, \cdots, A_n$の重み $w_1, w_2, \cdots, w_n$を求めたいとする. ここで、項目 $A_1, A_2, \cdots, A_n$の重要性の一対比較を行なう. 重要性の尺度は、以下の通り.

一対比較値	意味
1	両方の項目が同じくらい重要 (equal importance)
3	前の項目の方が後ろよりやや重要 (weak importance)
5	前の項目の方が後ろよりかなり重要 (strong importance)
7	前の項目の方が後より非常に重要 (very strong importance)
9	前の項目の方が後より極めて重要 (absolute importance)
2,4,6,8	補間的に用いる
逆数	後ろの項目から前の項目を見た時に用いる

A_iの A_jに対する重要性a_{ij}を要素とした$A_1, A_2, \cdots, A_n$のペア比較マトリックス $A = [a_{ij}]$ が得られる.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

ただし、

$$a_{ij} = w_i/w_j$$

$$\begin{aligned} a_{ji} &= 1/a_{ij} \\ w &= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\ i,j &= 1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

ここで、ペア比較マトリックス A に重み列ベクトル $\mathbf{w}$をかけると、

$$A \cdot \mathbf{w} = \lambda \cdot \mathbf{w}$$

となり、これは

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot \mathbf{w} = 0$$

の固有値問題に変形できる. $w \neq 0$ となるためには、λが A の固有値にならなければならない. この時、$\mathbf{w}$は A の固有ベクトルとなる. さらに、A のランクは 1 であるから、固有値$\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$ は、1 つだけ非零、他は零となる. また、A の主対角要素の和は n であるから、非零のλ_iをλ_{max}とすると、

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 0 \\ \lambda_{max} &= n \; (= \lambda_i \neq = \lambda_{max}) \end{aligned}$$

となる. したがって、$A_1, A_2, \cdots, A_n$に対する重みベクトル $\mathbf{w}$は、A の最大固有値λ_{max}に対する正規化した固有ベクトルとなる.

ここで、実際に AHP を用いる場合、重みベクトル $\mathbf{w}$は未知である. 未知の重みベクトルを $\mathbf{w}'$とすると、

$$A\mathbf{w}' = \lambda \mathbf{w}'$$

という問題に帰着でき、$\mathbf{w}$の最大固有値ベクトルλ_{max} に対する正規化した固有ベクトルとなる.

ところで、実際に状況が複雑になればなるほど意思決定者の答が整合しなくなる (首尾一貫しなくなる). このように A が整合しなくなるにつれて必ずλ_{max}は n より大きくなる. これは、次に示す Satty の定理より明らかになる. つまり、

$$\lambda_{max} = n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (W_j' a_{ij} - W_i')^2 / W_i' W_j' a_j n$$

より、常に、$\lambda_{max} \geq n$ が成り立ち、等号は首尾一貫性の条件が満たされる時のみに成立する．これから、首尾一貫性の尺度として、

$$C.I. \quad = \quad \frac{\lambda'_{max} - n}{n - 1} \tag{A.2}$$

を整合度 (コンシステンシー指数,consistency index) とする．この $C.I.$ 値が 0.1(場合によっては、0.15) 以下であれば 経験的に整合性があるとしている．

さらに、もう一つ整合性の尺度がある．大きさが同じでランダムに作った行列を考え、その行列の整合度と比べる方法である．すなわち、対角要素は全て 1、他は $1/9, 1/8, 1/7, \cdots, 1/2, 1$ $, 2, \cdots, 7, 8, 9$ の値で、対角要素は逆数関係がある行列を 乱数を使って作る．そのような行列から作った整合度の平均をとる．これは、ランダム整合度 (RI) と呼ばれ、例えば、

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
RI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.53

となる．さきに求めた $C.I.$ 値と、この RI の比を整合比 (consistency ratio, $C.R.$) といい、これを整合性の尺度に使う．

$$\text{整合比} \;:\; C.R. = \frac{C.I.}{RI} \tag{A.3}$$

この比も $C.I.$ 値と同様に 0.1 を基準として、これ以下の値ならば整合性があるとしている．

A.2 Harker 法

AHP を実際の問題に適用する際、一対比較行列の要素の値が全て答えられないこともある. ある質問に対しては、答えたくても比較するデータがないこともある. このような、不完全な逆数行列にも固有値法が適用できる方法を Harker は提案している [2].

例えば、要素が 5 の不完全一対比較行列において、推定したい重みを $W = w_1, w_2, \cdots, w_5$ とする. AHP で用いられるように、対角要素を 1 にして、逆関係 $a_{ji} = 1/a_{ij}$ を仮定すれば、以下に示す不完全逆数行列 A が得られる.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & ? & a_{14} & ? \\ a_{21} & 1 & a_{23} & ? & a_{25} \\ ? & a_{32} & 1 & a_{34} & ? \\ a_{41} & ? & a_{43} & 1 & a_{45} \\ ? & a_{52} & ? & a_{54} & 1 \end{bmatrix}$$

ただし、a_{ij}は入力された一対比較値、?は一対比較値が答えられない未知の値とする.

ここで、?の箇所を w_i/w_jで埋めると形式的に固有値問題は.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & w_1/w_3 & a_{14} & w_1/w_5 \\ a_{21} & 1 & a_{23} & w_2/w_4 & a_{25} \\ w_3/w_1 & a_{32} & 1 & a_{34} & w_3/w_5 \\ a_{41} & w_4/w_2 & a_{43} & 1 & a_{45} \\ w_5/w_1 & a_{52} & w_5/w_3 & a_{54} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}$$

と書ける. これより、

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3w_1 & + & a_{12}w_2 & & & + & a_{14}w_4 & & & = & \lambda w_1 \\ a_{21}w_1 & + & 2w_2 & + & a_{23}w_3 & & & + & a_{25}w_5 & = & \lambda w_2 \\ & & a_{32}w_2 & + & 3w_3 & + & a_{34}w_4 & & & = & \lambda w_3 \\ a_{41}w_1 & & & + & a_{43}w_3 & + & 2w_4 & + & a_{45}w_5 & = & \lambda w_4 \\ & & a_{52}w_2 & & & + & a_{54}w_4 & +' & 3w_5 & = & \lambda w_5 \end{array}$$

が得られる.

これを、行列表現すれば

$$
\begin{bmatrix}
3 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\
a_{21} & 2 & a_{23} & 0 & a_{25} \\
0 & a_{32} & 3 & a_{34} & 0 \\
a_{41} & 0 & a_{43} & 2 & a_{45} \\
0 & a_{52} & 0 & a_{54} & 3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5
\end{bmatrix}
= \lambda
\begin{bmatrix}
w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5
\end{bmatrix}
$$

となる. すなわち、不完全行列をこのように変換し、固有値問題を解くことによって、項目の重みを算出することができる.

付録 B　感度分析の理論

簡単に、感度分析 [5] の理論的背景を以下に示す。
一対比較行列 A の最大固有ベクトルλ_{max}に対する右固有ベクトルおよび左固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \cdots, w_n]^T$ $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_n]^T$とする. これらのベクトルはその定義から

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Aw} &= \lambda_{max}\mathbf{w} && \text{(B.1)} \\
\mathbf{Av} &= \lambda_{max}\mathbf{v} && \text{(B.2)}
\end{aligned}
$$

を満足しなければならない.

AHP では上記の $\mathbf{w}$の成分の総和が 1 になるように正規化されたもの, すなわち,

$$||\mathbf{w}||_1 = \sum_{k=1}^{n} w_k = 1 \tag{B.3}$$

が使用される. 一方,$\mathbf{v}$の成分に関しては別に制約はないが, 次に示す定理の便宜上, その成分は次式をみたすようにスケール変換されたものとする.

$$\mathbf{v}^T\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k = 1 \tag{B.4}$$

このとき, 行列 A の (i,j) 成分 $a_{ij}, i,j = 1,2,\cdots,n$ に対する整合度および相対的重要度の感度係数はそれぞれ次に示す二つの定理によって与えられる.

定理 B.1 a_{ij}に対する整合度 $C.I.$の感度係数は

$$\frac{\delta C.I.}{\delta a_{ij}} = \frac{1}{n-1}\left(v_i w_j - \frac{v_j w_i}{a_{ij}^2}\right)$$

で与えられる.

証明 B.1 正行列 A のλ_{max}および $\mathbf{w}$は a_{ij}の関数であり, 至るところで偏微分可能であることが知られている. そこで, 式 *(B.1)* の両辺を a_{ij}で偏微分すると

$$\frac{\delta A}{\delta a_{ij}}\mathbf{w} + A\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta a_{ij}} = \frac{\delta \lambda_{max}}{\delta a_{ij}} + \lambda_{max}\frac{\delta}{\delta a_{ij}} \tag{B.5}$$

となる. 式 *(B.5)* の両辺に左から $\mathbf{v^T}$を掛けて, 移行することにより,

$$\frac{\delta \lambda_{max}}{\delta a_{ij}}\mathbf{v}^T\mathbf{w} = \mathbf{v}^T\frac{\delta A}{\delta a_{ij}}\mathbf{w} + (\mathbf{v}A - \lambda_{max}\mathbf{v}^T)\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta a_{ij}} \tag{B.6}$$

を得る. ここで, 式 *(B.2)* および式 *(B.4)* を考慮することにより, 式 *(B.6)* は,

$$\frac{\delta\lambda_{max}}{\delta a_{ij}} = \mathbf{v}^T\frac{\delta A}{\delta a_{ij}}\mathbf{w} \tag{B.7}$$

となる. 更に行列 A は, 一対比較行列の対角成分に関して $a_{ji}=1/a_{ij}$ が成り立つので,$\delta A/\delta a_{ij}$ は, (i,j) 成分が *1*,(j,i) 成分が,$-1/a_{ij}^2$ で, 残りの成分は全て *0* の $n\times n$ 行列になっている. 従って, 式 *(B.7)* は,

$$\frac{\delta\lambda_{max}}{\delta a_{ij}} = v_i wj - \frac{v_j w_i}{a_{ij}^2} \tag{B.8}$$

と書くことができる. ところで, 整合度の指標は

$$C.I. = \frac{\lambda_{max}-n}{n-1} \tag{B.9}$$

で与えられるため, 整合度の a_{ij} に関する偏微分は$\delta C.I./\delta a_{ij}=(\delta\lambda_{max}/\delta a_{ij})/(n-1)$ であり, これを式 *(B.8)* に代入することにより, 式 *(B.5)* を得る.

定理 B.2 a_{ij} に対する相対的重要度 $\mathbf{w}$ の感度係数は,

$$\frac{\delta\mathbf{w}}{\delta a_{ij}} = ([A-\lambda_{max}I]_1)^{-1}[(v_iw_j-\frac{v_jw_i}{a_{ij}^2})[\mathbf{w}]_0-[\mathbf{x}]_0] \tag{B.10}$$

で与えられる. ただし,$\mathbf{x}$ は第 i 成分が w_i, 第 j 成分が$-w_i/a_{ij}^2$ で残りの成分がすべて *0* の $n\times 1$ ベクトル, すなわち

$$\mathbf{x} = [0,\cdots,0,w_j,0,\cdots,0,\frac{-w_i}{a_{ij}^2},0,\cdots,0]^T \tag{B.11}$$

であり,I は $n\times n$ 単位行列である. また,$[A-lambda_{max}I]_1$ は行列 $A-\lambda_{max}I$ の第 n 成分のみをすべて *1* で置き換えた $n\times n$ 行列, 一方, $[w_0]$,$[x_0]$ は, それぞれベクトル $\mathbf{w}$ および $\mathbf{x}$ の第 n 成分のみを *0* で置き換えた $n\times 1$ ベクトルを表している.

証明 B.2 式 *(B.1)* の両辺を a_{ij} で偏微分し, 式 *(B.8)* を考慮すると,

$$\frac{\delta A}{\delta a_{ij}} + A\frac{\delta\mathbf{w}}{\delta a_{ij}} = (v_iw_j - \frac{v_jw_i}{a_{ij}^2}\mathbf{w} + \lambda_{max}\frac{\delta\mathbf{w}}{\delta a_{ij}}) \tag{B.12}$$

となる. 定理 *B.1* の証明においても述べたように, 式 *(B.12)* の$\delta A/\delta a_{ij}$ は (i,j) 成分が *1*, (j,i) 成分が$-1/a_{ij}^2$ で, 残りの成分は全て *0* の $n\times n$ 行列であるから, 左辺の第一項の $(\delta A/\delta a_{ij})$ は式 *(B.11)* のベクトル $\mathbf{x}$ と等価になる. 従って, 式 *(B.12)* は移項して整理することにより,

$$(A-\lambda_{max}I)\frac{\delta\mathbf{w}}{\delta a_{ij}} = \left(v_iw_j - \frac{v_jw_i}{a_{ij}^2}\right)\mathbf{w} - \mathbf{x} \tag{B.13}$$

となる．ところが, 固有値の存在条件から明らかなように式 *(B.13)* の行列 $A - \lambda_{max} I$は $det(A - \lambda_{max} I) = 0$ であり, このままでは逆行列が存在しない.

そこで,$\mathbf{w}$の正規化条件式 *(B.3)* を考慮して, この両辺を a_{ij}で偏微分して得られる次式, すなわち,

$$\frac{\delta w_1}{\delta a_{ij}} + \frac{\delta w_2}{\delta a_{ij}} + \cdots + \frac{\delta w_n}{\delta a_{ij}} = 0 \tag{B.14}$$

を式 *(B.13)* の n 番目の式と置き換えることにより,

$$[A - \lambda_{max} I]_1 \frac{\delta \mathbf{w}}{\delta a_{ij}} = \left(v_i w_j - \frac{v_j w_i}{a_{ij}^2} \right) [\mathbf{w}]_0 - [\mathbf{x}]_0 \tag{B.15}$$

を得る．式 *(B.15)* の行列 $[A - \lambda_{max} I]_1$は正則であり, その逆行列が存在する．これを式 *(B.15)* の両辺に左から掛けることにより, 式 *(B.10)* を得る.