### **JAIST Repository**

https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	拘束条件を有する制御系の解析および設計に関する研 究
Author(s)	平田,研二
Citation	
Issue Date	1999-03
Туре	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/869
Rights	
Description	Supervisor:藤田 政之, 情報科学研究科, 博士



Japan Advanced Institute of Science and Technology

# 拘束条件を有する制御系の 解析および設計に関する研究

## 平田 研二

## 1999年3月

### 博士論文

# 拘束条件を有する制御系の 解析および設計に関する研究

指導教官 藤田 政之 助教授

北陸先端科学技術大学院大学

情報科学研究科 情報システム学専攻

### 平田 研二

1999 年 3 月

線形ロバスト制御理論に代表される近年の制御理論の大きな発展は,複雑な制御系設計仕様を達成する補償器の設計法をつぎつぎと与えてきた.このようななか,拘束条件を有する制御系の解析およびその制御系設計問題は,通常の理論的解析や設計の枠組では取り扱いが困難であり,実用的にも理論的にも重要な未解決問題を未だに多く含んでいる.現実の制御系は,アクチュエータの性能限界による制御入力の制限や制御対象の保護のために要求される内部信号の制限など,多くの拘束条件を有する '拘束システム'である.拘束条件が制御系に及ぼす影響は極めて深刻なものであり,著しい制御性能の劣化に留まらず,制御系が不安定化されることも知られている.したがって,拘束システムに対する体系的な制御理論の構築が強く望まれている.

本論文は、拘束条件が制御系に及ぼす影響の解析および拘束条件を有する制御系の設計に 関する研究をおこなったものである.まずはじめに、通常のフィードバック補償器により構 成された閉ループ系を想定し、この制御系が拘束条件を破ることなく'安全に'動作するため の条件について議論する.これにより、制御系の振舞を決定する状態をある領域の内部閉じ 込めることが可能であり、またこの領域に状態を制限することが、拘束システムが安全に動 作するための必要十分条件であることを明らかにする.ここでえられる結果は、拘束システ ムの安定性解析および制御系設計における基礎となるものであり、また以後の本論文におけ る制御系設計においても重要な役割を果たす.

制御系を構成する補償器は、安定性や制御性能など、多くの制御系設計仕様の達成を要求 される.これら多くの要求に加えて、拘束条件により引き起こされる影響の抑制までを達成 する単一のフィードバック補償器の設計は、理論的に極めて困難な問題である.したがって 拘束システムの制御問題には、その実用面における問題の重要性にもかかわらず、いまだ有 効な制御系設計法が存在しない.しかしながらこの一方、仮に拘束条件が存在しないならば、 豊富な線形制御理論の結果が、数々の優れた制御系設計法を与える事実がある.拘束システ ムの制御問題において、線形制御理論により与えられる補償器を完全に置き換え、まったく 新たな設計法を議論する必然性はない.逆にこれらを効率よく適用する上位の補償機構を構 成することによっても、拘束システムに対する新たな制御系設計法の可能性が見出される.

本論文ではまず,複数の補償器を構成しこれらを切り換えながら適用するスイッチング制 御則の構成法を示す.このスイッチング制御則により,拘束システムを広い動作範囲で安定 化するとともに,制御性能の劣化を抑制することが可能となる.さらに,外部から加えられ る参照入力信号を整形し制御系への実際の入力を生成するリファレンスガバナの実現法を示 す.リファレンスガバナを付加した制御系は,拘束条件を常に達成しかつ目標値への追従を 実現する.これら補償器のスイッチング機構およびリファレンスガバナは,いずれも拘束条 件により引き起こされる影響の軽減を目的として,通常のフィードバック補償器の上位に構 成される付加的な機構である.したがって本論文で議論される制御系の基本的な構造は,制 御系の安定化を通常のフィードバック補償器が達成し,拘束条件が引き起こす影響を新たな 上位機構が抑制する分離構造である.

#### Abstract

Recent development in the linear robust control theory provides many systematic control design procedures which solve stabilization, tracking, robustness, noise reduction problems. However none of these is able to cope with *constraints*. Nowadays one of the most important practical and theoretical open problem in control is the analysis and design of feedback controllers for systems with *state and control* constraints. Constraints on the inputs and often also on the state are present inherently in all real physical systems. The former are dictated by physical limitations of the actuators; the latter by the necessity to keep some plant variables within safe limits. If constraints are not properly accounted for in the design procedure, this would lead to serious *performance deterioration* and even *instability*.

This dissertation includes contributions on the analysis and design of control systems subject to pointwise–in–time state and control constraints. First, the necessary and sufficient condition for *safe operation* of constrained systems is derived. This result is obtained by constructing a certain subset in the state space such that avoiding constraint violation is equivalent to restricting the state dynamics to this subset. This fundamental result has important applications in the area of stability analysis and controller design.

Many control specifications, stability, performance, robustness, are required of control system design. This makes complicate or even impossible to design a single special feedback controller which satisfies required specifications as well as attempts to handle the effects caused by constraints. Therefore despite its importance in practice, various problems associated with control of constrained systems still remained unsolved. However in *constraint* free case, systematic techniques are available to solve design problem and provide efficient conventional feedback controllers. Even in *constrained* case, there is no necessity to replace a conventional techniques with completely new one which attempt to satisfy many control specifications and also constraints handling at the same time. Alternatively, introducing a higher hierarchical level mechanism which utilizes conventional feedback controllers also attempts to handle constraints would have potential benefits.

Control system design techniques utilizing hierarchical structures are proposed. Switching control scheme which includes fixed structure controllers and a *supervisor*. Where supervisor selects the highest performance controller which is *safe* for the current state of the plant. Because supervisor avoids constraint violation, controlled system remains stable and controller switching improves control performance. The other method consists of adding to a primal closed–loop system a nonlinear device called *reference governor* which manipulates the *desired reference signal* in order to avoid constraint violation. This control scheme is proved to fulfill the constraints and tracking requirements. All resulting control systems has separation structure: first stabilize the system and improve performance by using the conventional feedback controller in the absence of constraints; then adding switching mechanism or reference governor those operate at a higher hierarchical level for constraints fulfillment.

# 目 次

概要		iii
図目次		viii
表目次		ix
<b>第1章</b>	序 論 本研究の背暑と目的	<b>1</b> 1
1.1	拘束システムの制御問題	2
1.3	本論文の目的と概要・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	4
第2章	拘束条件を有する制御系の解析	7
2.1	はじめに....................................	7
2.2	拘束条件を有する線形離散時間システム	8
2.3	状態拘束集合と CPI 集合	10
	2.3.1 状態拘束集合と CPI 集合の構成	11
2.4	最大 CPI 集合の構成	13
2.5	最大 CPI 集合の有限回での決定可能性	16
2.6	最大 CPI 集合の数値計算	18
2.7	数值例	21
2.8	まとめ	24
第3章	拘束システムのスイッチング状態フィード バック制御	27
3.1	はじめに、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、	27
3.2	拘束システム	28
3.3	問題の定式化・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	29
3.4	フィードバックゲインの構成	31
3.5	スイッチング制御則	35
3.6	設計例	36
3.7	制御則の改善・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	38
3.8	まとめ	41

第	4章	外部入力を有する拘束システムのスイッチング状態フィードバック制御	<b>43</b>
	4.1	はじめに	43
	4.2	外部入力を有する拘束システム	44
	4.3	問題の定式化	45
	4.4	フィードバックゲインの構成	48
		4.4.1 <b>可到達集合の評価</b>	48
		4.4.2 フィードバックゲインに対する条件	49
	4.5	スイッチング制御則	54
	4.6	設計例	56
	4.7	まとめ	57
第	5章	参照入力集合の連結にもとづく拘束システムの追従制御	59
	5.1	はじめに	59
	5.2	拘束システム	60
	5.3	参照入力集合	64
	5.4	参照入力集合の連結・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	67
		$5.4.1$ $R^0$ に対する連結	68
		$5.4.2$ $R^i$ に対する連結	71
	5.5	参照入力集合の連結にもとづくリファレンスガバナ	73
	5.6	連結度の調整パラメータ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	78
	5.7	設計例	82
	5.8	おわりに	85
第	6章	結論	87
	6.1	本研究での結果	87
参	考文南	χ	91
謝	辞		99
研	究業績		101

# 図目次

<ol> <li>2.1</li> <li>2.2</li> <li>2.3</li> <li>2.4</li> <li>2.5</li> <li>2.6</li> </ol>	Simulation results of system (2.4)	<ol> <li>10</li> <li>22</li> <li>23</li> <li>23</li> <li>24</li> <li>25</li> </ol>
3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 3.7 3.8 3.9 3.10 3.11 3.12	State and control constrained system and piecewise-linear compensator $\ldots$ Geometrical representation of CPI set $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ Switching diagram with ellipsoids (left) and maximal CPI sets (right) $\ldots$ Geometrical representation of design procedure $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ Maximal CPI sets for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ State trajectories in phase plane for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ Position, $x_1$ , and velocity, $x_2$ , versus time for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ Actuator control signal, $u$ , versus time for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ Actuator control signal, $u$ , versus time for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ Actuator control signal, $u$ , versus time for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ Position, $x_1$ , and velocity, $x_2$ , versus time for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ Actuator control signal, $u$ , versus time for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ Actuator control signal, $u$ , versus time for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ Position, $x_1$ , and velocity, $x_2$ , versus time for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$	29 30 31 32 37 37 38 38 38 39 39 40
<ul> <li>4.1</li> <li>4.2</li> <li>4.3</li> <li>4.4</li> <li>4.5</li> <li>4.6</li> </ul>	Actuator control signal, $u$ , versus time for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ State and control constrained system and switching state feedback compensator Switching diagram and state trajectories: with disturbance inputs (dashed line), with no disturbance inputs (solid line) $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ Geometrical representation of design procedure $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ Maximal CPI sets for the pendulum model $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ Position, $x_1(t)$ , and velocity, $x_2(t)$ , versus time for the pendulum model $\ldots$ Actuator control signal versus time for the pendulum model $\ldots$	<ul> <li>41</li> <li>45</li> <li>47</li> <li>50</li> <li>56</li> <li>57</li> <li>57</li> </ul>
$5.1 \\ 5.2 \\ 5.3$	Closed loop system	60 61 62

5.4	Simulation results (no constraints present)	63
5.5	Simulation results with input magnitude constraints	64
5.6	Reference signal sets $R^0(0.1)$ and $R^0(0.243) = R^0$	67
5.7	State Trajectories in phase plane	67
5.8	Reference signal sets $R^0$ and $R^1$	70
5.9	State trajectory in phase plane	71
5.10	Reference signal sets $R^i$ , $i = 1, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm 4$	73
5.11	Closed loop system with reference governor	74
5.12	Simulation results with reference governor	79
5.13	Reference signal sets and simulation results, $\delta = 0.05$	80
5.14	Reference signal sets and simulation results, $\delta = 0.393 \dots \dots \dots \dots \dots$	81
5.15	Position servo mechanism	82
5.16	Simulation results of position servomechanism model	84
5.17	Simulation results of position servomechanism model with reference governor	86

# 表目次

5.1	Model parameters	82
5.2	Number of linear constraints in maximal CPI sets	85

## 第1章 序論

#### 1.1 本研究の背景と目的

制御工学の目的は,現実の物理システムに積極的に働きかけ,意図した振舞を達成させる ことにある.しかしながらこのとき,現実の制御系が,制御入力あるいはその出力に,多くの 拘束条件を有するという事実は,しばしば見落とされがちである.制御系に存在する拘束条 件は:最も一般的なアクチュエータであるモータは,入力電圧および出力に制限を有する:航 空機における昇降舵,方向舵は制限された可変角をもつ:プロセス制御系における温度,圧力 は安全上の余裕を要求される:生産プラントからの公害物質の排出は,最小限に抑えること が要求される:など,簡単に挙げることができる.現実の制御系は,制御入力に対する制限か ら,制御系の動作状態に依存したものまで,多岐にわたる拘束条件を有する '拘束システム' である [27].

近年の線形ロバスト制御理論に代表される制御理論の大きな発展は,実システムと数理モ デルのあいだに存在する不確かさを考慮したうえで,複雑な制御系設計仕様を達成する補償 器の構成法を与える [21, 22, 72]. しかしながらその一方,拘束条件により引き起こされる問 題を通常の理論的解析や設計の枠組で直接取り扱うことは困難であり,拘束システムの制御 問題には,いまだ多くの未解決の問題が残されている [10]. しかもこのとき,拘束条件の存 在が制御系に与える影響は極めて大きなものであり,制御性能の著しい劣化に留まらず,最 悪の場合制御系が不安定化されることも知られている [6]. このような現象は,制御系の信号 がその制限値で打ち切られることにより,フィードバックループが切断されたのと同じ状況 に陥ることにより生じる. したがって拘束条件下では,制御系における最も基本的な要求で ある安定ですら,保証するのは困難となる.

拘束条件は、ほとんどすべての制御系に存在し、また制御系の性能に著しい影響を与える. この問題の最も安易な解決法は、制御系の各要素を強化する、すなわちより大きな出力を発 生するアクチュエータを使用することや、あるいは制御系に要求する性能を下げることであ る.しかしながらこれが問題の本質的な解決でないのは明らかであり、結果的には非常にコ ストの高い制御システムが構成されるだけである.したがって、拘束条件の存在を陽に考慮 した制御系設計法の確立が、実用的にも理論的にも重要な課題となっている.

現実の制御系は、そのほとんどが、拘束条件を有する拘束システムである.また拘束条件の存在は、制御系の振舞いに深刻な影響を及ぼす.制御系はこのような拘束をつねに達成しながら動作することが望ましいし、また達成していなければならない拘束条件も存在する.したがって、どのような条件のもとで制御系は拘束条件を破ることなく動作するのかを明らかにすることが重要であり、また同時に、拘束条件を破ることなく動作することが保証される

1

制御系の構成法を確立することが望まれる.

### 1.2 拘束システムの制御問題

制御系に存在する拘束条件は、一方で古くから認識されていた問題であり、これまでにも 様々な方法でその解決が試みられてきた.しかしながら、いまだに解決すべき多くの問題が 残されている.

拘束条件の存在を陽に考慮した制御設計法において,理論的に最も興味深いもののひとつ は,拘束条件を考慮した最適制御問題へと帰着させるものである.しかしながらこの方法に よりえられる補償器は,非常に複雑なフィードバック制御則となり,また制御則をえるため に多大な計算を必要とする.このためあまり実用的ではないのが現状である.これに対し, 有限な時間区間をずらしながら逐次最適化問題を解くモデル予測制御は,この問題を解決す るための試みとして注目されており [26,57],化学プラントなどの比較的時定数の遅い制御 対象に対しては,有効な制御則となっている [75].

拘束システムに対する制御系設計法として数多くの研究結果が報告されているのが,正の 不変集合の性質を利用した状態フィードバックゲインの設計である.制御系の振舞は,状態 の概念にもとづき完全に記述されることがよく知られている.正の不変集合は,制御系の振 舞を決定する状態を,常にその内部に留めておくことが可能な領域として定義される [15]. そこでこのとき,十分'小さな'正の不変集合が構成可能であったとすると,状態をこの内部 に閉じ込めることにより,入力制限などの拘束が常に達成可能となる.正の不変集合の性質 にもとづく制御系設計の基本的な考え方は,ある与えられた領域を正の不変集合とする,あ るいはこの領域を含む領域を正の不変集合とする状態フィードバックゲインの設計法を与え ようとするものである [9,16,17,32,33,62,69].また近年では,状態方程式の係数が外部 からのパラメータに依存する LPV (Linear Parameter Varying)システムに対する適用など, 制御系のロバスト性を考慮した研究結果も報告されている [18,19,63,68].

拘束システムの制御問題を解決するためのもう一つのアプローチとして,拘束条件が全く 存在しないものとして通常のフィードバック補償器を設計し,つぎに拘束条件により引き起 こされる影響の抑制を目的とした,上位の補償機構を構成するものが挙げられる.

このようなアプローチで最も広く知られているのは、入力制限が原因で生じるワインド アップ現象 [76] に対処するためのアンチワインドアップ法である [23, 24, 34, 44, 58]. 制御 系に新たに付加されるアンチワインドアップ機構は,補償器からの出力と入力制限の影響を 受けた実際の入力信号との偏差を利用し、ワインドアップ現象の抑制をおこなう. このとき アンチワインドアップ機構は、通常のフィードバック補償器とは独立に構成されるものであ るから、その設計が比較的容易であり、入力制限を有する制御系に対する実際的な制御手法 として知られている. また、制御対象の構造に強く依存する手法である、アンチワインドアッ プ機構を付加した制御系の安定性の解析が困難であるなどの問題点が指摘されているが、近 年ではこのような問題の解決を目指した研究も報告されている [77, 45]. なおアンチワイン ドアップ法における難点として、入力制限以外の拘束条件により引き起こされる問題には対処できないことが挙げられる.

アンチワインドアップ法は、入力制限により引き起こされる影響を打ち消すため、通常の フィードバック補償器の上位に位置する付加的な補償機構を構成する.したがってまたアン チワインドアップ機構を付加された制御系は、入力制限が達成されている、あるいは破られ ている、の2つの条件により、制御系の構造を切り換えるスイッチング制御系であると見る こともできる.

通常のフィードバック制御系が有する連続的な動特性に加え,制御構造の切り換えなどの 離散的な動特性を併せもつシステムは,一般にハイブリッドシステムと総称されている.ハ イブリッドシステムが理論的考察の対象として大きな注目を集め始めたのは近年であり,そ の理由は,制御系の大きな動特性の変化への対応や複雑な対象を単純な数理モデルの組とし て表現することにより解析や設計の手段をえようとするものなど様々である [1, 2, 3, 4, 5, 31, 46, 48, 56].拘束システムの制御問題に対しても,アンチワインドアップ機構と同様,拘 束条件が引き起こす影響の抑制を目的とした上位機構を積極的に採り入れることにより,単 ーのフィードバック補償器では達成が困難な,より柔軟な制御系設計の実現が期待される.

このような観点から拘束システムの制御問題を扱った研究としては, 複数の補償器を線形 制御理論の枠組で構成し, これらを切り換えながら適用するスイッチング制御系の構成があ る [43, 71]. 拘束システムに対するスイッチング制御則をえるには, 個々の補償器の設計法 にくわえて, 補償器の切り換えアルゴリズムが必要となる. しかしながらこれまでに提案さ れているスイッチング制御則は, 補償器の切り換えのアルゴリズムが保守的なものになって いる, 個々の補償器の設計指針が厳密でないなど, まだ多くの問題が残されたままとなって いる. さらに非常に複雑なスイッチングアルゴリズムは, 実用的には不利となる点などにも 注意を払う必要がある.

また拘束システムの出力を外部からの参照入力に一致させる追従制御を考える場合,参 照入力の大きな変化が原因となりワインドアップ現象などが引き起こされる. これを解決 する制御系設計法として,参照入力の整形をおこなうリファレンスガバナが注目されてい る [37,38,39]. リファレンスガバナは,外部からの参照入力の整形を目的として制御系に付 加される機構であり,状態空間に構成される集合の情報を利用した実現や [28,29,30],モデ ル予測制御にもとづく方法 [7,8] が提案されている. リファレンスガバナは,オンラインで 参照入力の整形をおこない,制御系への実際の入力を決定する. このためリファレンスガバ ナの実現においては,オンラインで必要となる処理の軽減が課題となっている.

そのほか関連する研究としては、拘束システムに対する最短時間制御を扱った研究でも、 補償器の切り換えが利用される構造となっている [40, 41, 52, 53]. そして本来切り換えとと いう動作を有する適応制御系の構成においても、補償器の構成において必要となる前提条件 を軽減しようという観点からはじまり [25, 49, 50], 現在でも数多くのスイッチング制御系に 関する研究が報告されている [55, 60], しかしながら、拘束システムの制御問題をこれらの 立場から扱った研究は少ない [47].

拘束システムの制御問題では、通常のフィードバック補償器に加え、拘束条件により引き

起こされる影響の軽減を目的とする付加的な機構を積極的に採り入れることが有効である. このような機構を実現するには、拘束条件に対して制御系がどのような動作状態にあるかを 把握することが重要となる.すなわち、拘束システムが'安全に'動作する条件が明らかと なっていることが必要であり、この条件が簡略に記述されているならば、切り換え機構やリ ファレンスガバナの実現において大きな指標を与えることは明らかである.

このような観点からの拘束システムの解析では、一般的なシステムを対象とした動的計画 法にもとづくものがあったが [11, 12, 13], 近年 Gilbert and Tan によって提案された手法 が, 拘束システムの有力な解析法として注目されている [30]. 制御系が拘束条件を達成する には, 状態がある程度 '小さな' 領域に留まっていることが必要となる. このように拘束条 件を達成する状態変数のすべてからなる状態空間の領域は, 状態拘束集合と呼ばれる. した がって制御系の運用過程において, 状態を常に状態拘束集合の内部に閉じ込めておくことが 可能ならば, 拘束システムは常に拘束条件を達成することになる. この観点から, 状態を閉 じ込めておく領域として定義される正の不変集合の概念が導入される. これにより問題は, 状態拘束集合の内部に含まれる最も '大きな' 正の不変集合を構成するということになり, こ れに対する理論的考察や具体的な構成手順が報告されている [30]. しかしながら現実の制 御系は, 外乱などの不確かな要素の影響を避けることができない. より実用的な制御系設計 法をえるためにも, 拘束システムの解析に関する結果を, 外乱などの影響を考慮した, より現 実的な仮定のもとで展開することが求められている [10].

#### 1.3 本論文の目的と概要

本論文の目的は、拘束システムが、その拘束条件を破ることなく '安全に' 動作するための 条件を明らかにし、さらにこの条件にもとづく制御系設計法を確立することにある.

本論文ではまずはじめに、大きさのみが制限された任意の外乱の影響を受けても、拘束シ ステムが安全に、すなわちその拘束条件を破ることなく動作するための条件に関して議論す る.ここでは、状態空間にある部分集合が存在し、この集合の内部に制御系の初期状態が属 していることが、拘束システムが安全に動作するための必要十分条件であることを明らかに する.つぎに、複数の補償器を構成しこれらを切り換えながら適用するスイッチング制御則 の構成法を導出する.まず、制御系の安定化性が保証される領域が順次拡大するような補償 器の系列の設計法を示し、この補償器の系列を利用したスイッチング制御則を導出する.ス イッチング制御則により、拘束システムを広い動作領域で安定化するとともに、制御性能の 劣化を抑制することが可能となる.つぎに、不確かな外乱の影響を受ける拘束システムを考 え、この場合でも状態の収束および補償器の切り換えの実行を保証するスイッチング制御則 の構成法を示す.また、拘束システムの出力を外部からの参照入力に一致させる追従制御問 題を考え、拘束システムに許容される参照入力の集合の評価法を与えるとともに、この条件 にもとづくリファレンスガバナの実現法を示す.本論文を構成する各章の概要を以下に示す.

2 章では、拘束システムがその拘束条件を破ることなく動作するための条件について議論 をおこない、拘束システムが安全に動作するための必要十分条件は、その初期状態をある集 合の内部に制限することであることを明らかにする.まずある瞬間の時刻のみに注目し、制 御系が拘束条件を達成することとその時刻での状態変数が含まれていることが等価となるよ うな集合を定義する、このような集合は状態拘束集合と呼ばれる、状態拘束集合は、ある瞬 間の時刻のみに注目して定義されるものである、したがって制御系がそのすべての運用の過 程において拘束条件を達成するには、<br />
状態を常に状態拘束集合の内部に留めておくことが必 要となる.このような観点から、制御系の状態をその内部に留めておくという性質により定 義される集合,正の不変集合 (Positively invariant set)の概念を導入する.この二つの概念に より、もとの問題は、状態拘束集合の内部に含まれる正の不変集合 (CPI 集合 (Constrained positively invariant set))を構成することが可能であるか、あるいはまた、この様な集合のう ち最も大きな集合 (最大 CPI 集合)を構成することが可能であるか, という問題に帰着され る. またこれにより、 拘束システムがその 拘束条件を 達成するための必要十分条件は、 制御 系の初期状態が最大 CPI 集合に含まれていることである、ということが明らかとなる. ここ ではさらに、制御系が漸近安定であるという非常に緩い仮定のみで、最大 CPI 集合が数値的 に構成可能であることを示すとともに、具体的なその構成手順を明らかにする. ここでの結 果は、拘束システムの制御問題を解決するための基礎を与えるとともに、以後の3,4,5章で 導出される制御則の基礎にもなる.

3 章では、複数の補償器を構成し、これらを切り換えながら適用するスイッチング制御則 を導出する、制御系には、たとえ拘束条件が存在する場合でも、すぐれた制御性能の達成が要 求されることにかわりはない. 一般に優れた制御性能を達成する補償器を適用する場合, 大 きな制御入力が要求されることから、拘束システムが '安全に' 動作する領域が極めて限定さ れたものとなる.すなわち非常に狭い動作範囲でのみ、本来保証されているはずの安定性や 制御性能が達成される. なおこのとき 2 章によりえられる最大 CPI 集合が, 拘束システム の具体的な動作領域を決定する.この一方で、安定性を重視した補償器を適用することによ り、広い動作範囲で制御系の安定性が保証されるが、この場合達成される制御性能は当然低 いものとなる、拘束条件下での制御の最も大きな問題は、この安定性と制御性能のトレード オフにある. そこで本章では、安定性を重視した '保守的な' 補償器から、制御性能を重視し た、積極的な、補償器までの、補償器の系列の構成法を提案する、つぎにこれらを切り換えな がら適用することにより、すぐれた制御性能と安定性の両立を達成するスイッチング制御則 を導出する.提案手法では、各補償器の構成条件をいずれも大域的最適化が可能な数理計画 問題に帰着させる。また各補償器が適用可能となる条件は最大 CPI 集合により記述される が、これにもとづく補償器の切り換えアルゴリズムは単純であり、実装が容易なものとなっ ている、このスイッチング制御則により、拘束システムを広い動作範囲で安定化し、同時に 制御性能の劣化も抑制することが可能となる.

4 章では、不確かな外部入力を有する拘束システムに対するスイッチング制御則を導出す る. 実システムにおいては、モデルの不確かさ、ノイズなどを原因とする不確かな外乱が制 御系に存在することは避けられない.3 章で導出したスイッチング制御則は、各最大 CPI 集 合が補償器の切り換え平面として利用され、状態が収束するごとに補償器が切り換えられる. しかしながら外部入力が存在する場合、状態変数の収束自体が保証されない.このため、補

5

償器の切り換えの実行もまた保証することができない.したがって,補償器の切り換えによ り優れた制御性能をえるというスイッチング制御の目的を達成するには,個々の補償器があ る程度以上の外乱抑制能力,すなわち外乱の影響下でも状態をある領域までは収束させるこ とができる能力を有することが要求される.ここでは,外部入力の影響により制御系の状態 が到達可能な領域として定義される状態可到達集合が,外乱抑制能力の指標となる点に注目 し,外部入力を有する拘束システムに対するスイッチング制御則を導出する.えられる制御 則は,不確かな外部入力の影響を受けても状態の収束および補償器の切り換えの実行を保証 することが可能である.

5 章では、拘束システムの出力を外部からの目標参照入力に一致させる、追従制御系の構成に関する考察をおこなう.ここでは、拘束システムに許容される参照入力からなる集合の評価法、およびこのときえられる集合の性質にもとづくリファレンスガバナの実現法を提案する.拘束システムの追従制御を考える場合、拘束条件が引き起こす影響は、外部からの参照入力の変化の大きさとその変化が生じる時刻での制御系の動作状態の両方に依存してあらわれる.したがってここでは、制御系に許容される参照入力からなる集合、参照入力集合、と同時に制御系の動作状態を規定する最大 CPI 集合が構成される.しかしながらこのようにして構成された参照入力集合は、拘束条件の影響により、一般に非常に小さな集合となる.ここではさらに、制御系の平衡点を移動しながら許容される参照入力の評価をおこなう、参照入力の連結、という考え方を提案する.またこの連結された参照入力集合の性質にもとづくリファレンスガバナの実現法を提案する.ファレンスガバナの実現法を提案する.またこの連結された参照入力集合の性質にもとづくリファレンスガバナの実現法を提案する.これによりリファレンスガバナを併合した制御系は、拘束条件を破ることなく、その出力を目標値へ一致させることが可能となる.

6章では、全体を総括し本研究でえられた結果を要約する.

## 第2章 拘束条件を有する制御系の解析

ここでは、拘束条件を有する制御系がその拘束条件を破ることなく動作するための条件を議 論する. これにより、制御系の初期状態をある部分集合の内部に制限することが、拘束シス テムが安全に動作するための必要十分条件であることを明らかにし、この部分集合の具体的 な構成手順を提案する.本章では、これらの結果を不確かな外部入力を有する制御系に対し て導出する.これは、入力をもたない制御系に対してこれまでに知られていた結果を拡張す るものであり、集合の構成手順についても変更の必要なしにそのまま適用することが可能で ある.

### 2.1 はじめに

現実の制御系には、アクチュエータの飽和要素、制御対象の保護のための制限、出力の最大振幅に関して要求される制御性能の達成など、多くの拘束条件が存在する. 拘束条件が破られることは、期待される制御性能が得られないだけでなく、場合によってはワインドアップ現象等を生じ、また最悪の場合、制御系が不安定化されることを意味する. このように、制御系に存在する拘束条件は、実際に制御系を稼働させる際の大きな問題となっている [27].

拘束条件を有する制御系の解析法に,正の不変集合 (Positively invariant set) と状態拘束 集合 (State constraint set) の概念を用いるものがある.正の不変集合は,制御系の状態変数 を常にその領域内に留めるという性質により特徴づけられる.また状態拘束集合は,出力に 対して課せられた拘束条件をみたす状態変数の全体からなる.文献 [30] では,状態拘束集合 に含まれる最大の正の不変集合の構成法が外部入力のない線形離散時間システムに対して 示されている.

制御系の初期状態がこの最大の正の不変集合に属しているかぎり,制御系は拘束条件を破ることなく振舞うことが保証される.また応用として,拘束を有する系に対する制御系設計法であるリファレンスガバナ(Reference governor)[38]の構成へも適用されている[29].ところが実システムにおいては,制御系が拘束を破る大きな原因として,過大な外乱や急激な参照入力の変化など外部入力の影響が挙げられる[42].しかしながら,外部入力を有する系の状態拘束集合および状態拘束集合に含まれる最大の正の不変集合の構成法は知られていない.

本章の目的は,外部入力を有する線形離散時間システムが拘束を破ることなく振舞うため の条件を明らかにすることである.このために,外部入力を有する系に対する状態拘束集合 およびこれに含まれる最大の正の不変集合の構成法を示す.制御系の初期状態がこの最大の 正の不変集合に含まれているかぎり、制御系は外部入力の影響下でも拘束を破ることなく動 作することが保証される。

まず 2.2 節では、本章で考察するシステムの記述を示す. 2.3 節では、状態拘束集合、CPI 集合 (Constrained positively invariant set) を定義する. つぎに 状態拘束集合の構成および 状態拘束集合の内部に属すように選ばれた集合が CPI 集合となるための条件を示す. 2.4 節 では、状態拘束集合に含まれる最大の正の不変集合である最大 CPI 集合について考察し、制 御系が拘束条件を常に達成するための必要十分条件は、その初期状態が最大 CPI 集合に属 していることであることを示す. 2.5 節では、最大 CPI 集合が、有限回の計算手順で決定可 能となるための条件を明らかにする. 2.6 節では、具体的な計算手順を示し、2.7 節で数値例 を示す.

記号:  $\mathcal{Z}^+$  により 0 を含む正の整数全体,  $\mathcal{R}$  により実数の全体をそれぞれあらわす.  $M \in \mathcal{R}^{m \times n}$  に対して,  $M_{(i,:)}$  は M の第 i 行ベクトルを表す.  $g, h \in \mathcal{R}^m$  に対して,  $g_i$  は g の第 i 番目の要素とする. g > 0 あるいは  $g \ge 0$  は  $g_i > 0$ ,  $g_i \ge 0$  をそれぞれ表すものとし, g > h あるいは  $g \ge h$  は, それぞれ g - h > 0,  $g - h \ge 0$  である.  $X \subset \mathcal{R}^m$  にたいして  $\operatorname{co} X$ ,  $\operatorname{int} X$  は, それぞれ X の凸包, 内点をあらわす.  $M \in \mathcal{R}^{m \times n}$  にたいして,  $\operatorname{Set}(M)$  は  $\operatorname{Set}(M) = \{x \in \mathcal{R}^n | Mx \le 1\}$  で定義される凸多面体をあらわす. ただしここで 1 は, 対応 する次元の (ここでは  $1 \in \mathcal{R}^m$ ) 1 を要素とする行ベクトルである. また定義式における不等 式は, ベクトルの各要素ごとに成立するものとしている. なおこのとき  $\operatorname{Set}(M)$  は, 原点を 内点にもつ凸多面体となる.

### 2.2 拘束条件を有する線形離散時間システム

本章では、拘束を有する線形離散時間システムを考える.

$$x(t+1) = Ax(t) + Bw(t)$$
 (2.1a)

$$z(t) = Cx(t) + Dw(t)$$
(2.1b)

ここで  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  は状態,  $w(t) \in \mathcal{R}^m$  は外部入力でり, あらかじめ定まった集合  $W \subset \mathcal{R}^m$  に対して  $w(t) \in W$  をみたすとする. また  $0 \in W$  を仮定する.  $z(t) \in \mathcal{R}^p$  は拘束条件を考え るために設けられた変数であり,  $z(t) \in Z$  の拘束を有する. 集合  $Z \subset \mathcal{R}^p$  については, z(t) が十分に小さい場合にはアクチュエータの飽和などは生じない, という観点から  $0 \in \operatorname{int} Z$  を 仮定する. さらに W, Z は有界であるとする.

上記の仮定を考慮した上で、特に本章では Z,W として、次のような凸多面体を考える.

$$W = \{ w \in \mathcal{R}^m | F_W w \le g_W \} \qquad F_W \in \mathcal{R}^{s_W \times m}, \ g_W \in \mathcal{R}^{s_W}, \ g_W \ge 0 \tag{2.2}$$

$$Z = \{ z \in \mathcal{R}^p | F_Z z \le g_Z \} \qquad F_Z \in \mathcal{R}^{s_Z \times p}, \ g_Z \in \mathcal{R}^{s_Z}, \ g_Z > 0$$

$$(2.3)$$

ここで  $F_W$ ,  $g_W$ ,  $F_Z$ ,  $g_Z$  は, それぞれ凸多面体 W, Z を規定する線形拘束式をあらわす行列 およびベクトルであり, また  $s_W$ ,  $s_Z$  は, それぞれ W, Z を規定する線形拘束式の数である. なお W, Z の定義式における不等式は, ベクトルの各要素ごとに成立するものとしている. W, Z をこのような凸多面体に限ることは問題の適用範囲を限定することになる.しかしな がらこれは、アクチュエータの飽和特性など、多くの拘束条件を記述するのに実用上十分な 意味を持っている.また、次節以降に示される最適化問題が実行可能な線形計画問題となる 利点がある.

例題 2.1. 次の状態フィードバック系と 2 つの初期状態  $x_0^1, x_0^2$  を考える.

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 2.0 \\ -0.8 & 2.0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(t)$$
(2.4a)

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} x(t)$$

$$x_0^1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_0^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$
(2.4b)

ただし制御入力には,  $|u| \le 5$ の拘束があるものとする. この拘束条件は,  $u \le 5$ ,  $-u \le 5$ より,

$$\begin{bmatrix} -1\\1 \end{bmatrix} u \le \begin{bmatrix} 5\\5 \end{bmatrix}$$

であらわされる. すなわち (2.3) において, z = u,  $F_Z = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ,  $g_Z = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}^T$  とすることにより集合 Z はつぎであたえられる.

$$Z = \{ z \in \mathcal{R} | \begin{bmatrix} -1\\1 \end{bmatrix} z \le \begin{bmatrix} 5\\5 \end{bmatrix} \}$$

また外乱 w(t) は,  $|w| \le 1$  であるとし, (2.2) の集合 W をつぎのよう定義する.

$$W = \{ w \in \mathcal{R} | \begin{bmatrix} -1\\1 \end{bmatrix} w \le \begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix} \}$$

 $w(t) \equiv 0$  とした場合の 2 つの初期状態  $x_0^1, x_0^2$  に対する応答, さらに  $w(t) \equiv 1$  の外乱を加えた場合の応答をそれぞれ Fig. 2.1 に示す.

 $w(t) \equiv 0$  として外乱を考えない場合,初期状態  $x_0^1$  に対する応答は  $|u| \le 5$  の拘束条件を 破ることなく振舞う. しかしながら  $x_0^2$  に対しては, u(2) = -5.870 となり制御入力に対する 拘束が破られてしまう.

さらに w = 1 の外乱を考えると,  $x_0^1$  から出発する応答に対しても u(2) = -5.948 となり, 拘束条件が破られてしまう.

この例からわかるように、拘束条件がみたされるためには、初期状態と外部入力に関する 条件を考えなければならない。



Fig. 2.1: Simulation results of system (2.4)

### 2.3 状態拘束集合と CPI 集合

拘束条件を考える観点から、次の集合を定義する.

定義 2.1 (状態拘束集合). 状態拘束集合 X(C, D, Z, W) を次のように定義する.

 $X(C, D, Z, W) = \{ x \in \mathcal{R}^n | Cx + Dw \in Z \mid w \in W \}$ 

このとき、ある時刻 t において拘束がみたされるための必要十分条件は、 $x(t) \in X(C, D, Z, W)$ となる.

注意 2.1. 外部入力を考えない場合, X(C,0,Z, {0}) は文献 [30] において考えられた状態拘 束集合に一致する.

制御系が拘束をみたすことなく動作するには、その状態変数を状態拘束集合の内部に留めておくことが必要となる。そこでつぎに正の不変集合の概念を導入する。集合  $S \subset \mathcal{R}^n$ は、原点を内点にもつとする。このとき任意の初期状態  $x(0) \in S$  と外部入力  $w(t) \in W$  に対して、(2.1a)の応答が、常に S 内に留まりつづけるならば、S は正の不変集合であると呼ばれる [17].

正の不変集合 *S* の中で, 特に  $S \subseteq X(C, D, Z, W)$  であるようなものが存在したとする. このとき正の不変集合の性質から, 任意の初期状態  $x(0) \in S$  に対して常に  $x(t) \in S$ , すなわち  $x(t) \in X(C, D, Z, W)$  が達成され, 制御系は拘束を破ることなく振舞う. そこで次の定義を考える.

定義 2.2 (CPI 集合).  $S \subset \mathcal{R}^n$  は原点を内点にもつとする.  $S \subseteq X(C, D, Z, W)$  でありか つ S が (2.1a) に対する正の不変集合であるならば CPI(constrained positively invariant) 集 合という.

注意 2.2. CPI 集合は, 一般に複数存在する. すべての CPI 集合とその内部から出発する応答に対して拘束条件はみたされる. 文献 [30] において外部入力を持たない系に対して考えられた最大出力許容集合 (maximal output admissible set) は, このようなすべての CPI 集合を内部に含む最大の CPI 集合である. これに対応する問題は 2.4 節以降で考える.

注意 2.3. 本章で対象とするのは安定な閉ループ系である. よって CPI 集合は, 原点を内点 に持つものとして定義する. これより  $0 \in int X(C, D, Z, W)$ は, CPI 集合が存在するための 必要条件である.

CPI 集合の内部に初期状態をとる限り、制御系は拘束を破ることなく動作する.よって CPI 集合を見つけることは、制御系が拘束を破らないことを保証する条件となる.

そこで本章の目的は,外部入力を有する線形離散時間システムが拘束を破ることなく動作 する条件として,この CPI 集合の構成法を明らかにすることである.

まず 2.3 節では、状態拘束集合の構成法を示す.次に状態拘束集合の内部に含まれる凸多 面体が CPI 集合となるための条件を示す. 2.4 節では、任意の CPI 集合をその内部に含む最 大の CPI 集合が存在することを示し、またこの構成法を提案する. さらに最大の CPI 集合 が有限回の計算手順で構成可能となる条件を 2.5 節で明らかにする. 2.6 節では、最大 CPI 集合の具体的な計算手順を示し、2.6 節で計算例を示す. なお本章とは異なる方法により同 様の問題が考えられているが、ここでは結果のみが示されているにすぎない [42].

#### 2.3.1 状態拘束集合と CPI 集合の構成

#### 状態拘束集合の構成

CPI 集合を構成するには、まず状態拘束集合の記述を明らかにしておくことが必要である. ここではこの状態拘束集合の構成法を示す.まず (2.3) に対して、

$$(M_Z)_{(i,:)} = \frac{(F_Z)_{(i,:)}}{(g_Z)_i} \in \mathcal{R}^{s_Z \times p}$$

を定義し、次節以降  $Z = Set(M_Z)$  により Z を表す.  $Z = Set(M_Z)$  より、ある時刻 t に おいて拘束がみたされるには、 $M_Z(Cx(t) + Dw(t)) \leq 1$  が任意の  $w(t) \in W$  について成 立しなければならない. すなわち、状態拘束集合は  $X(C, D, Z, W) = \{x \in \mathcal{R}^n | M_Z Cx \leq 1 - M_Z Dw, w \in W\}$  で表される. 任意の  $w \in W$  について上記の不等式が成立しなければ ならないことに注目し、次の線形計画問題を考え、これにより  $g_0^* \in \mathcal{R}^{sz}$  を定義する.

$$(g_0^*)_i = \text{maximize } (M_Z D)_{(i,:)} w \qquad i = 1, \dots, s_Z$$
 (2.5a)

subject to 
$$w \in W$$
 (2.5b)

条件式の右辺第 2 項  $M_Z Dw$  を  $g_0^*$  で置き換えることは,条件式の右辺の最小化を意味する. よって状態拘束集合は,次のように表される凸多面体である.

$$X(C, D, Z, W) = \{ x \in \mathcal{R}^n | M_Z C x \le 1 - g_0^* \}$$
(2.6)

このように状態拘束集合は、線形計画法を用いることにより構成可能である. ここで  $0 \in W$ より  $g_0^* \ge 0$  である. また  $0 \in int X(C, D, Z, W)$  は CPI 集合が存在するための必要条件で あったが、これは  $1 - g_0^* > 0$  を意味する.

#### CPI 集合の構成

次に CPI 集合の構成を考える. CPI 集合は,状態拘束集合に含まれるような集合であった.そこで,状態拘束集合を規定する (2.6) の条件式にさらに条件式を加える. これにより, *X*(*C*, *D*, *Z*, *W*) の一部を切り取る形で凸多面体 *S* が構成される.

$$S = \{x \in \mathcal{R}^n | \begin{bmatrix} M_X \\ M_Z C \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} - g_0^* \end{bmatrix} \} \qquad M_X \in \mathcal{R}^{s_X \times n}$$
(2.7)

ここで  $M_{Xx} \leq 1$  が新たに加えた条件式を表している. S は CPI 集合の候補であるが, 実際 に CPI 集合であるためには, (2.1a) に対する正の不変集合でなければならない.

ある与えられた凸多面体が正の不変集合となるための必要十分条件は,文献 [17] で示されている. この条件は凸多面体のすべての端点を用いて示されるが,(2.7) から S のすべての端点を求めるのは必ずしも容易ではないので,ここでは直接(2.7) を用いた判定法を考える. 正の不変集合の定義から次の補題が示される.

補題 2.1. 凸多面体 S が 正の不変集合となるための必要十分条件は, 任意の  $x \in S, w \in W$  に対して  $Ax + Bw \in S$  が成立することである.

証明. 文献 [17] 参照

補題 2.1 の条件を (2.7) を用いて書き表すことにより, 任意の x ∈ S, w ∈ W に対して

$$\begin{bmatrix} M_X \\ M_Z C \end{bmatrix} Ax \le \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} - g^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_X \\ M_Z C \end{bmatrix} Bw$$
(2.8)

の成立が S が CPI 集合となるための必要十分条件となる. W, S のすべての要素の組合せ についてこの不等式の成立を確認するため、次の線形計画問題により  $\delta^* \in \mathcal{R}^{sx+sz}$  を定義 する.

$$\delta_i^* = \text{maximize} \begin{cases} (M_X B)_{(i,:)} w & i = 1, \dots, s_X \\ (M_Z C B)_{(i,:)} w & i = s_X + 1, \dots, s_X + s_Z, \end{cases}$$
  
subject to  $w \in W$ 

(2.8) の右辺第 2 項を  $\delta^*$  で置き換えることは, (2.8) の右辺の最小化を意味する. 同様に次の線形計画問題により  $\eta^* \in \mathcal{R}^{s_X+s_Z}$  を定義する.

$$\eta_i^* = \text{maximize} \begin{cases} (M_X A)_{(i,:)} x & i = 1, \dots, s_X \\ (M_Z C A)_{(i,:)} x & i = s_X + 1, \dots, s_X + s_Z, \end{cases}$$

subject to 
$$x \in S$$

(2.8) の左辺を  $\eta^*$  で置き換えることは, 左辺の最大化を意味する.よって (2.7) で与えられる S が CPI 集合 となるための必要十分条件は,  $\eta^* \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{1}^T - (g_0^*)^T \end{bmatrix}^T - \delta^*$  が成立することである.

凸多面体 *S* に上記の手順を適用し、CPI 集合であることが確認されたとする. このとき任意の初期状態  $x(0) \in S$  に対して  $x(t) \in S$  が成立し、制御系の拘束条件はみたされる. これより次の補題が得られる.

補題 2.2. (2.7) で与えられる凸多面体 S が CPI 集合 となるための必要十分条件は,  $\eta^* \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{1}^T - (g_0^*)^T \end{bmatrix}^T - \delta^*$  が成立することである.

山多面体 *S* に上記の手順を適用し、CPI 集合であることが確認されたとする. このとき任意の初期状態  $x(0) \in S$  に対して  $x(t) \in S$  が成立し、制御系の拘束条件はみたされる.

w(t) = 0の場合, [15] では代数方程式および不等式に関する条件が示されている.  $w(t) \neq 0$ である本章の場合, これに対応する結果が次のようになる.

補題 2.3. (2.7) で与えられる凸多面体 S が CPI 集合となるための必要十分条件は,次の条件をみたす  $H \in \mathcal{R}^{(s_X+s_Z)\times(s_X+s_Z)}$ が存在することである.

$$H \ge 0, \quad H\begin{bmatrix} M_X\\M_ZC\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_X\\M_ZC\end{bmatrix}A, \quad H\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}-g_0^*\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}-g_0^*\end{bmatrix} - \delta^*$$

注意 2.4. 補題 2.3 の条件は、代数的に *H* を求めるのみであるから、小さなサイズの問題に対して有効である. この条件は  $\eta_i^*$  を定義する問題の双対問題を考えることにより示される. よって、数値計算により *H* を構成することも可能である. w(t) = 0 とした場合の [15] の結果は、 $W = \{0\}$  より  $g_0^* = g^* = 0$  とすることによりえられる.

### 2.4 最大 CPI 集合の構成

2.3 節では状態拘束集合の構成法を示し、またこの内部に属す凸多面体 S が CPI 集合と なるための条件を与えた.しかしながらこのとき、CPI 集合の候補となる S の系統的な与え 方は明らかにできていない. また CPI 集合が、拘束を破ることなく振舞う状態変数の領域で ある、という点からはなるべく大きな領域を明らかにしたい. この点について次の補題が示 される.

補題 2.4.  $S_1, S_2 \subset \mathcal{R}^n$  をそれぞれ (2.1) に対する CPI 集合とする. このとき  $S_3 = co(S_1 \cup S_2)$ もまた (2.1) に対する CPI 集合である.

証明. Z の凸性より,  $S_3 \subseteq X(C, D, Z, W)$  である. 任意の  $x \in S_3, w \in W$  に対して,  $Ax + Bw = \alpha(Ax_1 + Bw) + (1 - \alpha)(Ax_2 + Bw)$  ただし  $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, \alpha \in [0, 1]$  を考え る. このとき  $Ax_1 + Bw \in S_1, Ax_2 + Bw \in S_2$  より  $Ax + Bw \in S_3$  が成立する. よって補題 2.1 より  $S_3$  は CPI 集合である.

補題 2.4 より, (2.1) に対して CPI 集合が存在するとき, 任意の CPI 集合を内部に含む CPI 集合を考えることができる. そこでこの集合を *S*<sub>MAX</sub> と表し, (2.1) に対する最大 CPI 集合と呼ぶ. また次の補題が示される.

補題 2.5. 線形離散時間システム (2.1) が, 任意の外部入力  $w(t) \in W, t \in \mathcal{Z}^+$  に対して拘束 条件  $z(t) \in Z, t \in \mathcal{Z}^+$  をみたすための必要十分条件は, 初期状態に対して  $x(0) \in S_{MAX}$  が 成立していることである.

証明.  $S_{\text{MAX}}$ の定義より十分条件であることがわかる. また  $S_{\text{MAX}}$ は, 拘束をみたす初期 状態全体から構成される. よって制御系が拘束を破ることなく動作するための必要条件は  $x(0) \in S_{\text{MAX}}$ が成立していることである.

注意 2.5. 外部入力を考えない場合、*S*<sub>MAX</sub> は文献 [30] における最大出力許容集合に一致 する.

Gilbert and Tan[30] は,外部入力のない場合について  $S_{MAX}$  の構成法を示した.本章の問題において  $S_{MAX}$  の構成法を示すことは,外部入力の影響下でも制御系が拘束を破ることなく動作する最大の領域を明らかにすることになる.そこで以下では,外部入力を有する系が拘束を破ることなく動作する条件として, $S_{MAX}$  の構成法を提案する.なお外部入力が存在しない系 [30] を考える場合, $W = \{0\}$ とすることにより提案する手法で取り扱うことができる.

状態拘束集合 X(C, D, Z, W) の定義から, 次の性質が成立する.

 $\forall x \in X(C, D, Z, W) : x(0) = x \implies z(0) \in Z$ 

すなわち初期状態が  $x(0) \in X(C, D, Z, W)$  であるならば, 時刻 t = 0 における拘束  $z(0) \in Z$  はみたされる. また X(C, D, Z, W) は, このような初期状態の全体から成っている. しかし ながら t = 1 となった場合,  $z(1) \in Z$  であることは保証されない.

そこで次の集合 *K*<sub>1</sub> を考える.

$$K_{\frac{1}{2}} = \{ x \in \mathcal{R}^n | Ax + Bw \in X(C, D, Z, W) \quad w \in W \}$$
  
$$K_1 = K_{\frac{1}{2}} \cap X(C, D, Z, W)$$

 $x(0) \in K_{\frac{1}{2}}$ であるならば、 $x(1) \in X(C, D, Z, W)$ より時刻 t = 1における拘束  $z(1) \in Z$ はみたされる.また  $K_{\frac{1}{2}}$ は、このような初期状態の全体となっている。しかしながらこのとき、x(0)自身は必ずしも $x(0) \in X(C, D, Z, W)$ をみたさない.よって $z(0) \notin Z, z(1) \in Z$ のように時刻 t = 0における拘束が満たされない場合が起こりうる. $K_1$ は、 $K_{\frac{1}{2}} \ge X(C, D, Z, W)$ の共通集合であるので、次の性質をもつ初期状態の全体となる.

$$\forall x \in K_1 : x(0) = x \implies z(0), z(1) \in Z$$

同様に K<sub>2</sub> を次のように定義する.

$$K_{1\frac{1}{2}} = \{ x \in \mathcal{R}^n | Ax + Bw \in K_1 \quad w \in W \}$$
  
$$K_2 = K_{1\frac{1}{2}} \cap X(C, D, Z, W)$$

14

 $x(0) \in K_{1\frac{1}{2}}$ に対して,  $x(1) \in K_1$  であるから拘束条件  $z(1), z(2) \in Z$  はみたされる.また  $K_{1\frac{1}{2}}$ は、このような初期状態の全体である.しかしながらここでも  $x(0) \in X(C, D, Z, W)$ は保証されないので、 $z(0) \notin Z$ のように拘束がみたされない場合が起こりうる. $K_2$ は、 $K_{1\frac{1}{2}} \geq X(C, D, Z, W)$ の共通集合であるので、次の性質をもつ初期状態の全体となる.

$$\forall x \in K_2 : x(0) = x \implies z(0), z(1), z(2) \in Z$$

ここではこの繰り返し手順により, X(C, D, Z, W) から順に  $K_1, K_2, ...$ を構成し, これにより  $S_{MAX}$  が構成できることを示す. そこで  $K_i, K_{i\frac{1}{2}}, i \in \mathbb{Z}^+$ を次のように定義する.

$$K_0 = X(C, D, Z, W)$$
 (2.9a)

$$K_{(i-1)\frac{1}{2}} = \{ x \in \mathcal{R}^n | Ax + Bw \in K_{i-1} \quad w \in W \}$$
(2.9b)

$$K_i = K_{(i-1)\frac{1}{2}} \cap K_0 \qquad i \ge 1$$
 (2.9c)

注意 2.6.  $K_1, K_2$  に関する考察からわかるように,  $K_i$  は次の性質をもつ初期状態の全体からなっている.

$$\forall x \in K_i : x(0) = x \implies z(k) \in Z \qquad k = 1, \dots, i$$

(2.9)の手順と $S_{MAX}$ は、次の定理により結びつけられる.

定理 2.1. CPI 集合が存在するための必要十分条件は,  $0 \in int K_{\infty}$  であり, このとき  $K_{\infty} = S_{MAX}$ .

証明. 定義より, 任意の  $x \in K_{\infty}, w \in W$  に対して  $Ax + Bw \in K_{\infty}$  が成り立つ. さらに,  $K_{\infty}$  はこのような集合のなかで X(C, D, Z, W) に含まれる最大の集合である. よって  $0 \in \operatorname{int} K_{\infty}$  であるならば  $K_{\infty} = S_{MAX}$ . 逆に CPI 集合が存在するならば, 補題 2.4 よりこれらはすべて  $K_{\infty}$  に含まれる. よって  $0 \in \operatorname{int} K_{\infty}$  であるので  $K_{\infty} = S_{MAX}$ .

定理 2.1 より、CPI 集合が存在するならば、 $S_{MAX}$  は (2.9) にしたがう無限回の繰り返し 計算により構成できる. しかしながら実際に無限回の計算を実行することは不可能である. そこで  $S_{MAX}$  を有限回の計算手順で構成するために文献 [30] と同様に以下の条件を考える.

定義 2.3. (2.9) において,  $K_{\tau} = S_{MAX}$  なる  $\tau \in \mathcal{Z}^+$  が存在する場合,  $S_{MAX}$  は有限回で決定 可能であるという.

S<sub>MAX</sub>の有限回での決定に関して、次の定理が示される.

定理 2.2.  $0 \in int K_{\infty}$  とする.  $S_{MAX}$  が有限回で決定できるための必要十分条件は, (2.9) に おいて  $K_{\tau} = K_{\tau+1}$  となる  $\tau \in \mathcal{Z}^+$  が存在することである. このとき  $K_j = K_{\tau}, j \ge \tau$  であ り,  $S_{MAX} = K_{\tau}$ .

証明のために次の補題を考える.

補題 2.6.  $K_{i\frac{1}{2}}, K_i, i \ge 0$  について、次の関係が成立する.

$$K_{\frac{1}{2}} \supseteq K_{1\frac{1}{2}} \supseteq \cdots \supseteq K_{i\frac{1}{2}} \supseteq \cdots$$
$$K_{0} \supseteq K_{1} \supseteq \cdots \supseteq K_{i} \supseteq \cdots$$

証明.  $K_{i^{1}}, i \in \mathbb{Z}^{+}$ についての関係式を帰納法により導く.

(2.9c) より,  $K_0 \supseteq K_1$  である. (2.9b) から任意の  $x \in K_{1\frac{1}{2}}, w \in W$  に対して  $Ax + Bw \in K_{1\frac{1}{2}}$  $K_1 \subseteq K_0$ が成立する. これは  $x \in K_{\frac{1}{2}}$  でもあること, すなわち  $K_{\frac{1}{2}} \supseteq K_{1\frac{1}{2}}$  を示している.

そこで  $K_{irac{1}{2}} \supseteq K_{(i+1)rac{1}{2}}$  が成立していることを仮定する.(2.9c)より、この仮定のもとで  $K_{i+1} \supseteq K_{i+2}$ である.

(2.9b) から任意の  $x \in K_{(i+2)\frac{1}{2}}, w \in W$  に対して  $Ax + Bw \in K_{i+2} \subseteq K_{i+1}$  が成立する. こ れは  $x \in K_{(i+1)\frac{1}{2}}$  でもあること、すなわち  $K_{(i+1)\frac{1}{2}} \supseteq K_{(i+2)\frac{1}{2}}$  を意味する. 

またこのとき  $K_i$  に関する関係式は (2.9c) より導かれる.

証明 (定理 2.2).  $K_{ au}=K_{\infty}=S_{\mathrm{MAX}}$ となる au が存在したとする. このとき補題 2.6 か ら  $K_{\tau} = K_{\tau+1} = \cdots = K_{\infty}$ . 逆に  $K_{\tau} = K_{\tau+1}$  なる  $\tau$  を考える. (2.9c) より,  $K_{\tau+1} =$  $K_{\tau^{\frac{1}{2}}} \cap K_0 \subseteq K_{\tau^{\frac{1}{2}}}$ であるが,  $K_{\tau} = K_{\tau+1}$ より任意の  $\hat{x} \in K_{\tau}$  は  $\hat{x} \in K_{\tau^{\frac{1}{2}}}$ でもある. これは 任意の  $w \in W$  について  $A\hat{x} + Bw \in K_{\tau}$  を意味するので,  $K_{\tau}$  は CPI 集合である. よって  $K_{\tau} = K_{\tau+1} \subseteq K_{\infty} = S_{\text{MAX}}$ . さらに補題 2.6 より  $K_j = S_{\text{MAX}}, j \ge \tau$ . 

注意 2.7. 外部入力が存在しない場合 [30], 補題 2.6, 定理 2.2 に対応する結果は文献 [30] に 示されている. ここでの結果は,  $w(t) \neq 0$  である場合への拡張である (注意 2.9 参照).

注意 2.8. S<sub>MAX</sub> を構成するための計算手順 (2.9) に対して, 定理 2.2 はこれを停止させるた めの判定基準である.よって S<sub>MAX</sub> の構成は (2.9) の計算手順と次の 2 つの停止条件により 実現される.

1 つめの停止条件は  $K_{\tau} = K_{\tau+1}$  なる  $\tau$  が存在する場合である. このとき CPI 集合が存 在して、定理 2.2 により  $K_{\tau} = S_{\text{MAX}}$  である. ただしこの場合、どのような制御系に対して  $K_{\tau} = K_{\tau+1}$ なる  $\tau$  が存在し有限回での決定が可能であるかは明らかでない.よって対象に よっては無限回の計算を実行しなければならないことも考えられる. この問題は次の 2.5 節 で取り扱う.

別の停止条件は  $0 \notin \operatorname{int} K_{\infty}$ , すなわち CPI 集合が存在しない場合である (定理 2.1).  $0 \in$  $\operatorname{int} K_{\infty}$ の条件は、補題 2.6 より任意の  $\tau \in \mathcal{Z}^+$  に対して  $0 \in \operatorname{int} K_{\tau}$  が成立することに等し い. よって CPI 集合が存在しない場合,  $0 \notin \operatorname{int} K_{\tau}$  なる  $\tau$  が存在し (2.9) の手順は有限回で 停止する.

#### 最大 CPI 集合の有限回での決定可能性 2.5

2.4 節の結果より, S<sub>MAX</sub> は (2.9) にしたがう計算手順を用いて構成できる. この結果に加 え S<sub>MAX</sub> が有限回で決定可能となるための条件は次のようになる.

定理 2.3.  $0 \in int K_{\infty}$  であり, (C, A) は可観測, A は漸近安定であるとする. このとき  $S_{MAX}$  は, 有限回で決定可能である.

証明のために次の補題を考える.

補題 2.7. (C, A) は可観測であるとする. このとき  $K_i$ ,  $i \ge n-1$  は有界である.

証明. 補題 2.6 より, *K<sub>n-1</sub>* が有界であることを示せば十分である. まずいくつかの記号を定 義し, これらを用いて *K<sub>n-1</sub>* を表す.

 $K_0 = X(C, D, Z, W)$ は, (2.6)で与えられた. また (2.6), (2.9) により,  $K_1$ は次の条件式により表される.

$$K_1 = \{x \in \mathcal{R}^n | \begin{bmatrix} M_Z C A \\ M_Z C \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} \mathbf{1} - g_0^* - M_Z C B w \\ \mathbf{1} - g_0^* \end{bmatrix} \quad w \in W\}$$

そこで (2.5) にならって,  $g_i^*, i \in \mathbb{Z}^+$  を次の線形計画問題により定義する.

$$(g_i^*)_j = \text{maximize } (M_Z C A^{i-1} B)_{(j,:)} w$$
 (2.10a)

subject to 
$$w \in W$$
  $j = 1, \dots, s_Z, \quad i \ge 1$  (2.10b)

ここで g<sub>0</sub><sup>\*</sup> は (2.5) で定義される.

このとき *K*<sub>1</sub> を構成したのと同様に *K*<sub>n-1</sub> が次のように表される.

$$K_{n-1} = \{ x \in \mathcal{R}^n | \begin{bmatrix} M_Z C A^{n-1} \\ M_Z C A^{n-2} \\ \vdots \\ M_Z C \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} \mathbf{1} - \sum_{j=0}^{n-1} g_j^* \\ \mathbf{1} - \sum_{j=0}^{n-2} g_j^* \\ \vdots \\ \mathbf{1} - \sum_{j=0}^{0} g_j^* \end{bmatrix} \}$$

*K*<sub>*n*-1</sub> を構成する各条件式に対応して,

$$Z^{i} = \{ \zeta \in \mathcal{R}^{p} | M_{Z} \zeta \leq \mathbf{1} - \sum_{j=0}^{i} g_{j}^{*} \}$$

を定義する.また、これを用いて

$$Z_i = Z^i \times Z^{i-1} \times \dots \times Z^0 \subset \mathcal{R}^{(p \times (i+1)) \times 1}$$

を定義する.最後に,

$$\mathcal{O}_{i} = \begin{bmatrix} CA^{i} \\ CA^{i-1} \\ \vdots \\ C \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(p \times (i+1)) \times n} \qquad i \in \mathcal{Z}^{+}$$

とすれば  $K_{n-1} = \{x \in \mathcal{R}^n | \mathcal{O}_{n-1}x \in Z_{n-1}\}$  により  $K_{n-1}$  が表現される.

次に  $Z_i$  が有界であることを示す. (2.10) において,  $0 \in W$  であることから  $g_i^* \ge 0$ . よって  $Z \supseteq Z^0 \supseteq \cdots$ . すなわち, Z が有界であることから各  $Z^i$  は有界であり, さらに  $Z_i$  についても有界である.

最後に  $K_{n-1}$  が有界であることを確認する. 任意の  $x \in K_{n-1}$  にたいして,  $\mathcal{O}_{n-1}x = \rho \in Z_{n-1}$  とおく. ここで rank $\mathcal{O}_{n-1} = n$  であることから, x は  $\rho$ ,  $\mathcal{O}_{n-1}$  を用いて,

$$x = (\mathcal{O}_{n-1}^T \mathcal{O}_{n-1})^{-1} \mathcal{O}_{n-1}^T \rho$$

と一意に表される.  $\rho \in Z_{n-1}$  は有界なベクトルであるので x もまた有界である. 証明 (定理 2.3). 補題 2.7 の証明での記号を用いて,  $K_i = \{x \in \mathcal{R}^n | \mathcal{O}_i x \in Z_i\}$  また  $K_{i+1} = K_i \cap \{x \in \mathcal{R}^n | CA^{i+1}x \in Z^{i+1}\}$  とそれぞれ表せる.

補題 2.6 から  $0 \in \operatorname{int} K_{\infty}$  の仮定は  $0 \in \operatorname{int} K_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}^+$  と等価である. また  $K_i = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathcal{O}_i x \in Z_i\}$  より,  $0 \in \operatorname{int} K_i$  であるための必要十分条件は,  $0 \in \operatorname{int} Z_i$  である. さらに  $Z_i$ の定義と  $Z \supseteq Z^0 \supseteq \cdots$  から,  $0 \in \operatorname{int} Z_i$  が成立することは,  $0 \in \operatorname{int} Z^i$  と等価である.

補題 2.7 より,  $i \ge n-1$  のとき  $K_i \subset S(r)$  なる r > 0 が存在する. ここで  $S(r) \subset \mathcal{R}^n$  は, 半径 r の原点を中心とする開球である.  $i \to \infty$  のとき  $CA^i \to 0$  であり,  $0 \in \operatorname{int} Z^i$  である ことから, 任意の  $s \in S(r)$  に対して  $CA^{i+1}s \in Z^{i+1}$  なる  $i \ge n-1$  が存在する. このとき  $K_i \subset S(r)$  より  $K_i \subset \{x \in \mathcal{R}^n | CA^{i+1}x \in Z^{i+1}\}$ . これよりよって  $K_{i+1} = K_i$  であり定理 2.2 より  $S_{MAX} = K_i$ .

注意 2.9. 外部入力が存在しない場合 [30], 補題 2.7 および定理 2.3 に対応する結果は文献 [30] に示されている. ここでの結果は,  $w(t) \neq 0$  である場合への拡張である.

注意すべき点は、定理 2.3 に定理 2.2 と同じく  $0 \in int K_{\infty}$  の条件が必要となることである (注意 2.7). これは CPI 集合が存在するための必要十分条件である (定理 2.1).

w(t) = 0の場合, A がリアプノフ安定かつ  $0 \in int Z$  であるならば CPI 集合が存在する [30]. よってこのような条件を考慮する必要はない.  $0 \in int K_{\infty}$ は,  $w(t) \neq 0$  としたことによ り必要となった条件である.

注意 2.10. (C, A) は可観測, A は漸近安定とする. 注意 2.8 と定理 2.3 より, CPI 集合が存 在するならば  $S_{MAX}$  が有限回で決定可能, CPI 集合が存在しない場合  $0 \notin \operatorname{int} K_{\tau}$  なる  $\tau$  が 存在する. よって (2.9) の手順は必ず有限回で停止する.

注意 2.11. (C, A) が可観測でない場合, 文献 [30] で考えられたのと同様に (2.1) の状態変数 を可観測な部分とそうでない部分にわけて考えることにより S<sub>MAX</sub> が構成可能である. よっ て (C, A) を可観測とする仮定は一般性を失わない.

#### 2.6 最大 CPI 集合の数値計算

 $S_{\text{MAX}}$ を数値的に構成するには (2.9) を実行する計算手順を与えればよい (注意 2.8, 注意 2.10). ここでは各  $K_i$ に対して  $K_i = \text{Set}(M_i)$  を実現する行列  $M_i$ の構成手順を示す. なお

18

この過程において、各  $K_i$  を規定する行列  $M_i$  から、不必要な要素を取り除く操作が必要となる. そこでこの操作を行列  $M_i$  に対して施すことを  $\operatorname{Elim}[M_i]$  であらわす. また具体的な 手順については、この節の最後にまとめる.

まず  $K_0 = X(C, D, Z, W)$  について考える.  $K_0$  は (2.6) で与えられる. このとき

 $1 - g_0^* \neq 0$ 

ならば  $0 \notin \operatorname{int} K_0$  より CPI 集合は存在しない.  $1 - g_0^* > 0$  である場合,

$$(M_0^r)_{(i,:)} = \frac{(M_Z C)_{(i,:)}}{1 - (q_0^*)_i}$$

により  $M_0^r$  を構成する. このとき  $K_0 = \text{Set}(M_0^r)$  である. さらに  $M_0^r$  が冗長な表現になって いることを避けるため,  $M_0 = \text{Elim}[M_0^r]$  とする. これにより  $K_0 = \text{Set}(M_0)$  が実現される.  $K_{\frac{1}{2}}$  は,

$$K_{\underline{1}} = \{ x \in \mathcal{R}^n | Ax + Bw \in K_0 \quad w \in W \}$$

で定義された.これは $M_0$ を用いて,

$$K_{\frac{1}{2}} = \{ x \in \mathcal{R}^n | M_0 A x \le \mathbf{1} - M_0 B w \quad w \in W \}$$

そこで $M_0$ の各行ごとに次の線形計画問題を考え、これにより $g_{\frac{1}{2}}^*$ を定義する.

 $(g_{\frac{1}{2}}^*)_i =$ maximize  $(M_0B)_{(i,:)}w$ subject to  $w \in W$ 

これを用いて  $K_{\frac{1}{2}} = \{x \in \mathcal{R}^n | M_0 A x \leq 1 - g_{\frac{1}{2}}^* \}.$ ここで  $1 - g_{\frac{1}{2}}^* \neq 0$  ならば  $0 \notin \operatorname{int} K_{\frac{1}{2}}$  より CPI 集合は存在しない.  $1 - g_{\frac{1}{2}}^* > 0$  である場合,

$$(M_{\frac{1}{2}})_{(i,:)} = \frac{(M_0 A)_{(i,:)}}{1 - (g_{\frac{1}{2}}^*)_i}$$

により  $M_{\frac{1}{2}}$ 構成する. これにより  $K_{\frac{1}{2}} = \operatorname{Set}(M_{\frac{1}{2}})$  が実現される. 次に  $K_1 = K_{\frac{1}{2}} \cap K_0$  より,

$$K_1 = \{ x \in \mathcal{R}^n | \begin{bmatrix} M_{\frac{1}{2}} \\ M_0 \end{bmatrix} x \le \mathbf{1} \}$$

そこで  $M_1^r = [M_{\frac{1}{2}}^T M_0^T]^T$  とおく.  $M_1 = \operatorname{Elim}[M_1^r]$  により  $K_1 = \operatorname{Set}(M_1)$  が実現される.

上記の手順を繰り返すことにより  $K_0 = \operatorname{Set}(M_0)$  を実現する  $M_0$  から各  $M_i$  が構成される. また  $S_{\text{MAX}}$  を決定するには  $K_i = K_{i+1}$  を判定しなければならない. これは各  $M_i$  の構成手順と  $\operatorname{Elim}[\cdot]$  より  $M_i = M_{i+1}$  が確認できればよい. このとき  $S_{\text{MAX}} = K_i = \operatorname{Set}(M_i)$ である. 以上をまとめると  $S_{\text{MAX}}$  を構成するための次の手順がえられる.

19

*S*<sub>MAX</sub> の構成手順:

データ  $M_0$ 

ステップ 1) i = 1 とする.

ステップ 2) 次の線形計画問題により  $g^*_{(i-1)\frac{1}{2}}$  を定義する.

$$(g_{(i-1)\frac{1}{2}}^*)_j = \text{maximize } (M_{i-1}B)_{(j,:)}w$$
  
subject to  $w \in W$ .

ステップ 3)  $1 - g^*_{(i-1)\frac{1}{2}} \neq 0$ ならば CPI 集合は存在しない.よって  $S_{\text{MAX}} = \emptyset$ として終了.  $1 - g^*_{(i-1)\frac{1}{2}} > 0$ ならば  $M_{(i-1)\frac{1}{2}}$ を次のように構成する.

$$(M_{(i-1)\frac{1}{2}})_{(j,:)} = \frac{(M_{i-1}A)_{(j,:)}}{1 - (g^*_{(i-1)\frac{1}{2}})_j}$$

ステップ 4)  $M_i^r = \begin{bmatrix} M_{(i-1)\frac{1}{2}}^{\mathrm{T}} & M_0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$  とおき  $M_i = \operatorname{Elim}[M_i^r]$ を求める.

ステップ 5)  $M_{i-1} = M_i$  ならば  $S_{MAX} = Set(M_{i-1})$  として終了. そうでない場合 i := i + 1として ステップ 2) へ戻る.

この手順において、制御系が定理 2.3 の仮定をみたしているならば  $S_{MAX}$  が有限回で決定 される. また CPI 集合が存在しない場合には  $0 \notin \operatorname{int} K_{\tau}$  なる  $\tau$  が存在し、やはりこの手順 は有限回で停止する.

Elim[·] の実現

 $M^r \in \mathcal{R}^{m \times n}$  に対して  $K = Set(M^r)$  を考える. このときある i に対して  $M^r_{(i,:)}$  は, K を表現するのに不必要な場合がある.  $M^r$  を与えることにより計算機上に凸多面体を実現する場合, 不必要な  $M^r_{(i,:)}$  は省くことにしないとデータ数が大きくなり扱いづらい. そこでこのための手順を考える.

 $M_{(i,\cdot)}^r$ が不必要であるのは次のa), b) いずれかの場合である.

a)  $M_{(i,:)}^r = M_{(i,:)}^r$  なる  $1 \le i < j \le m$  が存在する.

b) 次の線形計画問題を考える.

 $h = \text{maximize } (M^r)_{(i,:)} x$ subject to  $x \in \text{Set}(M^r)$ 

このとき h < 1 となる.

そこで a), b) いずれの場合も  $M^r_{(i,:)}$  を取り省き i+1 行目以下を 1 行づつ繰り上げる. この操作により K = Set(M) を実現し, かつより小さな行数をもつ M が得られる.

この M に対して  $M_{(k,:)}$ ,  $M_{(l,:)}$ ,  $k \neq l$  を入れ換えて得られる行列を  $\hat{M}$  とすると  $K = Set(\hat{M})$  であるから, 一般に  $K = Set(\cdot)$  の形で K を表現できる行列は M の各行の組合せ の数だけ存在する. しかしながら上の操作を施すだけではこのような問題は起こらないの で, 得られる M は一意である. この操作を与えられた行列  $M^r$  に対して適用することを  $Elim[M^r]$  と表す.

#### 2.7 数值例

例題 2.1 の状態フィードバックシステム (2.4)

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0.1 & 2.0 \\ -0.8 & 2.0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \\ u(t) &= -\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) \\ x_0^1 &= \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_0^2 &= \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

をふたたび考える.

(2.4) に対して 2.6 節の手順を適用し, 最大 CPI 集合を構成する. このとき  $K_3 = K_4$  が成 立し,  $S_{\text{MAX}} = K_3$  である. これは Fig. 2.2(a) の実線で囲まれる凸多面体となる. なお図中 一点鎖線で挟まれる領域は (2.4) に対する状態拘束集合である. また例題 2.1 と同様に, 外 乱を  $w(t) \equiv 1$  とした場合の 2 つの初期状態  $x_0^1, x_0^2$  に対する状態変数の軌跡を最大 CPI 集 合とともに Fig. 2.2(b) に示す. 例題 2.1 でみたように,  $x_0^1$  および  $x_0^2$  を初期状態とする応答 が拘束をみたさなかったのは,  $x_0^1, x_0^2$  が共に  $S_{\text{MAX}}$  に属さない状態であったからである.

つぎに状態フィードバック系 (2.4) において  $w(t) \equiv 0$  である場合を考え, このときの最大 CPI 集合を構成する. すなわちつぎの系に対する最大 CPI 集合を構成する.

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 2.0 \\ -0.8 & 2.0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
(2.11a)

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} x(t)$$

$$x_0^1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_0^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$
(2.11b)

(2.11) に対し 2.6 節の手順を適用し最大 CPI 集合を構成する. このとき  $K_2 = K_3$  が成立し S<sub>MAX</sub> =  $K_3$  である. 最大 CPI 集合を実線で, Fig. 2.2(a) に示した (2.4) に対する最大 CPI 集合を破線で, それぞれ Fig. 2.3(a) に示す. また図中一点鎖線で挟まれる領域は (2.11) に対 する状態拘束集合である. 外乱の影響がなくなったことから (2.11) に対する最大 CPI 集合 が, (2.4) に対する最大 CPI 集合に対して, より拡大していることがわかる. また例題 2.1 で みたように, 外乱が存在しない場合, 初期状態  $x_0^1$  に対する応答が拘束条件  $|u| \leq 5$  を常に達



tem (2.4)

Fig. 2.2: Maximal CPI set and state trajectories in phase plane for the system (2.4)

成するのに対し、初期状態  $x_0^2$  に対する応答は拘束条件を破ってしまう. これは Fig. 2.3(a) に示すように  $x_0^1$  が最大 CPI 集合に属しているのに対し、 $x_0^2$  が最大 CPI 集合に属さない初 期状態であったからであることがわかる. また Fig. 2.3(b) に示す初期状態  $x_0^1$ 、 $x_0^2$  に対する 応答からも拘束条件が破られる様子がわかる.

状態フィードバック系 (2.4) に対する拘束条件は,  $|u| \le 5$ ,  $u = -\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} x$  であった. これは (2.1) において, D = 0 である系に対応する. そこで  $|u| \le 5$  ただし

$$u = -\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} x + 0.7w$$

として最大 CPI 集合を構成する. すなわちつぎの系を考える. ただしここで, 拘束条件および外部入力の大きさについては(2.4), (2.11) に対するものと同一とする.

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 2.0 \\ -0.8 & 2.0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(t)$$
(2.12a)

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) + 0.7w(t)$$
 (2.12b)

この場合  $K_4 = K_5$  が成立し,最大 CPI 集合はやはり有限回で決定可能である. また (2.12) に対する最大 CPI 集合は Fig. 2.4 の実線で囲まれる凸多面体となる. なお図中一点鎖線は (2.12) に対する状態拘束集合であり,点線で囲まれる凸多面体は (2.4) に対する最大 CPI 集 合である. (2.12) に対する最大 CPI 集合は,外乱が直接拘束条件に影響を与えることから, (2.4) に対する最大 CPI 集合に比較し,縮小していることがわかる. また (2.12) が拘束を 破ることなく振舞うための必要十分条件は,初期状態がこの領域の内部に属していることで ある.



Fig. 2.3: Maximal CPI set and state trajectories in phase plane for the system (2.11)

つぎに拘束条件および外部入力の大きさが最大 CPI 集合に与える影響をみるため,集合 Z および 集合 W を変更し(2.4), (2.12) に対する最大 CPI 集合を構成する. まずはじめに拘束条件を  $-2 \le u \le 5$  である場合を考える. すなわち (2.3) において z = u

$$Z = \{ z \in \mathcal{R} | \begin{bmatrix} -1\\1 \end{bmatrix} z \le \begin{bmatrix} 2\\5 \end{bmatrix} \}$$

である場合を考える. ただしここで外部入力については  $|w| \le 1$  であるとする. この場合 (2.4) に対しては  $K_8 = K_9$  が成立し最大 CPI 集合が構成される. しかしながら (2.12) に対す る最大 CPI 集合は空集合となる. したがって (2.12) に対しては, 常に拘束条件  $-2 \le z \le 5$ が破られるような外乱 w(t) ただし  $|w| \le 1$  が存在する. (2.4) に対する最大 CPI 集合を



Fig. 2.4: Maximal CPI set for the system (2.12)
Fig. 2.5 に示す. 拘束条件が厳しくなったことから, Fig. 2.2(a) に比較し, 最大 CPI 集合が 縮小している. また拘束条件の非対称性から, 歪んだ最大 CPI 集合がえられている.



Fig. 2.5: Maximal CPI set for the system (2.4)

最後に外部入力が  $-\frac{1}{10} \le w \le 1$ , すなわち

$$W = \{ w \in \mathcal{R} | \begin{bmatrix} -1\\1 \end{bmatrix} w \le \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}\\1 \end{bmatrix} \}$$

で与えられる集合により規定される場合を考える. この場合 (2.4), (2.12) のいずれに対して も  $K_3 = K_4$  が成立し最大 CPI 集合が構成される. (2.4) に対する最大 CPI 集合を状態拘束 集合とともに Fig. 2.6(a) に示す. また (2.12) に対する最大 CPI 集合を実線で, (2.4) に対す る最大 CPI 集合を破線で Fig. 2.6(b) に示す. Fig. 2.2(a) および Fig. 2.4 の場合と比較し, 外部入力の非対称性の影響により, えられる最大 CPI 集合が歪んでいることがわかる.

### 2.8 まとめ

外部入力を有する線形離散時間システムが拘束を破ることなく動作する条件を考えるため,状態拘束集合,正の不変集合の概念にもとづいて CPI 集合を提案した.

CPI 集合を構成するために,まず状態拘束集合の構成法を示し,この内部に含まれる凸多 面体が CPI 集合となるための条件を示した.

すべての CPI 集合をその内部に含む最大 CPI 集合が存在することを示し、この構成法を 提案した. さらに提案手法を用いることにより、最大 CPI 集合が有限回の計算により構成で きることを明らかにした. この提案手法を実現する具体的な計算手順を線形計画法を用いる ことにより示し、最大 CPI 集合の計算例を示した. このとき外部入力を有する線形離散時 間システムが拘束を破ることなく動作するための必要十分条件は、その初期状態が最大 CPI 集合に属していることである.

2.8. まとめ





(b) maximal CPI set for the system (2.12)

Fig. 2.6: Maximal CPI sets for the systems (2.4) and (2.12)

# 第3章 拘束システムのスイッチング状態 フィードバック制御

ここでは、複数の補償器を構成しこれらを切り換えながら適用するスイッチング制御則を導 出する.提案するスイッチング制御則を構成する各補償器は、順次拡大する最大 CPI 集合を もつように構成される.また各補償器の設計問題は、いずれも大域的最適化が可能な数理計 画問題に帰着される.くわえて、最大 CPI 集合が与える領域にもとづいた補償器の切り換え アルゴリズムは、単純で実装が容易なものである.このスイッチング制御則により、拘束シス テムが広い動作領域で安定化されるとともに制御性能の劣化を抑制することが可能となる.

# 3.1 はじめに

現実の制御系には、アクチュエータの飽和要素、制御対象の保護のための制限など、多くの 拘束条件が存在する[27]. このとき補償器には、要求される制御性能を、拘束条件をみたしな がら達成しなければならない、という一般に相反する性能が要求される.

近年,このような問題に対するスイッチング制御によるアプローチが注目されている[56]. なかでも,線形制御理論の枠組で複数の補償器を構成し,これらを切り換えるスーパーバ イザを構成する問題では[71,43],単純なアイデアでありながら大きな効果がえられている (Fig. 3.1 参照).

文献 [71] では、線形システムに対する正の不変集合の性質にもとづき、制御系が拘束を破ることなく安全に動作する、という条件のもとでスーパーバイザが構成される.しかしながらこのときの切換えアルゴリズムは、制御系が安全に動作する、という観点からは保守的な切換えとなっている.補償器の切換えにともなう保守性は、拘束を有する制御系の解析に利用される最大 CPI 集合 [30, 42, 73] の性質を利用することで軽減することが可能である [43].しかしながらこの場合、個々の補償器の具体的な構成法はこれまで示されていない.

本章では、制御入力に制限を有する制御系に対して、最大 CPI 集合の性質にもとづいた、 新たなスイッチング状態フィードバック制御則を提案する.まず 3.2 節では、本章で考察す るシステムの記述を示す.3.3 節 では、これまでの研究結果を簡単に振りかえるとともに問 題の定式化をおこなう.スイッチング制御則をえるには個々のフィードバックゲインの構成 とこれらの切換えアルゴリズムが必要となる.3.4 節でフィードバックゲインの構成法を示 し、3.5 節ではスイッチング制御則を導出する.3.6 節では設計例を示し、シミュレーション により提案するスイッチング制御則の有効性を確認する.また 3.7 節では、本章でえられた 制御則の問題点とその改善法を簡単にまとめる. 記号:  $\mathcal{Z}^+$  により 0 を含む正の整数全体,  $\mathcal{R}$  により実数の全体をそれぞれあらわす.  $a^{\mathrm{T}}$  は, 行列あるいはベクトル a の転置をあらわす. ベクトル a に対して,  $a_i$  は a の i 番目の要素 をあらわす. 行列 A に対して,  $A_{(i,:)}$  は A の i 行ベクトルをあらわす. 同様に  $A_{(i,i)}$  は A の (i,i) 要素をあらわす. また Tr A は, A のトレースである.  $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $\rho > 0$  に対し て,  $E(\rho, P) = \{x \in \mathcal{R}^n | x^{\mathrm{T}} Px \leq \rho\}$  とする.

### 3.2 拘束システム

制御入力に制限を有するつぎの線形離散時間システムを考える.

$$x(t+1) = Ax(t) + B_1(x_0\delta(t)) + B_2u(t)$$
(3.1a)

 $z(t) = C_1 x(t) \tag{3.1b}$ 

$$y(t) = C_2 x(t) = x(t)$$
 (3.1c)

$$|u_j| \le \bar{u}_j \qquad j = 1, \dots, m \tag{3.1d}$$

ここで  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  は状態,  $x_0$  は初期状態,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$  は制御入力,  $z(t) \in \mathcal{R}^p$  は被制御量また y(t) = x(t) を観測出力とする.  $\delta(t)$  は t = 0 で 1, それ以外の場合 0 の値をとる関数である.  $A, B_1 = A, B_2, C_1, C_2 = I_n$  は, それぞれ適当な大きさをもった定数行列であり, つぎの標 準的な仮定をおく (Fig. 3.1 参照).

仮定 **3.1.** (*C*<sub>1</sub>, *A*, *B*<sub>2</sub>) は, 可検出・可安定

 $\bar{u}_j > 0, j = 1, ..., m$ は、アクチュエータの物理的な制限などによる制御入力の拘束を規定するため、あらかじめ与えられる値である.許容される制御入力の集合 U をつぎのように定義しておく.

 $U = \{ u \in \mathcal{R}^m | |u_j| \le \bar{u}_j \quad j = 1, \dots, m \}$ 

なお (3.1) および Fig. 3.1 では, 初期状態 x<sub>0</sub> を外乱のように扱っているが, これは 3.4 節に おいてフィードバックゲインを設計する際の見通しをよくするためである.

制御入力に制限を有する (3.1) に定数状態フィードバック制御則を適用することを考える. 制御性能を重視し '積極的な' フィードバックゲインをもちいる場合, 入力拘束の影響により 安定性を保証できる初期状態の集合は小さなものになる. より '保守的な' フィードバックゲ インをもちいることにより, 広い初期状態の集合に対する制御が可能となるが, えられる制 御性能は低いものとなる.

このように考えた場合, 各時刻における状態変数の瞬時値に適応し, フィードバックゲインを切り換える, と考えるのは最も基本的なアイデアであると思われる [71, 43].

本章では、望ましい制御性能を有する積極的なフィードバックゲイン  $F_0$  から、広い初期状態の集合に対して安定性を保証する保守的な  $F_k$  までの系列

$$\mathcal{F} = \{F_i \in \mathcal{R}^{m \times n} | i = 0, 1, \dots k\}$$

の構成法を示す. つぎに, 優れた制御性能とより広い初期状態の集合に対する制御を両立させるため, これらのフィードバックゲインの切換えをともなう, 区分的に線形なスイッチング状態フィードバック制御則  $u(t) = \mathcal{F}(x(t))$ を導出する (Fig. 3.1 参照).



Fig. 3.1: State and control constrained system and piecewise-linear compensator

# 3.3 問題の定式化

フィードバックゲイン  $F_i$  と 制御対象 (3.1) により構成される閉ループ系を記号  $\Sigma_c^i$  であらわす.

$$\Sigma_{c}^{i} \qquad x(x+1) = (A + B_{2}F_{i})x(t) + B_{0}(x_{0}\delta(t))$$
$$z(t) = Cx(t)$$

入力拘束が存在しない場合、 $\Sigma_{c}^{i}$ は漸近的に安定であると仮定する.

ここで  $\Sigma_{c}^{i}$  に対する正の不変集合の概念を導入する [30, 42, 73]. 集合  $T \subset \mathcal{R}^{n}$  は, 任意の  $x(t) \in T$  に対して  $x(t+1) \in T$  をみたすとき  $\Sigma_{c}^{i}$  に対する正の不変集合 (positively invariant set) と呼ばれる [30].

さらに  $F_iT \subseteq U$  が成立する場合, T は CPI 集合 (Constrained Positively Invariant set) と呼ばれ [73], 任意の初期状態  $x(0) \in T$  に対して  $\Sigma_c^i$  は入力制限を破ることなく  $x(t) \to 0$ ,  $t \to \infty$  を達成する.

 $F_i$ の *j* 行ベクトル  $(F_i)_{(j,:)}$ をもちいると  $u_j = (F_i)_{(j,:)}x$ である.入力制限は  $|u_j| = |(F_i)_{(j,:)}x| \le \bar{u}_j$ であるから,  $F_iT \subseteq U$ は, 各  $j = 1, \ldots, m$  に対して,  $(F_i)_{(j,:)}x = \bar{u}_j$ および  $(F_i)_{(j,:)}x = -\bar{u}_j$ であらわされる平面と,正の不変集合 *T* のあいだに Fig. 3.2 のような位置関係を要求している.



Fig. 3.2: Geometrical representation of CPI set

 $P_i \ge \Sigma_c^i$ に対するリアプノフ方程式  $(A + B_2 F_i)^T P_i (A + B_2 F_i) - P_i + R = 0, R \ge 0$ の解とする. このとき  $\rho > 0$  をもちいてつぎの楕円体を定義する.

$$E(\rho, P_i) = \{ x \in \mathcal{R}^n | x^{\mathrm{T}} P_i x \le \rho \}$$

拘束条件を考慮しない場合、任意の $\rho > 0$ に対して楕円体  $E(\rho, P_i)$ は、 $\Sigma_c^i$ に対する正の不 変集合となる [71, 30]. そこで  $F_i E(\rho^i, P_i) \subseteq U$ を達成するように  $\rho^i$ を選ぶことにより、 $\Sigma_c^i$ に対する CPI 集合をえることが可能である. このとき任意の初期状態  $x_0 \in E(\rho^i, P_i)$ に対 して、 $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ かつ $u(t) \in U \forall t \in \mathcal{Z}^+$ が達成される.

文献 [71] では、この事実にもとづいた切換え型の状態フィードバック制御則が提案されている. ここでは  $F_i$ ,  $P_i$ ,  $\rho^i$  から

$$E(\rho^i, P_i) \subset E(\rho^{i+1}, P_{i+1})$$

を達成する  $F_{i+1}$ ,  $P_{i+1}$ ,  $\rho^{i+1}$  が重み行列を変化させながらリカッチ方程式を繰り返し解くこ とより, 数値的に構成可能であることが示されている. そこで各フィードバックゲインがこ の繰返し計算により構成され, 楕円体  $E(\rho^i, P_i)$  がフィードバックゲインの切換え平面として 利用される (Fig. 3.3 参照). これにより, 状態変数 x(t) の値に応じて積極的なフィードバッ クゲイン  $F_i$  を適用することが可能となっている.

しかしながら近年, 拘束を有する系の解析につぎのように定義される最大 CPI (Constrained Positively Invariant ) 集合をもちいることが提案されている [30, 42, 73].

定義 3.1 (最大 CPI 集合 [73]). 初期状態  $x(0) = x_0$  により決定される閉ループ系  $\Sigma_c^i$  の入 力を  $u(t; x_0)$  とする.  $\Sigma_c^i$ に対する最大 CPI 集合をつぎのように定義する.

$$O_{\infty}^{i} = \{ x_{0} \in \mathcal{R}^{n} | u(t; x_{0}) \in U \quad \forall t \in \mathcal{Z}^{+} \}$$

注意 3.1.  $O_{\infty}^{i}$  は,  $\Sigma_{c}^{i}$  に対するすべての CPI 集合をその内部に含む最大の CPI である [30, 42, 73]. よって  $\Sigma_{c}^{i}$  が入力制限を破ることなく動作するための必要十分条件は,  $x(0) \in O_{\infty}^{i}$  が成立していることである.



Fig. 3.3: Switching diagram with ellipsoids (left) and maximal CPI sets (right)

最大 CPI 集合  $O_{\infty}^{i}$  は、 ゲイン  $F_{i}$  を適用することが可能となる状態変数の全体から構成 される. すなわち、ある時刻 t において、制御則  $u(t) = F_{i}x(t)$  が適用できるための必要かつ 十分な条件は、  $x(t) \in O_{\infty}^{i}$  である. そこで  $O_{\infty}^{i}$  をフィードバックゲインの切換え平面として 利用することが考えられる. これは  $O_{\infty}^{i}$  に含まれる一つの正の不変集合である楕円体を切 換え平面にもちいるのと対照的であり、より積極的なゲインの切換えが実現される (Fig. 3.3 参照). 以下ではつぎの問題を考える.

問題 3.1. 与えられた望ましい制御性能を有するフィードバックゲイン  $F_0$  により構成される閉ループ系  $\Sigma_c^0$  に対して、

$$O^0_\infty \subset O^1_\infty \subset \cdots \subset O^k_\infty$$

を達成するフィードバックゲインの系列 $F_i$ , i = 1, 2, ..., kの設計法を与えよ.

問題 3.2. 問題 3.1 により与えられるフィードバックゲインの系列  $\mathcal{F} = \{F_i \in \mathcal{R}^{m \times n} | i = 0, 1, \dots, k\}$ をもちいて、初期状態の影響を速やかに減衰させるフィードバックゲインの切換 えアルゴリズムを示せ、

# 3.4 フィードバックゲインの構成

ここでは  $F_{i-1}, O_{\infty}^{i-1}, P_{i-1}$  から  $O_{\infty}^{i-1} \subset O_{\infty}^{i}$  を実現する  $F_i, O_{\infty}^{i}, P_i$  の構成手順を示す. ここで  $\Sigma_{c}^{i}$  が達成すべき条件は  $O_{\infty}^{i-1} \subset O_{\infty}^{i}$  である.

まず,

$$\rho_{+}^{i-1} = \min\{\rho \in \mathcal{R} | O_{\infty}^{i-1} \subset E(\rho, P_{i-1})\}$$
(3.2)

31

により  $\rho_+^{i-1}$  を定義する. これは,  $O_\infty^{i-1}$  の楕円体  $E(\rho_+^{i-1}, P_{i-1})$  による近似である (注意 3.3, Fig. 3.4 参照).



Fig. 3.4: Geometrical representation of design procedure

つぎに  $\Sigma_c^i$ の漸近的な安定化,  $E(\rho_+^{i-1}, P_{i-1}) \subset E(\rho_-^i, P_i)$  および制御入力の制限を考慮し  $F_i E(\rho_-^i, P_i) \subset U$ の三つの条件, すなわち

<b>条件</b> 1	$\Sigma^i_{ m c}$ は, 漸近安定
<b>条件</b> 2	$E(\rho_{+}^{i-1}, P_{i-1}) \subset E(\rho_{-}^{i}, P_{i})$
条件 3	$F_i E(\rho^i, P_i) \subset U$

を達成する  $F_i$ ,  $P_i$ ,  $\rho_-^i$  を求める (Fig. 3.4 参照). このような  $F_i$ ,  $P_i$ ,  $\rho_-^i$  がみたすべき条件は つぎのようになる.

補題 3.1. 条件 1, 2, 3 は, つぎの条件と等価である.

$$\forall R \ge 0, \ \exists F_i, \ \exists P_i = P_i^{\mathrm{T}} > 0, \ \exists \rho_{-}^i > 0$$

$$(A + B_2 F_i)^{\mathrm{T}} P_i (A + B_2 F_i) - P_i + R < 0$$

$$(3.3a)$$

$$\frac{P_{i-1}}{\rho_+^{i-1}} - \frac{P_i}{\rho_-^i} > 0 \tag{3.3b}$$

$$\frac{\bar{u}_j^2}{(F_i P_i^{-1} F_i^{\mathrm{T}})_{(j,j)}} > \rho_-^i \qquad j = 1, \dots, m$$
(3.3c)

ここで、条件 1, 2, 3 にそれぞれ(3.3a), (3.3b), (3.3c) が対応している.

証明. (3.3a) は  $\Sigma_{c}^{i}$  に対するリアプノフ不等式である.

(3.3b) は楕円の包含関係を与える関係式であり、文献 [71] で示されている (Lemma 4.1).

条件 3 が (3.3c) と等価であることを示すため, 変数  $y = P_i^{1/2} x$  を導入し, 楕円体  $E(\rho_-^i, P_i)$  をつぎのようにあらわす.

$$E(\rho_{-}^{i}, P_{i}) = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | y^{\mathrm{T}}y \le \rho_{-}^{i}, y = P_{i}^{1/2}x \}$$

同様に制御入力は、

$$u = F_i P_i^{-1/2} y$$

となる.

変数 y 上で考えれば, 条件 3 がみたされるには, 各 j = 1, ..., m に対して, 原点から平面  $(F_i)_{(j,:)}P_i^{-1/2}y = \bar{u}_j$  までの距離

$$d_j = \frac{u_j}{(F_i P_i^{-1} F_i^{\mathrm{T}})_{(j,j)}^{1/2}} \qquad j = 1, \dots, m$$

と球面  $E(\rho_{-}^{i}, P_{i})$  の半径  $(\rho_{-}^{i})^{1/2}$  のあいだに  $d_{j} > (\rho_{-}^{i})^{1/2}$  が成立すればよい. よって (3.3c) がえられる.

注意 3.2.  $F_i$ ,  $P_i$ ,  $\rho_-^i$  を (3.3) をみたす一組の解とする. このとき  $E(\rho_-^i, P_i)$  は,  $P_i$  がリアプ ノフ不等式の解であることから,  $\Sigma_c^i$  に対する CPI 集合となる. よって最大 CPI 集合  $O_\infty^i$  に対して  $E(\rho_-^i, P_i) \subset O_\infty^i$  が成立する.

補題 3.1 の (3.3) は不等式条件であるため、これを達成するすべての解の中から特定の  $F_i$ ,  $P_i$ ,  $\rho_-^i$  を決定することを考える. ここでの制御目的は、初期状態  $x(0) = x_0$  の影響を速やか に減衰させることである. そこで Fig. 3.1 におけるインパルス状外乱  $x_0\delta(t)$  (初期状態) か ら z(t) までの  $\mathcal{H}^2$  ノルムを最小化することを考え、つぎの最適化問題により  $F_i$  を構成する.

$$\min_{F_i, P_i, \rho_-^i} \operatorname{Tr}(B_1^{\mathrm{T}} P_i B_1) \tag{3.4a}$$

subject to (3.3) with 
$$R = C_1^{\rm T} C_1$$
 (3.4b)

問題1に対する解としてつぎの結果がえられる.

定理 3.1. 閉ループ系  $\Sigma_c^0$  は漸近安定であるとする. (3.2) および(3.4) により構成される フィード バックゲインの系列  $\mathcal{F} = \{F_i \in \mathcal{R}^{m \times n} | i = 0, 1, \dots, k\}$  は

$$O^0_\infty \subset O^1_\infty \subset \dots \subset O^k_\infty$$

を達成する.

証明. (3.4) によりえられるフィードバックゲイン  $F_i$  をもちいて  $\Sigma_c^i$  の最大 CPI 集合  $O_{\infty}^i$  を構成する.  $E(\rho_{-}^i, P_i)$  は,  $\Sigma_c^i$  に対する CPI 集合である (注意 3.2). よって

$$O_{\infty}^{i-1} \subset E(\rho_+^{i-1}, P_{i-1}) \subset E(\rho_-^i, P_i) \subset O_{\infty}^i$$

が成立する.

注意 3.3.  $O_{\infty}^{i}$  は,線形計画法をもちいたアルゴリズムにより構成可能である [30, 73]. (3.2) で定義される  $\rho_{+}^{i}$  は,標準的な二次計画問題を解くことにより決定可能である. 最適化問題 (3.4) は,拘束条件 (3.3) が線形行列不等式により記述される凸最適化問題となる. よって適 切なアルゴリズムをもちいることにより (存在すれば) 解を求めることができる [20].

#### 数値計算の手順

問題 3.1 の解となるフィードバックゲインの系列  $F_i$ , i = 0, 1, ..., k は(3.2), (3.4) の最適 化問題を繰り返し解くことによりえられる. ここでは (3.2), (3.4) を解くための具体的な手順をまとめておく.

まずまじめに最適化問題 (3.2) は標準的な 2 次計画問題に帰着されることを示す. このため変数  $y = P_{i-1}^{1/2} x$  を導入し  $O_{\infty}^{i-1}, E(\rho, P_{i-1})$  をつぎのように表現する.

$$O_{\infty}^{i-1} = \{ x \in \mathcal{R}^n | M_{i-1} P_{i-1}^{-1/2} y \le \mathbf{1} \quad P_{i-1}^{1/2} x = y \}$$
$$E(\rho, P_{i-1}) = \{ x \in \mathcal{R}^n | y^{\mathrm{T}} y \le \rho \quad P_{i-1}^{1/2} x = y \}$$

 $\rho_+^{i-1}$ を構成するための変数 y上の最適化問題は、凸多面体  $O_{\infty}^{i-1}$  に外接する球  $E(\rho, P_{i-1})$ の半径  $\rho$ を求める問題であり、つぎの二次計画問題により構成される.

$$\rho_+^{i-1} = \max \ y^{\mathrm{T}}y \tag{3.5a}$$

subject to 
$$M_{i-1}P_{i-1}^{-1/2}y \le 1$$
 (3.5b)

フィードバックゲイン  $F_i$  を構成するための最適化問題(3.4) は,線形行列不等式条件により記述されるつぎの凸最適化問題となる.

$$\min_{Q_i, Y_i, X_{1i}, \frac{1}{\rho^i}, X_{2i}} \operatorname{Tr}(X_{1i})$$
(3.6a)

subject to 
$$Q_i - \frac{1}{\rho_-^i} Q_+^{i-1} > 0$$
 (3.6b)

$$\begin{bmatrix} Q_i & Q_i A^{\mathrm{T}} + Y_i^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} & Q_i C_1^{\mathrm{T}} \\ AQ_i + B_2 Y_i & Q_i & 0 \\ C_1 Q_i & 0 & I_p \end{bmatrix} > 0$$
(3.6c)

$$\begin{bmatrix} X_{1i} & B_1^{\mathrm{T}} \\ B_1 & Q_i \end{bmatrix} > 0$$
(3.6d)

$$\begin{bmatrix} X_{2i} & Y_i \\ Y_i^{\mathrm{T}} & Q_i \end{bmatrix} > 0 \tag{3.6e}$$

$$(X_{2i})_{(j,j)} - \frac{1}{\rho_{-}^{i}} \bar{u}_{j}^{2} < 0 \quad j = 1, \dots, m$$
 (3.6f)

ただしここで,  $Q_+^{i-1} = \rho_+^{i-1} P_{i-1}^{-1}, Q_i = P_i^{-1}, Y_i = F_i Q_i$  である.

(3.6c) は (3.3a) に(3.4b) の  $R = C_1^{\mathrm{T}} C_1$  を代入し Schur complement を適用することによりえられる.

変数  $X_{2i} = X_{2i}^{T} \in \mathcal{R}^{m \times m}$  は(3.3c) 式の条件を記述するために導入する変数であり, (3.3c) よりえられる条件

$$X_{2i} - F_i P_i^{-1} F_i^{\mathrm{T}} > 0$$
  
$$(X_{2i})_{(j,j)} < \frac{1}{\rho_-^i} \bar{u}_j^2 \qquad j = 1, \dots, m$$

に Schur complement を適用することにより (3.6e), (3.6f) がえられる.

同様に (3.6a), (3.6d) の変数  $X_{1i} = X_{1i} \in \mathcal{R}^{n \times n}$  は  $\mathcal{H}^2$  ノルム条件を記述するために導入 される変数である.

### 3.5 スイッチング制御則

構成されたフィードバックゲインの系列  $\mathcal{F} = \{F_i \in \mathcal{R}^{m \times n} | i = 0, 1, ..., k\}$ をもちいて, フィードバックゲインの切換えをともなう区分的に線形なスイッチング状態フィードバック 制御則  $u(t) = \mathcal{F}(x(t))$ を考える.

スイッチング状態フィードバック制御則

$$u(t) = \mathcal{F}(x(t)) = F_{i(x(t))}x(t)$$
(3.7a)

$$i(x) = \underset{i=0,1,\dots,k}{\operatorname{argmin}} \{ x \in O_{\infty}^{i} \}$$
 (3.7b)

定理 3.2. 任意の初期状態  $x(0) = x_0 \in O_\infty^k$  に対して, (3.1) および 制御則 (3.7) により構成 される閉ループ系は漸近的に安定である.

証明. 入力拘束がない場合, 各  $\Sigma_{c}^{i}$  は漸近安定な閉ループ系である. 時刻 t において  $x(t) \in O_{\infty}^{i}$  が初めて成立し,  $F_{i-1} \rightarrow F_{i}$  のフィード バックゲインの切換えが生じたとする. この切換え により, 全体のシステムが不安定化されるようなことはない. なぜならば,  $O_{\infty}^{i}$  は正の不変 集合であるから  $x(t+1) \in O_{\infty}^{i}$  が必ず成立する. よって制御則 (3.7) により任意の初期状態  $x_{0} \in O_{\infty}^{k}$  に対する応答は収束し, またこのとき適用されるフィードバックゲイン  $F_{i}$  のイン デックスの値 i は, 時間ともに単調に減少するのみである.

制御則 (3.7) により任意の初期状態  $x_0 \in O_\infty^k$  に対して閉ループ系を漸近的に安定化できるのみでなく、フィードバックゲインの切換えにより制御性能の劣化も抑制することが可能となる.

スイッチング制御則を導出するには、フィードバックゲイン  $F_0$  と  $\Sigma_c^0$  のリアプノフ関数 を与える  $P_0$  が必要である. これは、最適制御などの理論をもちい、制御性能を重視する形で 与えればよい. つぎに、考慮すべき初期状態の集合  $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}^n$  に対して、  $\mathcal{E} \subseteq O_{\infty}^k$  が成立する までフィードバックゲイン  $F_i$  の計算を(3.2), (3.4) により繰り返す. ただし入力拘束が存在 する場合,一般に制御系の大域的な安定化は必ずしも可能ではない. 本章の方法でも,任意 の  $\mathcal{E}$  に対して, k を大きくとることにより,常に  $\mathcal{E} \subseteq O_{\infty}^k$  を達成することが可能ではないこ とに注意すべきである.

フィードバックゲインの切換えには, (3.7b)より, 状態 x(t) が  $O^i_{\infty}$  に属しているかどうか を判断することが必要となる. 最大 CPI 集合 は凸多面体であり, 数値計算によりつぎのよ うな形で実現される [30, 73].

$$O_{\infty}^{i} = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | M_{i}x \leq \mathbf{1} \}$$

ここで  $M_i \in \mathcal{R}^{s_i \times n}$  は凸多面体  $O^i_{\infty}$  を規定する線形方程式をあらわすものであり,  $1 \in \mathcal{R}^{s_i}$  は 1 を要素とする列ベクトル,  $s_i$  は  $O^i_{\infty}$  を規定する線形方程式の数である. なおここでは不等式をベクトルの各要素間に対して成立するものとしている. これより x(t) が  $O^i_{\infty}$  に属すかどうかは  $M_i x(t) - 1$  の各要素の符号により判定される.

本章の方法は、フィードバックゲインの設計および切換え平面に最大 CPI 集合をもちいる ことにより文献 [71] の方法に比較して制御則の保守性を軽減している. しかしながら各  $O^i_\infty$ を表現するのに必要な線形方程式の数  $s_i$  が場合によっては増大することが考えられる. この 場合、 $O^i_\infty$ の構成だけではなく、これを利用する  $\rho^{i-1}_+$ の計算およびオンラインでの  $x(t) \in O^i_\infty$ の判定が困難になってくる.

この問題を回避する一つの方法は、凸多面体  $O_{\infty}^{i}$  の近似を利用することである. 文献 [43] においても、 $O_{\infty}^{i}$  を表現する線形方程式の数  $s_{i}$  の増大による問題を回避するため、状態変数 が 2 次の制御系に対し、より少ない数の線形方程式で表現される凸多面体により  $O_{\infty}^{i}$  を近 似し、これを実際の制御にもちいることが提案されている. しかしながら、一般の  $O_{\infty}^{i}$  を近 似する効率のよい手順は明らかでなく、本章の方法をより有効なものにするためにも検討が 必要な課題となっている.

#### 3.6 設計例

| 文献 [71] の倒立振子モデル

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

を考える. ただし  $|u| \leq \bar{u} = 3$ の入力拘束があるものとする. なおスイッチング制御則の設計はサンプリング時間  $T_s = 0.1[s]$ の零次ホールドでえられる離散時間システムに対しておこなった.

フィードバックゲイン  $F_0 = [-68.3 - 12.1]$  を与え,  $F_i$ , i = 1, 2, 3 を提案手法により設計 した. 各フィードバックゲインに対する最大 CPI 集合  $O^i_{\infty}$ , およびゲインの構成時に利用し た楕円体を Fig. 3.5 にしめす.



Fig. 3.5: Maximal CPI sets for the pendulum model

初期状態  $[x_1(0) x_2(0)]^T = [65^\circ - 40^\circ s^{-1}]$  に対する状態変数の軌跡および変位  $x_1(t)$ ,角速度  $x_2(t)$  の応答を Figs. 3.6, 3.7 に示す. Fig. 3.7 において,実線はスイッチング制御則によるものであり,破線は  $F_3$  をもちいた通常の状態フィード バック制御によるものである. スイッチング制御則により応答が大幅に改善されている.



Fig. 3.6: State trajectories in phase plane for the pendulum model

ゲインが切り換えられている様子は, Fig. 3.8 に示す制御入力の不連続性よりわかる. ス イッチング制御則は, 入力制限を破らない範囲で大きな制御入力を要求している.

つぎに文献 [71] の設計法との比較をおこなう. 3.7 節においてもふれるように,文献 [71] の方法は,スイッチング制御にもちいるフィードバックゲインの数を設計者が指定しやすい方法となっている.そこで,本章における結果と同じく k = 3 の四つのフィードバックゲインをもちいた場合と,k = 11 の 12 個のフィードバックゲインをもちいた場合の設計をおこなった. Figs. 3.9, 3.10 に示す応答からわかるように, k = 3 の場合には,ここでの結果によ



(a) Position,  $x_1$ , versus time for the pendulum model

(b) Velocity,  $x_2$ , versus time for the pendulum model

Fig. 3.7: Position,  $x_1$ , and velocity,  $x_2$ , versus time for the pendulum model



Fig. 3.8: Actuator control signal, u, versus time for the pendulum model

る応答が早く収束している. しかしながら k = 11 までフィードバックゲインの数を増やした場合には, 文献 [71] の方がすぐれた応答を示した.

## 3.7 制御則の改善

本章でえられたスイッチング制御則は、これまでに示されていた制御則 [71] に比較して、 切換え平面として最大 CPI 集合をもちいることにより、フィードバックゲインの切換えに ともなう保守性を軽減している.

しかしながら本章の方法では、各フィードバックゲインを設計する際に (3.2) の方法により凸多面体  $O_{\infty}^{i-1}$  をいったん楕円体  $E(\rho^{i-1}, P_{i-1})$  で近似している. Fig. 3.5 の例でもわかるように、楕円体  $E(\rho^{i-1}, P_{i-1})$  は凸多面体  $O_{\infty}^{i-1}$  を必ずしも常によく近似するとは限らない.



(a) Position,  $x_1$ , versus time for the pendulum model

(b) Velocity,  $x_2$ , versus time for the pendulum model

Fig. 3.9: Position,  $x_1$ , and velocity,  $x_2$ , versus time for the pendulum model



Fig. 3.10: Actuator control signal, u, versus time for the pendulum model

このため  $O_{\infty}^{i-1}$  と  $O_{\infty}^{i}$ の大きさに比較的大きな差異が生じる場合がある. これは文献 [71] の 方法が, 楕円体  $E(\rho_{-}^{i-1}, P_{i-1})$  とそれを包含する楕円体  $E(\rho_{-}^{i}, P_{i})$  との間隔を設計者が指定し やすい方法となっているのにくらべ, 本章の方法が劣る点である.

この点を改善するため、凸多面体の端点の情報をもちいることを考える. 最大 CPI 集合  $O_{\infty}^{i-1}$  は有界な凸多面体であるから、すべての端点をもちいることでもこれを表現すること が可能である. そこで  $O_{\infty}^{i-1}$  の端点を  $v_{1}^{i-1}, \ldots, v_{t_{i-1}}^{i-1} \in \mathcal{R}^{n}$  とする. ここで  $t_{i-1}$  は  $O_{\infty}^{i-1}$  の端 点の数である.

これらの端点をもちいて、3.4 節の条件 2 を  $O_{\infty}^{i-1} \subset E(\rho_{-}^{i}, P_{i})$  とすることを考える. これ は(3.3b) 式をつぎの条件で置き換えることにより達成され、(3.3) と同様に線形行列不等式 条件として記述される.

$$(v_l^{i-1})^{\mathrm{T}} P_i v_l^{i-1} < \rho_{-}^i, \qquad l = 1, \dots, t_i$$

3.6 節の倒立振子モデルに、同一のフィードバックゲイン  $F_0$  を与え、この方法を適用した 結果を Fig. 3.11 に、またここでえられた各フィードバックゲインをもちいたスイッチング 制御による応答を Figs. 3.12、3.13 示す. Fig. 3.11 と Fig. 3.5 を比較すると、各  $O^i_{\infty}$  の間隔 が狭まり、同一の初期状態に対して、より多くのフィードバックゲインを適用できる結果が えられた.

しかしながらこの方法では、凸多面体  $O_{\infty}^{i-1}$  のすべての端点  $v_l$ ,  $l = 1, \ldots, t_i$  を求めること が要求される.これは、数値計算上容易ではなく、とくに高次の制御対象に対して適用する のは困難であると考えられる.よってこの方法が、3.4 節の方法に比較して必ずしもすぐれ ているとはいいがたく、対象の次数などに応じて使い分けることが必要である.



Fig. 3.11: Maximal CPI sets for the pendulum model



(a) Position,  $x_1$ , versus time for the pendulum model

(b) Velocity,  $x_2$ , versus time for the pendulum model

Fig. 3.12: Position,  $x_1$ , and velocity,  $x_2$ , versus time for the pendulum model



Fig. 3.13: Actuator control signal, u, versus time for the pendulum model

### 3.8 まとめ

入力制限を有する制御対象に対する、区分的に線形なスイッチング状態フィードバック制御則を導出した.本章でえられたスイッチング制御則は、状態が収束するにしたがい、入力拘束を破らない範囲でフィードバックゲインを増加させる.スイッチング制御則を構成するフィードバックゲインの導出および切換えのアルゴリズムは、拘束を有するシステムの解析にもちいられる、最大 CPI 集合の性質にもとづいている.これにより、これまで知られていたスイッチング制御則に比較し、ゲインの切換えにともなう保守性を軽減している.

スイッチング制御則を実現するには、個々のフィードバックゲインの構成およびそれらの 切り換えアルゴリズムが必要となる。個々のフィードバックゲインはすべてオフラインで構 成され、二次計画問題および線形行列不等式条件で記述された凸最適化問題を解くことによ りえられる。

フィードバックゲインの切換えは、観測される状態変数の値にもとづいたオンラインでの 処理が要求される.しかしながらこれは、単純な数値計算で実行され実装が容易である.

設計例では,制御則を倒立振子のモデルに適用し,実際にスイッチング制御則を構成,制御 性能が改善されることを確認した.

また,最大 CPI 集合のすべての端点の情報を利用することにより,スイッチング制御則を さらに改善する方法についても示した.しかしながら,すべての端点を数値計算によりえる ことは容易ではなく,制御対象の次数などに応じて方法を使い分けることが必要であるとと もに,今後の検討課題となっている.

# 第4章 外部入力を有する拘束システムの スイッチング状態フィードバック 制御

ここでは、不確かな外部入力を有する拘束システムに対して、安定性と制御性能の両立を計 るスイッチング制御則を導出する.まずはじめに、状態の収束および補償器の切り換えの実 行を保証するには、新たに可到達集合に関する条件を考慮する必要があることを示す.これ はスイッチング制御則を構成する各補償器に、ある程度以上の外乱抑制能力を要求する条件 となっている.えられるスイッチング制御則は、外部入力の影響を受ける場合でも、状態の 収束および補償器の切り換えの実行を保証することが可能である.

# 4.1 はじめに

現実の制御系には、アクチュエータの飽和要素、制御対象の保護のための制限など、多くの 拘束条件が存在する[27]. このとき補償器は、拘束条件をみたす一方、すぐれた応答や外乱抑 制などを達成することが要求される.

近年、このような問題に対するスイッチング制御によるアプローチが注目されている[56]. なかでも線形制御理論の枠組で複数の補償器を構成し、これらを切り換える問題では、単純 なアイデアでありながら、大きな効果がえられている[71,43,74]. ここでの特徴として、個々 の補償器を構成する際に、その補償器を適用することが許される状態空間の領域を同時に構 成することがあげられる.スイッチング制御則は、この状態空間の領域にもとづいた補償器 の切り換えにより、拘束条件を有する制御系を広い状態空間の領域で安定化し、また制御性 能の劣化を抑制する.

しかしながらこれまでに提案されているスイッチング制御則は,状態の収束により補償器 を切り換えるという特徴から,制御系に外乱が存在する場合,外乱の影響により状態の収束 が保証されず,したがってまたスイッチングの実行も保証されないという問題をもつ.

本章では、[74] で提案されたスイッチング制御則の構成法をもとに、外部入力を有する制 御対象に対するスイッチング制御則を提案する.提案する構成法の特徴は、補償器の構成と 同時に閉ループ系の可到達集合を評価する点にある.まず可到達集合をある大きさに制限す ることにより、外部入力が存在しても、状態の収束とスイッチングの実行が保証できること を示す.つぎにこの条件にもとづくスイッチング制御則の構成法を導出する.

まず 4.2 節では、本章で考察するシステムの記述を示す. 4.3 節では、外部入力の影響によ

り現れる問題点を明らかにするとともに、問題の定式化をおこなう.4.4節では、可到達集合の評価法およびこれを利用した補償器の系列の構成法を示す.4.5節では、スイッチング制御則を導出する.また本章での結果が、外部入力の存在しない系に対するスイッチング制御則の自然な拡張となっていることを示す.4.6節では、設計例を示す.

記号:  $\mathcal{Z}^+$  により 0 を含む正の整数全体,  $\mathcal{R}$  により実数の全体をそれぞれあらわす.  $a^{\mathrm{T}}$  は, 行列あるいはベクトル a の転置をあらわす. ベクトル a に対して,  $a_i$  は a の i 番目の要素 をあらわす. 行列 A に対して,  $A_{(i,:)}$  は A の i 行ベクトルをあらわす. 同様に  $A_{(i,i)}$  は A の (i,i) 要素をあらわす. また Tr A は, A のトレースである.  $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $\rho > 0$  に対し て,  $E(\rho, P) = \{x \in \mathcal{R}^n | x^{\mathrm{T}} Px \leq \rho\}$  とする.

# 4.2 外部入力を有する拘束システム

制御入力および制御系の動作状態に依存した拘束条件を有するつぎの線形離散時間シス テムを考える。

$$x(t+1) = Ax(t) + B_0(x_0\delta(t)) + B_1w(t) + B_2u(t)$$
(4.1a)

$$z_0(t) = C_0 x(t) + D_{01} w(t) + D_{02} u(t)$$
(4.1b)

$$z_1(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t)$$
(4.1c)

$$y(t) = C_2 x(t) = x(t)$$
 (4.1d)

ただしここで  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  は状態,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  は初期状態,  $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$  は制御入力,  $z_1(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ は被制御量, また y(t) = x(t) を観測量とし,  $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^{m_1}$  は未知の外部入力である.  $\delta$ は t = 0 で 1, それ以外の場合 0 の値をとる関数である.  $A, B_0, B_1, B_2, C_1, C_2 = I_n, D_{01}, D_{02}, D_{11}, D_{12}$  は適当な大きさの定数行列であり, つぎの仮定をおく.

仮定 4.1.  $(C_1, A, B_2)$ は、可安定・可検出

 $z_0(t) \in \mathcal{R}^{p_0}$ は制御入力および状態に依存した拘束条件をあらわすために設ける変数で

$$z_0(t) \in Z \qquad \forall t \in \mathcal{Z}^+ \tag{4.2}$$

の拘束条件をみたさなければならない.現実の制御系の多くは,アクチュエータの物理的な 制限や制御対象を保護するなどの目的から,このような拘束条件を有する.また本章では,外 部入力の大きさおよび拘束条件を規定する W,Z としてつぎの凸多面体を考える.

$$W = \{ w \in \mathcal{R}^{m_1} | |w_i| \le 1 \quad i = 1, \dots, m_1 \}$$
$$Z = \{ z_0 \in \mathcal{R}^{p_0} | |(z_0)_i| \le 1 \quad i = 1, \dots, p_0 \}$$

なお (4.1) では, 初期状態を外乱のように扱っているが, これは 4.4.2 節においてフィード バックゲインの設計をする際の見通しをよくするためである.



Fig. 4.1: State and control constrained system and switching state feedback compensator

# 4.3 問題の定式化

制御対象 (4.1) と状態フィードバック制御則  $u(t) = F_i x(t)$  による閉ループ系を  $\Sigma_c^i$  であらわす.

$$\Sigma_{c}^{i} \qquad x(t+1) = (A + B_{2}F_{i})x(t) + B_{0}(x_{0}\delta(t)) + B_{1}w(t)$$
  

$$\Sigma_{c}^{i} \qquad z_{0}(t) = (C_{0} + D_{02}F_{i})x(t) + D_{01}w(t)$$
  

$$z_{1}(t) = (C_{1} + D_{12}F_{i})x(t) + D_{12}w(t)$$

拘束条件 (4.2) が存在しない場合,  $\Sigma_c^i$  は内部安定とする. まず  $\Sigma_c^i$  の状態拘束集合  $X^i$  をつ ぎのように定義する [30, 42, 73].

$$X^{i} = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | (C_{0} + D_{02}F_{i})x + D_{01}w \in Z \quad \forall w \in W \}$$

注意 4.1. 拘束条件 (4.2) がみたされるには、 少なくとも  $x \in X^i$  が成立していなければな らない. なお状態拘束集合は、 つぎの線形拘束式で規定される凸多面体である.

$$X^{i} = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | | (C_{0} + D_{02}F_{i})_{(j,:)}x | \leq 1 - e_{j} \quad j = 1, \dots, p_{0} \}$$

$$(4.3)$$

ただしベクトル  $e \in \mathcal{R}^{p_0}$  の各要素  $e_i$  は、つぎの線形計画問題により定義される [73].

$$e_j = \max_{w \in W} (D_{01})_{(j,:)} w \qquad j = 1, \dots, p_0$$

状態拘束集合  $X^i$  が,  $\Sigma_c^i$  が (4.2) を達成するための必要条件を与えるのに対し,  $\Sigma_c^i$  が 拘 束条件 (4.2) を達成するための必要かつ十分な条件は、つぎのように定義される最大 CPI (Constrained Positively Invariant) 集合  $O^i_{\infty}$  により与えられる [73]. 最大 CPI 集合は [43, 74] で示されたスイッチング制御則の構成において中心的な役割を果たしている.

定義 4.1.  $x(0) = x_0, w \in W$  に対する  $\Sigma_c^i$  の応答 (4.1b) を  $z_0(t; x_0, w)$  とする.  $\Sigma_c^i$  の最大 CPI 集合をつぎのように定義する.

$$O_{\infty}^{i} = \{ x_{0} \in \mathcal{R}^{n} | z_{0}(t; x_{0}, w) \in Z \quad \forall t \in \mathcal{Z}^{+} \forall w \in W \}$$

注意 4.2. 最大 CPI 集合は、正の不変集合 (positively invariant set) である. すなわち任意の  $x(t) \in O^i_{\infty}, w(t) \in W$  に対してふたたび  $x(t+1) \in O^i_{\infty}$  となる. またその定義から  $O^i_{\infty} \subset X^i$ でもある. 逆にこの二つの条件をみたす集合は  $\Sigma^i_c$  に対する CPI (Constrained Positively Invariant) 集合 とよばれる [73]. [71] のスイッチング制御則は、この CPI 集合の性質にもと づいている.

注意 4.3.  $O^i_\infty$  は数値計算により構成され

$$O_{\infty}^{i} = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | M_{i}x \leq 1 \}$$

$$(4.4)$$

であらわされる凸多面体となる. ここで  $M_i \in \mathcal{R}^{s_i \times n}$  は,  $O_{\infty}^i$  を規定する線形拘束式をあらわし,  $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathcal{R}^{s_i}$  である [42] [73]. またここでの不等式はベクトルの各要素ごとに成立するものとする.

つぎの補題 4.1 は定義 4.1 の言い換えにすぎないが,  $O^i_{\infty}$  の性質をよくあらわしている [73].

補題 4.1. 任意の  $w \in W$  に対して,  $\Sigma_{c}^{i}$  が拘束条件 (4.2) を達成するための必要十分条件は,  $x(0) \in O_{\infty}^{i}$  である.

補題 4.1 より,  $O_{\infty}^{i}$  はゲイン  $F_{i}$  を適用することが可能となる初期状態の全体を与える. すなわちある時刻 t において, 制御則  $u(t) = F_{i}x(t)$  を適用することが可能となる必要かつ十分な条件は,  $x(t) \in O_{\infty}^{i}$  である. 一般に制御性能を重視すると非常に小さな  $O_{\infty}^{i}$  が与えられ,  $\Sigma_{c}^{i}$  の安定性は極めて限定された領域でのみ保証される. 逆に, 安定性を重視し, 大きな  $O_{\infty}^{i}$  がえられるようにすると達成される制御性能は低いものとなる [71, 43, 74].

この事実にもとづき [71, 43, 74] では、この  $O_{\infty}^{i}$  (あるいは CPI 集合) をフィードバッ クゲインの切り換え平面として利用するスイッチング制御則が提案されている. ここでは  $O_{\infty}^{0} \subset O_{\infty}^{1} \subset \cdots \subset O_{\infty}^{k}$  を達成する  $F_{i}$  が構成され, x(t) が  $O_{\infty}^{i}$  の境界を横切るごとに  $F_{i}$  が 切り換えられる. これにより、広い状態の領域で安定性を保証する一方、状態が収束するに したがい、より積極的なゲインが適用され制御性能の劣化も抑制される (Fig. 4.2 参照).

しかしながら外部入力を有する制御対象を考える場合, 条件  $O_{\infty}^{0} \subset \cdots \subset O_{\infty}^{k}$  のみでは不十分である. これは外部入力の影響により, Fig. 4.2 の点線の軌跡のように,  $x(t) \in O_{\infty}^{i-1}$  となることが保証されないためである. すなわち  $F_{i} \rightarrow F_{i-1}$ の切り換えの実行が保証されなくなる.



Fig. 4.2: Switching diagram and state trajectories: with disturbance inputs (dashed line), with no disturbance inputs (solid line)

外部入力の影響下でもスイッチングの実行を保証するため、本章では  $\Sigma_c^i$  に対し  $x(t) \in R_\infty^i$   $(t \to \infty)$  が成立することに注目する. ここで  $R_\infty^i$  は  $\Sigma_c^i$  の可到達集合であり、つぎのように 定義される.

$$R_{\infty}^{i} = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | \exists t \in \mathcal{Z}^{+} \exists w \in W \quad x = \sum_{k=0}^{t-1} (A + B_{2}F_{i})^{(t-1-k)}B_{1}w(k) \}$$

閉ループ系  $\Sigma_c^i$ の初期状態  $x_0$  に対する応答は

$$x(t) = (A + B_2 F_i)^t x(0) + \sum_{k=0}^{t-1} (A + B_2 F_i)^{(t-1-k)} B_1 w(k)$$

で記述される. ここで  $(A + B_2F_i)^t x_0 \rightarrow 0 \ (t \rightarrow \infty)$  が成立するから, 十分大きな t を考える と, x(t) において支配的となるのは, 外乱による影響をあらわす第 2 項である. よって 任意 の初期状態  $x_0 \in O^i_\infty$  に対し  $x(t) \in R^i_\infty \ (t \rightarrow \infty)$  が結論づけられる.

そこでスイッチング制御則の一つの構成条件として  $R_{\infty}^i \subset O_{\infty}^{i-1} \subset O_{\infty}^i$  を満足するように 各フィードバックゲイン  $F_i$  を構成する. このとき外部入力の影響下でも,  $F_i \to F_{i-1}$  のス イッチングが確実に実行される. 以下ではつぎの問題を考える.

問題 4.1. 与えられた望ましい制御性能を有するフィードバックゲイン  $F_0$  により構成される 別ループ系  $\Sigma_c^0$  に対し,条件

$$R^i_{\infty} \subset O^{i-1}_{\infty} \subset O^i_{\infty} \qquad i = 1, 2, \dots, k \tag{4.5}$$

を達成するフィードバックゲインの系列  $F_i$ , i = 1, 2, ..., k の設計法を与えよ.

第4章 外部入力を有する拘束システムのスイッチング状態フィードバック制御

注意 4.4. 可到達集合の厳密な構成は困難であり、その上界の評価法が提案されている [20, 78]. 本章でも、可到達集合そのものではなく、その上界を利用する.

問題 4.2. 問題 4.1 により与えられるフィードバックゲインの系列  $\mathcal{F} = \{F_i \in \mathcal{R}^{m_2 \times n} | i = 0, 1, \dots, k\}$ をもちいて, 初期状態の影響を速やかに減衰させるフィードバックゲインの切り 換えアルゴリズムを示せ.

4.4 フィードバックゲインの構成

4.4.1 可到達集合の評価

閉ループ系  $\Sigma_{c}^{i}$  の可到達集合  $R_{\infty}^{i}$  の評価法が, つぎのように与えられている [20].

補題 4.2.  $P_i = P_i^T > 0, F_i$ が存在し,任意の  $x \in \mathcal{R}^n$ ただし  $x^T P_i x \ge 1$ および  $w \in W$  に 対し

 $((A + B_2F_i)x + B_1w)^{\mathrm{T}}P_i((A + B_2F_i)x + B_1w) - x^{\mathrm{T}}P_ix \le 0$ 

が成立しているとする. このとき  $E(1, P_i)$  は  $R^i_{\infty}$  の上界であり,  $R^i_{\infty} \subset E(1, P_i)$  が成立する.

つぎの補題 4.3 は,補題 4.2 の十分条件を与える.本章ではこれを可到達集合の評価として利用する.

補題 4.3.  $P_i = P_i^T > 0, F_i, \alpha_i \ge 0, R_i$  ただし  $R_i = \text{diag}[r_i^1, \dots, r_1^{m_1}] \ge 0, \text{Tr}R_i \le 1$  が存 在し

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha_i)Q_i & 0 & Q_iA^{\mathrm{T}} + Y_i^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & Q_iC_1^{\mathrm{T}} + Y_i^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}} \\ 0 & \alpha_iR_i & B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ AQ_i + B_2Y_i & B_1 & Q_i & 0 \\ C_1Q_i + D_{12}Y_i & D_{11} & 0 & I_{p_1} \end{bmatrix} > 0$$
(4.6)

が成立しているとする. ここで  $Q_i = P_i^{-1}$ ,  $Y_i = F_i Q_i$  である. このとき  $R_{\infty}^i \subset E(1, P_i)$  が成立し  $\Sigma_c^i$  は内部安定である.

証明 (補題 4.3). 補題 4.2 の条件に S procedure [20] を適用し、つぎの十分条件がえられる. すなわち  $P_i = P_i^{\text{T}} > 0$ ,  $F_i$ ,  $\alpha_i \ge 0$ ,  $\beta_i \ge 0$  および  $R_i$  ただし  $R_i = \text{diag}[r_i^1, \dots, r_i^{m_1}] \ge 0$ ,  $\text{Tr}R_i \le 1$  が存在し、任意の  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $w \in \mathcal{R}^{m_1}$  に対して

$$((A + B_2F_i)x + B_1w)^{\mathrm{T}}P_i((A + B_2F_i)x + B_1w) - x^{\mathrm{T}}P_ix < -((C_1 + D_{12}F_i)x + D_{11}w)^{\mathrm{T}}((C_1 + D_{12}F_i)x + D_{11}w) -\alpha_i(x^{\mathrm{T}}P_ix - 1) - \beta_i(1 - w^{\mathrm{T}}R_iw)$$

$$(4.7)$$

が成立しているとする. このとき  $R_{\infty}^{i} \subset E(1, P_{i})$  が成立する. さらに一般性を失うことなく  $\alpha_{i} = \beta_{i}$  とすることにより変数  $\beta_{i}$  は消去可能である. これに Schur complement を適用し, (4.6) がえられる.

なお (4.7) 式右辺第 1 項は、制御性能の評価をおこなうために設けたものであり、任意の 半正定行列 *R* をもちいて  $\begin{bmatrix} x^{T} & w^{T} \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} x^{T} & w^{T} \end{bmatrix}^{T}$  で置き換えても同様の条件を与える.

 $\Sigma_{c}^{i}$ が内部安定であることはw = 0および一般性を失うことなく  $\alpha_{i} = \beta_{i}$ とすると(4.7)より

$$x^{\mathrm{T}}(A + B_{2}F_{i})^{\mathrm{T}}P_{i}(A + B_{2}F_{i})x - x^{\mathrm{T}}P_{i}x < -((C_{1} + D_{12}F_{i})x)^{\mathrm{T}}((C_{1} + D_{12}F_{i})x) - \alpha_{i}x^{\mathrm{T}}P_{i}x \le 0$$

が成立することよりわかる.

注意 4.5. 文献 [78] では, (4.6) に対応する双線形行列不等式を繰り返し解く, 可到達集合の評価法が提案されている. しかしながら本章の問題では, 最終的に (4.6), (4.9) をみたすフィードバックゲイン *F<sub>i</sub>* の設計を同時に実行しなければならない. このため [78] の方法を 直接適用することは困難である.

#### 4.4.2 フィードバックゲインに対する条件

ここでは  $F_{i-1}$ ,  $P_{i-1}$ ,  $O_{\infty}^{i-1}$  の情報をもとに  $F_i$ ,  $P_i$ ,  $O_{\infty}^i$  を構成する手順を示す. このとき  $\Sigma_c^i$  が達成すべき条件は  $R_{\infty}^i \subset O_{\infty}^{i-1} \subset O_{\infty}^i$  である.

まず [74] の手順と同じく、つぎの最適化問題により  $\rho_+^{i-1}$  を定義する.

$$\rho_{+}^{i-1} = \min\{\rho \in \mathcal{R} \mid O_{\infty}^{i-1} \subset E(\rho, P_{i-1})\}$$
(4.8)

これは凸多面体  $O_{\infty}^{i-1} = \{x \in \mathcal{R}^n | M_{i-1}x \leq 1\}$  の楕円体  $E(\rho_+^{i-1}, P_{i-1})$  による近似である (Fig. 4.3, 注意 4.8 参照).

つぎに  $F_i$ ,  $P_i$  に求められる条件を考える (Fig. 4.3 参照). まず  $\Sigma_c^i$  は安定化されなければ ならない.  $R_{\infty}^i \subset O_{\infty}^{i-1}$  を達成するには, 補題 4.3 より,  $E(1, P_i) \subset O_{\infty}^{i-1}$  であればよい. 最後 に  $O_{\infty}^{i-1} \subset O_{\infty}^i$  を達成するため, まず  $E(\rho_+^{i-1}, P_{i-1}) \subset E(\rho_-^i, P_i)$  なる  $\rho_-^i$  を求め, さらに拘束 条件の達成を考慮し, この  $\rho_-^i$  に  $E(\rho_-^i, P_i) \subset X^i$  を要求する. まとめると

条件 1	$\Sigma_{ m c}^i$ は内部安定
条件 2	$E(1, P_i) \subset O_{\infty}^{i-1}$
<b>条件</b> 3	$E(\rho_{+}^{i-1}, P_{i-1}) \subset E(\rho_{-}^{i}, P_{i})$
条件 4	$E(\rho_{-}^{i}, P_{i}) \subset X^{i}$

となる. ここで条件 1 については補題 4.3 で考慮されている. そこで *F<sub>i</sub>*, *P<sub>i</sub>* がみたすべき条 件はつぎのようになる.



Fig. 4.3: Geometrical representation of design procedure

補題 4.4. 条件 2, 3, 4 は, つぎの条件と等価である.

$$\exists P_{i} = P_{i}^{\mathrm{T}} > 0, \ \exists F_{i}, \ \exists \frac{1}{\rho_{-}^{i}} > 0, \ \exists X_{1i} = X_{1i}^{\mathrm{T}}, \ \exists X_{2i} = X_{2i}^{\mathrm{T}}$$
$$\begin{bmatrix} X_{1i} & M_{i-1}Q_{i} \\ Q_{i}M_{i-1}^{\mathrm{T}} & Q_{i} \end{bmatrix} > 0$$
(4.9a)

$$(X_{1i})_{(j,j)} < 1 \quad j = 1, \dots, s_{i-1}$$
 (4.9b)

$$Q_i - \frac{1}{\rho_-^i} Q_+^{i-1} > 0 \tag{4.9c}$$

$$\begin{bmatrix} X_{2i} & C_0 Q_i + D_{02} Y_i \\ Q_i C_0^{\mathrm{T}} + Y_i^{\mathrm{T}} D_{02}^{\mathrm{T}} & Q_i \end{bmatrix} > 0$$
(4.9d)

$$(X_{2i})_{(j,j)} < (1 - e_j)^2 \frac{1}{\rho_-^i} \quad j = 1, \dots, p_0$$
 (4.9e)

ただしここで  $Q_i = P_i^{-1}$ ,  $Y_i = F_i Q_i$ ,  $Q_+^{i-1} = \rho_+^{i-1} Q_{i-1}$  である. また  $e, M_{i-1}$  は, それぞ れ(4.3), (4.4) で状態拘束集合, 最大 CPI 集合を定義する定数である.

証明 (補題 4.4). 条件 3 に対応する (4.9c) 式は楕円の包含関係を与える関係式であり, 文献 [71] で示されている (Lemma 4.1). 条件 2 と(4.9a), (4.9a) および条件 4 と(4.9d), (4.9e) が等価であることを示すため変数  $y = P_i^{1/2}x$ を導入する. 条件 2, 4 における各集合は, 変数 y によりつぎのように表現される.

$$X^{i} = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | |(C_{0} + D_{02}F_{i})_{(j,:)}P_{i-1}^{-1/2}y| \leq 1 - e_{j} \quad P_{i}^{1/2}x = y, \ j = 1, \dots, p_{0} \}$$
  

$$O_{\infty}^{i-1} = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | \ M_{i-1}P_{i}^{-1/2}y \leq 1 \quad P_{i}^{1/2}x = y \}$$
  

$$E(1, P_{i}) = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | \ y^{\mathrm{T}}y \leq 1 \quad P_{i}^{1/2}x = y \}$$
  

$$E(\rho_{-}^{i}, P_{i}) = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | \ y^{\mathrm{T}}y \leq \rho_{-}^{i} \quad P_{i}^{1/2}x = y \}$$

まず条件 2の成立を変数 y上で考えれば, 原点から凸多面体  $O^{i-1}_{\infty}$ を構成する各平面

$$(M_{i-1})_{(j,:)}P_i^{-1/2}y \le 1 \qquad j = 1, \dots, s_{i-1}$$

までの距離

$$l_j = \frac{1}{(M_{i-1}P^{-1}M_{i-1}^{\mathrm{T}})_{(j,j)}^{1/2}} \qquad j = 1, \dots, s_{i-1}$$

と球  $E(1, P_i)$  の半径 1 とのあいだに  $l_j > 1$  が成立すればよい. そこで変数  $X_{1i} = X_{1i}^{T} \in \mathcal{R}^{s_{i-1} \times s_{i-1}}$  を導入することによりつぎの条件がえられる.

これに Schur complement を適用することにより(4.9a), (4.9b) がえられる.

条件 4 と (4.9d), (4.9e) が等価であることとも同様に導かれる. まず原点から  $X^i$  を構成 する各平面

$$(C_0 + D_{02}F_i)_{(j,:)}P_i^{-1/2}y \le 1 - e_j \qquad j = 1, \dots, p_0$$

までの距離

$$d_j = \frac{1}{\left( (C_0 + D_{02}F_i)P_i^{-1}(C_0 + D_{02}F_i)^{\mathrm{T}} \right)_{(j,j)}^{1/2}} \qquad j = 1, \dots, p_0$$

を考える.

条件 4 が成立するには、球面  $E(\rho_{-}^{i}, P_{i})$  の半径  $(\rho_{-}^{i})^{1/2}$  と  $d_{j}$  のあいだに  $d_{j} > (\rho_{-}^{i})^{1/2}$  が 成立すればよい. ここで変数  $X_{2i} = X_{2i} \in \mathcal{R}^{p_{0} \times p_{0}}$  を導入し

$$X_{2i} - (C_0 + D_{02}F_i)P_i^{-1}(C_0 + D_{02}F_i)^{\mathrm{T}} > 0$$
$$(X_{2i})_{(j,j)} < (1 - e_j)^2 \frac{1}{\rho_-^i} \qquad j = 1, \dots, p_0$$

を考える. この条件に Schur complement を適用して (4.9d), (4.9e) がえられる.

□ 51 注意 4.6. 補題 4.3, 4.4 の条件をみたす  $F_i$ ,  $P_i$ ,  $\rho_-^i$  を考える.  $E(\rho_-^i, P_i)$  は,  $\Sigma_c^i$  の CPI 集合 であるから (定理 4.1 の証明参照), 最大 CPI 集合  $O_{\infty}^i$  に対して  $E(\rho_-^i, P_i) \subset O_{\infty}^i$  が成立し, これより  $R_{\infty}^i \subset O_{\infty}^{i-1} \subset O_{\infty}^i$  が結論づけられる.

補題 4.3, 4.4 から, (4.6), (4.9) をみたす  $F_i$ ,  $P_i$  により, 各条件 1, 2, 3, 4 が達成される. ここで (4.6), (4.9) は不等式条件であるため, これを達成するすべての解のなかから特定の解 を決定することを考える. ここではつぎの最適化問題により  $F_i$  を構成する.

$$\min_{\alpha_i, R_i, Q_i, Y_i, \frac{1}{\rho^i}, X_{1i}, X_{2i}} \operatorname{Tr}(B_0^{\mathrm{T}} P_i B_0)$$
(4.10a)

subject to (4.6) and (4.9) (4.10b)

これは w = 0 である場合に, 初期状態  $x_0$  から  $z_1(t)$  までの  $\mathcal{H}^2$  のノルムを最小化すること になる.

注意 4.7. 最適化問題 (4.10) は,外部入力が存在しない場合の評価にもとづいている [74]. 外部入力が存在する場合,この評価の意味は曖昧であり,制御性能の評価法は今後の検討課 題となっている.

問題 4.1 に対する解としてつぎの結果がえられる.

定理 4.1. 閉ループ系  $\Sigma_c^0$  は内部安定であるとする. (4.8), (4.10) により構成されるフィー ドバックゲインの系列  $\mathcal{F} = \{F_i \in \mathcal{R}^{m_2 \times n} | i = 0, 1, \dots, k\}$  は

$$R^i_{\infty} \subset O^{i-1}_{\infty} \subset O^i_{\infty}$$
  $i = 1, 2, \dots, k$ 

を達成する.

証明. (4.10) によりえられる  $F_i$  をもちいて,  $\Sigma_c^i$  および  $O_\infty^i$  を構成する.

補題 4.3, 4.4 より,  $R_{\infty}^{i} \subset E(1, P_{i}) \subset O_{\infty}^{i-1}$ である.  $\bar{x}^{T}P_{i}\bar{x} = \rho_{-}^{i} > 1$ とすると補題 4.2 の条 件式が  $\bar{x}$  について成立し, かつ  $E(\rho_{-}^{i}, P_{i}) \subset X^{i}$ である. すなわち  $E(\rho_{-}^{i}, P_{i})$  は,  $\Sigma_{c}^{i}$  の CPI 集合であり,  $E(\rho_{-}^{i}, P_{i}) \subset O_{\infty}^{i}$ となる. 補題 4.4 から  $O_{\infty}^{i-1} \subset E(\rho_{+}^{i-1}, P_{i-1}) \subset E(\rho_{-}^{i}, P_{i})$ であ るので  $R_{\infty}^{i} \subset O_{\infty}^{i-1} \subset O_{\infty}^{i}$ となる.

注意 4.8.  $O_{\infty}^{i}$  は,線形計画法をもちいたアルゴリズムにより構成可能である [42, 73]. (4.8) で定義される  $\rho_{+}^{i-1}$  は,標準的な二次計画問題の解として決定される [74]. (4.10) の最適解 を求めることは, (4.6) が双線形行列不等式条件であるため,困難である. しかしながらスカ ラーのパラメータ  $\alpha_{i}$  を固定する場合,線形行列不等式で記述される凸最適化問題となる. こ のときの解は, (存在すれば) 適切なアルゴリズムをもちいることによりえられる. 4.6 節の 数値例では, この方法により解をえている.

数値計算の手順

問題 4.1 の解となるフィードバックゲインの系列  $F_i$ , i = 1, ..., k は (4.8), (4.10) の最適 化問題を繰り返しとくことによりえられる. ここでは (4.8), (4.10) を解く際の具体的な手順 をまとめておく.

ますはじめに最適化問題 (4.8) は標準的な 2 次計画問題に帰着されることを示す. このため変数  $y = P_{i-1}^{1/2} x$ を導入し  $O_{\infty}^{i-1}, E(\rho, P_{i-1})$ をつぎのように表現する.

$$O_{\infty}^{i-1} = \{ x \in \mathcal{R}^n | M_{i-1} P_{i-1}^{-1/2} x \le \mathbf{1} \quad P_{i-1}^{1/2} x = y \}$$
$$E(\rho, P_{i-1}) = \{ x \in \mathcal{R}^n | y^{\mathrm{T}} y \le \rho \quad P_{i-1}^{1/2} x = y \}$$

 $\rho_{+}^{i-1}$ を構成するための変数 y上の最適化問題は、凸多面体  $O_{\infty}^{i-1}$  に外接する球  $E(\rho, P_{i-1})$ の半径  $\rho$  を求める問題である. よって  $\rho_{+}^{i-1}$  は、つぎの 2 次計画問題により構成される.

$$\rho_+^{i-1} = \max y^{\mathrm{T}} y \tag{4.11}$$

subject to 
$$M_{i-1}P_{i-1}^{-1/2}y \le 1$$
 (4.12)

つぎに最適化問題 (4.10) を考える. この問題は拘束条件として双線形不等式条件 (4.6) を 含んでいる. このため, 直接 (4.10) の最適解をえることは困難である.

しかしながらスカラのパラメタ  $\alpha_i$  を固定すれば(4.6) は線形行列不等式条件となる. この 場合, 適切なアルゴリズムをもちいることにより (存在するならば) 必ず解を求めることが 可能である.

そこでここでは,  $\alpha_i$ を固定するごとに, (4.10)より導かれるつぎの最適化問題を解くとこ

により解を構成する.また 4.6 節の数値例でもこの方法により解をえている.

$$\begin{array}{c} \min_{Q_i, \ Y_i, \ X_{1i}, \ X_{2i}, \ X_{3i}, \ \frac{1}{\rho_-^L}} \operatorname{Tr}(X_{3i}) \\ q_i, \ Y_i, \ X_{1i}, \ X_{2i}, \ X_{3i}, \ \frac{1}{\rho_-^L}} \operatorname{Tr}(X_{3i}) \\ \end{array}$$
subject to
$$\begin{array}{c} (1 - \alpha_i)Q_i & 0 & Q_i A^{\mathrm{T}} + Y_i B_2^{\mathrm{T}} & Q_i C_1^{\mathrm{T}} + Y_i D_{12}^{\mathrm{T}} \\ 0 & \alpha_i R_i & B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ AQ_i + B_2 Y_i & B_1 & Q_i & 0 \\ C_1Q_i + D_{12}Y_i & D_{11} & 0 & I_{p_1} \end{array} \right] > 0 \\ \begin{bmatrix} X_{1i} & M_{i-1}Q_i \\ Q_i M_{i-1}^{\mathrm{T}} & Q_i \end{bmatrix} > 0 \\ (X_{1i})_{(j,j)} \leq 1 & j = 1, \dots, s_{i-1} \\ Q_i - \frac{1}{\rho_-^i} Q_+^{i-1} > 0 \\ \begin{bmatrix} X_{2i} & C_0Q_i + D_{02}Y_i \\ Q_i C_0^{\mathrm{T}} + Y_i^{\mathrm{T}} D_{02}^{\mathrm{T}} & Q_i \end{bmatrix} > 0 \\ (X_{2i})_{(j,j)} \leq (1 - e_j)^2 \frac{1}{\rho_-^i} & j = 1, \dots, p_0 \\ \begin{bmatrix} X_{3i} & B_0^{\mathrm{T}} \\ B_0 & Q_i \end{bmatrix} > 0 \end{array}$$

なおここで  $X_{3i} \in \mathcal{R}^{n \times n}$  は,  $\mathcal{H}^2$  ノルムに関する条件を記述するために導入される変数である.

### 4.5 スイッチング制御則

構成されたフィードバックゲインの系列  $\mathcal{F} = \{F_i \in \mathcal{R}^{m_2 \times n} | i = 0, 1, \dots, k\}$ をもちいて、 つぎのスイッチング状態フィードバック制御則  $u(t) = \mathcal{F}(x(t))$ を考える.

スイッチング状態フィードバック制御則

$$u(t) = \mathcal{F}(x(t)) = F_{i(x(t))}x(t)$$
(4.13a)

$$i(x) = \underset{i=0,1,\dots,k}{\operatorname{argmin}} \{ x(t) \in O_{\infty}^{i} \}$$
 (4.13b)

定理 4.2. (4.1) および (4.13) により構成される閉ループ系は内部安定であり, 任意の初期 状態  $x(0) = x_0 \in O_{\infty}^k$  および  $w \in W$  に対して  $x(t) \in R_{\infty}^0$   $(t \to \infty)$  を達成する. また拘束 条件  $z_0 \in Z$  は, すべての時刻においてみたされる.

証明 (定理 4.2). 時刻 t において  $x(t) \in O_{\infty}^{i}$  が初めて成立し,  $F_{i+1} \rightarrow F_{i}$  の切り換えが生じ たとする.  $O_{\infty}^{i}$  は正の不変集合であるから,  $x(t+1) \in O_{\infty}^{i}$  が必ず成立する. よってこの切 り換えにより, 拘束条件が破られ, 閉ループ系が不安定化されることはない. また可到達集

合に関する条件 (4.5) より, 任意の外乱に対して  $F_{i+1} \rightarrow F_i$ ,  $i \ge 0$  のスイッチングの実行 が必ず保証される. これより任意の初期状態  $x_0 \in O_{\infty}^k$  および  $w(t) \in W$  に対する応答は,  $x(t) \in R_{\infty}^0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) を達成する. またこのとき適用されるフィードバックゲインのインデッ クスの値 *i* は, 時間とともに単調に減少するのみである. さらに w(t) = 0 である場合, 各閉 ループ系の内部安定性より  $x(t) \rightarrow 0$  が達成される.

注意 4.9. 制御則 (4.13) により,  $O_{\infty}^{0} \subset O_{\infty}^{k}$  であるから, [71, 43, 74] の制御則と同様に, 単 ーのフィードバックゲイン  $F_{0}$  をもちいる場合より, より広い初期状態の集合  $O_{\infty}^{k}$  に対して 拘束条件  $z_{0} \in Z$  がみたされ, 閉ループ系の安定性が保証される. またフィードバックゲイ ンの切り換えにより制御性能の劣化も抑制することが可能となる. さらに [71, 43, 74] の制 御則と異なり, 条件 (4.5) より, 任意の  $w \in W$  に対してスイッチング  $F_{i+1} \to F_{i}$  の実行と  $x(t) \in R_{\infty}^{0}$   $(t \to \infty)$  が保証される.

本章では、外部入力を有する系に対するスイッチング制御則を文献 [74] での結果を拡張す る形で与えた.ここで実際に、本章での条件から [74] の制御則が自然に導出されること、す なわちここでの結果が [74] の結果を含む拡張となっていることを確認しておく.

このため  $W = \{0\}$  とする. まず (4.3) において e = 0 であり, また  $R^i_{\infty} = \{0\}$  である. よって (4.6) を与える (4.7) 式において  $\alpha_i = \beta_i = 0$  とすることができ

$$((A + B_2 F_i)x)^{\mathrm{T}} P_i((A + B_2 F_i)x) - x^{\mathrm{T}} P_i x < -((C_1 + D_{12} F_i)x)^{\mathrm{T}}((C_1 + D_{12} F_i)x)$$
(4.14)

がえられる.

同様に条件 2 したがって (4.9a), (4.9b) 式は考慮する必要がなくなる. 結局 (4.8) については不変であり, (4.10) は, (4.14) を含めて, つぎで置き換えられる.

$$\begin{array}{c} \underset{Q_{i}, Y_{i}, \frac{1}{\rho_{-}^{1}}, X_{2i}, X_{3i}}{\min} \operatorname{Tr}(X_{3i}) \\ \text{subjectto} \quad Q_{i} - \frac{1}{\rho_{-}^{i}}Q_{+}^{i-1} > 0 \\ \begin{bmatrix} Q_{i} & Q_{i}A^{\mathrm{T}} + Y_{i}^{\mathrm{T}}B_{2}^{\mathrm{T}} & Q_{i}^{\mathrm{T}}C_{1}^{\mathrm{T}} + Y_{i}^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}} \\ AQ_{i} + B_{2}Y_{i} & Q_{i} & 0 \\ C_{1}Q_{i} + D_{12}Y_{i} & 0 & I_{p_{1}} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} X_{2i} & C_{0}Q_{i} + D_{02}Y_{i} \\ Q_{i}C_{0}^{\mathrm{T}} + Y_{i}^{\mathrm{T}}D_{02}^{\mathrm{T}} & Q_{i} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} X_{2i} & C_{0}Q_{i} + D_{02}Y_{i} \\ Q_{i}C_{0}^{\mathrm{T}} + Y_{i}^{\mathrm{T}}D_{02}^{\mathrm{T}} & Q_{i} \end{bmatrix} > 0 \\ (X_{2i})_{(j,j)} \leq \frac{1}{\rho_{-}^{i}} \quad j = 1, \dots, p_{0} \\ \begin{bmatrix} X_{3i} & B_{0}^{\mathrm{T}} \\ B_{0} & Q_{i} \end{bmatrix} > 0 \end{array}$$

これは [74] で与えられている条件と等価であり,本章の条件より自然に導出される.

第4章 外部入力を有する拘束システムのスイッチング状態フィードバック制御

## 4.6 設計例

つぎの倒立振子モデル [71], [74] を考える. ただし  $|x_1| \le 2$ ,  $|x_2| \le 5$ ,  $|u| \le 3$  の拘束条件 があるものとする.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$z_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

制御則は, サンプリング時間 0.1 [s] の零次ホールドでえられる離散時間システムに対し て導出した.  $F_0 = \begin{bmatrix} -11.7 & -5.7 \end{bmatrix}$ を与え, 提案手法により  $F_i$ , i = 1, 2を設計した. 各最大 CPI 集合  $O^i_{\infty}$  およびフィードバックゲインの構成に利用した楕円体を Fig. 4.4 に示す.



Fig. 4.4: Maximal CPI sets for the pendulum model

このとき制御則をえるには、(4.10)の最適化問題を解かなければならない. 最適化問題 (4.10)は、(4.6)の双線形行列不等式を拘束条件として含むことから、その最適解をえること が容易ではない. しかしながら (4.6)におけるスカラのパラメータ $\alpha_i$ を固定すれば、最適化 問題 (4.10)は、線形行列不等式で記述される凸最適化問題となる. ここではこの方法により 制御則を構成した.

つぎに初期状態  $x_0 = \begin{bmatrix} 60^{\circ} & -40^{\circ} \text{s}^{-1} \end{bmatrix}^{\text{T}}$ ,外乱  $w(t) = \sin 5t$  に対する変位  $x_1$ ,角速度  $x_2$  の 応答を Fig. 4.5 に示す. 図中破線は  $F_2$  をもちいた通常の状態フィードバック制御によるも のである.スイッチング制御により応答が改善されている様子がわかる.フィードバックゲ インが切り換えられている様子は, Fig. 4.6 に示す制御入力の不連続性よりわかる.このと きスイッチング制御則は,入力制限を破らない範囲で大きな制御入力を要求している.



(a) Position,  $x_1(t)$ , versus time for the pendulum model

(b) Velocity,  $x_2(t)$ , versus time for the pendulum model

Fig. 4.5: Position,  $x_1(t)$ , and velocity,  $x_2(t)$ , versus time for the pendulum model



Fig. 4.6: Actuator control signal versus time for the pendulum model

### 4.7 まとめ

制御入力および状態に依存する拘束条件を有する制御対象に対する区分的に線形なスイッ チング状態フィードバック制御則を導出した.本章でえられたスイッチング制御則は,3章 でえられた制御則を外部入力を有する制御系に対して自然に拡張する形でえられている.

まず外部入力が存在する場合、これまでに提案されているスイッチング制御則の構成条件 では不十分であり、新たに可到達集合に関する条件が必要となることを示した.これは個々 の補償器がある程度の外乱抑制特性、すなわち外乱の影響下においても状態をある程度以上 収束させる能力をもっていなければならないことを示している.

またこのことから、個々の補償器の構成条件は可到達集合に関する条件を含むものとなる. しかしながらこの可到達集合は、その厳密な構成が困難であることが知られている.よって 本章では、まず可到達集合の上界の評価法を示し、つぎにこの条件にもとづく個々の補償器 の構成法を提案した.

このとき補償器を構成するために解くべき最適化問題は,双線形不等式条件により記述される.一般に双線形不等式条件により記述される最適化問題は,大域的な最適解を求めることが困難であることが知られている.本章でえられた結果もこの点については同様の困難さを含んでいる.しかしながら本章で導出した双線形不等式は,スカラのパラメタを固定するごとに線形行列不等式条件として記述される.したがってこの場合,適切なアルゴリズムをもちいることにより,必ず解を求めることが可能となる.本章で示した設計例では,この方法により解をえている.

一方,補償器のスイッチングアルゴリズムについては,3章でえられた,外部入力が存在し ない系に対するスイッチング制御則と全く同様である.したがってスイッチング制御則を実 現するために要求されるオンラインでの処理は,3章でえられた結果と全く同等である.

また本章でえられたスイッチング制御則の構成条件から、これまでに提案されている制御 則が自然に導出されることを確認した.具体的には、3章で導出した制御則を、制御入力およ び状態に依存した拘束条件を有する制御系に拡張した場合のスイッチング制御則が、本章で の構成成条件から自然に導出される.

本章でえられたスイッチング制御則により,外部入力が存在する場合でも,状態の収束お よび補償器のスイッチングの実行を保証することが可能となる.しかしながら提案手法は, 残念ながらまだ保守性が強いと思われ,ここで示した設計例でも,大きな外乱を想定すると 制御則が構成できなかった.ここでの最も大きな原因は,可到達集合の評価法にあると思わ れる.可到達集合の評価については,本章の方法と異なる手法も提案されており,これらの 研究結果も踏まえた上で,個々の補償器を構成する際の保守性の軽減が,今後の課題となっ ている.

# 第5章 参照入力集合の連結にもとづく拘 束システムの追従制御

ここでは、拘束システムの出力を外部からの参照入力に一致させる追従制御に関する考察を おこない、参照入力の整形を目的とするリファレンスガバナの実現法を導出する.まずはじ めに、拘束システムに許容される参照入力の評価を目的に、参照入力集合の概念を提案する. これにより、拘束システムに入力することが可能な参照入力の大きさが明らかとなる.さら にここでは、許容される参照入力の領域を拡大するため、参照入力集合の連結という考えを提 案し、この連結された参照入力集合の性質にもとづいたリファレンスガバナの実現法を示す.

# 5.1 はじめに

現実の制御系は、アクチュエータの飽和要素、制御対象の保護のための制限など多くの拘 束条件を有する拘束システムである.拘束システムに対する追従制御では、参照入力の急激 な変化によるワインドアップ現象などにより、拘束条件の存在が制御系の性能に深刻な影響 を及ぼすことが知られている [27].

このようななか、リファレンスガバナと呼ばれる付加的な機構により、外部からの参照入 力を必要に応じて整形し、制御系への実際の入力とする手法が、拘束システムの実際的な制 御法として注目されている [8, 29, 38] (Fig. 5.11 参照). リファレンスガバナは、外部からの 入力と内部変数の観測にもとづくオンライン処理により、制御系への入力を決定する. この ため、オンラインでの処理を軽減することがリファレンスガバナの実現における重要な課題 となっている.

本章では、制御系が拘束条件を破らないことを保証する参照入力の大きさの評価法を提案 し'安全な'参照入力からなる集合を構成する.つぎに閉ループ系の平衡点を移動しながらこ の評価を繰り返すことにより、制御系に許容される参照入力の集合を拡大することが可能で あることを示す.その上で、構成された参照入力の集合を利用する、新たなリファレンスガ バナの実現法を提案する.提案手法では、あらかじめ参照入力の大きさが評価されているこ とから、リファレンスガバナを実現する上で必要となるオンラインでの処理が軽減される.

5.2 節では、本章で考察するシステムの記述を示す.5.3 節では、拘束システムに許容され る参照入力から構成される集合、参照入力集合の概念を提案する.5.4 節では、制御系の平衡 点の移動と参照入力集合の構成を繰り返すことにより制御系に許容される参照入力の領域 を拡大する、参照入力集合の連結について述べる.また、参照入力集合の連結にもとづくリ ファレンスガバナの構成を概観する.5.5 節では、リファレンスガバナを実現する具体的な
アルゴリズムを示す. 5.6 節では, 5.4 節における参照入力集合の連結において, さらに参照 入力集合同士の連結の度合を調整するパラメータが導入可能であることを示す. またこれに より, 性質の異なるリファレンスガバナが構成可能であることを明らかにする. 5.7 節では, 実際にリファレンスガバナを構成する設計例を示し, シミュレーションによりその有効性を 確認する.

記号:  $\mathcal{Z}^+$  により 0 を含む正の整数全体,  $\mathcal{R}$  により実数の全体をそれぞれあらわす.  $a^T$  は, 行列あるいはベクトル a の転置をあらわす. ベクトル a に対して,  $a_i$  は a の i 番目の要素 をあらわす. 行列 A に対して,  $A_{(i,:)}$  は A の i 行ベクトルをあらわす. 同様に  $A_{(i,i)}$  は A の (i,i) 要素をあらわす.

### 5.2 拘束システム

つぎの制御対象  $\Sigma^p$  を考える.

$$\Sigma^{p} \qquad \begin{aligned} x_{p}(t+1) &= A_{p}x_{p}(t) + B_{p}u(t) \\ \Sigma^{p} \qquad z_{1}(t) &= C_{p1}x_{p}(t) \\ y(t) &= C_{p2}x_{p}(t) \end{aligned}$$

ここで  $x_p \in \mathcal{R}^{n_p}$  は制御対象の状態,  $u \in \mathcal{R}^m$  は制御入力,  $z_1 \in \mathcal{R}$  は被制御量であり, ここ での制御目的は外部からの参照入力に対して  $z_1$  が良好な追従特性を示すことにある, また  $y \in \mathcal{R}^{p_2}$  は補償器への観測量であり,  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_{p1}$ ,  $C_{p2}$ ,  $D_p$  は適当な大きさの定数行列である.

制御対象  $\Sigma^p$  に適用される補償器として、ここではつぎの線形フィードバック補償器  $\Sigma^c$  を 考える (Fig. 5.1 参照).

$$\Sigma^{c} \qquad x_{c}(t+1) = A_{c}x_{c}(t) + B_{c1}w(t) + B_{c2}y(t)$$
$$u(t) = C_{c}x_{c}(t) + D_{c1}w(t)(t) + D_{c2}y(t)$$

ここで  $x_c = \mathcal{R}^{n_c}$  は補償器の状態,  $w \in \mathcal{R}$  は外部からの参照入力であり,  $A_c$ ,  $B_{c1}$ ,  $B_{c2}$ ,  $C_c$ ,  $D_{c1}$ ,  $D_{c2}$  は適当な大きさの定数行列である.



Fig. 5.1: Closed loop system

つぎに制御系に存在する拘束条件を表現するため

$$z_0(t) = C_{p0}x_p(t) + C_{c0}x_c(t) + D_{u0}u(t)$$
(5.1)

で定義される変数  $z_0 \in \mathcal{R}^{p_0}$ を導入する. このとき  $z_0$  は

$$z_0(t) \in Z \qquad \forall t \in \mathcal{Z}^+ \tag{5.2}$$

の拘束条件を有するものとする (Fig. 5.2 参照). ただしここで集合  $Z \subset \mathcal{R}^{p_0}$  は, つぎのよう に定義される凸多面体である.

$$Z = \{ z_0 \in \mathcal{R}^{p_0} | | (z_0)_j | \le 1 \quad j = 1, \dots, p_0 \}$$
(5.3a)

$$= \{z_0 \in \mathcal{R}^{p_0} | \begin{bmatrix} -I_{p_0} \\ I_{p_0} \end{bmatrix} z_0 \le \mathbf{1}\}$$

$$(5.3b)$$

なおここで第2式における不等号は、ベクトルの各要素間に対して成立するものとしている.



Fig. 5.2: State and control constrained system (1)

 $\Sigma^{p}, \Sigma^{c}$  および (5.1) により構成される閉ループ系  $\Sigma$  はつぎのようになる (Fig. 5.3 参照).

$$x(t+1) = Ax(t) + Bw(t)$$
(5.4a)

$$z_0(t) = C_0 x(t) + D_0 w(t)$$
(5.4b)

$$z_1(t) = C_1 x(t) \tag{5.4c}$$

ただしここで $x = \begin{bmatrix} x_p^{\mathrm{T}} & x_c^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, n := n_p + n_c$ であり, 各行列はつぎで与えられる.

$$A = \begin{bmatrix} A_p + B_p D_{c2} C_{p2} & B_p C_c \\ B_{c2} C_{p2} & A_c \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times n} \qquad B = \begin{bmatrix} B_p D_{c1} \\ B_{c1} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$$
$$C_0 = \begin{bmatrix} C_{p0} + D_{u0} D_{c2} C_{p2} & C_{c0} + D_{u0} C_c \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{p_0 \times n} \qquad D_0 = D_{u0} D_{c1} \in \mathcal{R}^{p_0 \times 1}$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{p1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{1 \times n}$$

なお閉ループ系  $\Sigma$  に対し、つぎの仮定を設ける.

Σ

仮定 5.1. 閉ループ系 Σ は内部安定.

注意 5.1. 本章の主題は、フィードバック補償器  $\Sigma^c$  の設計法ではなく、拘束条件が制御系に 与える影響の解析とこれにもとづく参照入力の調整機構 (リファレンスガバナ) の実現にあ る. そこで  $\Sigma^c$  は、種々の線形制御系設計法により、すでに設計されており、拘束条件  $z_0 \in Z$ が存在しない場合には、想定される参照入力 w に対して良好な制御性能 (追従特性) を有す るものとする.

#### 第5章 参照入力集合の連結にもとづく拘束システムの追従制御



Fig. 5.3: State and control constrained system (2)

#### 例題 5.1. つぎの例題を考える [80].

$$\Sigma^{p} \begin{bmatrix} \dot{x}_{p} \\ z_{1} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p} \\ u \end{bmatrix} \qquad \Sigma^{c} \begin{bmatrix} \dot{x}_{c} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 30 & 0 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c} \\ w \\ y \end{bmatrix}$$

ただしここで

$$|u| \le 2.25$$

の入力制限が存在するとする. すなわち  $Z = \{z_0 | |z_0| \le 1\}$  に対して

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2.25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \\ u \end{bmatrix} \in Z$$

がすべての時刻において成立しなければならない.

本章では、離散時間の制御系を取り扱う. そこでサンプリング時間  $T_{\rm s} = 0.05$  [s] の零次 ホールドによりえられるつぎの離散時間系を考える.

$$\Sigma^{p} \begin{bmatrix} x_{p} \\ z_{1} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p} \\ u \end{bmatrix} \qquad \Sigma^{c} \begin{bmatrix} x_{c} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.15 & -0.15 \\ 30 & 0 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c} \\ w \\ y \end{bmatrix}$$

このとき閉ループ系 Σ はつぎで与えられる.

$$\Sigma \begin{bmatrix} x \\ z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 & 0 \\ -0.15 & 1 & 0.15 \\ \hline \hline -30 & 30 \\ \hline 2.25 & 2.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

閉ループ系  $\Sigma$  において, その拘束条件  $|u| \le 2.25$  がないとした場合の応答を Fig. 5.4 に示す.

Fig. 5.4(a) の参照入力 *w* に対し, その出力 *z*<sub>1</sub> は良好な追従特性を示している. つぎに拘束条件下における応答を Fig. 5.5 に示す.

入力制限の影響により、ワインドアップ現象が生じ、Fig. 5.5(b) に示す出力には、大きな オーバーシュートが起きている.



(c) controller output: u(t)

Fig. 5.4: Simulation results (no constraints present)

Fig. 5.1 の枠組において,目標値 w への追従を達成する補償器  $\Sigma^c$  の設計法は数多く提案 されている.しかしながら現実の制御系には,アクチュエータの飽和要素や,制御対象の保 護などを目的とした,数多くの拘束条件が存在する (Fig. 5.2 参照). このため,拘束条件の影 響を考慮せずに設計された補償器  $\Sigma^c$  を実システムにそのまま適用する場合,ワインドアッ プ現象などを引き起こし,制御系の性能を大きく劣化させる.

本章ではまず, Fig. 5.2 の制御系がその拘束条件を破ることなく動作するための条件の解 析を試みる. 拘束条件が制御系に及ぼす影響は, 外部からの参照入力の変化とその変化が生 じる瞬間の内部状態の両方に依存して現れる [80]. したがって制御系が拘束条件をみたすた めの条件として, ここでは外部から入力することが許される '安全な' 参照入力の集合と同時 に, 対応する状態の集合の両方を評価する.

しかしながらこのようにして評価された参照入力の集合は,拘束条件の影響により,一般 に非常に小さな集合となる.許容される参照入力に制限が設けられることは,本来の制御目 的からは望ましいものではない.そこでここではさらに,制御系の平衡点を移動しながら提



(c) plant input: u(t)

Fig. 5.5: Simulation results with input magnitude constraints

案する参照入力の評価を繰り返すことにより,許容される参照入力の集合を拡大することが 可能であることを示す.

そのうえで、構成された参照入力および状態の集合の性質を利用したリファレンスガバナの実現法を提案する.

注意 5.2. 本章では,  $\Sigma$  における被制御量  $z_1$ , したがってまた 参照入力 w がスカラー値を とる場合に問題を限定する. 本章で提案する閉ループ系  $\Sigma$  の解析法およびリファレンスガ バナの実現は, この限定のもとで成立する.

## 5.3 参照入力集合

拘束条件下では、制御系に許容される参照入力が著しく限定されたものとなる. ここでは まず、原点に平衡点をもつ ∑ に対し、外部から加えることが許される参照入力の全体を評価 する. はじめに  $\gamma \ge 0$  により定義されるつぎの集合を考える.

$$R^{0}(\gamma) = \{ r \in \mathcal{R} | -\gamma \le r \le \gamma \}$$

$$(5.5)$$

つぎに  $\gamma$  の値に応じて決定される 2 つの集合を考える. まずはじめに状態拘束集合をつ ぎのように定義する.

$$X^{0}(\gamma) = \{ x \in \mathcal{R}^{n} | C_{0}x + D_{0}w \in Z \quad \forall w \in \mathcal{R}^{0}(\gamma) \}$$

$$(5.6a)$$

$$= \{ x \in \mathcal{R}^n | \ | (C_0)_{(j,:)} x + (D_0)_{(j,:)} w | \le 1 \quad \forall w \in \mathcal{R}^0(\gamma), \ j = 1, \dots, p_0 \}$$
(5.6b)

$$= \left\{ x \in \mathcal{R}^{n} \middle| \begin{bmatrix} -C_{0} \\ C_{0} \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} \mathbf{1} - e(\gamma) \\ \mathbf{1} - e(\gamma) \end{bmatrix} \right\}$$
(5.6c)

ただしここで  $e(\gamma) \in \mathcal{R}^{p_0}$  の各要素はつぎの線形計画問題により定義される.

$$e_j = \max_{w \in R(\gamma)} (D_0)_{(j,:)} w \qquad j = 1, \dots, p_0$$

注意 5.3. 状態拘束集合は、任意の参照入力  $w \in R^{0}(\gamma)$  に対して、対応する出力 (5.4b) が拘 束条件 (5.2) を達成する状態の全体からなる. したがって  $\Sigma$  が、任意の参照入力  $w \in R^{0}(\gamma)$ に対して拘束条件を常にみたすための必要条件は、その状態を状態拘束集合  $X^{0}(\gamma)$  の内部 に留めておくことである.

 $\Sigma$ が,任意の参照入力  $w \in R^{0}(\gamma)$ に対して,その拘束条件 (5.2)を常に達成するための必要十分条件は、つぎのように定義される最大 CPI (Constrained Positively Invariant) 集合により与えられる.

定義 5.1. 大きさのみが制限された参照入力  $w(t) \in R^0(\gamma) \forall t \in \mathbb{Z}^+$  と初期状態  $x_0$  に対する  $\Sigma$  の応答 (5.4b) を  $z_0(t; x_0, w)$  とする.  $\gamma$  の値に応じて決定される  $\Sigma$  の最大 CPI 集合をつ ぎのように定義する [42],[73].

 $O^0_{\infty}(\gamma) = \{x_0 | z_0(t; x_0, w) \in Z \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+ \; \forall w \in R^0(\gamma)\}$ 

注意 5.4.  $\Sigma$  は安定であるので、十分小さな  $\gamma$  をとれば必ず  $O^0_{\infty}(\gamma) \neq \emptyset$  とすることができる [30],[42],[73]. 逆に大きすぎる  $\gamma$  を与えれば、 $O^0_{\infty}(\gamma)$  は空集合となる.

つぎの補題は定義 5.1 の言い換えにすぎないが, 最大 CPI 集合  $O^0_{\infty}(\gamma)$  の性質をよくあらわしている.

補題 5.1. ある  $\gamma > 0$  に対して,  $O^0_{\infty}(\gamma) \neq \emptyset$  とする. 任意の参照入力  $w(t) \in R^0(\gamma)$  に対し て  $z_0(t) \in Z \ \forall t \in \mathcal{Z}^+$  が成立するための必要十分条件は  $x(0) \in O^0_{\infty}(\gamma)$  である.

注意 5.5. 最大 CPI 集合  $O^0_\infty(\gamma)$  は数値計算により構成され

 $O^0_{\infty}(\gamma) = \{ x \in \mathcal{R}^n | M_0 x \le \mathbf{1} \}$ 

で表現される凸多面体となる. ここで  $M_0 \in \mathcal{R}^{s_0 \times n}$  は  $O^0_{\infty}(\gamma)$  を規定する線形拘束式をあら わし,  $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathcal{R}^{s_0}$  である. なおここで不等式はベクトルの各要素ごとに成立す るものとしている. また一般に, 行列  $M_0$  自身および  $O^0_{\infty}(\gamma)$  を規定するのに必要な線形拘 束式の数  $s_0$  は, 与えられた  $\gamma$  の値により異なる.

注意 5.6. 5.5 節では、リファレンスガバナを実現するため、観測される状態 x(t) に対し、  $x(t) \in O^0_{\infty}(\gamma)$  であるかどうかを判断することが必要となる. これはベクトル  $M_0x(x) - 1$ の 各要素の符号を判断するのみで実行される.

与えられた  $\gamma$  に対して  $O^0_{\infty}(\gamma) \neq \emptyset$  であったとする. このとき  $R^0(\gamma)$  は, 閉ループ系  $\Sigma$  に 対して外部から与えることが可能な参照入力の大きさを与える. しかしながら, 外部から与 えることのできる参照入力の大きさとしては, その最大値を知ることが望ましい. そこでつ ぎの最適化問題を考える.

$$r_m^0 = \sup\{\gamma \in \mathcal{R} | O_\infty^0(\gamma) \neq \emptyset\}$$
(5.7)

注意 5.7.  $r_m^0$  は二分法により, 要求される精度  $\epsilon > 0$  で, 求めることが可能である. すなわち実際の数値計算では,  $r_m^0 < \gamma + \epsilon$  なる最大値  $\gamma$  を求め, これを  $r_m^0$  とする.

最適化問題 (5.7) の解 r<sub>m</sub><sup>0</sup> を用いて定義される集合

$$R^{0} = \{ r \in \mathcal{R} | -r_{m}^{0} \le r \le r_{m}^{0} \}$$
(5.8)

は、 $\Sigma$ が拘束条件を満たしながら追従することのできる最も大きな参照入力の集合を与える. ここではこれを ( $\Sigma$ に対する)参照入力集合と呼ぶ. また、参照入力集合  $R^0$ によって決定される最大 CPI 集合を記号  $O_{\infty}^0$ により簡単にあらわす.

$$O_{\infty}^{0} = \{ x_{0} \in \mathcal{R}^{n} | z_{0}(t; x_{0}, w) \quad \forall t \in \mathcal{Z}^{+} \forall w \in \mathbb{R}^{0} \}$$

例題 5.2. 例題 5.1 の制御系を考える.  $\gamma = 0.1$  に対する  $O_{\infty}^{0}(0.1)$  は, Fig. 5.6(a) の凸多面 体である. なおこの例題では,  $z_1 = x_p$  である. すなわち参照入力は, 制御対象の状態  $x_p$  に 対する指令値となる. そこで  $R^{0}(0.1)$  を  $x_p$  軸と平行に示す. また図中鎖線で囲まれる領域 は, (5.6) で定義される状態拘束集合であり, 拘束条件が達成されるには, 制御系の状態をこ の領域の内部に留めておかなければならない.

つぎに最適化問題 (5.7) によりえられた  $R^0$ ,  $O_\infty^0$  を Fig. 5.6(b) に示す. このとき最適解は  $r_m^0 = 0.243$  であった. これより  $r(t) \in R^0 = \{r \mid -0.243 \le r \le 0.243\}$  を満たす任意の参照 入力に対し, 制御系はその入力制限を破ることなく動作する.

そこで初期状態を  $x_0 = \begin{bmatrix} -0.23 & -0.23 \end{bmatrix}^T$ , 参照入力を  $w = r_m^0 = 0.243$ の定値入力とした 場合の応答を Fig. 5.7(a) に示す.状態の軌跡は, 鎖線で囲まれた領域の内部に留まっており, 拘束条件が常にみたされていることがわかる.

つぎに参照入力を w = 0.47, w = 1.0 とした場合の応答を Fig. 5.7(b) に示す. この場合, 軌 跡が状態拘束集合の外部へ飛び出しており, 拘束条件が破られている. 特に w = 1.0 とした場 合は, ワインドアップの影響が大きく現れ, 状態が非常に大きな値となっている (Fig. 5.5(b) 参照).



Fig. 5.6: Reference signal sets  $R^0(0.1)$  and  $R^0(0.243) = R^0$ 



Fig. 5.7: State Trajectories in phase plane

## 5.4 参照入力集合の連結

参照入力集合 R<sup>0</sup> を構成することにより, ∑ に許容される参照入力の絶対的な大きさが明 らかとなる.しかしながら拘束条件下では,しばしば R<sup>0</sup> (すなわち r<sup>0</sup><sub>m</sub>) が非常に小さな集合 となる.このように許容される参照入力の大きさに制限が加えられることは,本来の制御目 的からは望ましくない.したがって,許容される参照入力の集合を広げることが要求される.

拘束条件が与える影響は、外部から加わる参照入力の変化の大きさとその瞬間の内部状態 x(t)の両方に依存して現れる [80]. この点を考慮すると、 $\Sigma$ の平衡点を移動することにより、 許容される参照入力の集合を広げることが可能となる. ここでは、定常入力  $w(t) = r_m^0$ に対 する定常状態を平衡点とする系に 5.3 節の手法を適用し、あらたな参照入力集合  $R^1$ を構成 する.  $R^0$ ,  $R^1$ の連結は、拡大された参照入力集合を与える. 第5章 参照入力集合の連結にもとづく拘束システムの追従制御

5.4.1 *R*<sup>0</sup> に対する連結

まず定常入力  $w(t) = r_m^0$  に対する  $\Sigma$  の定常状態を考える. なおここで新ためて  $\bar{r}^1 = r_m^0$  としていることに注意する.

$$\bar{r}^{1} = r_{m}^{0} \qquad \bar{x}^{1} = A\bar{x}^{1} + B\bar{r}^{1}$$
$$\bar{z}_{0}^{1} = C_{0}\bar{x}^{1} + D_{0}\bar{r}^{1} \qquad \bar{z}_{1}^{1} = C_{1}\bar{x}^{1}$$

平衡状態における値  $\bar{z}_0^1$  は、参照入力集合  $R^0$  の定義より、その拘束条件を満たし  $\bar{z}_0^1 \in Z$  が成立する. もしこのとき  $|(\bar{z}_0^1)_j| = 1$  なる j が存在するならば、閉ループ系  $\Sigma$  はそれ以上 大きな参照入力を本質的に許容できないことがわかる.

定義 5.2.  $z_0^1 \in int Z$  であるならば、参照入力集合  $R^0$  は (正の方向に) 連結可能であるという.

注意 5.8. 平衡状態における値  $\bar{z}_0^1$  は,  $R^0$  の定義より, 拘束条件を満たし  $\bar{z}_0^1 \in Z$  である. こ のとき  $|(\bar{z}_0^1)_j| = 1$  なる j が存在するならば,  $\Sigma$  はそれ以上大きな参照入力を本質的に許容 できない. 定義 5.2 は, このような状況を除外している.

 $R^0$ は (正の方向に) 連結可能であるとする. このとき  $\bar{x}^1$ を平衡点とするつぎの  $\Sigma^1$ を考える.

$$x^{1}(t+1) = Ax^{1}(t) + Bw^{1}(t)$$
(5.9a)

$$\Sigma^{1} z_{0}^{1}(t) = C_{0}x^{1}(t) + D_{0}w^{1}(t) (5.9b)$$

$$z_1^1(t) = C_1 x^1(t) \tag{5.9c}$$

ただしここで

$$w^{1} = w - \bar{r}^{1} \qquad x^{1} = x - \bar{x}^{1}$$
$$z^{1}_{0} = z_{0} - \bar{z}^{1}_{0} \qquad z^{1}_{1} = z_{1} - \bar{z}^{1}_{1}$$

であり  $w^1, x^1, z_0^1, z_1^1$ は、それぞれその平衡点における値  $\bar{r}^1, \bar{x}^1, \bar{z}_0^1, \bar{z}_1^1$ からの相対的な変位 をあらわしている.

また平衡点における値  $\bar{z}_0^1$  と  $\Sigma$  に対する拘束条件 (5.2) から,  $\Sigma^1$  は,

$$Z^{1} = \{z_{0}^{1} \in \mathcal{R}^{p_{0}} | |(z_{0}^{1})_{j} + (\bar{z}_{0}^{1})_{j}| \leq 1 \quad j = 1, \dots, p_{0}\}$$
(5.10a)  
$$= \{z_{0}^{1} \in \mathcal{R}^{p_{0}} | \begin{bmatrix} \frac{-1}{1 + (\bar{z}_{0}^{1})_{1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{-1}{1 + (\bar{z}_{0}^{1})_{p_{0}}} \\ \frac{1}{1 - (\bar{z}_{0}^{1})_{1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1 - (\bar{z}_{0}^{1})_{p_{0}}} \end{bmatrix} z_{0}^{1} \leq 1\}$$
(5.10b)

で定義される  $Z^1 \subset \mathcal{R}^{p_0}$  に対して

$$z_0^1(t) \in Z^1 \qquad \forall t \in \mathcal{Z}^+$$

の拘束条件を有するものとする.

閉ループ系  $\Sigma$  に対するのと同様に,  $\Sigma^1$  に対して集合

$$R^{1}(\gamma) = \{ r^{1} \in \mathcal{R} | -\gamma \le r^{1} \le \gamma \}$$

$$(5.11)$$

を考え、定義 5.1 と同様に最大 CPI 集合を定義する.

定義 5.3. 大きさのみが制限された参照入力  $w^1(t) \in R^1(\gamma) \forall t \in \mathcal{Z}^+$  と初期状態  $x_0^1$  に対する閉ループ系  $\Sigma^1$ の応答(5.9b)を  $z_0^1(t; x_0^1, w^1)$ とする.  $\gamma$ の値に応じて決定される閉ループ 系  $\Sigma^1$ の最大 CPI 集合をつぎのように定義する.

$$O_{\infty}^{1}(\gamma) = \{x_{0}^{1} | z_{0}^{1}(t; x_{0}^{1}, w^{1}) \in Z^{1} \quad \forall t \in \mathcal{Z}^{+} \; \forall w^{1} \in R^{1}(\gamma) \}$$

また  $\Sigma^1$  に対して最適化問題

$$r_m^1 = \sup\{\gamma \in \mathcal{R} \mid O_\infty^1(\gamma) \neq \emptyset\}$$
(5.12)

も同様に定義することが可能であり、この最適化問題の解としてえられる集合

$$R^{1} = \{ r^{1} \in \mathcal{R} | -r_{m}^{1} \le r^{1} \le r_{m}^{1} \}$$
(5.13)

を  $\Sigma^1$  に対する参照入力集合とよぶ. また参照入力集合  $R^1$  により決定される最大 CPI 集 合をつぎであらわす.

$$O_{\infty}^{1} = \{ x_{0}^{1} \in \mathcal{R}^{n} | z_{0}^{1}(t; x_{0}^{1}, w^{1}) \quad \forall t \in \mathcal{Z}^{+} \; \forall w^{1} \in \mathbb{R}^{1} \}$$

例題 5.3. 例題 5.2 の制御系を考える.  $\bar{r}^1 = r_m^0 = 0.243$  に対する  $\Sigma$  の定常状態では,  $\bar{z}_0^1 = 0 \in Z$  であり,  $R^0$  は, (正の方向に) 連結可能である.

また  $\bar{z}_0^1 = 0$  であることから (5.10) で定義される集合  $Z^1$  について  $Z = Z^1$  が成立する. したがって,  $\Sigma \geq \Sigma^1$  の動特性は全く同一であることから, この例題では参照入力集合  $R^1$  を 構成する手順は  $R^0$  を構成する手順と全く同一であり,  $R^1 = R^1(0.243)$  がえられる. さらに 具体的は  $R^0$ ,  $O_{\infty}^0$  を平行移動するのみで  $R^1$ ,  $O_{\infty}^1$  が構成される.

 $R^1, O^1_{\infty}$ を構成し Fig. 5.6(b) の  $R^0, O^0_{\infty}$  とともに Fig. 5.8 に示す.

参照入力集合の連結とリファレンスガバナ

例題 5.2 でみたように、目標値として  $w \ge r_m^0$  すなわち  $w \notin R^0$  であるような値が与えられた場合、参照入力集合  $R^0$  および対応する最大 CPI 集合  $O_\infty^0$  に関する情報のみから、制御系が拘束条件 (5.2) をみたすかどうかについて結論を与えることはできない.



Fig. 5.8: Reference signal sets  $R^0$  and  $R^1$ 

しかしながらここで目標値 w が, 連結された  $R^1$  に対して,  $w \in R^1$  であるならば, つぎの ような参照入力の整形によって, 拘束条件を常に達成した上で目標値への追従を実現するこ とが可能である.

まず許容される最大の目標値である  $r_m^0$  を一時的な制御系への入力とする. つぎに入力  $r_m^0$  を,  $x(\tau) \in O_\infty^1$  が成立する時刻  $\tau$  で, 最終的な目標値 w へ切り換える. このとき  $w \in R^1$  で あるから, 入力 w の影響により, 拘束条件が破られることはない.

このように参照入力集合の性質のもとづく入力信号の整形により,拘束条件を常に達成した上で,最終的には目標値への追従を実現することが可能である.

例題 5.4. 例題 5.3 で構成した参照入力集合  $R^0$ ,  $R^1$  を考える (Fig. 5.8 参照). 例題 5.2 で みたように、初期状態を  $x_0 = \begin{bmatrix} -0.23 & -0.23 \end{bmatrix}^T$ , 目標値として定値入力 w = 0.47 を与える 場合、制御系は拘束条件を破ってしまう (Fig. 5.7(b) 参照). よって最終的な目標値 w = 0.47 を直接入力することはできない.

そこでまずはじめに, 許容される最大の目標値  $r_m^0 = 0.243$  を制御系の一時的な目標入力とする. つぎにこれを w = 0.47 へ切り換えるが, このとき w = 0.47 を入力することが許される条件は,  $x \in O_{\infty}^1$  である. そこでつぎの参照入力を考え, このときの応答を Fig. 5.9 に示す.

$$r(t) = \begin{cases} r_m^0 = 0.243 & x(t) \in O_\infty^0 \\ w = 0.47 & x(t) \in O_\infty^1 \end{cases}$$
(5.14)

Fig. 5.9 に示す応答は、参照入力が w = 0.47 の定値入力から (5.14) へと整形されたこと により、常にその拘束条件をみたしている. また最終的には入力 r(t) = w = 0.47 が与えら れることから、目標値への追従も達成している.

この例からわかるように、参照入力集合および最大 CPI 集合の性質を利用することにより、参照入力の整形を実現するリファレンスガバナが構成可能である.より具体的なリファレンスガバナの構成法は 5.5 節で示す.



Fig. 5.9: State trajectory in phase plane

#### 5.4.2 *R<sup>i</sup>* に対する連結

 $R^0$  に対する連結と同様に  $R^i$ ,  $i \ge 1$  に対する連結を順次考えことにより参照入力集合を (正の方向へ) 拡大することが可能である. ここでは一般の  $R^i$ ,  $i \ge 1$  に対する連結を導出 する.

まず定常入力  $w(t) = r_m^{i-1} + \bar{r}^{i-1}, i \ge 1, (\bar{r}^0 = 0)$  に対する  $\Sigma$  の平衡状態を考える.

$$\bar{r}^{i} = r_{m}^{i-1} + \bar{r}^{i-1} \qquad \qquad \bar{x}^{i} = A\bar{x}^{i} + B\bar{r} \\ \bar{z}_{0}^{i} = C_{0}\bar{x}^{i} + D_{0}\bar{r}^{i} \qquad \qquad \bar{z}_{1}^{i} = C_{1}\bar{x}^{i}$$

ただしここで  $\bar{r}^0 = 0, \ \bar{x}^0 = 0, \ \bar{z}_0^0 = 0, \ \bar{z}_1^0 = 0$  である.

R<sup>0</sup>に対する連結と同様、つぎの定義を考える.

定義 5.4.  $\overline{z}_0^i \in \operatorname{int} Z$  であるならば、参照入力集合  $R^{i-1}$  は (正の方向に) 連結可能であるという.

注意 5.9. 定義 5.4 は定義 5.2 と同様に, 拘束条件の影響により, 許容される参照入力の集合 が拡大できない状況を除外している. すなわち, 平衡点における値  $\overline{z_0}$  は, 参照入力集合  $R^{i-1}$  の定義からその拘束条件を達成し  $\overline{z_0} \in Z$  が成立する. このとき  $|(\overline{z_0})_j| = 1$  なる j が存在す るならば,  $\Sigma$  はそれ以上大きな参照入力を本質的に許容できない.

 $R^{i-1}$ は連結可能であるとする. このとき  $\bar{x}^i$ を平衡点とするつぎの  $\Sigma^i$ を考える.

$$x^{i}(t+1) = Ax^{i}(t) + Bw^{i}(t)$$
(5.15a)

$$\Sigma^{i} \qquad z_{0}^{i}(t) = C_{0}x^{i}(t) + D_{0}w^{i}(t) \qquad (5.15b)$$

$$z_1^i(t) = C_1 x^i(t)$$
 (5.15c)

ただしここで

$$w^{i} = w - \bar{r}^{i} \qquad x^{i} = x - \bar{x}^{i}$$
$$z^{i}_{0} = z_{0} - \bar{z}^{i}_{0} \qquad z^{i}_{1} = z_{1} - \bar{z}^{i}_{1}$$

であり,  $w^i$ ,  $x^i$ ,  $z_0^i$ ,  $z_1^i$ は, それぞれの平衡点における値  $\bar{w}^i$ ,  $\bar{x}^i$ ,  $\bar{z}_0^i$ ,  $\bar{z}_1^i$ からの相対的な変位を あらわしている.

また平衡点における値  $\overline{z_0}^i$  と  $\Sigma$  に対する拘束条件(5.2) から  $\Sigma^i$  が

$$Z^{i} = \{z_{0}^{i} \in \mathcal{R}^{p_{0}} | |(z_{0}^{i})_{j} + (\bar{z}_{0}^{i})_{j}| \leq 1 \quad j = 1, \dots, p_{0}\}$$
(5.16a)
$$= \{z_{0}^{i} \in \mathcal{R}^{p_{0}} | \begin{bmatrix} \frac{-1}{1 + (\bar{z}_{0}^{i})_{1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{-1}{1 + (\bar{z}_{0}^{i})_{p_{0}}} \\ \frac{1}{1 - (\bar{z}_{0}^{i})_{1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1 - (\bar{z}_{0}^{i})_{p_{0}}} \end{bmatrix} z_{0}^{i} \leq 1\}$$
(5.16b)

で定義される集合  $Z^i \subset \mathcal{R}^{p_0}$  に対してつぎの拘束条件を有することも  $\Sigma^1$  に対するのと同様 である.

$$z^i(t) \in Z^i \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+$$

このとき参照入力集合  $R^i$  を  $R^1$  を定義したのと全く同様に考えることができる. まずつ ぎの集合を考える.

$$R^{i}(\gamma) = \{ r^{i} \in \mathcal{R} | -\gamma \leq r^{i} \leq \gamma \}$$

 $\Sigma^i$ に対する最大 CPI 集合はつぎのように定義される.

定義 5.5. 大きさのみが制限された参照入力  $w^i(t) \in R^i \forall t \in \mathcal{Z}^+$  と初期状態  $x_0^i$  に対する閉 ループ系  $\Sigma^i$ の応答 (5.15b) を  $z_0^i(t; x_0^i, w^i)$  とする.  $\gamma$ の値に応じて決定される閉ループ系  $\Sigma^i$ の最大 CPI 集合をつぎのように定義する.

$$O^{i}_{\infty}(\gamma) = \{ x^{i}_{0} \in \mathcal{R}^{n} | z^{i}_{0}(t; x^{i}_{0}, w^{i}) \in Z^{i} \quad \forall t \in \mathcal{Z}^{+} \; \forall w^{i} \in R^{i}(\gamma) \}$$

つぎの最適化問題により  $\Sigma^i$  に対する参照入力集合  $R^i$  が構成される.

$$r_m^i = \sup\{\gamma \in \mathcal{R} | \ O_\infty^i \neq \emptyset\}$$
(5.17)

最適化問題 (5.17) により構成される r<sup>i</sup><sub>m</sub> により定義される集合

 $R^{i} = \{ r^{i} \in \mathcal{R} | -r_{m}^{i} \le r^{i} \le r_{m} \}$ 

を  $\Sigma^i$  に対する参照入力集合と呼ぶ. また

$$O_{\infty}^{i} = \{ x_{0}^{i} \in \mathcal{R}^{n} | z_{0}^{i}(t; x_{0}^{i}, w^{i}) \quad \forall t \in \mathcal{Z}^{+} \; \forall w^{i} \in R^{i} \}$$

とする.

#### 参照入力集合の負方向への連結

これまでは、参照入力集合を正の方向へ連結することについて考えた.参照入力集合の連結は、負の方向へも考えることが可能であり、これは

$$\bar{r}^{-i} = -r_m^{i-1} + \bar{r}^{-(i-1)} \qquad \bar{x}^{-i} = A\bar{x}^{-i} + B\bar{r}^{-i}$$
$$\bar{z}_0^{-i} = C_0\bar{x}^{-i} + D_0\bar{r}^{-i} \qquad \bar{z}_1^{-i} = C_1\bar{x}^{-i}$$

を平衡点とする  $\Sigma^{-i}$  を順次考えることにより実現される. ただしここで  $i \ge 1$ ,  $\bar{r}^0 = 0$ ,  $\bar{x}^0 = 0$ ,  $\bar{z}^0_0 = 0$ ,  $z^0_1 = 0$  である. また  $r_m^{-i}$  を定義する最適化問題の定式化などは  $R^j$ ,  $j \ge 1$  を定義する際のものと全く同様である.

このとき参照入力集合  $R^{-i}$  および対応する最大 CPI 集合  $O_{\infty}^{-i}$  がそれぞれ

$$\begin{aligned} R^{-i} &= \{ r^{-i} \in \mathcal{R}^n | \ -r_m^{-i} \le r^{-i} \le r_m^{-i} \} \\ O_{\infty}^{-i} &= \{ x_0^{-i} \in \mathcal{R}^n | \ z_0^{-i}(t; x_0^{-i}, w^{-i}) \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+ \ \forall w^{-i} \in R^{-i} \} \end{aligned}$$

で定義される.

例題 5.5. 例題 5.3 の制御系に対して参照入力集合を更に正および負の方向に対して連結 する.

例題 5.3 でもみたようにこの制御系では、定値入力  $w(t) = \bar{r}^i$  に対する定常状態において  $z_0^i = 0$  が成立し、参照入力集合  $R^{i-1}$  は任意の i について連結可能である。したがってまた  $Z^i = Z$  が成立し、各  $R^i$ を構成する手順は  $R^0$ の構成と同様であり  $R^i = R^i(0.243)$  となる。  $R^i, O_{\infty}^i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ を構成し Fig. 5.10 に示す。



Fig. 5.10: Reference signal sets  $R^i$ ,  $i = 1, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm 4$ 

## 5.5 参照入力集合の連結にもとづくリファレンスガバナ

ここでは, 5.4 節の参照入力集合の連結にもとづいたリファレンスガバナの実現法を提案 する. リファレンスガバナの構成における基本的なアイデアは, 5.4.1 節で概観したとおりで ある. また提案するリファレンスガバナを付加した閉ループ系 Fig. 5.11 の安定性および追 従特性に関する性質を明らかにする.



Fig. 5.11: Closed loop system with reference governor

リファレンスガバナを構成するために 5.4 節の参照入力集合の連結により

 $R^i, O^i_{\infty} \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm q$ 

が構成されているものとする.またつぎの記号を定義しておく.

$$R = \bigcup_{i=-q}^{q} R^{i}$$
$$= \{r \in \mathcal{R} | -r_{m}^{-q} + \bar{r}^{-q} \le r \le r_{m}^{q} + \bar{r}^{q}\}$$
$$O_{\infty} = \bigcup_{i=-q}^{q} O_{\infty}^{i}$$

リファレンスガバナを付加した制御系 Fig. 5.11 の安定性および追従特性に関する性質は, つぎの仮定のもとで示される.

仮定 5.2.  $x \in O_{\infty}$  に対して

$$I(x) = \{i \mid x \in O^i_\infty\}$$

を定義する. このとき任意の  $x \in O_{\infty}$  に対して I(x) は連続した整数からなる集合である.

リファレンスガバナは、5.4.1節で概観したアイデアをより一般的な場合に拡張することにより構成される. ここで Fig. 5.11 のリファレンスガバナは、つぎのアルゴリズムにより、制御系への実際の入力 r(t)をオンラインで決定する.

リファレンスガバナのアルゴリズム

data:	x(t), w(t)			
if	$w(t) > r_m^q + \bar{r}^q$	: $j(t) := q$	goto case 2	
elseif	$w(t) < -r_m^{-q} + \bar{r}^{-q}$	: $j(t) := -q$	goto case 2	
elseif	t = 0	:	goto case 1	
elseif	$w(t) \in R^{j(t-1)}$	: $j(t) := j(t-1)$	goto case 2	(5.18)
else		:	goto case 1	

$$\begin{aligned} \text{case 1:} \quad J(t) &= \{j \mid w(t) \in R^{j} \} \\ &= \{i \mid x(t) \in O_{\infty}^{i} \} \\ \text{if} \quad J(t) \cap I(t) \neq \emptyset &: \text{ for some } k \in J(t) \cap I(t) &(5.19) \\ &= j(t) := k \quad i(t) := k \\ &r(t) := w(t) &(5.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{else} &: j_{\max} := \max\{j \mid j \in J(t) \} \\ &j_{\min} := \min\{j \mid j \in J(t) \} \\ &i_{\max} := \max\{i \mid i \in I(t) \} \\ &i_{\min} := \min\{i \mid i \in I(t) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{if} \quad j_{\min} > i_{\max} &: j(t) := j_{\min} &(5.21) \\ &i(t) := i_{\max} \\ &r(t) := r_{m}^{i(t)} + \bar{r}^{i(t)} &(5.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{else} &: j(t) := j_{\max} \\ &i(t) := i_{\max} \\ &i(t) := i_{\min} \\ &r(t) := -r_{m}^{i(t)} + \bar{r}^{i(t)} \\ &f(t) := -r_{m}^{i(t)} \\ &f(t) := -r_{m$$

case 2:

else

if  $x(t) \in O_{\infty}^{j(t)}$  : i(t) := j(t) (5.24)

if 
$$j(t) = q$$
 :  $r(t) := r_m^q + \bar{r}^q$  (5.25)

elseif 
$$j(t) = -q$$
 :  $r(t) := -r_m^{-q} + \bar{r}^{-q}$  (5.26)  
else :  $r(t) := w(t)$  (5.27)

$$: r(t) := w(t)$$
 (5.27)

elseif 
$$j(t) > i(t-1)$$
 :  $i(t) := \max\{i \mid x(t) \in O_{\infty}^{i}\}$  (5.28)

$$r(t) := r_m^{i(t)} + \bar{r}_m^{i(t)} \tag{5.29}$$

: 
$$i(t) := \min\{i \mid x(t) \in O_{\infty}^{i}\}$$
 (5.30)

$$r(t) := -r_m^{i(t)} + \bar{r}_m^{i(t)} \tag{5.31}$$

リファレンスガバナを付加した閉ループ系 Fig. 5.11 において, つぎが成立する.

## 定理 5.1. リファレンスガバナを付加した閉ループ系 Fig. 5.11 において, $x(0) \in O_{\infty}$ とする. 1. 任意の参照入力 w に対して $z_0(t) \in Z \ \forall t \in Z^+$ .

- 2. 参照入力 w が定値に収束して  $w(t) \rightarrow \overline{w}$  であるとする. このとき r(t) もまた収束する.
- 3.2. においてさらに  $w(t) \rightarrow \bar{w} \in R$  であるとする. このとき r(t) も収束し  $r(t) \rightarrow \bar{w}$ .

#### 第5章 参照入力集合の連結にもとづく拘束システムの追従制御

注意 5.10. 定理 5.1 の 3. より, 外部からの参照入力 w が R に含まれる定値  $\bar{w}$  へ収束す る場合, リファレンスガバナと  $\Sigma$  による構成される制御系 Fig. 5.11 は  $z_0(t) \rightarrow \bar{w}$  の追従を 達成する. またこのとき定理 5.1 の 1. より, 拘束条件 (5.2) はすべての時刻において達成さ れる.

注意 5.11. 定理 5.1 の 2. より、外部からの参照入力 w が任意の定値  $\bar{w}$  へ収束するとき r(t) もまた収束する. このとき  $\bar{w} \in R$  ならば定理 5.1 の 3. へ帰着される.  $\bar{w} \notin R$  でありか つ  $\bar{w} > r_m^q + \bar{r}^q$  のとき r(t) はリファレンスガバナの構成において想定された最大値  $r_m^q + \bar{r}^q$ へ収束する. 一方  $\bar{w} < -r_m^{-q} + \bar{r}^{-q}$  である場合, r(t) は  $-r_m^{-q} + \bar{r}^{-q}$  へ収束する.

証明 (定理 5.1). 初期状態を  $x(0) \in O_{\infty}$  とする. r(t) を定義する(5.20), (5.22), (5.23), (5.25), (5.26), (5.27), (5.29), (5.31) のすべてにおいて  $x(t) \in O_{\infty}^{i(t)}$  かつ  $r(t) \in R^{i(t)}$  が成立している. よって最大 CPI 集合  $O_{\infty}^{i}$  の定義から, すべての時刻において  $x(t) \in O_{\infty}$  であり, 拘束条件がみたされ定理の 1. が成立する.

つぎに参照入力 w が  $\bar{w} \in R$  に収束する場合を考え, 定理の 3. が成立することを示す.

定理の 1. の証明より, 常に  $x(t) \in O^i_{\infty}$  が成立していることから, 一般性を失うことなく 参照入力を  $w = \overline{w} \in R$  の定値入力と仮定する.

1. t = 0 のとき case 1 (5.19) において  $J(0) \cap I(0) \neq \emptyset$  が成立する場合, 任意の  $k \in J(0) \cap I(0)$ に対して  $x(0) \in O_{\infty}^{k}$ ,  $r(0) = \bar{w} \in R^{k}$  より  $x(1) \in O_{\infty}^{k}$  である.

t = 1 のとき, (5.18) より j(1) = j(0) = k である. また  $w = \overline{w}$  が定値であることから, 以後すべての時刻において j(t) = k が成立する.

さらに case 2 (5.24) において,  $x(1) \in O_{\infty}^{k}$ ,  $r(1) = \bar{w}$ より  $x(2) \in O_{\infty}^{k}$  である. 以後同様に, すべての時刻において  $x(t) \in O_{\infty}^{k}$ ,  $r(t) = \bar{w} \in R^{k}$  が成立する.

2. t = 0 において  $J(0) \cap I(0) = \emptyset$  である場合を考える. J(0), I(0) は, 仮定 5.2 より連続した整数からなる集合である. よって J(0), I(0) に共通要素がない場合,  $j_{\min} > i_{\max}$  あるいは  $j_{\max} < i_{\min}$  のいずれか一方が必ず生じる. ここではまず case 1 (5.21) において  $j_{\min} > i_{\max}$  である場合を考える.

 $j(0) = j_{\min} > i(0) = i_{\max}$  とする.  $x(0) \in O_{\infty}^{i(0)}, r(0) = r_m^{i(0)} + \bar{r}^{i(0)} \in R^{i(0)}$  より  $x(1) \in O_{\infty}^{i(0)}$ である.

2.1. t = 1 のとき, (5.18) より  $j(1) = j(0) = j_{\min}$  である. また  $w = \overline{w}$  が定値であることから, 以後すべての時刻において  $j(t) = j(0) = j_{\min}, t \ge 0$  が成立する.

case 2 (5.24) において  $x(1) \in O_{\infty}^{j(1)} = O_{\infty}^{j_{\min}}$  が成立する場合,  $x(1) \in O_{\infty}^{j_{\min}}$ ,  $r(1) = \bar{w} \in R^{j_{\min}}$ より  $x(2) \in O_{\infty}^{j_{\min}}$  である.

 $j(t) = j_{\min}$  であるので、この場合以後すべての時刻で case 2 (5.24) において  $x(t) \in O_{\infty}^{j_{\min}}$ ,  $r(t) = \bar{w} \in R^{j_{\min}}$  が成立する.

2.2. case 2 (5.24) において  $x(1) \notin O_{\infty}^{j(1)} = O_{\infty}^{j_{\min}}$  である場合を考える. t = 1 のとき, (5.18) より  $j(1) = j(0) = j_{\min}$  であること,  $w(t) = \bar{w}$  が定値であるから, すべての時刻で  $j(t) = j(0) = j_{\min}$  であることは 2-1 と同様である.

2.2.1. case 2 (5.24) において  $x(1) \notin O_{\infty}^{j(1)} = O_{\infty}^{j_{\min}}$  であり,  $j(0) = j(1) = j_{\min} > i(0) = i_{\max}$  より case 2 (5.28) において  $i(1) = \max\{i \mid x(1) \in O_{\infty}^{i}\} \ge i(0) = i_{\max}$  および  $r(1) = r_{m}^{i(1)} + \bar{r}^{i(1)}$  である.  $x(1) \in O_{\infty}^{i(0)}$  でもあるから  $i(1) \ge i(0)$  であること, すなわち case 2 (5.28) における i(1), i(0) は非減少列である.

2.2.2. ここで  $i(1) < j(1) = j(0) = j_{\min}$  であることを示しておく. i(1) = i(0) の場合は  $j(0) = j_{\min} > i(0) = i(1)$  より明らかである. i(1) > i(0) の場合に  $i(1) \ge j(0) = j_{\min}$  を仮定 する. このとき  $i(1) \ge j(0), j(0) > i(0)$  より  $i(1) \ge j(0) > i(0)$  である.  $I(x(1)) = \{i | x(1) \in O_{\infty}^{i}\}$  とすると仮定 5.2 より, I(x(1)) は i(0), i(1) の間の連続する整数をすべて含むことか ら  $j(0) \in I(x(1))$  すなわち  $x(1) \in O_{\infty}^{j(0)}$  が成立していることになる. よってこの場合 case 2 (5.24) に帰着される.

これに加え,  $j(t) = j_{\min}$  で一定であることより, 以後すべての時刻において case 2 (5.30) が成立することはない. 結局この場合 i(t) は case 2 (5.28) により与えられ,  $j_{\min}$  により上から有界な非減少列となる.

2.2.3. 最後に i(t) は  $j(0) = j_{\min}$  以外に収束しないことを示す.

i(t)が $i' < j(0) = j_{\min}$ に収束したと仮定する. case 2 (5.28)より $i(\tau) = i'$ が成立する時刻  $\tau$ 以降で $r(t) = r_m^{i'} + \bar{r}^{i'}$ である. よって $x(t) \rightarrow \bar{x}^{i'+1}$ が成立する. ここで $\bar{x}^{i'+1}$ は定常入力 $r_m^{i'} + \bar{r}^{i'}$ に対する  $\Sigma$ の平衡状態である. このとき $i' < j(0) = j_{\min}$ であることからi'と $j_{\min}$ の間には,  $i' + 1 = j_{\min}$ であることも許して, 少なくとも一つ以上のインデックスが存在する. したがってi' + 1なるインデックスを考えることに矛盾は生じない.  $\bar{x}^{i'+1} \in O_{\infty}^{i'+1}$ であるので再び case 2 (5.28) により, ある時刻  $\tau'$ で $i(\tau') = \max\{i \mid x(\tau') \in O_{\infty}^{i}\} \ge i' + 1 > i'$ が与えられる. これはi(t)が $i' < j(0) = j_{\min}$ に収束することに矛盾する.

よって i(t) は、ある時刻  $\tau$  で  $j(0) = j_{\min}$  に収束し、このとき 2.1. と同様に、 $\tau$  以降のす べての時刻において  $x(t) \in O_{\infty}^{j_{\min}}, r(t) = \bar{w} \in R^{j_{\min}}$  が成立する.

3. t = 0 において,  $J(0) \cap I(0) = \emptyset$  かつ  $j_{\max} < i_{\min}$  である場合は, 2. と全く同様に示される.

参照入力が  $w = \bar{w} \notin R$  なる定常入力である場合は,  $\bar{w} > r_m^q + \bar{r}^q$  のとき j(t) = q, また  $\bar{w} < -r_m^{-q} + \bar{r}^{-q}$  のとき j(t) = -q となり, r(t) が  $r_m^q + \bar{r}^q$  ( $\bar{w} > r_m^q + \bar{r}^q$  のとき) あるいは  $-r_m^{-q} + \bar{r}^{-q}$  ( $\bar{w} < -r_m^{-q} + \bar{r}^{-q}$  のとき) に収束する. これは 2., 3. と同様の手順をたどること により示される.

注意 5.12. 文献 [8] では, モデル予測制御の枠組からリファレンスガバナの実現法が提案されている. 一方文献 [29] では, 本章の方法と同じくあらかじめ構成されたある集合の情報

にもとづくリファレンスガバナの実現法が提案されている. ここでは r(t) を一定値と考え  $r(t+1) = r(t) + \alpha(w(t) - r(t))$  における  $\alpha$  をオンラインで最適化する自由度がリファレン スガバナに与えられる. これにより定義 5.1 に対応する集合を

$\left[ r(t+1) \right]$	- I	0	$\begin{bmatrix} r(t) \end{bmatrix}$
$\left[ x(t+1) \right]^{-}$	В	A	$\begin{bmatrix} x(t) \end{bmatrix}$

に対して構成することが必要となる.しかしながらこれは,固有値1を含む系に対する最大 CPI 集合の構成である.よって状態変数の変換,最大 CPI 集合の構成,構成された集合の逆 変換あるいはオンラインで観測される状態を変換した上で最適化問題を解く,といった手順 が必要となる.本章の方法では,閉ループ系に対する変数変換などを必要としないものの,リ ファレンスガバナを実現するには,複数の  $R^i$ ,  $O^i_\infty$  に関するデータを計算機内部に保持しな ければならない.

例題 5.6. 例題 5.1 の制御系に対し,提案手法によりリファレンスガバナを構成する. こ こで利用する参照入力集合および最大 CPI 集合は,例題 5.5 で構成した  $R^i$ ,  $O^i_{\infty}$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$  である.

リファレンスガバナを付加した Fig. 5.11 の制御系の応答を Fig. 5.12 に示す.

Fig. 5.12(a) の参照入力 w は, リファレンスガバナにより Fig. 5.12(b) に示す r に, オン ラインで整形され, 制御系への実際の入力 r となる. このとき  $z_1$  の応答は Fig. 5.12(c) に示 すとおりであり, 拘束条件がない場合の Fig. 5.4(b) に比較すると劣るものの, 良好な追従特 性を示している. またこのとき Fig. 5.12(d) の補償器からの出力 u は, その入力制限を常に 満足している.

## 5.6 連結度の調整パラメータ

ここでは、5.4 節の参照入力集合の連結において、さらに '連結の度合' を調整するパラメー タ  $\delta$  の導入が可能であることを示す. また 5.5 節によるリファレンスガバナを実現するに は、計算機内部に  $R^i$ ,  $O^i_{\infty}$ ,  $i = 0, \pm 1, \ldots, \pm q$  を表現するためのデータを保持することが必要 となる. このため問題によっては、多くの  $R^i$  を利用してリファレンスガバナを実現するこ とが困難となることも考えられる. パラメータ  $\delta$  の導入は、リファレンスガバナの実現に必 要となる  $R^i$  の数の調整も可能にする.

5.4.1 節では、(5.8) で定義される R<sup>0</sup> に対する連結 R<sup>1</sup> を構成する際、(5.11) すなわち

$$R^{1}(\gamma) = \{ r^{1} \in \mathcal{R} | -\gamma \leq r^{1} \leq \gamma \}$$

を定義し、これにより (5.13) の R<sup>1</sup> を構成した.

しかしながら (5.11) に代って

$$R^{1}(\gamma) = \{ r^{1} \in \mathcal{R} | 0 \le r^{1} \le \gamma \}$$



Fig. 5.12: Simulation results with reference governor

により *R*<sup>1</sup>(γ) を定義する方が, 参照入力集合をより正の方向へ拡大するという観点からは有利である.

あるいはさらに一般的に、参照入力集合  $R^0$  と  $R^1$  の '連結の度合' を調整するパラメータ  $\delta$  を導入し、つぎのように  $R^1(\gamma)$  を定義することが可能である.

$$R^{1}(\gamma) = \{ r^{1} \in \mathcal{R} \mid -\delta \le r^{1} \le \gamma \} \qquad 2r_{m}^{0} > \delta \ge 0$$

$$(5.32)$$

このとき定義 5.3 の最大 CPI 集合および最適化問題 (5.12) は, 全く同様に定義されるもの とする.

また各  $R^i$  対しても、(5.32) と同様にパラメータ  $\delta$  を導入したうえで、それぞれに対する 参照入力集合の連結を考えることが可能である. さらにこのようにして構成された  $R^i$ ,  $O^i_\infty$ をもちいてリファレンスガバナを実現する際、5.5 節のリファレンスガバナ構成のためのア ルゴリズムに変更の必要は生じない.

このパラメータ δ の導入による自由度の増加により、より少ない数の *R<sup>i</sup>* の利用で広い範囲の参照入力を考慮することが可能となる. 同時にこれは、リファレンスガバナを実現する

際に必要となるデータ数, すなわち各  $R^i$ ,  $O^i_\infty$  を計算機内部に表現するのに必要となるデー タ数が軽減されることを意味する. またあるいは逆に,  $\delta$  の値を大きく取ることにより, 参照 入力集合の重なりを大きくすることも可能である. このようにして実現されたリファレンス ガバナは, より細かい精度で外部からの参照入力 w の整形をおこなうことになる.

例題 5.7. 例題 5.3, 5.5 における参照入力集合の連結に対し

$$R^{i}(\gamma) = \{ r^{i} \in \mathcal{R} \mid -0.05 \le r^{i} \le \gamma \}$$

により各  $R^i(\gamma)$  を定義し、参照入力集合  $R^i$  を構成する.

各  $R^i$ ,  $O^i_\infty$  およびこれらを利用しリファレンスガバナを実現した場合の応答を Fig. 5.13 に示す.



Fig. 5.13: Reference signal sets and simulation results,  $\delta = 0.05$ 

Fig. 5.13(a) に示す各  $R^i$  および対応する  $O^i_{\infty}$  からわかるように,  $\delta = 0.05$  の導入により, より少ない数の参照入力集合  $R^i$  で Fig. 5.10 とほぼ同じ範囲の参照入力を考慮できること

がわかる. またこれは, より少ない数のデータ, すなわち  $R^i$ ,  $O^i_{\infty}$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2$  を表現する のに必要なデータのみで, リファレンスガバナが実現できることを意味する. しかしながら このときの応答は, 外部からの参照入力 w を荒い精度で整形することになる (Fig. 5.13(b) 参照). よって結果としてえられる Fig. 5.13(c) の出力は, Fig. 5.12(c) に示す応答よりも収 束が遅くなっている.

そこでつぎに、 各 $R^i(\gamma)$ を

$$R^i = \{ r^i \in \mathcal{R} \mid -0.393 \le r^i \le \gamma \}$$

で定義し,各参照入力集合の重なり具合を大きくする場合を考える.

各  $O^i_\infty$  およびこれらを利用しリファレンスガバナを実現した場合の応答を Fig. 5.14 に示す.



(c) controlled output:  $z_1(t)$ 

(d) controller output: u(t)

Fig. 5.14: Reference signal sets and simulation results,  $\delta = 0.393$ 

Fig. 5.14(a) に示すように、各  $O_{\infty}^{i}$  の重なりが大きくなっており、Fig. 5.10 あるいは Fig. 5.13(a) とほぼ同じ参照入力の範囲をより多くの  $R^{i}$  を利用して考慮することになる. し たがってこのときのリファレンスガバナの出力 r(t) は, 非常に細かい精度で w(t) を整形している (Fig. 5.14(b) 参照). また Fig. 5.14(c) に示す出力の収束も, Fig. 5.12(c) に比較して, 早くなっている.

## 5.7 設計例

文献 [8] で取り上げられた位置決めサーボ系 (Fig. 5.15 参照) を考える. 制御対象は DC モータ, ギアおよび剛性に制限のあるシャフト介して結合された負荷からなる. また制御目 的は, モータ側の入力電圧を制御することにより, 負荷側の位置  $\theta_L$  を参照入力に誤差なく 追従させることである.



Fig. 5.15: Position servo mechanism

Table 5.1. Model parameters					
symbol	value	meaning			
$J_M$	$0.5 \; [\mathrm{kgm^2}]$	motor inertia			
$\beta_M$	$0.1 \; [\mathrm{Nm}/(\mathrm{rad/s})]$	motor viscous friction coefficient			
$J_L$	$20J_M \; [\mathrm{kgm}^2]$	load inertia			
$\beta_L$	$25 \ [Nm/(rad/s)]$	load viscous friction coefficient			
$k_T$	$10 \; [Nm/A]$	motor constant			
$k_{\theta}$	$1280.2 \; [Nm/rad]$	torsional rigidity			
$\rho$	20	gear ratio			
R	$20 \ [\Omega]$	resistance of armature			
$T_s$	0.1  [s]	sampling time			

Table 5.1: Model parameters

$$x_p = \begin{bmatrix} heta_L & \dot{ heta}_L & heta_M & \dot{ heta}_M \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, u = V$$
とすると制御対象  $\Sigma^p$ はつぎの状態空間モデルで与えら

#### れる. また負荷側の位置 $\theta_L$ は観測可能であるとする.

$$\frac{dx_p}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_\theta}{J_L} & -\frac{\beta_L}{J_L} & \frac{k_\theta}{\rho J_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_\theta}{\rho J_M} & 0 & -\frac{k_\theta}{\rho^2 J_M} & -\frac{\beta_M + k_T^2/R}{J_M} \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_T}{RJ_M} \end{bmatrix} u_p$$
$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p$$

ここで制御対象には、シャフトに加わるトルク

$$T = \begin{bmatrix} k_{\theta} & 0 & -\frac{k_{\theta}}{\rho} & 0 \end{bmatrix} x_p$$

およびモータへの入力電圧 u = V に対して、それぞれつぎの拘束条件が存在するものとする.

$$|T| \le 78.5398 \text{ [Nm]}$$
  $|V| \le 220 \text{ [V]}$  (5.33)

そこで

$$z_0(t) = \frac{1}{78.5398} \begin{bmatrix} k_\theta & 0 & -\frac{k_\theta}{\rho} & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p + \frac{1}{220} \begin{bmatrix} 0\\ 1 \end{bmatrix} u$$

とし  $z_0(t) \in Z \forall t \in \mathcal{Z}^+$  の拘束条件を考える. ただしここで集合 Z は (5.3) で定義される. 制御対象をサンプリング時間  $T_s = 0.1$  [s] の零次ホールドで離散化し,入力を  $w - \theta_L$ ,出

前面対象をサンプリング時間  $I_s = 0.1$  [s] の令人ホールド て確認化し、ハガを  $w = \theta_L$ 、山力を u = V とするつぎの補償器  $\Sigma^c$  を適用する.

$$\Sigma^{c} = \frac{1000(9.7929z^{3} - 2.1860z^{2} - 7.2663z + 2.5556)}{10z^{4} - 2.7282z^{3} - 3.5585z^{2} - 1.3029z - 0.0853}$$

 $\Sigma^{p}$ ,  $\Sigma^{c}$  により閉ループ系  $\Sigma$  を構成し, さらに拘束条件 (5.33) がまったくないとした場 合の応答を Fig. 5.16 に示す. なおここで,制御対象および補償器の初期状態は  $x_{p}(0) = 0$ ,  $x_{c}(0) = 0$  であり,外部からの参照入力 (Fig. 5.16(a)) は w(t) = 0.5236 [rad] = 30 [deg] で ある.

Fig. 5.16(b) の応答からわかるように、閉ループ系  $\Sigma$  はすぐれた速応性と参照入力への追従特性を示す. しかしながらこのとき、トルク T および制御入力 V に対する拘束条件 (5.33) は大きく破られている.

つぎにこの閉ループ系  $\Sigma$  に対するリファレンスガバナを実現するため, 参照入力集合  $R^0$  を 5.3 節の手法により構成する. このとき最適化問題 (5.7) によりえられた  $R^0$  は

$$R^0 = \{r \mid -0.0461 \le r \le 0.0461\}$$



(c) Torque: T(t)

(d) controller output: u(t) = V(t)

Fig. 5.16: Simulation results of position servomechanism model

であった. また対応する最大 CPI 集合,  $O^0_{\infty}$ , は 54 本の線形拘束式により規定される.

なお (5.7) にしたがい  $\gamma$  の値を増加するにつれ, 対応する最大 CPI 集合  $O^0_{\infty}(\gamma)$  を規定 するのに必要な線形拘束式の数は増加する傾向にある (注意 5.5 参照).  $\gamma$  の値と対応する  $O^0_{\infty}(\gamma)$  を規定するのに必要な線形拘束式の数を Table. 5.2 に示す.

 $O_{\infty}^{0}$ を規定する拘束式の数の増加は、観測される状態 x(t) に対し、 $x(t) \in O_{\infty}^{0}$ の判定に必要となる計算量の増加を意味する. したがって計算時間がリファレンスガバナ実現の問題となる場合には、最適値よりも小さな  $\gamma$  を  $r_{m}^{0}$  とすることにより、線形拘束式の数を減らすことが可能である. これは一般の  $O_{\infty}^{i}$  についても同様である. また 5.6 節の手法により、参照入力集合  $R^{i}$ の数自体を調整することも可能である.

つぎに参照入力集合の連結を考える. Figs. 5.16(c),5.16(d) の応答からもわかるように, こ の閉ループ系  $\Sigma$  では, 定常状態において T = 0, u = V = 0 が成立する. したがって参照入力 集合の連結を考える際に (5.16) で定義される集合  $Z^i$  について  $Z^i = Z$  が成立する. よって 各  $R^i$  を構成するのに必要な手順は  $R^0$  を構成するのに必要な手順と全く等しく, さらに具体

Table 5.2: Number of linear constraints in maximal CPI sets  $\gamma$  number of linear constraints

40
44
54

的には,  $R^0$ ,  $O_{\infty}^0$  を平行移動するのみで  $R^i$ ,  $O_{\infty}^i$  がえられる. ここでは  $R^i$ ,  $i = 0, \pm 1, \ldots, \pm 20$  を考えリファレンスガバナを実現する. このとき  $R = \{r \mid -0.922 \le r \le 0.922\}$  である.

リファレンスガバナを付加した制御系 (Fig. 5.11 参照) の応答を Fig. 5.17 に示す.

外部からの参照入力 w(t) = 0.5236 [rad]は、リファレンスガバナによりオンラインで整形され (Fig. 5.17(a))、制御系への実際の入力とされる. このとき  $z_1$  は良好な追従特性を示している (Fig. 5.17(b)). さらに Figs. 5.17(c),5.17(d)の T および V はその拘束条件を常に満足している.

## 5.8 おわりに

拘束条件を有する制御系により許容される参照入力の評価を目的に,参照入力集合の概念 を提案した.拘束条件により引き起こされる影響は,外部からの参照入力の変化とその変化 が生じる瞬間の制御系の動作状態の両方に依存して現れる.したがって本章における手法で も,許容される参照入力の大きさを規定する参照入力集合と同時に,対応する動作状態を規 定する最大 CPI 集合が構成される.このときえられる条件は,参照入力集合の内部に制限 された任意の入力に対して,制御系が拘束条件を破ることなく動作するための必要十分条件 は,制御系の初期状態が対応する最大 CPI 集合の内部に属していることである,というもの である.

参照入力集合を構成することにより、制御系に許容される入力の絶対的な大きさが明らか となる.しかしながらこのとき参照入力集合は、拘束条件の影響により、一般に非常に小さ な集合となる.ここでは、制御系の平衡点を移動しながら許容される参照入力の大きさの評 価を繰り返す、参照入力集合の連結という考え方を提案し、これにより制御系に許容される 参照入力が拡大されることを示した.

その上で,連結された参照入力集合および最大 CPI 集合の性質にもとづくリファレンス ガバナの構成法を提案した.リファレンスガバナは,外部からの参照入力の整形を目的とし た,閉ループ系に対する付加的な機構であり,拘束条件を有する制御系の実際的な制御手法 として注目されている.リファレンスガバナを実現する手法はこれまでにも提案されている が,いずれもある種の最適化問題をオンラインで解くことにより,その時点での制御系に加 えるべき入力を決定している.したがってリファレンスガバナの実現においては,オンライ ンで必要となる処理を如何に軽減するかが大きな課題となっている.本章の手法でもオンラ インでの処理は当然必要となるが,大きな特徴として,オフラインで構成される参照入力集



Fig. 5.17: Simulation results of position servomechanism model with reference governor

合により,制御系に許容される参照入力の大きさがあらかじめ明らかとなっていることが挙 げられる.したがって,オンラインで必要となる処理を軽減することが可能である.

設計例では、実際に参照入力集合の構成これにもとづくリファレンスガバナの構成をおこ ない、シミュレーションにより提案手法の有効性を確認した.

またリファレンスガバナの構成に関連して、参照入力集合同士の連結の度合を調整するパ ラメータを導入することが可能であることを示した.このパラメータの導入により、リファ レンスガバナ実現のため、計算機内部に保持することが必要となるデータ数の調整が可能と なることおよび結果的に構成されるリファレンスガバナの性質が異なる点について考察し た.しかしながら、実現されたリファレンスガバナの出力が収束するのに要する時間とパラ メータの与え方、すなわち制御性能を向上させる連結度の具体的調整法については、今後の さらなる考察が必要となっている.

## 第6章 結論

### 6.1 本研究での結果

本論文は、拘束条件を有するシステム、拘束システム、がその拘束条件を破ることなく動作 するための条件を明らかにするとともに、拘束システムに対する制御系設計法を提案するも のである.以下各章においてえられた結果についてその要約を示す.

2章では、不確かな外部入力の影響を受ける拘束システムが、その拘束条件を破ることなく 動作するための条件を明らかにした.ここでは最大 CPI (Constrained positively invariant) 集合の概念を提案し、これにより制御系が安全に動作するための条件を記述した.具体的に は、あらかじめ大きさの定められた集合に属する任意の外部入力に対して、制御系が拘束条 件を破ることなく動作するための必要十分条件は、状態空間に構成される最大 CPI 集合の 内部に制御系の初期状態が属していることである、ということを明らかにした.またこの最 大 CPI 集合が、有限回の計算手順で構成可能となるための、制御系に対する条件を明らかに するとともに、具体的な数値計算の手順を提案した.ここでえられた結果は、外部からの不 確かな入力が存在しない制御系に対して、これまでにえられていた結果を含む一般的なもの となっている.また、提案した最大 CPI 集合を構成するための数値計算の手順についても外 部入力が存在しない場合を含む拡張となっている.この2章での結果は、拘束システムの解 析に関する基礎的な結果を与えるものである.また本論文の3、4、5章における制御則の構 成においても、ここでの結果よりえられる最大 CPI 集合が、中心的な役割を果たしている. 数値例では、与えられた制御系に対して、提案手法により実際に最大 CPI 集合を構成した.

3 章では、制御入力に制限を有する拘束システムに対して、複数の補償器を構成しこれら を切り換えながら適用するスイッチング状態フィードバック制御則を導出した.拘束システ ムに対して制御性能を重視した補償器を適用する場合、一般に大きな制御入力が要求される ことから、拘束条件を破ることなく制御系が動作する領域、すなわち最大 CPI 集合は非常に 小さなものとなる.したがってこの場合、制御系の安定性や本来達成されているはずの制御 性能は、非常に小さな動作領域でのみ保証される.一方、安定性を重視した補償器を適用す ることにより、えられる最大 CPI 集合は拡大するが、このとき達成される制御性能は低いも のとなる.拘束システムの制御におけるひとつの大きな問題は、この安定性と制御性能のト レードオフにある.提案するスイッチング制御則は、広い動作範囲で拘束システムの安定性 を保証する一方、補償器の切り換えにより制御性能の劣化を抑制し、この問題を解決するこ とが可能である.ここではまず、望ましいだけの制御性能を有する補償器から、順次拡大す る最大 CPI 集合を有する補償器の系列の構成法を明らかにした.つぎに、各最大 CPI 集合 を切り換え平面として利用する補償器のスイッチングアルゴリズムを提案し,拘束システム に対するスイッチング制御則を実現した.スイッチング制御則の構成法としては,正の不変 集合の性質を利用したものがこれまでに提案されている.しかしながらこの場合,補償器の 切り換えアルゴリズムは保守的なものとなる.ここでの結果は,各補償器の設計およびそれ らの切り換えに最大 CPI 集合の性質を利用したことにより,この保守性を軽減するものと なっている.設計例では,与えられた制御対象に対し実際にスイッチング制御則を構成し,制 御性能が改善されることをシミュレーションにより確認した.

4 章では、不確かな外部入力を有する拘束システムに対して、スイッチング状態フィード バック制御則を導出した. 現実の制御系においては、数理モデルの不確かさや外乱などの影 響による、不確かな入力が存在することは避けられない.3 章あるいはこれまでの研究で提 案されている拘束システムに対するスイッチング制御則では、いずれも状態の収束にもとづ き補償器が切り換えられる.しかしながら外部入力の影響下では、状態の収束自体が保証さ れず、したがってまた補償器の切り換えの実行も保証されない、このため、補償器の切り換え により制御性能や外乱抑制能力の向上を実現するスイッチング制御則本来の目的の達成が保 証されない、これに対しここでえられた制御則は、外部入力の影響下においても状態の収束 および補償器のスイッチングの実行を保証することが可能である、ここではまず、外乱抑制 能力の指標となる、状態可到達集合に関する条件を各補償器の構成の際に考慮することが必 要であることを示し、これにもとづく個々の補償器の構成法を明らかにした、これはスイッ チング制御則を構成する各補償器に、ある程度以上の外乱抑制能力、すなわち外部入力の影 響を受ける場合でもある程度以上の状態の収束の保証を要求する条件となっている.構成さ れた各補償器を切り換えるためのスイッチングアルゴリズムは、最大 CPI 集合にもとづく 条件により導出されるが、これは3章で提案したアルゴリズムを全く同一のもである.した がって、スイッチング制御を実現するために必要となるオンラインでの処理は、外部入力が 存在しない系に対する場合と全く同等となる、また、ここでえられた各補償器を構成するた めの条件から、3 章での補償器の構成条件が自然に導出されることを確認した. したがって ここでの結果は、外部入力が存在しない系に対するスイッチング制御則の構成条件の自然な 拡張となっている.設計例では、与えられた制御対象に対し実際にスイッチング制御則を構 成し、その有効性をシミュレーションにより確認した.

5 章では, 拘束条件を有する制御系により許容される参照入力の評価を目的に, 参照入力 集合の概念を提案した. またこの参照入力集合の性質にもとづくリファレンスガバナの実現 法を提案した. ここでは, 制御系に許容される参照入力の大きさを規定する参照入力集合と 同時に, 対応する制御系の動作状態を規定する最大 CPI 集合が構成される. このように 2 つ の部分集合が同時に構成されることは, 拘束条件により引き起こされる影響が, 外部からの 参照入力の変化とその変化が生じる瞬間の制御系の動作状態の両方に依存して現れること をあらわしている. またこれにより, 参照入力集合の内部に制限された任意の入力に対して, 制御系が拘束条件を破ることなく動作するための必要十分条件は, 制御系の初期状態が対応 する最大 CPI 集合の内部に属していることである, という条件がえられる. この参照入力 かしながらこのとき参照入力集合は、拘束条件の影響により、一般に非常に小さな集合とな る. このように許容される参照入力に制限が設けられることは、本来の制御目的からは望ま しいものではない. ここではさらに、制御系の平衡点を移動しながら許容される参照入力の 大きさの評価を繰り返す、参照入力集合の連結という考え方を提案し、これにより制御系に 許容される参照入力が拡大されることを示した. その上で、連結された参照入力集合および 最大 CPI 集合の性質にもとづくリファレンスガバナの構成法を提案した. リファレンスガ バナを実現する手法はこれまでにも提案されているが、いずれもある種の最適化問題をオン ラインで解くことにより、その時点での制御系に加えるべき入力を決定している. したがっ てリファレンスガバナの実現においては、オンラインで必要となる処理を如何に軽減するか が大きな課題となっている. ここで提案するリファレンスガバナの実現法の大きな特徴とし て、オフラインで構成される参照入力集合により、制御系に許容される参照入力の大きさが あらかじめ明らかとなっていることが挙げられる. したがって、リファレンスガバナの実現 において必要となるオンラインでの処理を軽減することが可能である. 設計例では、与えら れた制御対象に対し、実際に参照入力集合の構成およびこれにもとづくリファレンスガバナ の構成をおこない、シミュレーションにより提案手法の有効性を確認した.

# 参考文献

- R. Alur, T. A. Henzinger and E. D. Sontag (Eds.), *Hybrid systems III*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1066, Springer, 1993.
- [2] P. Antsaklis, W. Kohn, A. Nerode and S. Sastry (Eds.), *Hybrid systems II*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 999, Springer, 1993.
- [3] P. Antsaklis, W. Kohn, A. Nerode and S. Sastry (Eds.), *Hybrid systems IV*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1273, Springer, 1997.
- [4] P. J. Antsaklis and X. D. Koutsoukos, On hybrid control of complex systems: A survey, Technical report of the ISIS group, ISIS-97-017, University of Notre Dame, 1997.
- [5] P. Antsaklis and A. Nerode (Eds.), Special issue on hybrid control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, 1998.
- [6] K. Åström and B. Wittenmark, Computer-controlled systems: Theory and design, 3rd edition, Prentice Hall, 1997.
- [7] A. Bemporad, A. Casavola and E. Mosca, Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 3, pp. 340/349, 1997.
- [8] A. Bemporad and E. Mosca, Fulfilling hard constraints in uncertain linear systems by reference managing, Automatica, Vol. 34, No. 4, pp. 451/461, 1998.
- [9] A. Benzaouia and C. Burgat, The regulator problem for a class of linear systems with constrained control, Systems & Control Letters, Vol. 10, pp. 357/363, 1988.
- [10] D. Bernstein and A. Michel, A chronological bibliography on saturating actuators, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 5, pp. 375/380, 1995.
- [11] D. P. Bertsekas, Infinite-time reachability of state-space regions by using feedback control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 17, No. 5, pp. 604/613, 1972.
- [12] D. P. Bertsekas and I. B. Rhodes, Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, No. 2, pp. 117/128, 1971.

- [13] D. P. Bertsekas and I. B. Rhodes, On the minimax reachability of target sets and target tubes, Automatica, Vol. 7, pp. 233/247, 1971.
- [14] D. P. Bertsekas and I. B. Rhodes, Sufficiently informative functions and the minimax feedback control of uncertain dynamic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 18, No. 2, pp. 117/124, 1973.
- [15] G. Bitsoris, On the positive invariance of polyhedral sets for discrete-time systems, Systems & Control Letters, Vol. 11, pp. 243/248, 1988.
- [16] G. Bitsoris and M. Vassilaki, Constrained regulation of linear systems, Automatica, Vol. 31, No. 2, pp. 223/227, 1995.
- [17] F. Blanchini, Feedback control for linear time-invariant systems with state and control bounds in the presence of disturbances, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 11, pp. 1231/1234, 1990.
- [18] F. Blanchini, Ultimate boundness control for uncertain discrete-time systems via setinduced Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 2, pp. 428/433, 1994.
- [19] F. Blanchini, Nonquadratic Lyapunov functions for robust control, Automatica, Vol. 31, No. 3, pp. 451/461, 1995.
- [20] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear matrix inequalities in systems and control theory, SIAM, 1994.
- [21] P. Dorato (Ed.), Robust control, IEEE Press, 1987.
- [22] P. Dorato and R. K. Yedavalli (Eds.), Recent advances in robust control, IEEE Press, 1990.
- [23] J. C. Doyle, R. S. Smith and D. F. Enns, Control of plants with input saturation nonlinearities, Proceedings of the 1987 American Control Conference, pp. 1034/1039, 1987.
- [24] C. Edwards and I. Postlethwaite, Anti-windup and bumpless-transfer schemes, Automatica, Vol. 34, No. 2, pp. 199/210, 1998.
- [25] M. Fu and B. R. Barmish, Adaptive stabilization of linear systems via switching control, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 31, No. 12, pp. 1097/1103, 1986.
- [26] C. E. García, D. M. Prett and M. Morari, Model predictive control: Theory and practice—A survey Automatica, Vol. 25, No. 3, pp. 335/348, 1989.

- [27] E. G. Gilbert, Linear control systems with pointwise–in–time constraints: What do we do about them?, plenary address, Proceedings of the 1992 American Control Conference, pp. 2565, 1992.
- [28] E. G. Gilbert, I. Kolmanovsky and K. T. Tan, Nonlinear control of discrete-time linear systems with state and control constraints: A reference governor with global convergence properties, *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp. 144/149, 1994.
- [29] E. G. Gilbert, I. Kolmanovsky and K. T. Tan, Discrete-time reference governors and the nonlinear control of systems with state and control constraints, *International Journal* of Robust and Nonlinear Control, Vol. 5, pp. 487/504, 1995.
- [30] E. G. Gilbert and K. T. Tan, Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets, *IEEE Transactions on Au*tomatic Control, Vol. 36, No. 9, pp. 1008/1020, 1991.
- [31] R. L. Grossman, A. Nerode, A. P. Ravn and H. Rischel (Eds.), *Hybrid systems*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 736, Springer, 1993.
- [32] P.-O. Gutman and M. Cwikel, An algorithm to find maximal state constraint set for discrete-time linear dynamical systems with bounded controls and states, *IEEE Trans*actions on Automatic Control, Vol. 32, No. 3, pp. 251/254, 1985.
- [33] P.-O. Gutman and P. Hagander, A new design of constrained controllers for linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, No. 1, pp. 22/33, 1985.
- [34] R. Hanus, M. Kinnart and J.-L. Henrotte, Conditioning technique, a general antiwindup and bumpless transfer method, Automatica, Vol. 23, No. 6, pp. 729/739, 1987.
- [35] K. Hirata and M. Fujita, Analysis of conditions for non-violation of constraints on discrete-time linear parameter varying systems, Proceedings of the 2nd Asian Control Conference, pp. II-319/II-322, 1997.
- [36] M. Johansson and A. Rantzer, Computation of piecewise quadratic Lyapunov function for hybrid systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, pp. 555/559, 1998.
- [37] P. Kapasouris, M. Athans and G. Stein, Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators, *Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control*, pp. 469/479, 1988.
- [38] P. Kapasouris, M. Athans and G. Stein, Design of feedback control systems for unstable plants with saturating actuators, *Preprints of the IFAC Symposium*, *Nonlinear control* system design, pp. 302/307, 1989.

- [39] P. Kapasouris and M. Athans, Control systems with rate and magnitude saturation for neutrally stable open loop systems, Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, pp. 3404/3409, 1990.
- [40] S. S. Keerthi and E. G. Gilbert, Computation of minimum-time feedback control laws for discrete-time systems with state-control constraints, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, No. 5, pp. 432/435, 1987.
- [41] S. S. Keerthi and E. G. Gilbert, Optimal infinite-horizon feedback control laws for a general class of constrained discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations, Journal of Optimization theory and applications, Vol. 57, No. 2, pp. 265/293, 1987.
- [42] I. Kolmanovsky and E. G. Gilbert, Maximal output admissible sets for discrete-time systems with disturbance inputs, *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, pp. 1995/1999, 1995.
- [43] I. Kolmanovsky and E. G, Gilbert, Multimode regulators for systems with state & control constraints and disturbance inputs, *Control using logic-based switching*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 222, pp. 104/117, Springer, 1997.
- [44] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari and C. N. Nett, A unified framework for the study of anti-windup designs, *Automatica*, Vol. 30, No. 12, pp. 1869/1883, 1994.
- [45] M. V. Kothare and M. Morari, Multiplier theory for stability analysis of antiwindup control systems, Proceeding of the 34th Conference on Decision and Control, pp. 3767/3772, 1995.
- [46] M. D. Lemmon, K. X. He and I. Markovsky, A tutorial introduction to supervisory hybrid systems, *Technical report of the ISIS group*, *ISIS-98-004*, University of Notre Dame, 1998.
- [47] D. E. Miller and E. J. Davison, An adaptive tracking problem with a control input constraints, Automatica, Vol. 29, No. 4, pp. 877/887, 1993.
- [48] O. Maler (Ed.), Hybrid and real-time systems, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1201, Springer, 1997.
- [49] B. Mårtensson, The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization, Systems & Control Letters, Vol. 6, No. 2, pp. 87/91, 1985.
- [50] B. Mårtensson and J. W. Polderman, Correction and simplification to "The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization", Systems & Control Letters, Vol. 20, pp. 465/470, 1993.

- [51] D. Q. Mayne, Switching control of constrained linear systems, Control using logic-based switching, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 222, pp. 118/127, Springer, 1997.
- [52] D. Q. Mayne and W. R. Schroeder, Nonlinear control of constrained linear systems, International Journal of Control, Vol. 60, No. 5, pp. 1035/1043, 1994.
- [53] D. Q. Mayne and W. R. Schroeder, Robust time-optimal control of constrained linear systems, Automatica, Vol. 33, No. 12, pp. 2103/2118, 1997.
- [54] D. Q. Mayne and W. R. Schroeder, Nonlinear control of constrained dynamic systems, Communications, Computation, Control and Signal Processing, A. Paulraj, V. Roychowdhury and C. D. Schaper, (Eds.), pp. 453/461, Kluwer, 1997.
- [55] A. S. Morse, Control using logic-based switching, Trends in Control, A. Isidori, (Ed.), pp. 69/113, Springer, 1995.
- [56] A. S. Morse (Ed.), Control using logic-based switching, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 222, Springer, 1997.
- [57] V. Nevistić, Constrained control of nonlinear systems, Ph. D Dissertation, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, 1997.
- [58] Y. Peng, D. Vrancic and R. Hanus, Anti-windup, bumpless, and conditioned transfer technique for PID controllers, *IEEE Control Systems*, Vol. 16 No. 4, pp. 48/57, 1996.
- [59] S. Rangan and K. Poolla, Multimodel adaptive  $\mathcal{H}_{\infty}$  control, Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, pp. 1928/1932, 1996.
- [60] S. Rangan and K. Poolla, Robust adaptive stabilization with multiple  $\mathcal{H}_{\infty}$  uncertainty models and switching, *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, pp. 3644/3648, 1998.
- [61] A. Rantzer and M. Johansson, Piecewise linear quadratic optimal control, Proceedings of the 1997 American Control Conference, pp. 1749/1753, 1997.
- [62] E. De Santis, On positively invariant sets for discrete-time linear systems with disturbance: An application of maximal disturbance sets, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 1, pp. 245/249, 1994.
- [63] E. De Santis, On invariant sets for constrained discrete time linear systems with disturbances and parametric uncertainties, *Automatica*, Vol. 33, No. 11, pp. 2033/2039, 1997.
- [64] J. S. Shamma, Optimization of the ℓ<sup>∞</sup>-induced norm under full state feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No. 4, pp. 533/544, 1996.
- [65] J. S. Shamma and M. Athans, Gain scheduling: Potential, hazards and possible remedies, *IEEE Control Systems*, Vol. 12, No. 3, pp. 101/107, 1992.
- [66] J. S. Shamma and K.-Y. Tu, Output feedback control for systems with constraints and saturations: scalar control case, Systems & Control Letters, Vol. 35, pp. 1/11, 1998.
- [67] J. S. Shamma and D. Xiong, Control of rate constrained linear parameter varying systems, Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control, pp. 2515/2520, 1995.
- [68] S. Tarbouriech and G. Garcia (Eds.), Control of uncertain systems with bounded inputs, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 227, Springer, 1997.
- [69] S. Tarbouriech and G. Garcia, Local stabilization for linear discrete-time systems with bounded controls and norm-bounded time-varying uncertainty, *International Journal* of Robust and Nonlinear Control, Vol. 8, pp. 831/844, 1998.
- [70] R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita and E. Shimemura, L<sup>2</sup> gain and H<sup>∞</sup> control of linear systems with scheduling parameter, Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, pp. 1412/1414, 1994.
- [71] G. F. Wredenhagen and P. R. Bélanger, Piecewise–linear LQ control for systems with input constraints, Automatica, Vol. 30, No. 3, pp. 403/416, 1994.
- [72] K. Zhou with J. C. Doyle and K. Glover, Robust and optimal control, Prentice Hall, 1995.
- [73] 平田,藤田,外部入力を有する線形離散時間システムに対する拘束条件の解析,電気学会
  論文誌 C, Vol. 118, No. 3, pp. 384/390, 1998.
- [74] 平田,藤田,入力に制限を有する線形離散時間システムに対するスイッチング状態フィードバック制御則の構成法,システム制御情報学会論文誌, Vol. 11, No. 6, pp. 316/323, 1998.
- [75] 大嶋,モデル予測制御,電気学会論文誌 C,Vol. 116, No. 10, pp. 1089/1093, 1996.
- [76] 須田,PID 制御,朝倉書店, 1992.
- [77] 渡辺, 内田, 示村, 藤田,制御入力が制限を受ける制御系に対する anti-windup and bump-less transfer の新しい設計法,計測自動制御学会論文集, Vol. 30, No. 6, pp. 660/668, 1994.

- [78] 渡辺,内田,藤田,2次近似システムに対する可到達集合の解析,第 25 回 制御理論シン ポジウム, pp. 5/10, 1996.
- [79] 渡辺,内田,藤田,2 次システムに対する出力可到達集合の解析,第 19 回 Dynamical System Theory シンポジウム, pp. 193/198, 1996.
- [80] 渡辺,内田,藤田,出力可到達集合解析に基づいたアンチワインドアップコントローラの 解析,第 26 回 制御理論シンポジウム, pp. 15/20, 1997.

## 謝 辞

3年間の研究生活において,終始暖かい御指導をいただいた 北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 藤田政之 先生 に心より感謝の意を表します.

多くの御支援と御教示をいただきました 北陸先端科学技術大学院大学 示村悦二郎 先生 に深く感謝いたします.

折に触れ貴重な助言をいただきました 早稲田大学 理工学部 電気電子情報工学科 内田健 康 先生 に心より感謝いたします.

多くの御指導をいただきました 北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 嵯峨山茂 樹 先生, 平石邦彦 先生, 北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科 吉田武稔 先生 に深 く感謝いたします.

多くの御指導と助言をいただきました 北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 Milan Vlach 先生に心より感謝いたします.

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 望山洋 先生, 神戸大学 工学部 情報知能工 学科 増淵泉 先生, Christoph Ament 先生 (University of Bremen), 金沢大学 工学部 電気・ 情報工学科 滑川徹 先生は, 未熟な私に多くの事を教えてくださいました. 心より感謝いた します.

そして良き相談相手となっていただいた研究室の先輩,後輩の皆様に心から感謝いたします.

最後に、これまでの研究生活を可能にし、暖かく見守っていただいた両親に深く感謝いた します.

1999年2月

## 研究業績

## 論文

平田研二,藤田政之,外部入力を有する拘束システムに対するスイッチング状態フィードバック制御則の構成法,システム制御情報学会論文誌,Vol. 12, No. 7, 1999. (掲載予定)

平田 研二,藤田 政之,入力に制限を有する線形離散時間システムに対するスイッチング状態 フィードバック制御則の構成法,システム制御情報学会論文誌,Vol. 11, No. 6, pp. 316/323, 1998.

平田研二,藤田政之,外部入力を有する線形離散時間システムに対する拘束条件の解析,電気学会論文誌C,Vol. 118-C, No. 3, pp. 384/390, 1998.

K. Hirata and M. Fujita, Analysis of conditions for non–violation of constraints on linear discrete–time systems with exogenous inputs, *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1477/1478, San Diego, 1997.

## 講 演

K. Hirata and M. Fujita, Multimodes switching state feedback control of constrained linear discrete-time systems, *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 148/152, Trieste, ITALY, 1998.

K. Hirata and M. Fujita, Analysis of conditions for non–violation of constraints on discrete– time linear parameter varying systems, *Proceedings of the 2nd Asian Control Conference*, pp. II-319/II-322, Seoul, KOREA, 1997.

平田 研二,藤田 政之,参照入力集合の連結にもとづく拘束システムの制御,第 21 回 Dynamical System Theory シンポジウム, pp. 239/242, 1998.

平田 研二,藤田 政之,外部入力を有する拘束システムのスイッチング状態フィードバック制 御,第 27 回 制御理論シンポジウム,pp. 95/98, 1998.

平田 研二, 藤田 政之, 拘束システムに対するスイッチング状態フィード バック制御則の一構 成法, 第 20 回 Dynamical System Theory シンポジウム, pp. 77/80, 1997.

平田研二,藤田政之,拘束を有する系に対する区分的に線形なスイッチング状態フィード バック制御則の一構成法,第40回自動制御連合講演会,pp. 237/238, 1997.

平田 研二,藤田 政之,スケジューリングパラメータを有する離散時間システムに対する拘束 条件の解析,第 36 回 計測自動制御学会学術講演会,pp. 399/400, 1997.

平田研二,藤田政之,外部入力を有する線形離散時間システムに対する拘束条件の解析,第 26回制御理論シンポジウム,pp. 333/336, 1997.

平田 研二,藤田 政之,出力に拘束を有する不確かな線形離散時間システムの解析法,第 19 回 Dynamical System Theory シンポジウム,pp. 289/292, 1996.

平田研二,藤田政之,出力に拘束を有する線形離散時間システムの解析法,第39回自動制御連合講演会,pp.13/14,1996.