Title	最適レギュレータと状態推定器の極限的性質を用いた多変数系の非干渉制御に関する研究
Author(s)	鈴木，亮一
Citation	
Issue Date	1999-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/874
Rights	
Description	Supervisor:藤田 政之，情報科学研究科，博士

博 士 論 文

最適レギュレータと状態推定器の極限的性質を用いた多変数系の非干渉制御に関する研究

指導教官　藤田 政之 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報システム学専攻

鈴木 亮一

1999 年 3 月

要 旨

本論文は，最適レギュレータと最適状態推定器の極限的性質を用いた多変数系の非干渉制御に関する研究である．

はじめに，最適レギュレータの極限的性質を用いた状態フィードバックによる非干渉制御について述べる．ここでは，すでに明らかにされている最小位相系に対する最適レギュレータの非干渉特性について，どのようなクラスの非最小位相系にまで拡張できるかを明らかにした．この結果，制御対象を最小位相系に限定することなく評価関数の重み行列を直接操作する比較的簡単な手法で非干渉系を得ることができ，しかも安定な最大のブロック分けが先験的な条件の確認なしに可能となった．

つづいて，新しい２次評価関数を選ぶことによりもとの非干渉化特性を変えることなく固定極の影響を少なくする非干渉化手法を示し，ロバスト安定性が向上し感度が低下することを確かめた．この方法を用いることにより，非最小位相系のみならず最小位相系で固定極が生じる非干渉系にも適用可能であり，さらには虚軸上に零点をもつシステムに対しても非干渉化が可能となった．

つぎに，状態がすべて測ることができるとは限らないため，最適状態推定器の極限的性質を用いてオブザーバベースコントローラによる出力フィードバック非干渉制御が可能なことを明らかにした．また，オブザーバのゲインを上げていくことによりシステム外乱の影響を軽減できることを確認した．さらに，サーボ系に対する極限的性質を用いた非干渉制御を考え，閉ループ系においてステップ状の定値外乱が加わるような場合にも目標値に追従し，かつ評価関数の重みを直接操作することにより閉ループ系が非干渉化を達成することを明らかにした．

実際の制御系設計に本手法を適用する場合の特色としては，設計パラメータは評価関数の重みだけであり，インタラクタの計算等を必要とせず安定な最大のブロック分けが先験的な条件の確認なしにできることがあげられる．本研究で明らかにされた非干渉制御は，ロボットマニピュレータと指南車の非干渉制御に応用し実験によりその有効性を確認しており，実システムの制御系設計の観点から見ても有用な結果であると思われる．

最後に，非線形多変数系の非干渉制御のひとつとされるフィードバック線形化のロバスト性と脆さについて，磁気浮上系に応用し実験的な検証を行なった．フィードバック線形化は適当な変数変換により入出力関係を１対１にすることができる手法であり，動作点付近におけるシステムのもつ非線形性を近似することなく厳密に線形化できるという利点をもつ．しかしながら，全ての状態を必要とするため状態の信号が雑音などで撹乱されるような場合には，出力フィードバックによる線形ロバストコントローラに比べて脆いという問題点があることを実験的に検証した．

目 次

図 目 次

表 目 次

第 1 章

序論

1.1 非干渉制御の研究背景

産業が発展し技術が進歩するにつれ，われわれの制御対象はますます大規模かつ複雑になっている．このような大規模かつ複雑な制御対象は，制御量 (出力) と操作量 (入力) を複数もつ多変数系であることが多く，制御量と操作量の間には複雑な相互干渉が存在する．そのために，あるループを補償しようとすると内部の相互干渉により他のループに影響を与え，系全体として制御性能を大きく損なってしまうことがある．

もし，なんらかの方法によりシステム内部の相互干渉を取り除き操作量と制御量の間を 1 対 1 に対応させることができれば，多変数系は複数の 1 入力 1 出力系になる．このように，多変数系の操作量から制御量までの相互干渉をなくし 1 対 1 に対応させることを**非干渉化**と呼ぶ．与えられた多変数系の制御対象を非干渉化することにより，制御系設計は 1 入力 1 出力の場合の問題に帰着させることができ，また，人間がシステムの操作に介在する場合の操作が簡単になる．このような目的で制御系設計を行なうことを**非干渉制御**と呼び，大規模かつ複雑なシステムの制御問題に対して古くから研究者や技術者の関心がよせられていた．

非干渉制御問題の歴史は今からおよそ 70 年前に遡る．旧ソビエト連邦では，すでに 1930 年代に Voznesenskii [1]や Beirakh [2]による研究報告があり，発電所のボイラやタービ

[1] I. N. Voznesenskii の研究は 1934 年の *Za sovetskoe energooborudovanie*(No.6) に報告されたものや，1938 年の *Avtomatika i Telemekhanika*(No.4,5) に報告されたものがある [77].

[2] Z. Ya. Beirakh の研究は 1939 年の *Avtomatika i Telemekhanika*(No.2) に報告されたものや 1948 年の *Avtomatizatsiya electrostantsii i energoustanovok* に報告されたものがある [77].

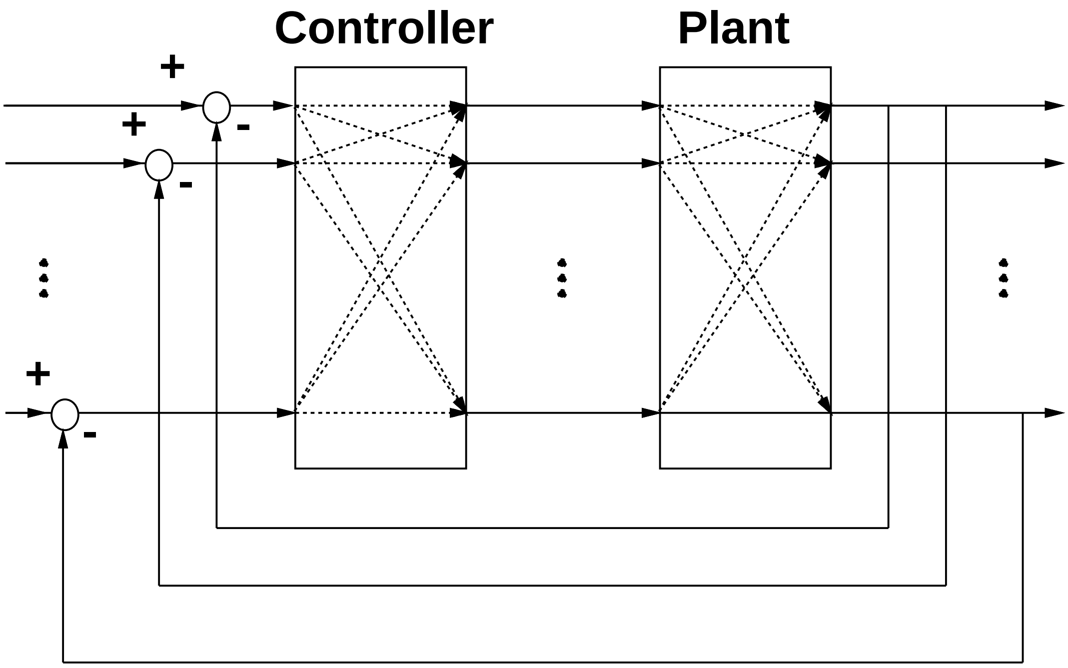


図 1.1: Multivariable control system

ンの制御においてシステム内部の相互干渉が問題とされている．また，アメリカ合衆国では 1950 年代に Boksenbom と Hood [32] や Pack と Phillips [86] によるターボジェットエンジンの非干渉制御に関する研究がなされている．

実際のシステムの非干渉化が問題とされてから，徐々に制御理論としての非干渉制御の研究に関心が集まりはじめるようになる．1950 年代後半から 60 年にかけて，Freeman [3]，Kavanagh [4]，Mesarovic [78] などによる伝達行列法，Morgan [79][80] による状態空間アプローチ法，Bristol [33] による相対ゲイン法，Rosenbrock [89] による逆ナイキスト配列法，MacFarlane と Belletrutti [74] による特性根軌跡法などに代表されるように多くの非干渉化手法が提案された．

非干渉制御は，入出力間を 1 対 1 に対応させる制御であるため，伝達関数行列を対角化する問題となる．そこで，状態空間法で議論するよりも伝達関数法 (文献 [59] など) で議論するほうが直接的であるとされた．しかしながら，非干渉化には極零相殺が不可欠であ

[3] H. Freeman, *AIEE Trans. Appl. Ind.*, **77**, pp. 1-5, 1958. (文献 [82] 参照のこと)

[4] R. J. Kavanagh, *AIEE Trans. Appl. Ind.*, **77**, pp. 425-429, 1958. や 同論文誌 **76**, pp. 95-100, 1957. (文献 [82] 参照のこと)

り，非干渉系の構造を知る上で状態空間法による解析や設計は非干渉問題の理解を容易にさせた．このような背景から 1960 年代後半になると，Falb と Wolovich [47]，Gilbert [56]，Basile と Marro(文献 [29] の [1])，Morse と Wonham [81]，Silverman と Payne [93] の研究などの非干渉制御に関する多くの有用な研究成果が報告されている．とりわけ，1980 年代から Wonham [101] の提案した幾何学的アプローチをもとにした非干渉制御に関する研究が多く，この手法が非干渉問題を考える上で大きな役割を担っているといえよう ([40][42] [60] [44][45])．また，幾何学的アプローチと関連して Dion と Commault [43]，Commault ら [35]，van der Woude [97] などのグラフ理論によるアプローチも興味深い．この他の非干渉制御の研究にとしては，Özgüler [85] のシステム行列を用いたアプローチがあげられよう．しかしながら，これまでの非干渉制御を実際の多変数系への応用を考えるとき安定な非干渉系を得るためには大変面倒な手順が必要であるという問題が残されていた．

一方で 1980 年代から，評価関数の入力の重み関数を 0 に漸近したときに得られる制御則を施した制御系を議論する，チープコントロールと呼ばれる研究が Francis [48]，Shaked [91]，Saberi と Sannuti [90]，Peng と Kinnaert ら [87] の研究に代表されるように盛んに行なわれた．この関連の研究として，評価関数の出力の重み関数を無限大に漸近したときに得られる制御則を施した制御系を議論する研究が，Friedland [50]，Kobayashi ら [10] によってなされており，本研究はこの流れにしたがっている．また，Kimura [3]，Stein と Athans [94]，Zhang と Freundenberg [104]，Fujita ら [53] は，オブザーバを併合したときの閉ループ系の漸近特性を考える完全観測や Loop Transfer Recovery(LTR) に関する研究を行なっている．さらに，サーボ系に対する漸近的性質を考えたものとして，Davison と Scherzinger [38]，Qui と Davison [88] の研究があげられよう．

コントローラのハイゲイン化は，ときに制御入力が過大となることから実システムの応用には相応しくないとされたが，最適レギュレータのコントローラのハイゲイン化によってあるクラスのシステムに対しては望ましい制御系設計が達成されたり，非干渉特性を得られることが経験的にわかっていた．しかしながら，漸近的性質と非干渉特性との直接的な関係を理論的に明らかにしようとする研究はなかった．おそらく，最適レギュレータの極限的性質として非干渉化特性があることが数学的に明らかにされたのは，Kobayashi ら [6][4] によるものが最初である．これにより，これまで大変面倒であった安定な非干渉系を得る方法が，評価関数の重み関数を直接操作するだけで非干渉化が達成できるように

なった．この類似研究としては，最適レギュレータの漸近特性と非干渉制御の間接的な関係を明らかにした Fujii ら [19][13] の ILQ 設計法がある．

その他の研究として，Kamiyama と Furuta [64]，Descusse [42], Herrera と Lafay [60] などの入力数が出力よりも多いシステムの非干渉制御，Wonham と Morse [102]，Descusse ら [41]，Commault ら [34]，Lin と Wu [70] のブロック非干渉化問題，Morse と Wonham [81]，Zagalak ら [103]，Koumbolis [66] などの三角型非干渉化問題，Fabian と Wonham [46]，Conte と Perdon [36] などのパラメータ変動がある場合の非干渉制御，Kobayashi ら [5]，Ailon [26]，Koumboulis [67] などの中間標準システムに対する非干渉制御，van Diggelen と Glover [98] のロバスト非干渉制御に関する研究など様々な角度からの非干渉制御に関する研究がなされている．さらに，非線形系に対する非干渉化制御の研究は，Tokumaru と Iwai [16]，Freund [51] にはじまり，Isidori ら [63]，Nijmeier と Schumacher [84] や Battilotti [30] のものに代表されるように，微分幾何学を用いたアプローチにより内部安定性を保証する非干渉系が導出されている [58][57] (文献 [12] の第 7 章も参照されたい)．

非干渉制御を実際のシステムに応用した最近の研究としては，Ackermann ら [24][25] の自動車のダイナミクスにおける非干渉制御に関する応用研究や，筆者らの研究による最適レギュレータの極限的性質を用いた指南車やロボットマニピュレータの非干渉制御に関するものがある [4][96][95]．

非干渉制御の研究に関する調査は文献 [82][61] に詳しく，また多変数系の制御に関する文献 [77][78][73] の中に記述があるので参考にされたい．

非干渉制御に関する研究は長い間に渡って行なわれており数々の有用な結果も得られているが，まだまだ未解決の問題が多くこれからの理論の確立が必要な研究分野のひとつである．

1.2 研究の目的と概要

本研究では，最適レギュレータと状態推定器の極限的性質を用いて，多変数系の非干渉制御について明らかにすることを目的とする．最適レギュレータの極限的性質を用いることにより，評価関数の重み行列を直接操作して非干渉化が達成され，従来の面倒な標準非干渉系を導出することなく安定な最大のブロック分けが先験的な条件の確認なしにできる．

これまでに，最小位相系に対して評価関数の重み行列を直接操作して得られる極限フィードバックゲインと，それから構成されるフィードフォワードゲインによる制御則によって非干渉化が達成できることが，極限形のもつ出力零化特性や外乱分離特性などを利用して明らかにされている．しかし，非最小位相系に対する非干渉化特性については明らかにされていなかった．そこで，与えられたシステムを最小位相系と限定せずに，どのような非最小位相系に対して極限形を用いた非干渉制御が可能であるかを明らかにする．さらに，最適レギュレータの極限的性質を用いた非干渉制御が，実際のメカニカルシステムの非干渉制御に有効であることをロボットマニピュレータを例に実験的に検証する．

つづいて，もとの非干渉特性を変えずに固定極の影響を少なくする非干渉化を考える．固定極はシステムの不変零点の存在により生じる．例えば，システムが複素半平面に存在する最小位相系の考え方をそのまま非最小位相系に拡張すると，複素右半平面の不変零点を安定域に写像した固定極が現れる．このような固定極が原点近くに存在する場合，非干渉系の安定性や感度を悪化させる原因になることがある．そこで，新たな評価関数を選ぶことにより固定極の影響を少なくした形で最適レギュレータの極限形を用いて非干渉化する方法を提案する．この方法により，もとの非干渉特性を変えずに非干渉系のロバスト安定性や感度を調節できることになり設計の自由度が広がる．つまり，極を望ましいところに配置することで非干渉系の安定性や感度を高めたり，感度を下げて制御性能を向上させることができる．また，零点が虚軸上に存在するシステムに対しても非干渉制御が可能になる．さらに，固定極の影響を少なくする非干渉化がメカニカルシステムである指南車の非干渉制御に対して有効であることを実験的に検証する．

つぎに，システムの制御系設計において必ずしも全ての状態が測定できるとは限らない．そこで，最適状態推定器の極限的性質を合わせて考えることにより，同一次元オブザーバと最小次元オブザーバに基づくオブザーバベースコントローラを用いた出力フィードバック制御により非干渉化が達成できることを示す．さらに，この極限的性質を用いる

ことで未知のシステム外乱からの影響を除去することが可能になる．

さらに，サーボ系において閉ループ系にステップ状の定値外乱が加わる場合でも，最適レギュレータの極限的性質を用いることにより目標値に追従し，かつ評価関数の重みを直接操作するだけで非干渉化を達成できることを示す．

最後に，非線形システムに対する非干渉制御について考察する．非線形システムに対する非干渉化 の手法のひとつに，フィードバック線形化 [62] の手法がある．この手法は，適当な変数変換と座標変換によりシステムの非線形性を厳密に線形化する手法であるため安定な動作点の範囲が広がり，制御性能も良くなることが知られている．しかしながら，フィードバック線形化は全ての状態を必要とし，動作点が大きく移動する場合は安定性を保証するために過大な入力を発生する可能性があるという指摘がある [49]．したがって，速度信号が外乱で撹乱する場合には，閉ループ系に外乱からの影響が現れることが予想される．そこで，磁気浮上系 [15][65] を例にフィードバック線形化の「脆さ」を実験的に検証し，フィードバック線形化を用いた非干渉制御の問題点を指摘する．

以上が，最適レギュレータと状態推定器の極限的性質を用いた多変数系の非干渉制御に関する本研究の概要である．

1.3 論文の構成

はじめに，**第 1 章 序論**において多変数系の非干渉制御が生まれた背景を記した後，本研究の目的や概要を明らかにする．つぎに，非干渉制御理論の導出に必要となる，最小位相系と非最小位相系に対する最適レギュレータの極限的性質の説明，および本研究に必要ないくつかの定義を**第 2 章 準備**としてまとめる．この最適レギュレータの極限的性質を用いて，**第 3 章 状態フィードバックによる非干渉制御**において，最小位相系と非最小位相系に対する最適レギュレータの極限的性質と非干渉特性の直接的な関係を明らかにする．ここでは，評価関数の重み行列を直接操作して得られる極限フィードバックゲインと，それから構成されるフィードフォワードゲインからなる制御則によって非干渉化が達成されることを示す．また，この理論を実際のメカニカルシステムに応用しその有効性を検証する．つづいて，**第 4 章 非干渉制御における固定極の影響**として，もとの非干渉特性を変えることなく非干渉系に生じる固定極の影響を少なくする非干渉制御について説明する．しかし，制御系設計の際に一般にシステムの状態をすべて観測できるとは限らない．そこで，**第 5 章 最適状態推定器を用いた出力フィードバックによる非干渉制御**とし

て，最適レギュレータと最適状態推定器の極限的性質を用いた非干渉化手法を提案する．ここでは，同一次元オブザーバと最小次元オブザーバを用いた非干渉制御について述べ，数値例を用いてその有効性を検証する．さらに，第 3 章と第 5 章の内容をサーボ問題にまで拡張できることを示し，システムにステップ状の定常外乱が加わっても，目標値に追従し，さらに非干渉化が達成できることを示す．ところで，これまでは線形システムの非干渉制御を考えてきたが，非線形システムの非干渉制御のひとつであるフィードバック線形化に着目し，**第 6 章 非線形システムの非干渉制御とフィードバック線形化**において，磁気浮上系を例としてフィードバック線形化の問題点を考える．最後に，**第 7 章 結論**において本研究で明らかにした内容をまとめる．

第 2 章

準備

本章では，準備として本研究に必要な定義や性質をまとめる．はじめに，非干渉制御に関するいくつかの定義を与える．つぎに，最適レギュレータの極限的性質に関する事項を，最小位相系と非最小位相系についてそれぞれまとめる．これらの結果は，Friedland の手法 [50] に基づき文献 [10][7] で導出したものである．論文を通して，系の全ての不変零点[1] が複素左半平面に存在するものを**最小位相系**と呼び，それ以外の系を**非最小位相系**と呼ぶことにする．また，最大不可観測空間や外乱分離条件などの用語については，文献 [101] に準拠している．

2.1 非干渉制御

2.1.1 非干渉化と非干渉制御問題

はじめに本論文で扱う非干渉化を定義する．制御対象とする多変数線形定係数システムを

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \tag{2.1}$$

とする．ここで，$x \in R^n$，u，$y \in R^m$であり，システムは可制御，可観測とする．

[1] 不変零点とは，システム (A, B, C, D) が与えられたとき $A(n \times n)$，$B(n \times p)$，$C(m \times n)$，$D(m \times p)$ であれば

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A - s_0 I & B \\ C & D \end{pmatrix} < \min(n+m,\ n+p)$$

を満たす複素数 s_0 としてここでは定義する．

いま，与えられたシステムを (A, B, C) で表し，さらにその伝達関数を

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{2.2}$$

と表現する．一般に伝達関数 $T(s)$ は入出力間に相互干渉がある非対角形をとる．そこで，ある条件のもとにシステムに何らかの補償を施すことで，補償後の伝達関数 $T_c(s)$ がつぎのような対角形をとることがある．

$$T_c(s) = \mathrm{diag}\left(\phi_1(s),\ \phi_2(s),\ \cdots\ ,\ \phi_m(s)\right), \quad \phi_i(s) \not\equiv 0\ (i = 1, \cdots, m) \tag{2.3}$$

このように閉ループ系 $T_c(s)$ が対角形となるとき，$T_c(s)$ を**非干渉系**と呼ぶ.

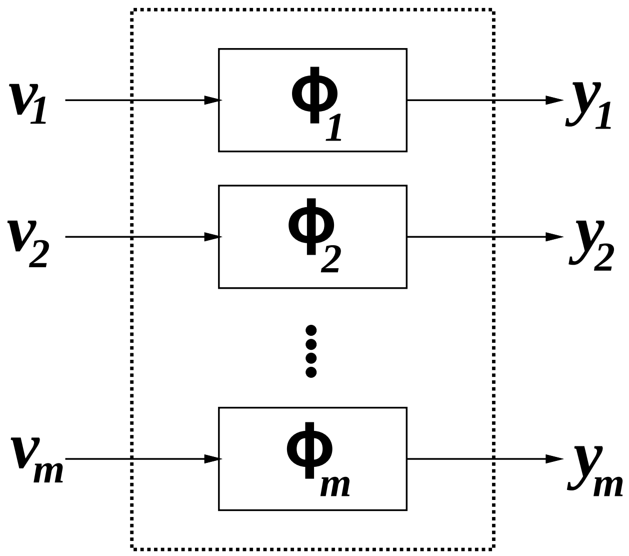


図 2.1: Decoupled system

そこで，状態フィードバックによる制御則がゲイン F，G により

$$u = Fx + Gv \tag{2.4}$$

で与えられたとすると，$T_c(s)$ は

$$T_c(s) = C(sI - A - BF)^{-1}BG \tag{2.5}$$

となる．少なくとも制御系が安定であるためには，つぎの条件を満足する必要がある．

$$\sigma(A + BF) \in \mathbf{C}^- \tag{2.6}$$

ここで，$\sigma(\cdot)$ は $(\cdot)$ の行列の固有値を表し，$\mathbf{C}^{-}$は複素左半平面を表す．もし，この $T_c(s)$ が (2.3) 式のような対角行列であれば $(F,\ G)$ **はシステム** (A,B,C) **を非干渉化した**といい，(2.3) 式を達成し，かつ$\sigma(A+BF)\in\mathbf{C}^{-}$を満足するシステム (A,B,C) の条件，および制御則 $(F,\ G)$ を見つける問題を**状態フィードバックによる非干渉制御問題**と呼ぶ．

2.1.2 可逆性と非干渉化条件

システム (A,B,C) の伝達関数 $T(s)$ に対し，

$$T(s)T_r(s)=I, \quad T_l(s)T(s)=I \tag{2.7}$$

となるとき，$T_r(s)$ を右逆システム，$T_l(s)$ を左逆システムと呼ぶ．右逆システムが存在するとき，(A,B,C) は右可逆といい，左逆システムが存在するとき，(A,B,C) は左可逆という．また，$T(s)$ が正方であって逆システムが存在するとき，(A,B,C) は可逆という．可逆性の判定をする手順としては，Silverman の構造アルゴリズム [93] がある．

正方システム (A,B,C) が可逆であることは，

$$\mathrm{rank}\ C(sI-A)^{-1}B=m \tag{2.8}$$

であることを意味し，

$$\mathrm{rank}\ \begin{pmatrix} -sI+A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}=n+m,\ \text{for all complex } s \text{ in } Re(s)\geq 0 \tag{2.9}$$

が成り立つことと等価である [83]．さらに，状態フィードバックに対しても

$$\mathrm{rank}\ \begin{pmatrix} -sI+A+BF & B \\ C & 0 \end{pmatrix}=n+m,\ \text{for all complex } s \text{ in } Re(s)\geq 0 \tag{2.10}$$

が成り立つので，フィードバックにより可逆性は変化しない．以上のことから，つぎの補題 2.1が成り立つことが知られている．

補題 2.1 [93] 非干渉化可能であるための必要十分条件は，システム (A,B,C) が可逆であることである．

さて，状態フィードバックによる非干渉化条件として，つぎの補題 2.2が知られている [47]．

補題 2.2 [47] 状態フィードバック

$$u = Fx + Gv$$

によって，システム (A, B, C) が非干渉化できる必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\ B^* = m$$

を満たす行列である．ここで，B^*は

$$B^* = \begin{pmatrix} c_1 A^{d_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m - 1} B \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

$$d_i = \min\{k_i \mid c_i A^{k_i - 1} B \neq 0\}, \quad i = 1, \cdots, m$$

であり，c_iは行列 C の i 番目の行を表す.

2.1.3 標準非干渉系

安定な非干渉系である，標準非干渉系 [56] の導出手順について簡単に説明する．

システム (A, B, C) に対して補題 2.2を満足する B^*が正則であれば,

$$\dot{x} = (A - BB^{*\ -1}A^*)x + BB^{*\ -1}v, \quad y = Cx$$

は積分型干渉系となる [47]．ここで,

$$A^* = \begin{pmatrix} c_1 A^{d_1} \\ \vdots \\ c_m A^{d_m} \end{pmatrix}$$

である．いま

$$\bar{A} = A - BB^{*\ -1}A^*,\ \bar{B} = BB^{*\ -1},\ \bar{C} = C$$

とおき，つぎの行列を定義する．

$$S_i \quad = \quad \{\eta \mid \eta \bar{A}^j \bar{B}_i = 0, \quad i = 1, \cdots, m,\ i \neq j,\ j = 0, 1, \cdots, n-1\}$$

なる基底行ベクトルを並べた行列

ただし，$\bar{B}_i$は$\bar{B}$の i 列を表す．具体的には，つぎのように S_iを決める．

$$S_i = \begin{pmatrix} c_i \\ c_i\bar{A} \\ \vdots \\ c_i\bar{A}^{d_i-1} \\ \eta_{i\ d_i+1} \\ \vdots \\ \eta_{i\ p_i} \end{pmatrix}$$

ここで，$c_i\bar{A}^j\ (i=1,\cdots,r,\ j<d_i-1)$ で，$p_i = \mathrm{rank}\ S_i$ である．この S_iを用いて，変換行列Tをつぎのように定義する．

$$T = (\ S_1^T\ S_2^T\ \cdots\ S_m^T\ S_{m+1}^T\ )^T$$

この変換行列Tにより，積分非干渉系を$\hat{x} = Tx$ と等価変換することにより，つぎの標準形を得る．

$$\begin{aligned} T\bar{A}T^{-1} = \hat{A} &= \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \hat{A}_{mm} & 0 \\ \hat{A}_1^C & \cdots & \hat{A}_m^C & \hat{A}_{m+1}^C \end{pmatrix}, \\ TB = \hat{B} &= \begin{pmatrix} \hat{B}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{B}_m \\ \hat{B}_1^C & \cdots & \hat{B}_m^C \end{pmatrix}, \\ CT^{-1} &= \begin{pmatrix} \hat{C}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \hat{C}_m & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{A}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & 1 & \\ * & \cdots & \cdots & * & * \end{pmatrix},\quad \hat{B}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \end{pmatrix},\quad \hat{C}_i = (\,1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0\,)$$

さて，$\hat{A}^C_{m+1}$の固有値は不可観測な極であるので零点の一部に一致している．この固有値の安定判別は不変零点に重複がなければ，標準非干渉系を導出することなくシステムの係数行列から判別可能である．したがって，状態フィードバックによって安定な非干渉化が達成できるかどうか判断するにはつぎの条件を確認すればよい．

補題 2.3　状態フィードバック

$$u = Fx + Gv$$

によって，安定な非干渉化が達成できる必要十分条件はつぎの 2 つの条件を満足することである．

i) rank $B^* = m$.

ii) システム (A, B, C) の零点から

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -\lambda I + A & B \\ c_i & 0 \end{pmatrix} < n + 1$$

を満たすλを除いたものが複素平面の右半平面に存在しない．ただし，c_iはCの i 番目の行ベクトルを表す.

2.2　最小位相系に対する最適レギュレータの極限的性質

最適レギュレータは，比較的簡単に制御系設計が可能であるばかりでなく，システムの特性変動に対する安定性やパラメータ変動に対する低感度特性を有するため，広く応用されている制御系設計手法のひとつである．しかし，一般的に最適レギュレータの問題の解は，代数リカッチ方程式の解から求められることが多いが，この解はシステムパラメータの項を陽に求めることができない．そこで，2 次形式評価関数の重み行列の極限を用いて，解を陽に表現する方法が知られている [50][48][91]．ここでは，文献 [10][11] にある最適レギュレータの極限形式についてまとめる．

2.2.1　最適レギュレータ問題

つぎの連続時間システムを考える．

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \tag{2.12}$$

ここで，$x \in R^n$，$y \in R^m$，$u \in R^m$である．このシステムに対し，標準的 2 次評価関数

$$J = \int_0^\infty (y^T Q y + u^T R u) dt \tag{2.13}$$

を最小とする制御入力 u を求める問題を最適レギュレータ問題という．ただし，

$$y = Cx \tag{2.14}$$

であり，Q，Rは実正定対称行列とする．

いま，システム (A, B, C) は可制御，可観測であるとする．このとき，上述の評価関数を最小にする入力 u はリカッチ方程式の解である実正定行列 Mを用いて，つぎのように一意に定まることはよく知られている [69][27].

$$u = -R^{-1} B^T M x \tag{2.15}$$

$$A^T M + MA - MBR^{-1} B^T M + C^T Q C = 0 \tag{2.16}$$

2.2.2 最小位相系に対する最適レギュレータの極限形式

はじめに，(2.12) 式のシステムが最小位相系であるとき，これに対する最適レギュレータの極限形式について説明する．$Q = \frac{1}{\epsilon^2} I$，$R = I$として$\epsilon \to 0$ で得られるフィードバックゲインを

$$F_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} -B^T M_\epsilon \tag{2.17}$$

$$A^T M_\epsilon + M_\epsilon A - M_\epsilon B B^T M_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} C^T C = 0 \tag{2.18}$$

と定義する．また，(2.17) 式を極限フィードバックゲインと呼ぶ.

$\epsilon \to 0$ の極限について Friedland の結果 [50] にしたがい，(2.18) 式のリカッチ方程式の解 M_ϵに対し，M_ϵ^{-1}の級数展開式を

$$M_\epsilon^{-1} = M_0 + \epsilon M_1 + \epsilon^2 M_2 + \cdots \tag{2.19}$$

とおく．ここで，$Q \to \infty I$とする極限をとると，$\epsilon \to 0$ の極限での M_0，M_1の関係は，つぎの補題 2.4でまとめられる．ただし，M_0，M_1，M_2，$\cdots$ は対称行列である．

補題 2.4 [7] M_0，M_1に対し，つぎの等式が成立する．

$$
\begin{aligned}
&CM_0 = 0 \\
&CAM_0 = 0 \\
&CM_1C^T = 0 \\
&CAM_1C^TCM_1 = CA(BB^T - AM_0) \\
&CM_1 = (CABB^TA^TC^T)^{-\frac{1}{2}}CA(BB^T - AM_0)
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

このとき，(A, B, C) が (不変零点がすべて安定の意味で) 最小位相系であるとする．簡単のため，$CB = 0$，$\mathrm{rank}CAB = \mathrm{rank}C$が成立するとすれば，$\epsilon \to 0$ とした閉ループ系の極限形式としてつぎの定理が得られる[2](証明については本章の付録を参照されたい)．

定理 2.1 [10] 最小位相系 (A, B, C) が可制御，可観測で $CB = 0$，$\mathrm{rank}CAB = \mathrm{rank}C$ とする．このとき，補題 2.4のもとで，$Cx(0) = 0$，$CAx(0) = 0$ の条件が成り立つときの閉ループ系の極限形式 (極限フィードバックゲイン F_ϵの閉ループ系) は

$$\dot{z} = -(I - C^TC_\alpha^\sharp A^T)A^Tz \tag{2.21}$$

$$C_\alpha^\sharp = (C_\alpha BB^TC_\alpha^T)^{-1}C_\alpha(BB^T - AM_0) \tag{2.22}$$

となり，リカッチ方程式の極限形は

$$
\begin{aligned}
&M_0A^T(I - C_\alpha^+C_\alpha)^T + (I - C_\alpha^+C_\alpha)AM_0 - (I - C_\alpha^+C_\alpha)BB^T \\
&+M_0A^TC_\alpha^T(C_\alpha BB^TC_\alpha^T)^{-1}C_\alpha AM_0 = 0
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

である．ここで，

$$C_\alpha = CA \tag{2.24}$$

$$C_\alpha^+ = BB^TC_\alpha^T(C_\alpha BB^TC_\alpha^T)^{-1} \tag{2.25}$$

とする．

[2] この定理は，一般可逆システムに拡張できるが，その際 C_αの係数が煩雑になるためここでは簡単に $\mathrm{rank}CB = 0$，$\mathrm{rank}CAB = \mathrm{rank}C$ の条件で説明をする．この条件がなくても得られる結果は本質的に同様である．

(2.12) 式のシステムに対して，$z = M_\epsilon x$ で変数変換後の (2.21) 式の閉ループ系のラプラス変換式は，簡単のため $x(0) = 0$ のもとで

$$\begin{aligned} sZ(s) &= (-A^T + C^T J_0^{-1}(s) CAM_\epsilon^{-1} A^T) Z(s) \\ J_0(s) &= Q^{-1}s^2 + CAM_\epsilon^{-1} C^T \end{aligned} \tag{2.26}$$

となる．

2.2.3 最小位相系の極限形式と外乱除去特性

この極限形の性質を利用した研究として，連続時間最適レギュレータと出力零化特性 (外乱除去特性) との関連性や [10]，外乱分離問題との関係 [7] が明らかにされている．ここでは，最小位相系の外乱除去特性について説明する．

いま，(2.12) のシステムに加法的に外乱を印加したシステム

$$\dot{x} = Ax + Bu + D\xi, \quad y = Cx \tag{2.27}$$

に，(2.17) 式の F_ϵを施したとき，$\epsilon \to 0$ の極限においてつぎの補題 2.5で与えられる外乱除去特性が知られている [7]．ここで，ξはシステムに加わる未知外乱で$\xi \in R^r$である．なお，外乱分離条件を満足するとはつぎの式が成り立つことを意味する．

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}^* \supset \mathrm{Im}\ D \\ &\mathcal{V}^* \text{は Ker } C \text{ に含まれる最大 } A-B \text{不変部分空間} \end{aligned} \tag{2.28}$$

補題 2.5 [7] (A, B, C) が最小位相系で可逆とする．このとき，F_ϵ を用いた閉ループ系は$\epsilon \to 0$ の極限において，最大不可観測なシステムとなり，外乱分離条件を満足すれば，ImDは不可観測空間に含まれる．また，$CB = 0$，rank CAB = rank Cのもとでは，i 番目の出力からの可観測部分空間は，$\mathrm{Im}(C_i^T \quad (C_iA)^T)$ となる．

補題 2.6 システム $(A + BF_\epsilon, B, C)$ に対する$\epsilon \to 0$ としたときの極限において，可観測極は安定な無限遠点に漸近し，不可観測極は不変零点に漸近する．

(証明) :
閉ループ系の極は一般に安定な無限遠点と不変零点に漸近することは知られている [69].
いま閉ループ系をパラメータϵを用いてつぎのように表す.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_{11}(\epsilon) & A_{12}(\epsilon) \\ A_{21}(\epsilon) & A_{22}(\epsilon) \end{pmatrix} x + Bu, \quad y = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} x \tag{2.29}$$

補題 2.5より閉ループ系は$\epsilon \to 0$ で最大不可観測となるから$\epsilon \to 0$ で $A_{12}(\epsilon) \to 0$ となる.
また，最大不可観測の不可観測極は不変零点に一致するから $A_{22}(\epsilon)$ の固有値は不変零点に漸近し，$A_{11}(\epsilon)$ の固有値は無限遠点に漸近する. (証明終)

離散時間系に対する最適レギュレータの極限的性質と外乱分離問題の関係については, 文献 [6] に詳しい.

2.3 非最小位相系に対する最適レギュレータの極限的性質

2.3.1 非最小位相系に対する最適レギュレータの極限形式

いま，(2.12) 式のシステム (A, B, C) が非最小位相系であるとし $CB = 0$，$\mathrm{rank} CAB = \mathrm{rank} C$のもとで，最適レギュレータの極限的性質についてこれまでに知られている事項を要約する.

ステム (A, B, C) が虚軸上に不変零点を持たないとすると

$$\begin{aligned} &B^T(-sI - A^T)^{-1}C^T C(sI - A)^{-1}B \\ &= B^T(-sI - A^T)^{-1}H^T H(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \tag{2.30}$$

を満足し，システム (A, B, H) の不変零点がシステム (A, B, C) の安定零点および不安定零点の鏡像位置の零点となる Hが存在する．また，最適レギュレータ問題の解としての制御入力 $u = Fx$ のフィードバックゲイン Fは，$R = I$のもとにつぎのカルマン方程式を満足する.

$$\begin{aligned} &[I + B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}F^T][I + F(j\omega I - A)^{-1}B] \\ &= I + B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}C^T C(j\omega I - A)^{-1}B \\ &= I + B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}H^T H(j\omega I - A)^{-1}B \end{aligned} \tag{2.31}$$

この H を利用することで，非最小位相系に対しても最小位相系と同様にリカッチ方程式の解 N_ϵ が定義できる．つまり，N_ϵ^{-1} の級数展開

$$N_\epsilon^{-1} = N_0 + \epsilon N_1 + \epsilon^2 N_2 + \cdots \tag{2.32}$$

が存在するとすれば，$z = N_\epsilon x$ の変換により $\epsilon \to 0$ の極限において，非最小位相系に対する最適レギュレータの極限形式が得られる．ただし，N_0，N_1，N_2，$\cdots$ は対称行列である．

定理 2.2 [7]　システム (A, B, C) が非最小位相系で，(A, B, H) が最小位相系となる H が存在する．いま $Hx(0) = 0$，$HAx(0) = 0$ が成り立つとき，閉ループ系の極限形式は

$$\dot{z} = -(I - H^T H_\alpha^\sharp A^T) A^T z \tag{2.33}$$

$$H_\alpha^\sharp = (H_\alpha B B^T H_\alpha^T)^{-1} H_\alpha (B B^T - A N_0) \tag{2.34}$$

となり，リカッチ方程式の極限形は

$$\begin{aligned}
&N_0 A^T (I - H_\alpha^+ H_\alpha)^T + (I - H_\alpha^+ H_\alpha) A N_0 \\
&-(I - H_\alpha^+ H_\alpha) B B^T \\
&+N_0 A^T H_\alpha^T (H_\alpha B B^T H_\alpha^T)^{-1} H_\alpha A N_0 = 0
\end{aligned} \tag{2.35}$$

である．ここで

$$H_\alpha = HA \tag{2.36}$$

$$H_\alpha^+ = B B^T H_\alpha^T (H_\alpha B B^T H_\alpha^T)^{-1} \tag{2.37}$$

とする．

注意 2.1 最適レギュレータの極限形式は，最小位相系の場合も非最小位相系の場合も同じ形式のものが導出される．しかし，最小位相系の場合には閉ループ系の安定性が保証されるが [11]，非最小位相系の場合には閉ループ系の安定性が保証されないことに注意されたい．

2.3.2 非最小位相系に対する極限形式と外乱除去特性

非最小位相系に対しても，極限フィードバックゲイン F_ϵ を用いた閉ループ系についての外乱除去特性が，最小位相系の場合と同様に知られている [7]．

(2.27) 式の外乱印加系に対して，(A,B,C,D) が外乱分離条件を満足するとき，つぎの補題 2.7が成立する.

補題 2.7 [7]　システム (A,B,C,D) が外乱分離条件を満足し，システム (A,B,C) の不変零点 z_0

$$z_0 = \{z \mid \ \mathrm{rank} \begin{pmatrix} -zI+A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} < n+m\} \tag{2.38}$$

からつぎの z_0^*

$$z_0^* = \{z \mid \ \mathrm{rank} \begin{pmatrix} -zI+A & B & D \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix} < n+m\} \tag{2.39}$$

を除いた z_0^- の実部がすべて負であるとする．このとき，フィードバックゲイン F^* がシステム (A,B,H) の閉ループ系 $(A+BF^*,B,H)$ を安定で，最大不可観測とするならば，システム $(A+BF^*,B,C)$ の不可観測空間に $\mathrm{Im}\ D$を含む．さらに，システム (A,B,H,D) は外乱分離条件を満足する.

注意 2.2 (A,B,H) に対するフィードバックゲイン F^*は，$(A+BF^*,B,H)$ を安定で，最大不可観測とするフィードバックゲインである．このことは，このような F^*がシステム (A,B,C) の零点およびシステム (A,B,H) の共通の安定零点を，不可観測な極とするフィードバックゲインであれば，$(A+BF^*,C)$ の不可観測な極は (A,B,C) の安定零点と一致することを意味している.

つぎの補題は，最小位相系と条件を満足する非最小位相系の両方に成立する最適レギュレータの極限的性質に関する重要な補題のひとつである (本章の付録には非最小位相系についての証明を記した).

補題 2.8 [7]　(A,B,C,D) が外乱分離条件を満足すれば，評価関数の重み Q を無限に大きくしても，制御入力は外乱項の微分値，高階微分値が入らないという意味で過大にならない.

第 2 章の付録

定理 2.1の証明

はじめに閉ループ系のラプラス変換式を導出する．閉ループ系はつぎのように与えられる．

$$\dot{x} = (A - BB^T M_\epsilon)x, \quad x(0) = 0$$

$z = M_\epsilon x$ と変換すると

$$\dot{z} = (M_\epsilon A M_\epsilon^{-1} - M_\epsilon BB^T M_\epsilon)z, \quad z(0) = 0$$

を得る．上式は関係式

$$-(A^T + C^T QCM_\epsilon^{-1}) = M_\epsilon AM_\epsilon - M_\epsilon BB^T$$

より

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -(A^T + C^T QCM_\epsilon^{-1})z \\ &= -A^T z - C^T v, \quad v = QCM_\epsilon^{-1} z \end{aligned}$$

と変形できる．ここで，vの微分は

$$Q^{-1}\dot{v} = -CM_\epsilon^{-1}A^T z - CM_\epsilon^{-1}C^T v$$

となる．さらに微分すると，

$$\begin{aligned} Q^{-1}\ddot{v} &= -CM_\epsilon^{-1}A^T \dot{z} - CM_\epsilon^{-1}C^T \dot{v} \\ &= (CM_\epsilon^{-1}A^T + CM_\epsilon^{-1}C^T QCM_\epsilon^{-1})A^T z \\ &\quad +(CM_\epsilon^{-1}A^T + CM_\epsilon^{-1}C^T QCM_\epsilon^{-1})C^T v \end{aligned}$$

となる．$CB = 0$ の仮定を考慮し

$$CM_\epsilon^{-1}A^T = -CAM_\epsilon^{-1} - CM_\epsilon^{-1}C^T QCM_\epsilon^{-1}$$

の関係を使い整理すると

$$Q^{-1}\ddot{v} = -CAM_\epsilon^{-1}A^T z - CAM_\epsilon^{-1}C^T v$$

が得られる．上式をラプラス変換すれば

$$Q^{-1}s^2\Upsilon(s) = -CAM_\epsilon^{-1}A^TZ(s) - CAM_\epsilon^{-1}C^T\Upsilon(s)$$

となるので，ゆえに

$$\begin{aligned}\Upsilon(s) &= J_0^{-1}(s)\{-CAM_\epsilon^{-1}A^TZ(s)\}\\ &\quad J_0(s) = Q^{-1}s^2 + CAM_\epsilon^{-1}C^T\end{aligned}$$

となる．以上から，閉ループ系のラプラス変換は

$$sZ(s) = \{-A^T + C^TJ_0^{-1}CM_\epsilon^{-1}A^T\}Z(s)$$

となる．

つぎに，リカッチ方程式の極限形式を求める．$Q = (1/\epsilon^2)I$，$R = I$のもとで，リカッチ方程式をつぎのように与える．

$$A^TM_\epsilon + M_\epsilon A - M_\epsilon BB^TM_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2}C^TC = 0$$

この式に両辺から M_ϵ^{-1}をかけると

$$M_\epsilon^{-1}A^T + AM_\epsilon - BB^T + \frac{1}{\epsilon^2}M_\epsilon^{-1}C^TCM_\epsilon^{-1} = 0$$

となる．M_ϵ^{-1}は

$$M_\epsilon^{-1} = M_0 + \epsilon M_1 + \epsilon^2M_2 + \cdots$$

で定義されるので，これを上のリカッチ方程式に代入しϵの同冪を比較すると

$$\begin{aligned}&CM_0 = 0\\ &M_0A^T + AM_0 + M_1C^TCM_1 - BB^T = 0 \qquad (2.40)\end{aligned}$$

を得る．ここで，(2.40) 式に左から C，右から C^Tをかけ $CB = 0$，$CM_0 = 0$ を考慮すると

$$CM_1C^T = 0$$

を得る．また，左ら Cをかけ $CB = 0$，$CN_1C^T = 0$ を考慮すると

$$CAM_0 = 0$$

を得る．さらに，(2.40) 式に左から CA をかけると $CAM_0 = 0$ であるから

$$CAM_1C^TCM_1 = CA(BB^T - AM_0) \tag{2.41}$$

を得られ，つづいて (2.40) 式に左から CA，右から A^TC^T をかけると

$$CAM_1C^T = (CABB^TA^TC^T)^{1/2}U \tag{2.42}$$

が得られる．ここで，$UU^T = I$である．よって，(2.41) 式と (2.42) 式より，CABが行フルランクである仮定から

$$CM_1 = U^{-1}(CABB^TA^TC^T)^{-1/2}CA(BB^T - AM_0)$$

が導ける．これを (2.40) 式に再び代入すると，リカッチ方程式の極限形式

$$\begin{aligned}&M_0A^T(I - C_\alpha^+C_\alpha)^T + (I - C_\alpha^+C_\alpha)AM_0 - (I - C_\alpha^+C_\alpha)BB^T\\&+M_0A^TC_\alpha^T(C_\alpha BB^TC_\alpha^T)^{-1}C_\alpha AM_0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_\alpha &= CA\\C_\alpha^+ &= BB^TC_\alpha^T(C_\alpha BB^TC_\alpha^T)^{-1}\end{aligned}$$

が導出される．

最後に，閉ループ系の極限形式を導く．まず，$C^TJ_0^{-1}CM_\epsilon$の$\epsilon \to 0$ の極限を導くとつぎのようになる．

$$\lim_{\epsilon\to 0} C^TJ_0^{-1}CM_\epsilon = C^T(CM_1A^TC^T)^{-1}CM_1$$

さらに，

$$\lim_{\epsilon\to 0} C^TJ_0^{-1}CM_\epsilon = C^T(CABB^TA^TC^T)^{-1}CA(BB^T - AM_0)$$

と計算できる．ゆえに，先の閉ループ系のラプラス変換式にこれを代入することにより，閉ループ系の極限形式

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -(I - C^TC_\alpha^\sharp A^T)A^Tz\\C_\alpha^\sharp &= (C_\alpha BB^TC_\alpha^T)^{-1}C_\alpha(BB^T - AM_0)\end{aligned}$$

が得られる．

なお，以上の導出過程に必要な条件式をまとめたものが補題 2.4である．

補題 2.5の証明

rank $CAB =$ rank Cのもとで，i 番目の出力からの可観測部分空間が Im $(C_i^T \ (C_i^T A)^T)$ となることを示す．$CB = 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
y_i &= C_i x \\
\dot{y}_i &= C_i A x
\end{aligned}
$$

は明らかである．つぎに，$\ddot{y}_i = 0$ を示す．(2.26) 式より

$$s^2 Y_i = C_i A M_\epsilon^{-1}(-A^T + C^T J_0^{-1}(s) C A M_\epsilon^{-1} A^T) Z(s)$$

となる．さらに，補題 2.4の関係式を用いて

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \to 0} \ C_i A M_\epsilon^{-1} C^T J_0^{-1}(s) \\
= & \lim_{\epsilon \to 0} (C_i A M_1 C^T + \epsilon C_i A M_2 C^T + \cdots)(\epsilon^2 I s^2 + C A M_1 C^T + \epsilon C A M_2 C^T + \cdots)^{-1} \\
= & \ C_i A M_1 C^T (C A M_1 C^T)^{-1} = (0 \ \cdots \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ )
\end{aligned}
$$

が成立する．これを用いて，$\ddot{y}_i = 0$ を示すことができる．このことから，閉ループ系において i 番目の出力による可観測行列 O_iは

$$O_i = \begin{pmatrix} C_i \\ C_i(A + BF_\epsilon) \\ \vdots \\ C_i(A + BF_\epsilon)^{n-1} \end{pmatrix}$$

は

$$O_i = \begin{pmatrix} C_i \\ C_i A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，i 番目の出力からの可観測部分空間は $\mathrm{Im}(C_i^T, (C_i A)^T)$ となり，$i = 1, \cdots, m$ のすべてにおいてこれが成立するため閉ループ系は最大不可観測空間となる．(証明終)

補題 2.7の証明

F^*は閉ループ系 $(A+BF^*, B, H)$ を安定とし，最大不可観測フィードバックゲインとするから，閉ループ系 $(A+BF^*, B, H)$ は正則変換と入力変換で

$$
\begin{aligned}
A+BF^* &\sim \begin{pmatrix} \bar{A}^*_{11} & 0 \\ \bar{A}^*_{21} & \bar{A}^*_{22} \end{pmatrix}, \quad B \sim \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\
H &\sim \begin{pmatrix} \bar{H} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

とできる．ここで，制御則 $u = F^*x + Gv$を施すことを考えると

$$
C(sI - A - BF^*)^{-1}BG = C(sI - A)^{-1}B\left(I + F^*(sI - A - BF^*)^{-1}B\right)G
$$

が成立する．そこで，

$$
H^*_c(s) = \left(I + F^*(sI - A - BF^*)^{-1}B\right)G
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
&H^{*\,T}_c(-s)B^T(-sI - A^T)^{-1}H^TH(sI - A)^{-1}BH^*_c(s) \\
&H^{*\,T}_c(-s)B^T(-sI - A^T)^{-1}C^TC(sI - A)^{-1}BH^*_c(s)
\end{aligned}
$$

が成立している．この関係式によって (A, B, H) および (A, B, C) の共通の安定零点はフィードバックゲイン F^*による閉ループ系の不可観測な安定極となるから，$\bar{A}^*_{22}$を係数 B_{22} からの入力の可制御なサブシステムと不可観測なサブシステムに分けると，

$$
\begin{aligned}
A+BF^* &\sim \begin{pmatrix} \bar{A}^*_{11} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & \bar{A}^*_{221} & \bar{A}^*_{222} \\ \bar{A}^*_{21} & & \\ & 0 & \bar{A}^*_{224} \end{pmatrix}, \quad B \sim \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{211} & \bar{B}_{22} \\ B_{212} & 0 \end{pmatrix} \\
C &\sim \begin{pmatrix} \bar{C} & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

のように表現できる．ここで，$\sigma(\bar{A}^*_{224})$ が安定零点に一致する．このとき，

$$
D \sim \begin{pmatrix} \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \\ \bar{D}_3 \end{pmatrix}
$$

は$\bar{D}_1 = 0$ となる．なぜなら，$\bar{D}_1 \neq 0$ とすると，仮定においた外乱分離条件あるいは零点に関する条件に矛盾する．

さらに，システム (A, B, H, D) はフィードバックゲイン F^* で外乱分離が達成されることから，システム (A, B, H, D) は外乱分離条件を満足する．(証明終)

補題 2.8の証明

外乱印加系に対する閉ループ系のラプラス変換式は，(2.30) 式を満足する Hを用いて

$$
\begin{aligned}
sZ(s) &= (-A^T + H^T\tilde{J}_0^{-1}(s)HAN_\epsilon^{-1}A^T)Z(s) \\
&\quad -H^T\tilde{J}_0(s)HAD\Xi(s) - H^T\tilde{J}_0(s)HDs\Xi(s) + N_\epsilon D\Xi(s) \\
\tilde{J}_0(s) &= Q^{-1}s^2 + HAN_\epsilon^{-1}H^T
\end{aligned}
$$

と表せる．

システム (A,B,C,D) は安定な外乱分離条件を満足するので，(2.30) 式の Hに対し補題 2.7より $HB=0$，rank $HAB =$ rank Hのもとで

$$
HD = 0, \quad HAD = 0
$$

が成立する．このとき閉ループ系のラプラス変換式は

$$
\begin{aligned}
sZ(s) &= (-A^T + H^T\tilde{J}_0^{-1}(s)HAN_\epsilon^{-1}A^T)Z(s)N_\epsilon D\Xi(s) \\
\tilde{J}_0(s) &= Q^{-1}s^2 + HAN_\epsilon^{-1}H^T
\end{aligned}
$$

と表すことができる．この式は，非最小位相系の極限形式に外乱項 $N_\epsilon D\xi(s)$ が加わった形となっている．そこで，もともとの外乱印加系に対する閉ループ系の式と比較してみると制御入力によって生じる項が存在しないため，外乱分離条件を満足する場合制御則 u の極限に外乱項やその微分値を含まない．

したがって，制御入力は Q を無限に大きくしても，外乱項の微分値，高階微分が入らないという意味で過大とならない． (証明終)

第 3 章

状態フィードバックによる非干渉制御

本章では，どのようなクラスのシステムに対して最適レギュレータの極限的性質を用いた非干渉制御が達成できるかを明らかにする．最小位相系に対する非干渉化特性については，最適レギュレータの極限的性質である外乱分離特性を用いてすでに明らかにされている [4]．ここでは，この非干渉特性がどのようなクラスの非最小位相系にまで拡張できるかどうかを説明する．さらに，ここで提案する非干渉制御をロボットマニピュレータに適用し，その有効性を実験的に検証する．

3.1　はじめに

最適レギュレータの研究において，2 次形式評価関数の出力や入力に関する重み行列の極限を考える研究が，連続時間系 [50] [48] [23] や離散時間系 [91] [87] に対して数多くなされてきた．

一方，非干渉制御は，多変数システムの制御に対するよく知られた制御理論のひとつである [101]．しかし，一般に安定な非干渉系を得るためには，いろいろな条件を確認しなければならず導出手順がたいへん面倒であった．また，非干渉化特性が最適レギュレータの性質のひとつにあることは経験的に知られてたが，両者の直接関係を数学的に明らかにしようとした研究は知られていなかった．

これに対して，非干渉化条件を満足する最小位相系に対して評価関数の重み行列を直接操作して得られる極限フィードバックゲインとそれから構成されるフィードフォワードゲインによる制御則によって非干渉化が達成できることが，極限形のもつ出力零化特

性 [10] や外乱分離特性 [7] を利用して明らかにされた [6][4]．また，類似研究としては，最適レギュレータの漸近特性と非干渉制御の間接的な関係を明らかにしたILQ 設計法がある [19] [13]．しかし，最適レギュレータの極限的性質を用いる利点には，評価関数の重み行列を直接操作するだけで非干渉化が達成でき，しかも安定な最大のブロック分けが先験的な条件の確認なしにできることがあげられる．

これまでに明らかにした極限形と非干渉制御の直接的関係は，制御対象を最小位相系に限定した議論であり非最小位相系に対しては明らかにされていなかった．そこで，本論文では与えられたシステムを最小位相系と限定せずに，どのような非最小位相系に対して極限的性質を用いた非干渉制御が可能であるかを考える

3.2 問題設定

つぎの連続時間システムの最適レギュレータ問題を考える．

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \tag{3.1}$$

ただし，$x \in R^n$，$y \in R^m$，$u \in R^m$である．また，システム (A, B, C) は可制御，可観測で可逆とする．このシステムに対し，評価関数

$$J = \int_0^\infty (y^T Q y + u^T R u) dt, \quad Q > 0, \quad R > 0 \tag{3.2}$$

を最小とする制御入力 u は，重み行列を $R = I$，$Q \to \frac{1}{\epsilon^2} I$ $(\epsilon \to 0)$ とすれば，

$$\begin{aligned} u &= F_\epsilon x = -B^T M_\epsilon x \\ A^T M_\epsilon &+ M_\epsilon A - M_\epsilon B B^T M_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} C^T C = 0 \end{aligned}$$

で与えられる．このとき，フィードバックゲイン F_ϵによる閉ループ系について，$\epsilon \to 0$ としたときの極限における非干渉化特性について議論する．理論的には$\epsilon \to 0$ の極限において完全な非干渉化を考えることができるが，実際の制御系設計では，評価関数の重み Q を無限大にすることは不可能であるためϵを微小な値として近似的な非干渉系を構成することになる．そこで，このように評価関数の重みを有限として非干渉系を構成することを，近似非干渉制御と呼ぶことにする．なお，簡単のため $CB = 0$，$\mathrm{rank}\ CAB = \mathrm{rank}\ C$の条件を仮定して説明をするが，一般的な可逆システムにまで拡張できることを注意しておく．

本論文ではつぎの問題を考えることを目的とする．

問題: 最小位相系に対する最適レギュレータの極限的性質を用いた非干渉化の手法を，どのようなクラスの非最小位相系に拡張できるのかを考え，非干渉化可能なフィードバックゲインおよびフィードフォワードゲインを求めよ．

3.3 最小位相系に対する非干渉制御

最小位相系に対して，最適レギュレータの極限的性質を用いて，つぎのようなブロック非干渉化を達成することがわかっている．

定理 3.1 [4] システム (A, B, C) が最小位相系で，つぎのブロック型対角インタラクタが存在すると仮定する．

$$\xi_T(s) = \begin{pmatrix} \xi_{T_1}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_{T_p}(s) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$\mathrm{rank} D_\alpha = m, \quad T_0(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$\lim_{s\to\infty} \xi_T(s) T_0(s) = D_\alpha \quad (p \le m) \tag{3.4}$$

このとき，制御則

$$u = F_\epsilon x + G_\epsilon w \tag{3.5}$$

$$G_\epsilon = \Big(C(-A - BF_\epsilon)^{-1}B\Big)^{-1} \tag{3.6}$$

は，$\epsilon \to 0$ の閉ループ系の極限において

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0} C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}BG_\epsilon \\ &= \mathrm{diag}(\Phi_1(s) \ \cdots \ \Phi_p(s)), \quad \Phi_i(0) = I \end{aligned} \tag{3.7}$$

なるブロック非干渉化を達成する．

定理 3.1は，$\epsilon \to 0$ の極限で与えられる結果であるが，評価関数の重みを無限大にすることは不可能であるため，実際にはϵを微小な値として近似的に非干渉化を達成することになる．また，定理 3.1の特別な場合として，インタラクタ$\xi_T(s)$ が対角であるときにはスカラ非干渉化条件 (補題 2.2) が成立し，制御則 (3.5) 式，(3.6) 式により$\epsilon \to 0$ としたときの閉ループ系の極限においてスカラ非干渉化を達成する [4]．

3.4 非最小位相系に対する非干渉制御

3.4.1 非干渉化可能な非最小位相系のクラス

(3.1) 式のシステムに対して，非最小位相系における最適レギュレータの極限形を用いた非干渉化条件と制御則を考える。さて，(2.27) 式の外乱印加系に対する非最小位相系の外乱除去特性は，補題 2.7で与えられた．この補題 2.7より定理 3.1の結果は，非最小位相系について定理 3.2の条件を満足するシステムのクラスまで拡張できる．

定理 3.2 システム (A, B, C) がつぎの条件

A1 システム (A, B, C) は虚軸上に不変零点を持たない．

A2 ブロック型対角インタラクタをもつ．

A3 (A, B, C) の不変零点から

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} -\lambda^{+}I + A & B \\ C_i & 0 \end{pmatrix} < n + p_i \tag{3.8}$$

を満たすλ^{+}を除いたものが安定である．ここで，C_iは Cの i 番目の行ブロックを表す．

を満足するとき，制御則 (3.5) 式，(3.6) 式を用いたときの閉ループ系は，$\epsilon \to 0$ の極限において

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \to 0} C(sI - A - BF_{\epsilon})^{-1}BG_{\epsilon} \\ &= \mathrm{diag}(\Phi_1(s) \ \cdots \ \Phi_p(s)), \quad \Phi_i(0) = I \end{aligned} \tag{3.9}$$

なるブロック非干渉化を達成する．

(証明) :
システム (A, B, C) が原点に不変零点を持たないので，(2.30) 式を満足し，(A, B, H) が最小位相系となる Hが存在する．この (A, B, H) について，(3.3) 式のブロック型対角インタラクタに対して，$\bar{T}_0 = H(sI - A)^{-1}B$とすれば (A, B, H) は最小位相系であるため補題 3.4 の (3.3) 式，(3.4) 式より$\bar{D}_{\alpha}^{-1}$が存在する．

(A,B,H) の i 番目と j番目の入力に着目し，i 番目の出力に対するサブシステム $(H_i, A, \left((B\bar{D}_\alpha^{-1})_i\ (B\bar{D}_\alpha^{-1})_j\right))$ を考える．このサブシステムに対して，$\bar{D}_\alpha\bar{D}_\alpha^{-1} = I$である から

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty} \quad & \bar{\xi}_{T_i}\ H_i(sI-A)^{-1}\left((B\bar{D}_\alpha^{-1})_i\ (B\bar{D}_\alpha^{-1})_j\right)) \\ & = (0\cdots 0\ I_{p_i}\ 0\cdots 0)\end{aligned} \tag{3.10}$$

が成立する．ここで，$i\neq j$で$i,\ j=1,2,\cdots,p$であり，H_iはHのi番目の行ブロックを表し，$(B\bar{D}_\alpha^{-1})_*$は$B\bar{D}_\alpha^{-1}$のi,j番目の列ブロックを示す．つまり，i番目の出力ブロック端y_iに対し，i番目の入力端の係数を$(B\bar{D}_\alpha^{-1})_i$，j番目の入力端を外乱とみなして$(B\bar{D}_\alpha^{-1})_j\ (i\neq j)$ を外乱の係数とすると，外乱分離条件を満足していることになる．

そこで，制御則を$u=F_\epsilon x+\bar{D}_\alpha^{-1}v$とすれば，補題 2.5 より F_ϵは$\epsilon\to 0$ の極限において，i 番目の出力端から最大不可観測なシステムとするフィードバックゲインで，i 番目の出力ブロックの不可観測空間に$\mathrm{Im}((B\bar{D}_\alpha^{-1})_j)$ が含まれるので，

$$\lim_{\epsilon\to 0} H_i(sI-A-BF_\epsilon)^{-1}(B\bar{D}_\alpha^{-1})_j = 0 \tag{3.11}$$

が成立する．

ところで，i 番目の入出力に着目して，サブシステム $(H_i,\ (A+(B\bar{D}_\alpha^{-1})_i(\bar{D}_\alpha F_\epsilon)_i + (B\bar{D}_\alpha^{-1})_j(\bar{D}_\alpha F_\epsilon)_j,\ (B\bar{D}_\alpha^{-1})_i)$ を考え，$(B\bar{D}_\alpha^{-1})_j$ を外乱項の係数とみなす．(A,B,C) の不安定零点が定理 3.2の条件 A3 を満足していることは，補題 2.7の条件を満足していることになるため，サブシステムのフィードバックゲイン $F_{\epsilon i}$は$\epsilon\to 0$ の極限において，補題 2.7のフィードバックゲインと同様の働きをする $((C_i, A+B\bar{D}_\alpha^{-1}\bar{D}_\alpha F_\epsilon, (B\bar{D}_\alpha^{-1})_i)$ と $(H_i, A+B\bar{D}_\alpha^{-1}\bar{D}_\alpha F_\epsilon, (B\bar{D}_\alpha^{-1})_i)$ の共通の安定零点を不可観測とする) ことから，補題 2.7 を適用すると

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\quad & C_i(A+(B\bar{D}_\alpha^{-1})_i(\bar{D}_\alpha F_\epsilon)_i \\ & \qquad +(B\bar{D}_\alpha^{-1})_j(\bar{D}_\alpha F_\epsilon)_j)^k(B\bar{D}_\alpha^{-1})_j = 0\end{aligned} \tag{3.12}$$

となる．ここで，$i\neq j,\ k=0,1,\cdots$である．よって，

$$\lim_{\epsilon\to 0} C(sI-A-BF_\epsilon)^{-1}B\bar{D}_\alpha^{-1}$$

$$= \text{block diag} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\Phi}_p(s) \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

が成立する．

つぎに，フィードフォワード項の決め方を考える．システム (A, B, C) は虚軸上に不変零点を持たないので

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3.14}$$

であり，つぎの行列 E_ϵが定義できる．

$$E_\epsilon = \{C(-A - BF_\epsilon)^{-1} B\bar{D}_\alpha^{-1}\}^{-1} \tag{3.15}$$

このとき，システム $(A, B\bar{D}_\alpha^{-1}, C)$ に対し，制御則

$$u = F_\epsilon x + E_\epsilon \nu \tag{3.16}$$

としたシステムは

$$\text{rank} \ \Big(C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1} B\bar{D}_\alpha^{-1} E_\epsilon\Big) = m \tag{3.17}$$

となる．よって，$\tilde{\Phi}_i(s)$ はフルランクである．

さらに，

$$\begin{aligned} & C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1} B\bar{D}_\alpha^{-1} E_\epsilon \\ & = C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1} B\bar{D}_\alpha^{-1} \{C(-A - BF_\epsilon)^{-1} B\bar{D}_\alpha^{-1}\}^{-1} \\ & = C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1} BG_\epsilon \\ & \quad G_\epsilon = \Big(C(-A - BF_\epsilon)^{-1} B\Big)^{-1} \end{aligned} \tag{3.18}$$

であるから，制御則を (3.5) 式，(3.6) 式と選んだときの閉ループ系に対して，$\epsilon \to 0$ の極限において

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \to 0} C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1} BG_\epsilon \\ & = \text{block diag} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1(s)\tilde{\Phi}_1^{-1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\Phi}_p(s)\tilde{\Phi}_p^{-1}(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.19}$$

が成立し，ブロック非干渉化を達成する．　(証明終)

定理 3.2を実際の制御系設計に適用する場合も定理 3.1の最小位相系の場合と同様，ϵを微小な値として近似的に非干渉化を達成することになる．

この定理 3.2の特別な場合として，つぎの系 3.1が成立しスカラ非干渉化を達成する．

系 3.1 システム (A, B, C) がつぎの条件

A1' システム (A, B, C) が虚軸上に不変零点を持たない．

A2' スカラ非干渉化条件 (補題 2.2) を満足する．

A3' (A, B, C) の不変零点 z_0から

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} -\lambda_i I + A & B \\ c_i & 0 \end{pmatrix} < n + 1 \tag{3.20}$$

を満たすλ_iを除いたものが安定である．

を満足するとき，制御則 (3.5) 式，(3.6) 式を用いたときの閉ループ系は，$\epsilon \to 0$ の極限においてスカラ非干渉化を達成する．

注意 3.1 定理 3.2で導出した最適レギュレータの極限形を用いた非干渉化は，評価関数の重み行列を直接操作した結果得られたものであり，非干渉化の先験的条件の確認をせずに，安定な最大ブロック分けが可能となるという特徴をもつ．ただし，不安定零点を安定域に写像した固定極ができることに注意されたい．

注意 3.2 固定極の影響を考えずに非干渉化を達成することだけを考えるならば，定理 3.2の条件を満足するシステムに対して，Hを導出することなく最小位相系の場合と全く同様の手順により，最適レギュレータの極限的性質を用いて非干渉系を得ることが可能である．また，インタラクタの計算も必要としない．

注意 3.3 このように (A, B, C) が非最小位相系の場合，最小位相系 (A, B, H) については文献 [4] と同様の手法により証明ができるが (本章の付録参照)，システム (A, B, C) については，非干渉化の際に生じる固定極についての条件 A3 を詳細に検討することにより，定理 3.2のように証明できることに注意されたい．

3.4.2 数値例

つぎの 2 入力 2 出力システムを考える．

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

システム (A, B, C) は非最小位相系で可制御，可観測かつ可逆で，非干渉化の条件を満足することが容易に確かめられる．また，このシステムは$+0.5$, $+1$ に不変零点をもつものの，定理 3.2の条件を満足する．そこで，評価関数の重みを $Q = 10I$，$Q = 100I$，$Q = 1000I$ として得られる，つぎのフィードバックゲインとフィードフォワードゲインを用いた制御則 $u = F'_* x + G'_* [v_1\ v_2]^T$ を施したとき，非干渉化が達成されることをシミュレーションにより検証する．

$$F'_{10} = \begin{bmatrix} -7.9698 & 4.8669 & -11.1646 & 2.1304 \\ -4.8669 & 8.4417 & 2.5046 & 6.1236 \end{bmatrix},$$

$$G'_{10} = \begin{bmatrix} -6.1946 & 3.3939 \\ 2.3714 & 3.8055 \end{bmatrix}$$

$$F'_{100} = \begin{bmatrix} -13.6977 & 4.4723 & -22.2278 & 1.2285 \\ -4.4723 & 14.0158 & 1.5557 & 12.3008 \end{bmatrix},$$

$$G'_{100} = \begin{bmatrix} -11.5301 & 1.9846 \\ 1.0280 & 10.5859 \end{bmatrix}$$

$$F'_{1000} = \begin{bmatrix} -34.8372 & 4.1686 & -63.9911 & 0.4448 \\ -4.1686 & 34.9667 & 1.1824 & 33.4167 \end{bmatrix},$$

$$G'_{1000} = \begin{bmatrix} -32.1540 & 0.7211 \\ 0.3510 & 31.8666 \end{bmatrix}$$

時刻 0 秒目から入力 $v1$ に 1 の単位ステップ入力，入力 $v2$ に零を入力したときの応答を図 3.1に示す．それぞれ，閉ループ系の応答を表している．図から明らかなように，$Q \to \infty I$

としていくにつれてそれぞれの入力に対する変数の相互干渉がなくなり，非干渉化を達成することがわかる．非最小位相系のため応答にはアンダーシュートが現れているものの，定理 3.2の条件を満たしていれば，最小位相系の場合と同様の手順で非干渉系を構成できることが確認できる．しかも，標準非干渉系の導出やインタラクタの計算を必要とせず，設計パラメータは評価関数の重み関数 Q のみであることに注意されたい．

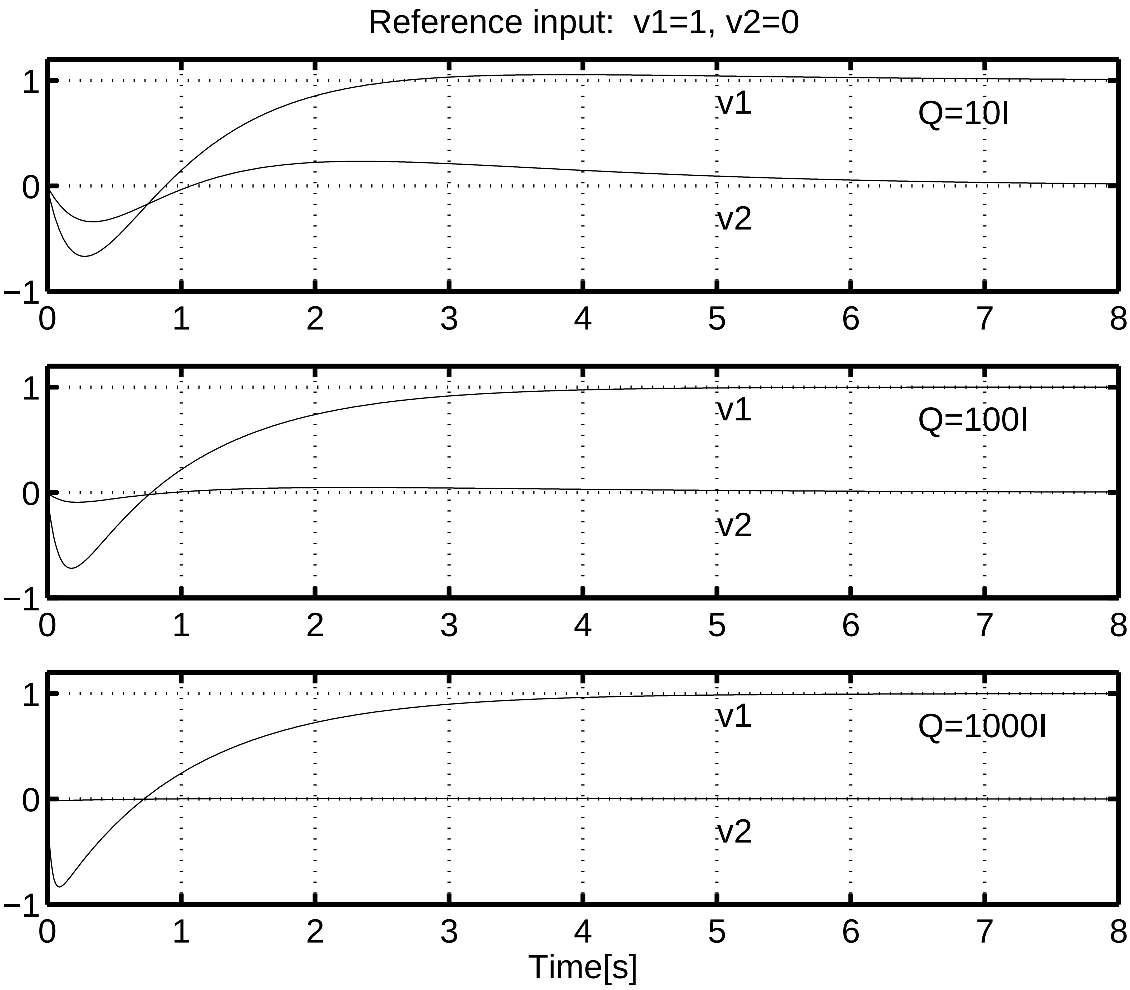


図 3.1: Step response for closed-loop system(nonminimum phase system)

3.5　メカニカルシステムへの応用

3.5.1　ロボットマニピュレータとモデリング

ここでは，実際のメカニカルシステムの制御に，提案する非干渉制御が有効であることを示す．

制御対象として，図3.2に示す２自由度のロボットマニピュレータを考える．このマニピュレータは，ダイレクトドライブ型のマニピュレータで，各関節に直接２つのDCサーボモータが取り付けられている．また，各関節角度はロータリエンコーダにより測定できるようになっており，カウンターボードを介して制御用計算機に信号を読み，必要な制御量を計算した後，D/Aボードおよび増幅器を通してDCモータを制御する仕組みになっている．

図3.2に示すパラーメータは，つぎのように定義する．

θ_i [rad]	:	各リンクの基準座標からの絶対角度
τ_i [Nm]	:	各モータの入力トルク
m_i [kg]	:	各リンクの質量
l_i [m]	:	各リンクの長さ
a_i [m]	:	各関節軸から各リンクの重心までの距離
D_i [Nms]	:	各リンクの粘性係数
I_i [kg m^2]	:	各リンクの重心まわりの慣性モーメント

また，それぞれの物理パラメータは，同定実験により表3.1のように求められた．

表 3.1: Physical parameters of robot manipulator

	Link 1	Link 2
m_i [kg]	0.263	0.085
l_i [m]	0.150	0.150
a_i [m]	0.110	0.075
D_i[Nm s]	4.285×10^{-3}	0.876×10^{-3}
I_i [kg m^2]	1.061×10^{-3}	0.159×10^{-3}

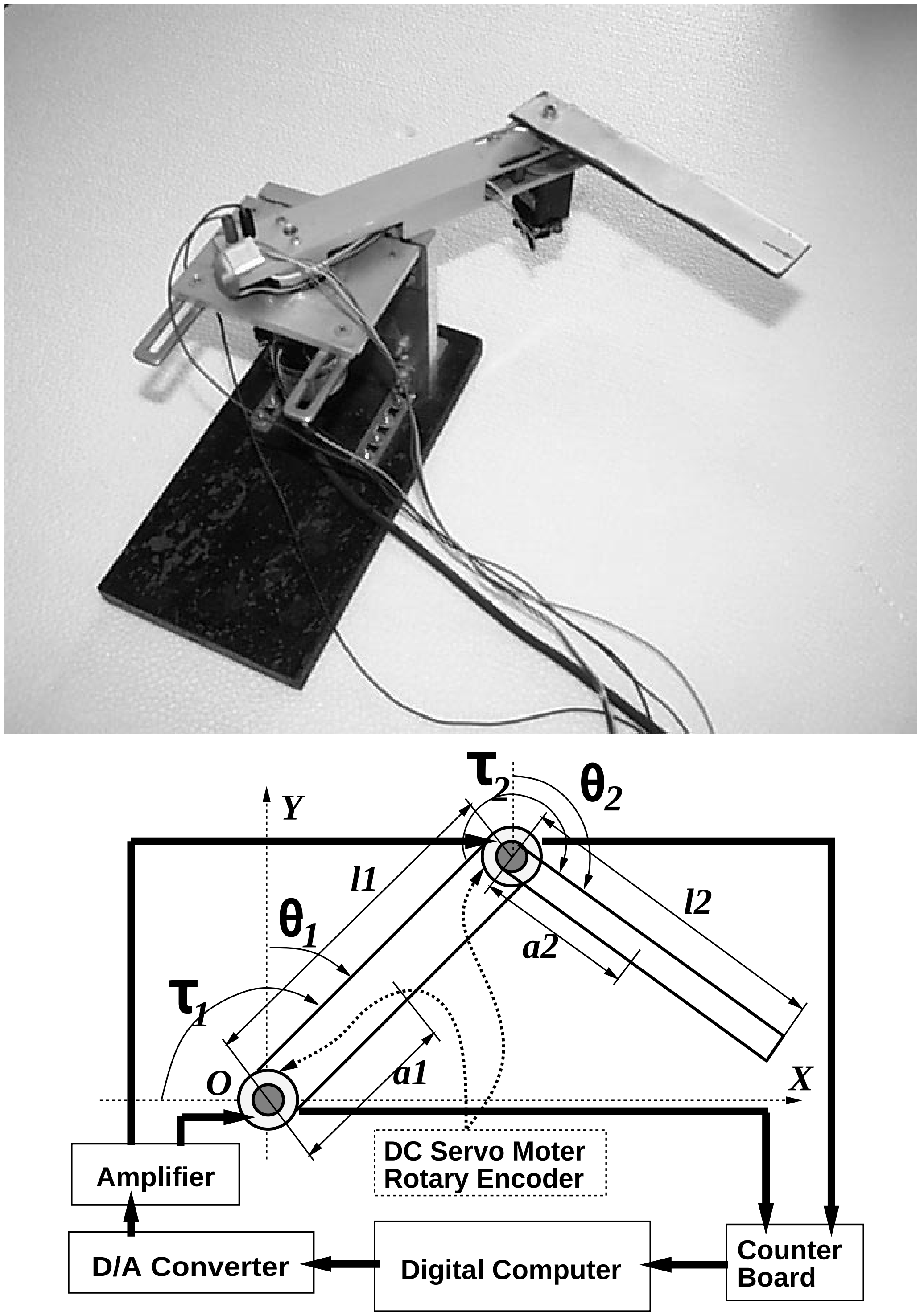


図 3.2: General view of robot manipulator

ロボットマニピュレータの運動方程式はつぎのように書くことができる．

$$J(\theta)\ddot{\theta} + C(\dot{\theta}, \theta) + D\dot{\theta} = \tau \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
J(\theta) &= \begin{bmatrix} I_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2 & m_2 a_2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 a_2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) & I_2 + m_2 a_2^2 \end{bmatrix}, \\
C(\dot{\theta}, \theta) &= \begin{bmatrix} m_2 a_2 l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 \\ -m_2 a_2 l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}, \\
D &= \begin{bmatrix} D_1 + D_2 & -D_2 \\ -D_2 & D_2 \end{bmatrix}, \\
\theta &= [\theta_1\ \theta_2]^T, \quad \tau = [\tau_1 - \tau_2\ \tau_2]^T
\end{aligned} \tag{3.22}$$

ここで，$J(\theta)\ddot{\theta}$は慣性項，$C(\dot{\theta}, \theta)$ はコリオリ遠心力項，$D\dot{\theta}$は粘性項を表す．

(3.21) 式について，初期値 $(\theta_{i1}, \theta_{i2})$ のまわりの線形近似を考えると，つぎの方程式を得ることができる．

$$J\ddot{\theta} + D\dot{\theta} = \tau. \tag{3.23}$$

これを状態空間表現すれば，最終的に

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -J^{-1}D \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix} u, \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \\
x &= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

と表現される[1]．ここで，

$$\begin{aligned}
J &= \begin{bmatrix} I_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2 & m_2 a_2 l_1 \cos(\theta_{i1} - \theta_{i2}) \\ m_2 a_2 l_1 \cos(\theta_{i1} - \theta_{i2}) & I_2 + m_2 a_2^2 \end{bmatrix}, \\
u &= \tau.
\end{aligned}$$

である．

[1] ここでは初期値近傍での線形化を考えているため，平衡点から大きくはなれるとモデル誤差が大きくなることに注意されたい．

いま参照入力として，リンク 1 を 0.5[rad] 移動させ，リンク 2 を 0[rad] に保つ入力を考える．また，初期位置は ($\theta_{i1}=0,\ \theta_{i2}=\pi/2$)[rad] とする．(3.24) 式の方程式に対して，表 3.1の値を代入すればつぎの方程式を得る．

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.839 & 0.143 \\ 0 & 0 & 1.382 & -1.381 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 162.7 & -162.9 \\ -0.194 & 1576 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.\end{aligned}$$

(3.24) 式からもわかるように，リンク 1 のダイナミクスがリンク 2 のダイナミクスに影響を及ぼすことが容易にわかる．そこで，最適レギュレータの極限的性質としてもつ非干渉化特性が，ロボットマニピュレータの非干渉制御に有効であることを確かめる．

注意 3.4 ここで考えるロボットマニピュレータは，最小位相系であり非最小位相系ではない．比較的簡単な非最小位相系のメカニカルシステムが少ないため，線形近似をすると最小位相系であるロボットマニピュレータを用いて，評価関数の重みを無限大として非干渉系が得られることを実験により確認する．

3.5.2 ロボットマニピュレータの非干渉制御

ロボットマニピュレータの非干渉制御として，つぎの実験を行なう．

実験: 初期位置 ($\theta_{i1}=0$[rad], $\theta_{i2}=\pi/2$[rad]) から，リンク 1 を 0.5[rad] 移動させたとき，閉ループ系を非干渉化することによりリンク 2 が初期角度を保つようにせよ (図 3.3 を参照されたい).

このとき，リンク 1 が動いてもリンク 2 が 0[rad] を保っていれば，非干渉制御を達成したことになり本手法の有効性が確かめられることになる．

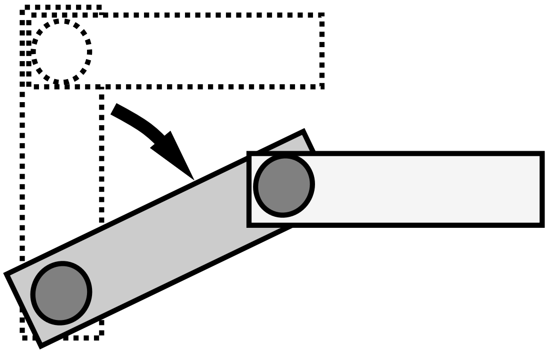


図 3.3: Track of robot manipulator

いま，評価関数の重み行列を $Q = 2I$ としたときの，(3.5) 式, (3.6) 式で与えられる極限フィードバックゲインと極限フィードフォワードゲインは，つぎのように求められた[2]．

$$
\begin{aligned}
F_{q=2} &= \begin{bmatrix} -1.409 & -0.127 & -0.127 & -0.013 \\ 0.127 & -1.409 & 0.002 & -0.041 \end{bmatrix}, \\
G_{q=2} &= \begin{bmatrix} 1.409 & 0.127 \\ -0.127 & 1.409 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

これらのゲインを用いて，制御則を $u = F_{q=2}x + G_{q=2}v$ とし，ロボットマニピュレータの非干渉制御を行なった結果を示す．実際のロボットマニピュレータの実験結果を，図 3.4に示す．図より，リンク 1 が 0.50[rad] 動いているにも関わらず，リンク 2 が 0.00[rad] を保っていることがわかる．また，θ_2の最大誤差は 0.345×10^{-1}[rad] (1.98[deg]) であった．この結果から，本章で提案した非干渉制御が実際のロボットマニピュレータの非干渉制御に有効であることが確認できる．なお，モータに与えた制御入力の様子を図 3.5に示す．このとき，制御入力の値は過大になっていないことがわかる．

以上により，最適レギュレータの極限的性質としてもつ非干渉特性は，実際のメカニカルシステムに対して有効であることが確かめられた．

[2] ここでは，$q = 2$ という小さな値で非干渉化を達成する制御則が得られた．この理由は，ロボットマニピュレータの状態方程式において，入力に関する B行列の値が A 行列の値に比べ相対的に大きいためである．このことは，評価関数の重み Rを小さくすることと同じ効果があり，相対的に Q の重みは大きくなっていることを意味する．

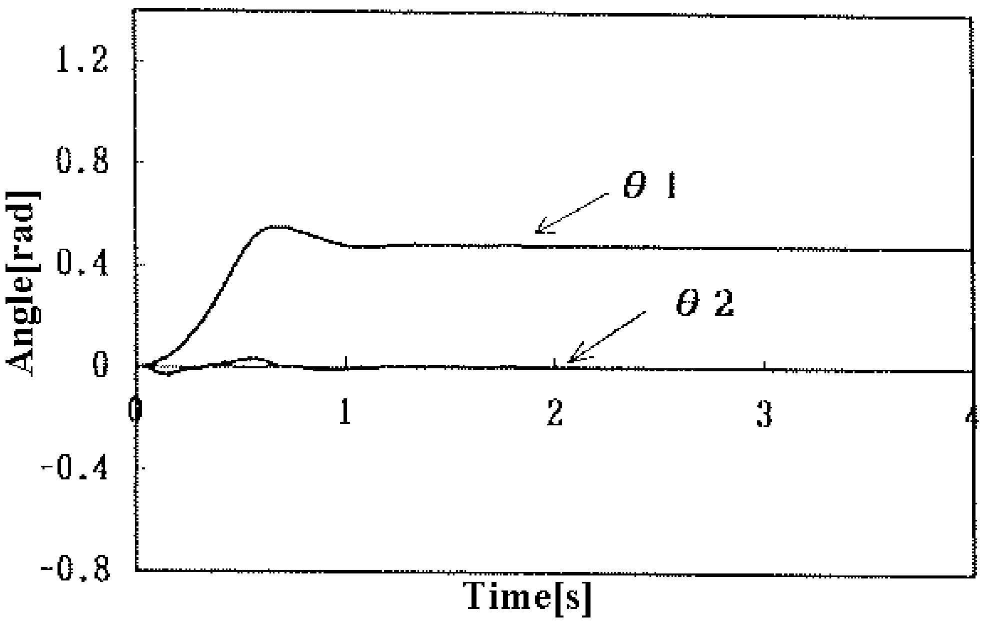


図 3.4: Experimental result: Angles of Link 1 and Link 2

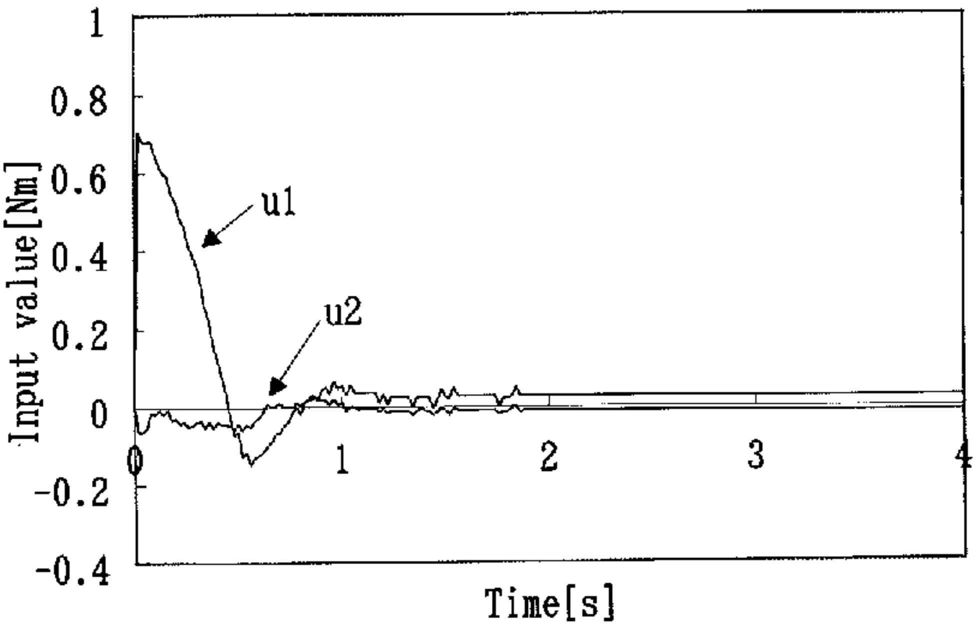


図 3.5: Input value on motor

3.6 おわりに

本章では，連続時間最適レギュレータの極限形を用いた最小位相系に対する非干渉化特性を，非最小位相系にまで拡張できる条件を示した．このことにより，最小位相系に限らず非最小位相系に対しても，評価関数の重み行列を直接操作するだけで安定な非干渉化が達成でき，先験的条件の確認をせずに安定な最大ブロック分けが可能になることを明らかにした．また，具体的な数値例によりその有効性を確認した．さらに，実際のロボットマニピュレータの非干渉制御に有効であることを実験的により確認した．

第 3 章の付録

定理 3.1の証明

システム (A, B, C) が最小位相系で，(3.3) 式のブロック型対角インタラクタが存在すると仮定する．このとき，(2.17) 式の F_ϵを使って制御則を

$$u = F_\epsilon x + D_\alpha^{-1} v$$

と選ぶ．

サブシステム $(c_i,\ A,\ (BD_{\alpha_i}^{-1}\ BD_{\alpha_j}^{-1}))$ を考える．ここで，$i \neq j$で $i,\ j = 1, 2, \cdots, p$ であり，c_iは C行列の i 番目の行ブロックを表す．また，$D_{\alpha_j}^{-1}$は D_α^{-1}の j番目の列ブロックを示す．ブロック対角インタラクタが存在するので，

$$\lim_{s\to\infty} \xi_{T_i} c_i (sI - A)^{-1} (BD_{\alpha_i}^{-1} BD_{\alpha_j}^{-1}) = (I_{p_i} 0 \cdots 0)$$

である．これから i 番目の出力ブロック端 y_iに対し，i 番目の入力端の係数を $BD_{\alpha_i}^{-1}$，j 番目の入力端を外乱とみなして，$BD_{\alpha_j}^{-1}$ $(i \neq j)$ を外乱の係数とすると，外乱分離条件を満足していることになる．F_ϵは$\epsilon \to 0$ の極限において，i 番目の出力端から最大不可観測なシステムとするフィードバックゲインであり，外乱分離条件を満足しているので，補題 2.5より $BD_{\alpha_j}^{-1}$の列ベクトルで張る空間は，i 番目の出力端からの不可観測な空間に含まれることになり，つぎが成立する．

$$\lim_{\epsilon\to 0} c_i (sI - A - BF_\epsilon)^{-1} BD_{\alpha_j}^{-1} = 0$$

よって，補題 2.5を考慮すれば，i 番目の出力ブロックの不可観測空間に $\mathrm{Im}(BD_{\alpha_j}^{-1})$ が含まれることから

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0} C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1} BD_\alpha^{-1} \\ &= \text{block}\quad \text{diag} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\Phi}_p(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成立する．

また，システム (A, B, C) が最小位相系であるから

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

であり，つぎの行列 E'_ϵが定義できる．

$$E'_\epsilon = \{C(-A - BF_\epsilon)^{-1}BD_\alpha^{-1}\}^{-1}$$

このとき，システム (A, BD_α^{-1}, C) に対し，制御則

$$u = F_\epsilon x + E'_\epsilon \nu$$

としたシステムは

$$\mathrm{rank}\ \left(\lim_{\epsilon\to 0} C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}BD_\alpha^{-1}E'_\epsilon\right) = m$$

となる．

したがって，$\tilde{\Phi}_i(s)$ はフルランクであり，さらに

$$\begin{aligned}
&C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}BD_\alpha^{-1}E'_\epsilon \\
&= C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}BD_\alpha^{-1}\{C(-A - BF_\epsilon)^{-1}BD_\alpha^{-1}\}^{-1} \\
&= C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}BG_\epsilon \\
&\quad G_\epsilon = \left(C(-A - BF_\epsilon)^{-1}B\right)^{-1}
\end{aligned}$$

であるから，制御則を

$$u = F_\epsilon x + G_\epsilon w$$

とすれば，$\epsilon \to 0$ としたときの閉ループ系の極限において

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0} C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}BG_\epsilon \\
&= \mathrm{block\ \ diag}\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1(s)\tilde{\Phi}_1^{-1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\Phi}_p(s)\tilde{\Phi}_p^{-1}(0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が成立し，定理 3.1が導かれる．

第 4 章

非干渉制御における固定極の影響

前章で説明した非干渉制御では，得られた非干渉系に対して閉ループ系に生じる固定極の影響が避けられない．また，虚軸上に零点をもつシステムに対しては，非干渉系を得ることができない．そこで，本章では固定極の影響を少なくする非干渉化手法について説明する．また，この方法を用いることにより，虚軸上に零点をもつシステムに対しても非干渉化できることを明らかにする．さらに，数値例とメカニカルシステムへの応用により本手法の有効性を検証する．

4.1 はじめに

前章までに説明した非干渉制御では，得られた非干渉系に対して閉ループ系に生じる固定極の影響が避けられず，また，虚軸上に零点をもつシステムに対して非干渉系を得ることができない．システムの伝達特性が変化するとき，原点近くに固定極が存在すると非干渉系の安定性や感度が極端に悪くなる場合がある [18]．本章では，固定極をできるだけ消去した形で最適レギュレータの極限形を用いた非干渉化を実現するために，新しい評価関数の選び方を考える．この方法により，もとの非干渉化特性を変えずに，非干渉系のロバスト安定性や感度を調節できる自由度が広がることになる．これは，非最小位相系に限らず最小位相系においても固定極の存在する非干渉系に対して適用できる結果であり，実システムの非干渉制御にも有効な手法である．最後に，指南車の非干渉制御に適用し，その有効性を実験的に確かめる．

4.2 固定極の影響を少なくする非干渉化手法

簡単のため，スカラタイプの非干渉系について考える．まず，つぎの補題4.1が成立する．

補題 4.1 システム (A, B, C) が系 3.1の A2'，A3' の条件を満足するとき，つぎの条件 B1，B2 を満たす Pが存在する．

B1 (A, B, P) がスカラ非干渉化条件 (補題 2.2) を満足する．

B2 (A, B, P) の不変零点から

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} -\bar{\lambda}_i I + A & B \\ p_i & 0 \end{pmatrix} < n+1 \tag{4.1}$$

を満たす$\bar{\lambda}_i$を除いたものが，条件 A3' の $z_0 - \{\lambda_i\}$ に一致する．ここで，p_iは Pの i 番目のベクトルである．

(証明) :
条件 B1，B2 を満たす Pの存在は，つぎのように具体的に求める手順を示すことにより証明する．

システム (A, B, C) が非干渉化条件を満足しているから，積分型非干渉系 (A_{F_d}, B_{G_d}, C) を構成する F_d，G_dが存在する．ただし，$A_{F_d} = A + BF_d$，$B_{G_d} = BG_d$である．積分型非干渉系は，標準非干渉系 [56] に変換でき

$$\begin{aligned}
A_{F_d} &\sim \begin{pmatrix} \tilde{A}_{F_{d_1}} & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \tilde{A}_{F_{d_m}} & 0 \\ \tilde{A}^C_{F_{d_1}} & \cdots & \tilde{A}^C_{F_{d_m}} & \tilde{A}^C_{F_{d_{m+1}}} \end{pmatrix}, \\
B_{G_d} &\sim \begin{pmatrix} \tilde{B}_{G_{d_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{B}_{G_{d_m}} \\ \tilde{B}^C_{G_{d_1}} & \cdots & \tilde{B}^C_{G_{d_m}} \end{pmatrix}, \\
C &\sim \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \tilde{C}_m & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

と表すことができる．このサブシステム $(\tilde{A}_{F_{d_i}}, \tilde{B}_{G_{d_i}}, \tilde{C}_i)$ を可制御正準形に変換しておけば，

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{F_{d_i}} &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{G_{d_i}} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{C}_i &\sim (* \quad \cdots \quad *) \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる．(4.3) 式から明らかなように，サブシステムの不変零点は $\tilde{C}_i$ の値に依存している．そこで $\tilde{p}_i$ を $\tilde{p}_i = (1\ 0\ \cdots 0)$ と選定すると，サブシステム $(\tilde{A}_{F_{d_i}}, \tilde{B}_{G_{d_i}}, \tilde{p}_i)$ に不変零点は存在しない．この $\tilde{p}_i$ を逆変換して p_i を決定することができる．(A_{F_d}, B_{G_d}, P) は非干渉系であるから，システム (A, B, P) は非干渉化条件 B1 を満足する．また，(A, B, P) の不変零点は条件 A3' の $z_0 - \{\lambda_i\}$ に一致しており，(4.1) 式を満たすものは存在しないから，条件 B2 を満足することもわかる． (証明終)

さて，補題 4.1の P によって，(3.1) 式のシステムに対して固定極の影響を少なくできる非干渉系の構成が，もとの非干渉化特性を変えることなく可能になる．

定理 4.1 システム (A, B, C) が補題 2.2の条件を満足するとき，つぎの評価関数

$$\tilde{J} = \int_0^\infty (x^T P^T Q P x + u^T u) dt \tag{4.4}$$

を最小とする最適レギュレータの解で，フィードバックゲインを $\tilde{F}_\epsilon$ とすると，制御則

$$u = \tilde{F}_\epsilon x + \tilde{G}_\epsilon w \tag{4.5}$$

$$\tilde{G}_\epsilon = (C(-A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1} B)^{-1} \tag{4.6}$$

を用いた閉ループ系は，$\epsilon \to 0$ の極限において非干渉化を構成し，固定極の一部は (4.1) 式を満たす.

(証明) :
システム (A, B, P) に $\tilde{F}_\epsilon$，$\tilde{G}_\epsilon$ を用いて，$\epsilon \to 0$ の極限を考えると，この場合定理 3.1より スカラ系 (A, B, P) に対しても (3.7) 式が成り立つので (第 3 章の付録を参照されたい)，

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0} \quad & P(sI - A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1} B\hat{G} \\ & \cdot \{P(-A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1} B\hat{G}\}^{-1}\end{aligned} \tag{4.7}$$

は非干渉系である．ただし，$\hat{G}$は

$$\hat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 A^{\tilde{d}_1 - 1} B \\ \vdots \\ p_m A^{\tilde{d}_m - 1} B \end{pmatrix} \tag{4.8}$$
$$\tilde{d}_1 = \min\{k_i \mid p_i A^{k_i - 1} B \neq 0\}, \quad i = 1, \cdots, m$$

である．(A, B, P) は補題 4.1の選定法により最小位相系であり，補題 2.5を満足する．また，補題 4.1の条件のもとで，定理 3.1によりつぎの式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \quad & p_i(sI - A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1} B\hat{G} \\ & = (\ 0\ \cdots\ 0\ \tilde{\phi}_i(s)\ 0\ \cdots\ 0\ ) \end{aligned} \tag{4.9}$$

さらに，$\mathrm{Im} c_i^T \subset \mathrm{Im}(p_i^T\ \ \cdots\ (p_i A^{\tilde{d}_i})^T)$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \quad & c_i(sI - A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1} B\hat{G} \\ & = (\ 0\ \cdots\ 0\ \tilde{\tilde{\phi}}_i(s)\ 0\ \cdots\ 0\ ) \end{aligned} \tag{4.10}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \quad & C(sI - A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1} B\hat{G} \\ & \quad \cdot\{C(-A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1} B\hat{G}\}^{-1} \\ & = \mathrm{diag}\ (\phi_1^*(s)\phi_1^{*-1}(0), \cdots, \phi_m^*(s)\phi_m^{*\,-1}(0)) \end{aligned} \tag{4.11}$$

を得ることができ，$\epsilon \to 0$ の極限において非干渉化を達成する．ここで$\phi_i^*(0) = 1$ である．

(証明終)

p_iの選び方について，補題 4.1の証明ではサブシステムに不変零点が現れないように決定したが，$\tilde{p}_i$の選び方によっては，サブシステムの零点 (固定極) の一部を指定できることがわかる．したがって，これを指定することで $Q \to \infty I$の極限での閉ループ系の極を指定した形の非干渉系をつくることも可能である．

4.3 システムの特性変動に対する安定性と感度

最適レギュレータの極限形を用いた非干渉系の安定性と感度が，固定極の影響によりどのように変化するかを文献 [18] の手法をもとに解析する．

いま，もとのシステムの伝達関数を$T_0(s)$，その微小変動を$\Delta T_0(s)$，そして，閉ループ系の伝達関数を$T(s)$ その微小変動を$\Delta T(s)$とする．また，非干渉系を構成する制御則のフィードフォワード項をG_0と表す．プロパーで安定なシステムの微小変動$\Delta T_0(s)$に対する非干渉系の安定性は，すべての$\omega \geq 0$でつぎのように与えられる．

$$\bar{\sigma}(\Delta T_0(j\omega)) < \frac{1}{1+\bar{\sigma}(T_0^{-1}(j\omega)T(j\omega)G_0^{-1})} \tag{4.12}$$

さらに，システムの微小変動$\Delta T_0(s)$に対する非干渉系の微小変動の割合$\Delta T(s)$を感度とすれば，つぎのように与えられる．

$$\frac{\bar{\sigma}(\Delta T(j\omega))}{\bar{\sigma}(\Delta T_0(j\omega))} \leq \bar{\sigma}(G_0)\bar{\sigma}(T_0^{-1}(j\omega)T(j\omega)) \tag{4.13}$$

ここで，$\bar{\sigma}(\cdot)$は最大特異値を表す．よって，システムの特性変動に対する安定性と感度は，それぞれ(4.12)式と(4.13)式の右辺で量ることができる．

4.4　数値例

4.4.1　最小位相系の例

つぎの2入力2出力システムを考える．

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

システム(A, B, C)は最小位相系で可制御，可観測かつ可逆で，非干渉化の条件を満足することが容易に確かめられる．そこで，評価関数の重みを$Q = 10I$，$Q = 100I$，$Q = 1000I$として得られる，つぎのフィードバックゲインとフィードフォワードゲインを用いた制御則$u = F_*x + G_*[v1\ v2]^T$を施したとき，閉ループ系は非干渉化を達成することを示す．

$$F_{10} = \begin{bmatrix} -5.6487 & 5.0015 & 2.1934 & 0.6607 \\ -5.0015 & 7.6071 & 2.3898 & 1.2215 \end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
G_{10} &= \begin{bmatrix} 4.4532 & -2.3230 \\ -0.3883 & -6.0501 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{100} &= \begin{bmatrix} -11.6074 & 4.4855 & 2.1236 & 0.3030 \\ -4.4855 & 13.0521 & 1.7866 & 1.1925 \end{bmatrix}, \\
G_{100} &= \begin{bmatrix} 10.48381 & -1.0916 \\ -0.3011 & -11.4372 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{1000} &= \begin{bmatrix} -32.8257 & 4.1695 & 2.0455 & 0.1033 \\ -4.1695 & 33.9706 & 1.2924 & 1.0759 \end{bmatrix}, \\
G_{1000} &= \begin{bmatrix} 31.7803 & -0.3760 \\ -0.1230 & -32.1226 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

時刻 0 秒目から入力 $v1$ に単位ステップ入力，入力 $v2$ に零を入力したときの応答を図 4.1 に示す．図から明らかなように，$Q \to \infty I$ としていくにつれてそれぞれの入力に対する変数の相互干渉がなくなり，非干渉化が達成されていくことがわかる．

つぎに，固定極を移動したときの非干渉系の特性について調べる．ここで，補題 4.1を満たす P_m は簡単な計算によりつぎのようになる．

$$
P_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda_1 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda_2 - 0.5 \end{pmatrix} \tag{4.14}
$$

つまり，閉ループ系の極限において λ_1，λ_2 の極配置が可能になる．ここでは，極を $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -5)$，$(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -20)$ に配置する．これらの２つと，極配置をしない定理 3.2 に基づく設計法とを比較してみる．なお，評価関数の出力の重みは $Q = 100I$ とする．このときのフィードバックゲインとフィードフォワードゲインは，つぎのように計算された．

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{100(-1,-5)} &= \begin{bmatrix} -11.6198 & 4.4031 & 2.1243 & -0.6949 \\ -4.4031 & 16.4078 & 1.2199 & 43.8736 \end{bmatrix}, \\
\tilde{G}_{100(-1,-5)} &= \begin{bmatrix} 10.4865 & 0.0987 \\ 0.1832 & -10.0155 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{F}_{100(-1,-20)} = \begin{bmatrix} -11.6153 & 4.2394 & 2.1287 & -3.0411 \\ -4.2394 & 24.3515 & 1.0603 & 189.8229 \end{bmatrix},
$$

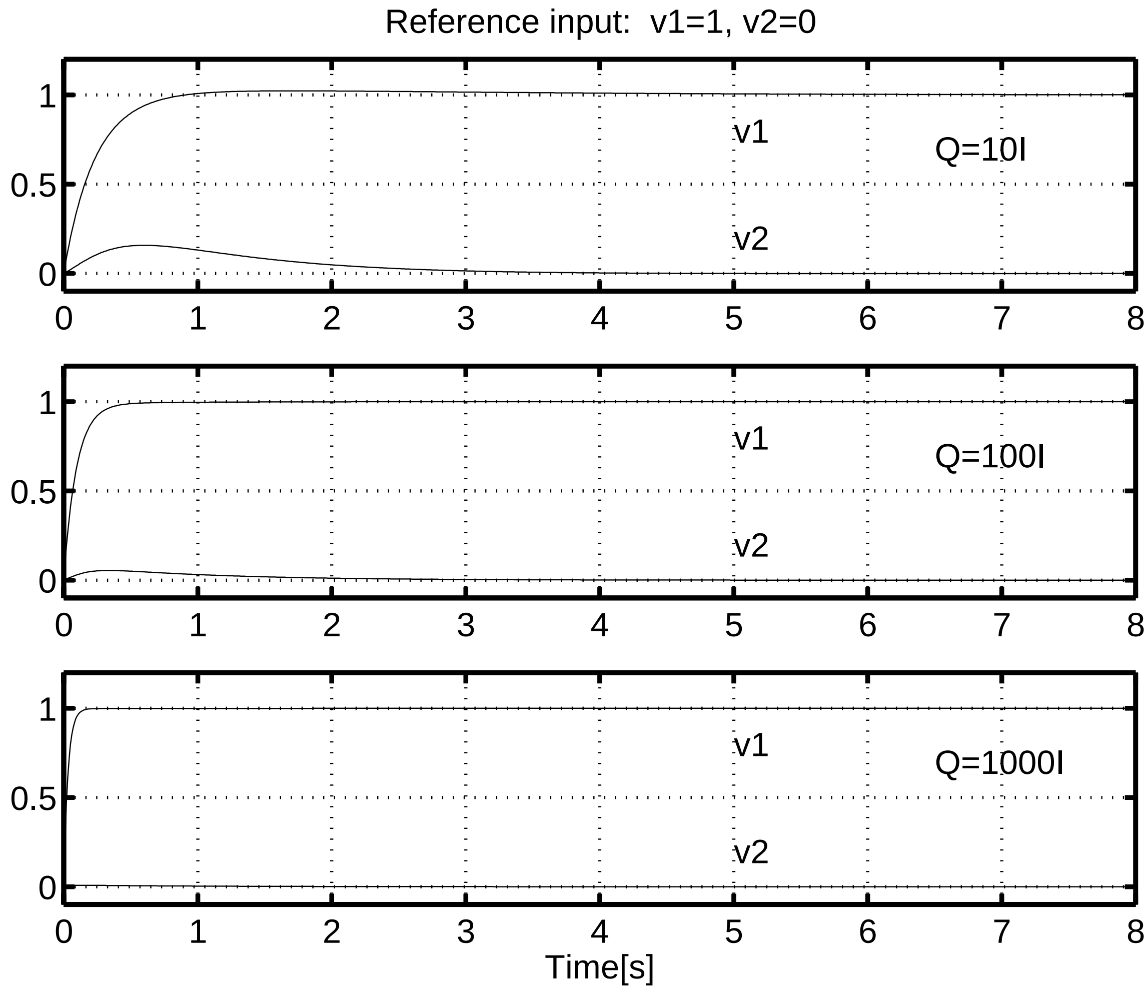


図 4.1: Step response for closed-loop system(minimum phase system)

$$\tilde{G}_{100(-1,-20)} = \begin{bmatrix} 10.4867 & 0.1460 \\ 0.1731 & -9.9999 \end{bmatrix}$$

さきほどと同じく，入力 $v1$ に単位ステップ入力，入力 $v2$ に零を入力したときの応答を図 4.2に示す．極を望ましい位置に配置することにより，同じ評価関数の重み選定でも固定極の影響を軽減できることが，図の上段と下段の比較により明らかである．さらに，この結果は図 4.1に示したように，重み $Q = 1000I$に選定したときの結果 (図 4.1の下段) と比べ速応性が若干劣っているものの非干渉化を達成することに関してはほとんど差がない．さらに，入力に着目し，$(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -20)$ に極配置した場合と，極配置をせずに評価関数の重みを $Q = 100I, 1000I$ した場合について比較したものを図 4.3に示す．図からわかるように，評価関数の重みを $1000I$と選んだ場合 (図 4.3の下段) は初期状態において過大な入力が現れているが，$\mathrm{p}(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -20)$ に極配置した場合 (図 4.3 の中段) の入力は，極配置をしないで重みを $100I$に選んだ場合と変わらないことがわかる．この結果は，システムの入力に拘束があり評価関数の重みを大きくできない場合，極を適当に配置することにより望ましい非干渉系を得られることがわかる．

つぎに，固定極を残した場合と適当な極配置をしたときのロバスト安定性と感度の違いを比較する．安定性を比較したものを図 4.4，感度を比較したものを図 4.5に示す．それぞれの縦軸は，(4.12) 式と (4.13) 式の右辺を計算した大きさを表している．図 4.4と図 4.5の実線は，極を $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -20)$ に配置したときの特性，点線は極を $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -5)$ に配置したときの特性，一点鎖線は極配置をしない場合の特性を示す．図 4.4と図 4.5から明らかなように，原点から極を遠ざけていくことにより安定性を保証する領域が広がり，感度が低下することがわかる．このことは，非干渉系が原点近くに固定極をもち安定性や感度が極端に悪化するような場合，新しい評価関数を選ぶことにより，ロバスト安定性や感度を調節できる自由度が広がることを意味する．

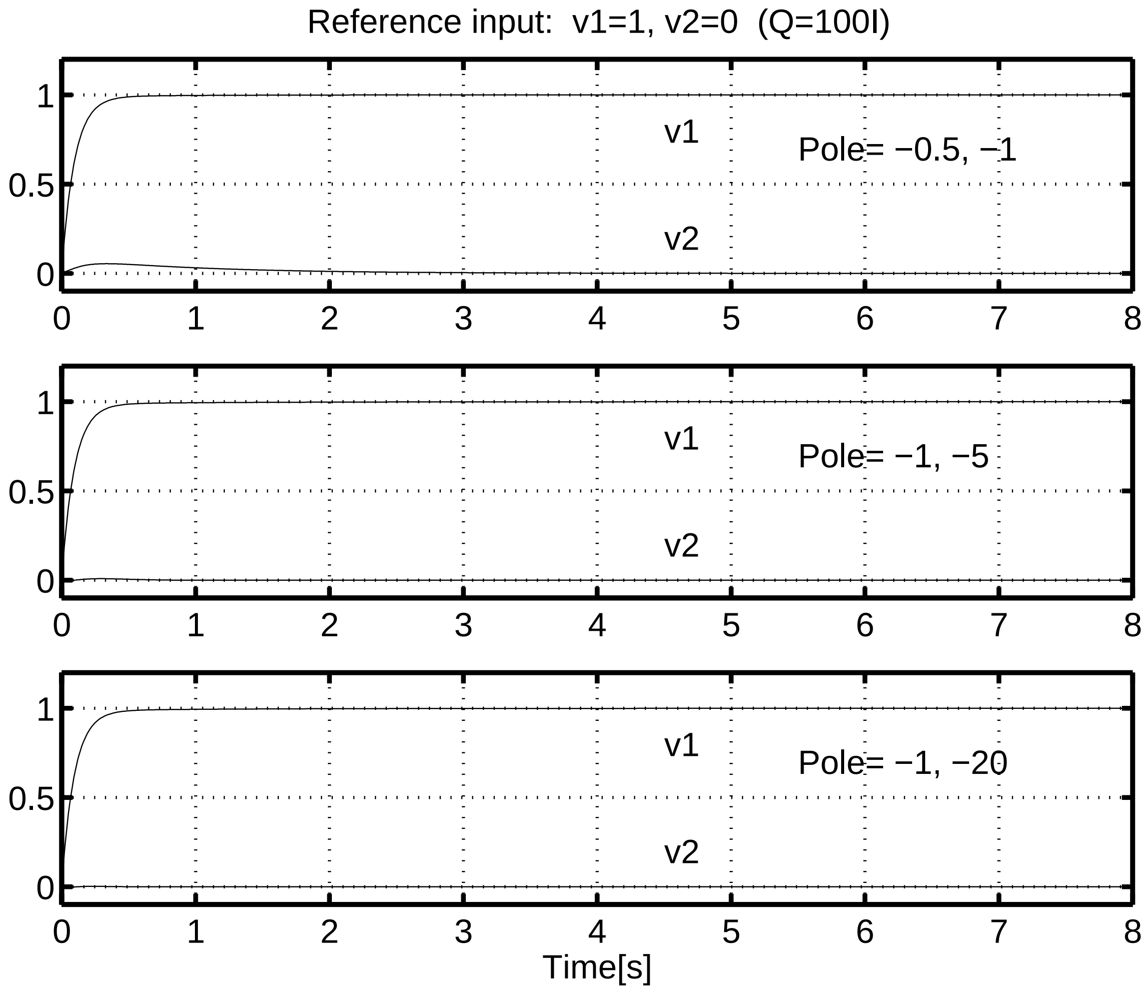


図 4.2: Step response for closed-loop system with pole placement(minimum phase system)

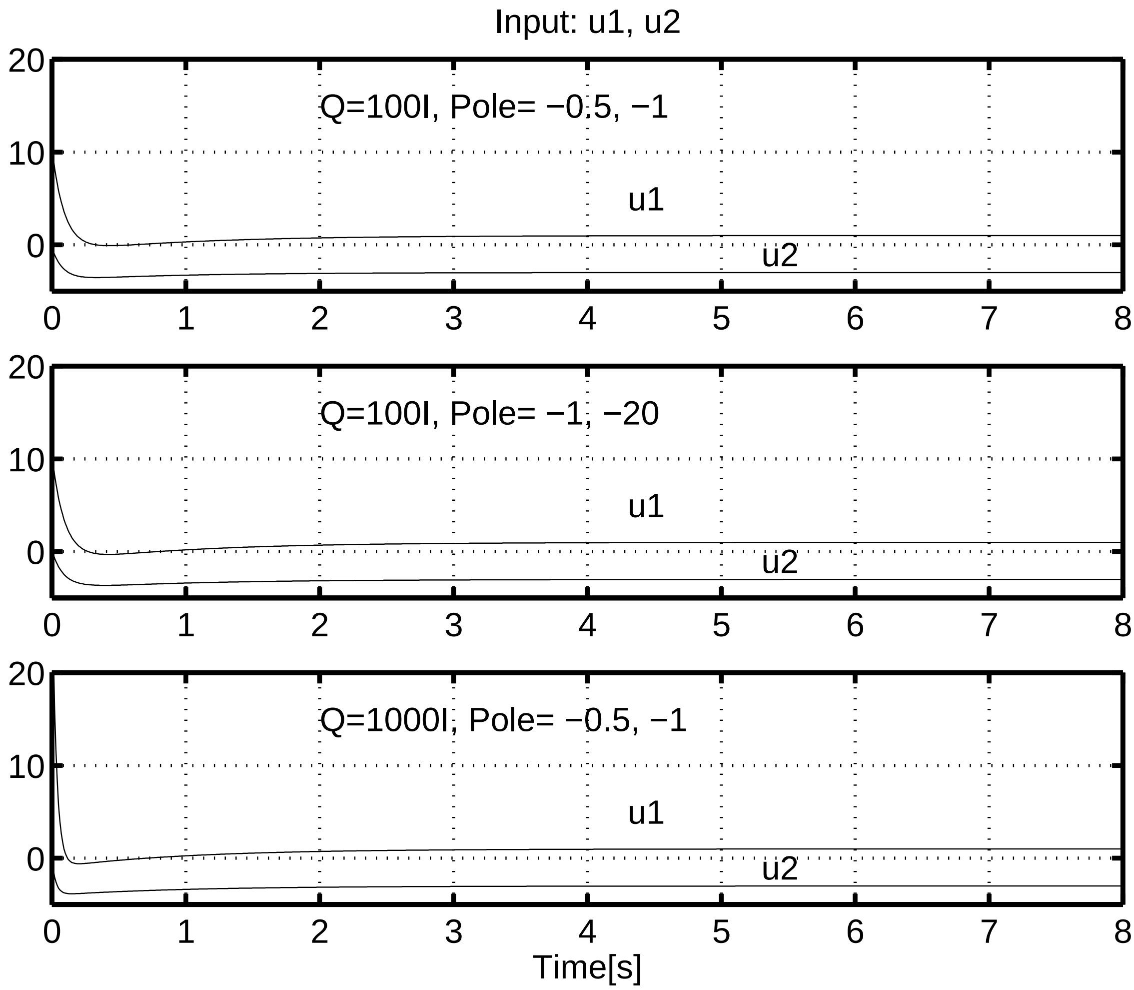


図 4.3: Input for closed-loop system with pole placement(minimum phase system)

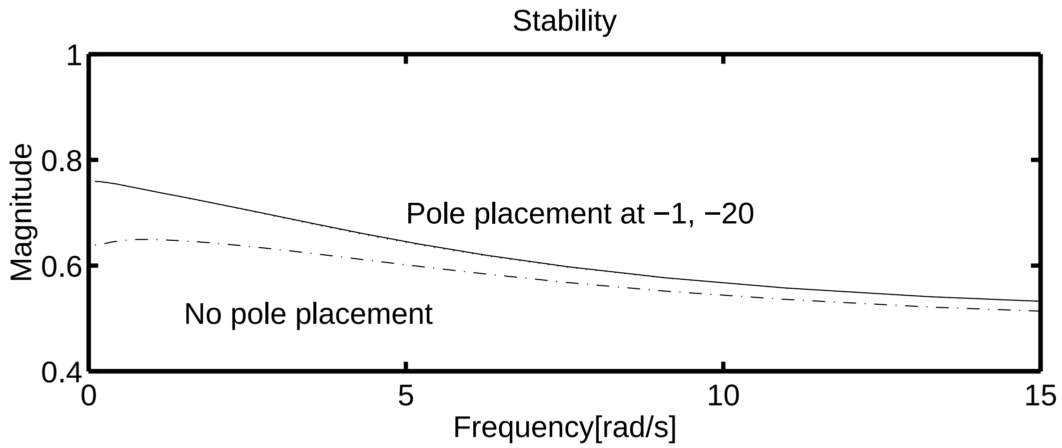


図 4.4: Stability margin; minimum phase system (—: Pole= $-20, -1$, $\cdots\cdots$: Pole= $-5, -1$, $- \cdot -$: Pole= $-0.5, -1$)

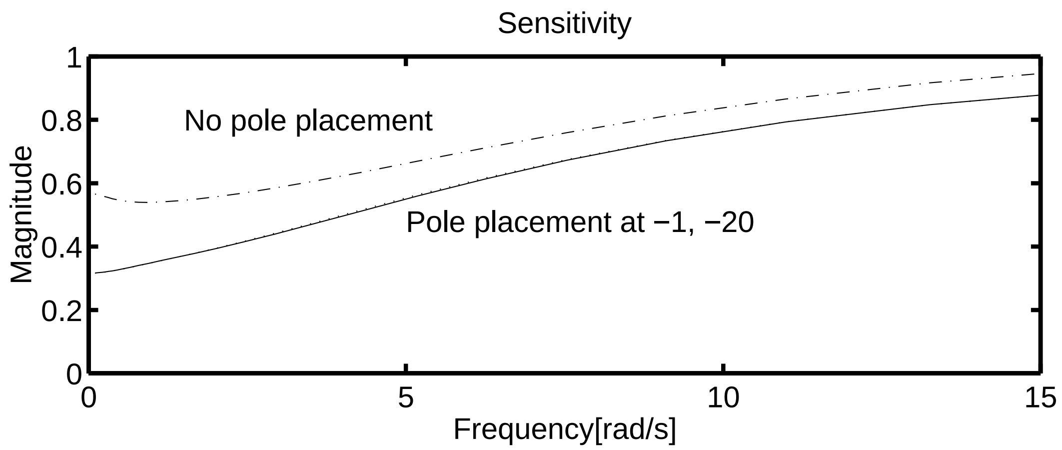


図 4.5: Sensitivity margin; minimum phase system (—: Pole= $-20, -1$, $\cdots\cdots$: Pole= $-5, -1$, $- \cdot -$: Pole= $-0.5, -1$)

4.4.2 非最小位相系の例

非最小位相系に対しても極を適当に配置することにより，もとの非干渉特性を変えることなく固定極の影響を少なくすることができる．

前章で扱った，つぎの 2 入力 2 出力システムを考える．

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

定理 3.2を用いて非干渉制御をする場合，0.5 と 1 に存在する不変零点の影響で閉ループ系には鏡像原理により-0.5 と-1 に固定極が現れる．

さて，補題 4.1を満たす P_nは簡単な計算により

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda_1 + 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda_2 + 0.5 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

となる．ここでは，極を $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -5)$，$(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -20)$ に配置する．先の最小位相系の場合と同様にこれらの２つと極配置をしない設計法とを比較してみる．なお，評価関数の出力の重みは$Q = 100I$とする．フィードバックゲインおよびフィードフォワードゲインは，それぞれつぎのように計算される．これらの値を用いて制御則$u = \tilde{F}'_* x + \tilde{G}'_* [v1\ v2]^T$を構成する．

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_{100(-1,-5)} &= \begin{bmatrix} -13.7033 & 4.4290 & -22.2791 & -0.5965 \\ -4.4290 & 17.4045 & 0.5395 & 58.7408 \end{bmatrix}, \\ \tilde{G}'_{100(-1,-5)} &= \begin{bmatrix} 11.5758 & -0.0764 \\ 0.0315 & -10.0077 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_{100(-1,-20)} &= \begin{bmatrix} -13.7082 & 4.2607 & -22.2830 & -2.0137 \\ -4.2607 & 25.3512 & 0.5852 & 212.6741 \end{bmatrix}, \\ \tilde{G}'_{100(-1,-20)} &= \begin{bmatrix} 11.5748 & 0.1072 \\ 0.1541 & -9.9999 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

入力 $v1$ に単位ステップ入力，入力 $v2$ に零を入力したときの応答を図 4.6に示す．極を望ましい位置に配置してやることにより，同じ評価関数の重み選定でも固定極の影響を軽減できることが，図の上段と下段の比較により明らかである．さらに，この結果は図 3.1に示したように，重み $Q = 1000I$ に選定したときの結果 (図 3.1の下段) と比べ速応性が若干劣っているものの非干渉化を達成することに関してはほとんど差がない．また，アンダーシュートの値も小さくなっている．さらに，入力についても比較してみると，図からわかるように評価関数の重みを $1000I$ と選んだ場合 (図 4.7の下段) は初期状態において過大な入力が現れているが，$(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -20)$ に極配置した場合 (図 4.7 の中段) の入力は，極配置をしないで重みを $100I$ に選んだ場合 (図 4.7の上段と変わらないことがわかる．

また，固定極を残した場合と適当な極配置をしたときのロバスト安定性と感度の違いを比較する．安定性を比較したものを図 4.8，感度を比較したものを図 4.9に示す．それぞれの縦軸は，(4.12) 式と (4.13) 式の右辺を計算した大きさを表している．図 4.8と図 4.9の実線は，極を $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -20)$ に配置したときの特性を，点線は極を $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, -5)$ に配置したときの特性を，一点鎖線は極配置をしない場合の特性を示す．図 4.8と図 4.9から明らかなように，低周波域においては原点から極を遠ざけていくことにより，安定性を保証する領域が広がり，また感度が低下していることがわかる．しかし，高周波域においてはこのことが逆転する場合もあり，システムの特性を考慮しながら極を望ましい位置に配置する必要がある．

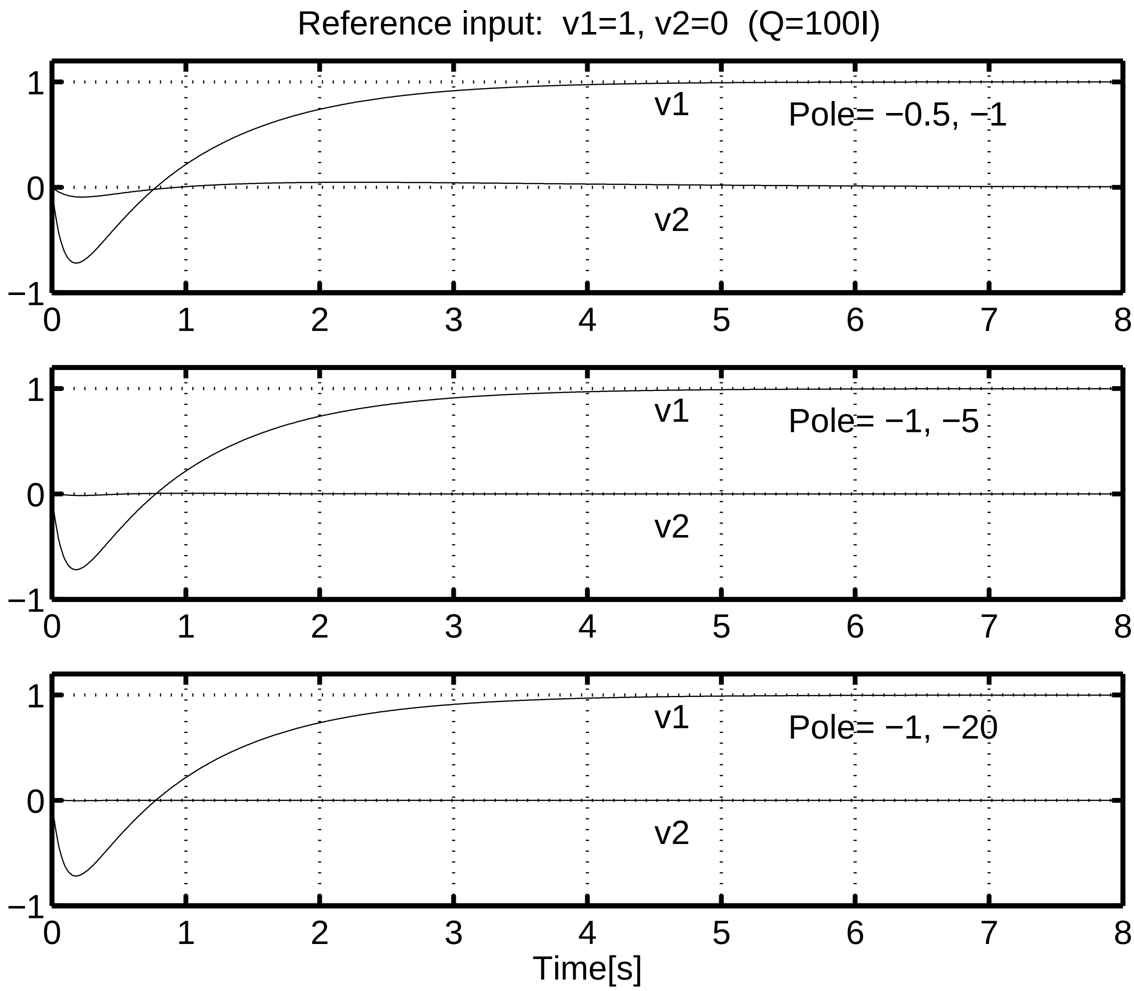


図 4.6: Step response for closed-loop system with pole placement(nonminimum phase system)

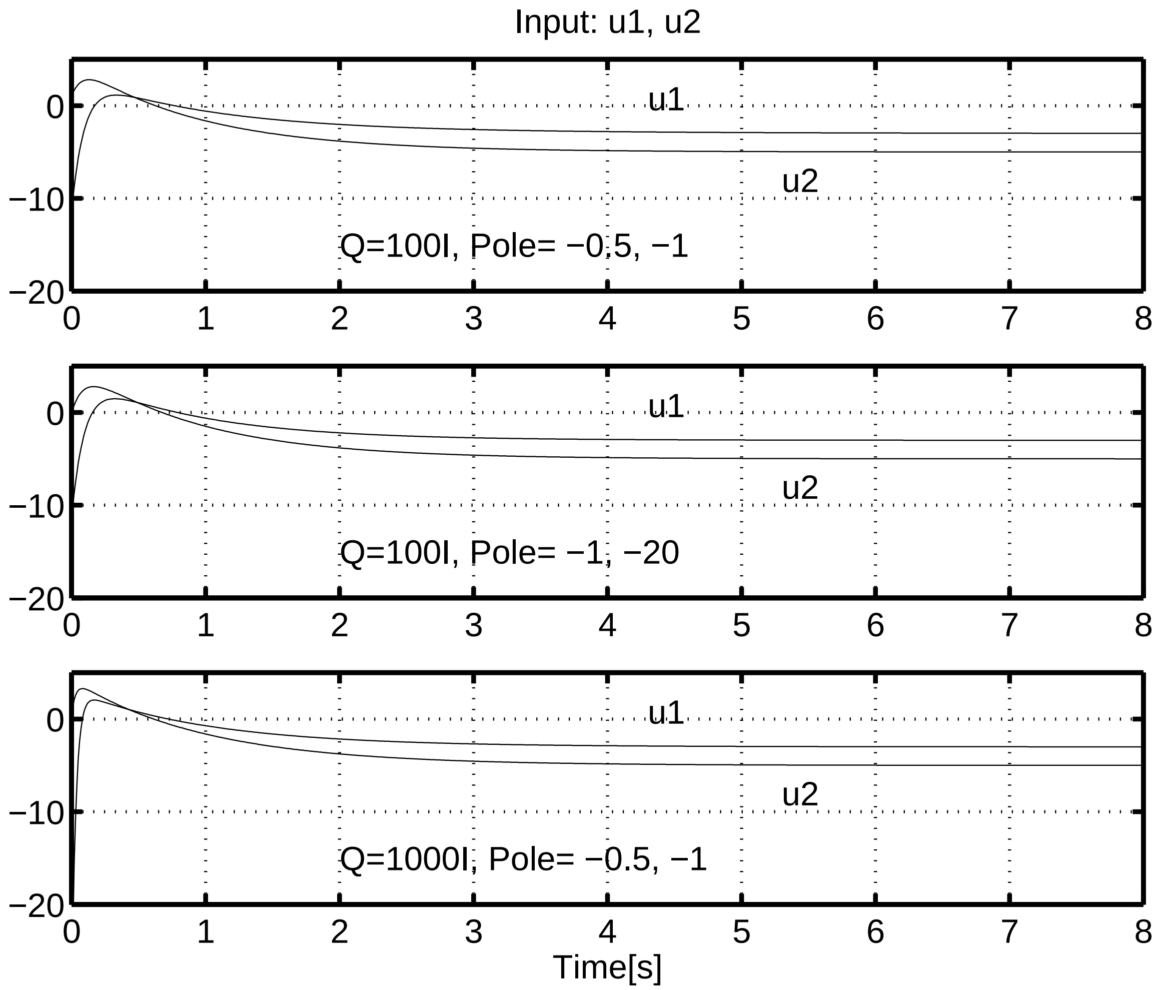


図 4.7: Input for closed-loop system with pole placement(nonminimum phase system)

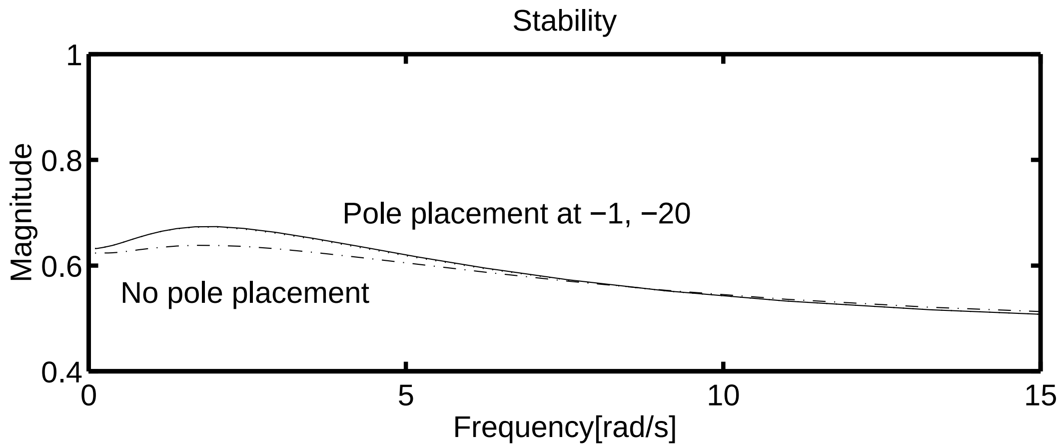


図 4.8: Stability margin; nonminimum phase system (—: Pole= $-20, -1$, $\cdots\cdots$: Pole= $-5, -1$, $- \cdot -$: Pole= $-0.5, -1$)

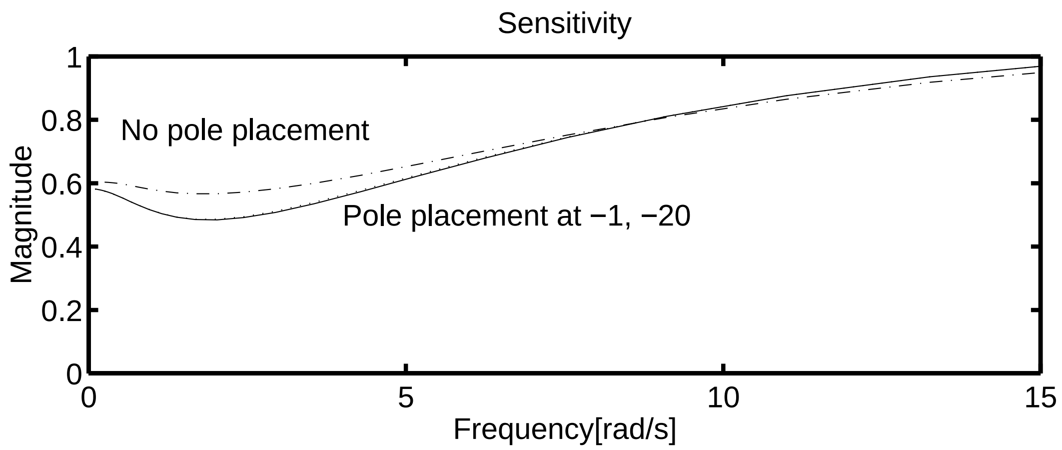


図 4.9: Sensitivity margin; nonminimum phase system (—: Pole= $-20, -1$, $\cdots\cdots$: Pole= $-5, -1$, $- \cdot -$: Pole= $-0.5, -1$)

4.4.3 虚軸上に零点が存在する系の例

つぎの 2 入力 2 出力システムを考える．

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

システム (A, B, C) は非最小位相系で可制御，可観測かつ可逆で，非干渉化の条件を満足することが容易に確かめられる．また，このシステムは原点に不変零点をもつため，定理 3.2の制御方法では非干渉化できない．

そこで，原点に存在する零点を移動することにより，これまでと同様に制御則 $u = \tilde{F}''_* x + \tilde{G}''_* [v1\ v2]^T$ を施して非干渉化が達成できることをシミュレーションにより示す．補題 4.1 を満たす P_zは，簡単な計算によりつぎのようになる．

$$P_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

時刻 0 秒目から入力 $v1$ に単位ステップ入力，入力 $v2$ に零を入力したときの応答を図 4.10 に示す．ここでは，原点の極λ_0をそれぞれ-0.5，-5，-20 と移動させたときの閉ループ系の応答を表している．なお，$Q = 100I$としたときのフィードバックゲインとフィードフォワードゲインは，つぎのように計算される．

$$\begin{aligned} \tilde{F}''_{100(-0.5,-1)} &= \begin{bmatrix} -11.6077 & 4.4870 & 2.1199 & 0.3231 \\ -4.4870 & 13.4865 & 1.5635 & 6.0888 \end{bmatrix}, \\ \tilde{G}''_{100(-1,-20)} &= \begin{bmatrix} 10.4878 & -0.6463 \\ -0.0765 & -10.1775 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}''_{100(-1,-5)} &= \begin{bmatrix} -11.6111 & 4.3918 & 2.1257 & -0.8544 \\ -4.3918 & 16.8947 & 1.1526 & 51.0027 \end{bmatrix}, \\ \tilde{G}''_{100(-1,-5)} &= \begin{bmatrix} 10.4854 & 0.1709 \\ 0.2392 & -10.0005 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}''_{100(-1,-20)} &= \begin{bmatrix} -11.6155 & 4.2308 & 2.1290 & -3.2305 \\ -4.2308 & 24.8451 & 1.0464 & 200.9764 \end{bmatrix}, \\
\tilde{G}''_{100(-1,-20)} &= \begin{bmatrix} 10.4865 & 0.1615 \\ 0.1844 & -9.9988 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

図から明らかなように，極を望ましい位置に移動させることで非干渉化が達成されていくことがわかる．このことにより，虚軸上に零点が存在するシステムに対して本手法の有効性が確かめられる．

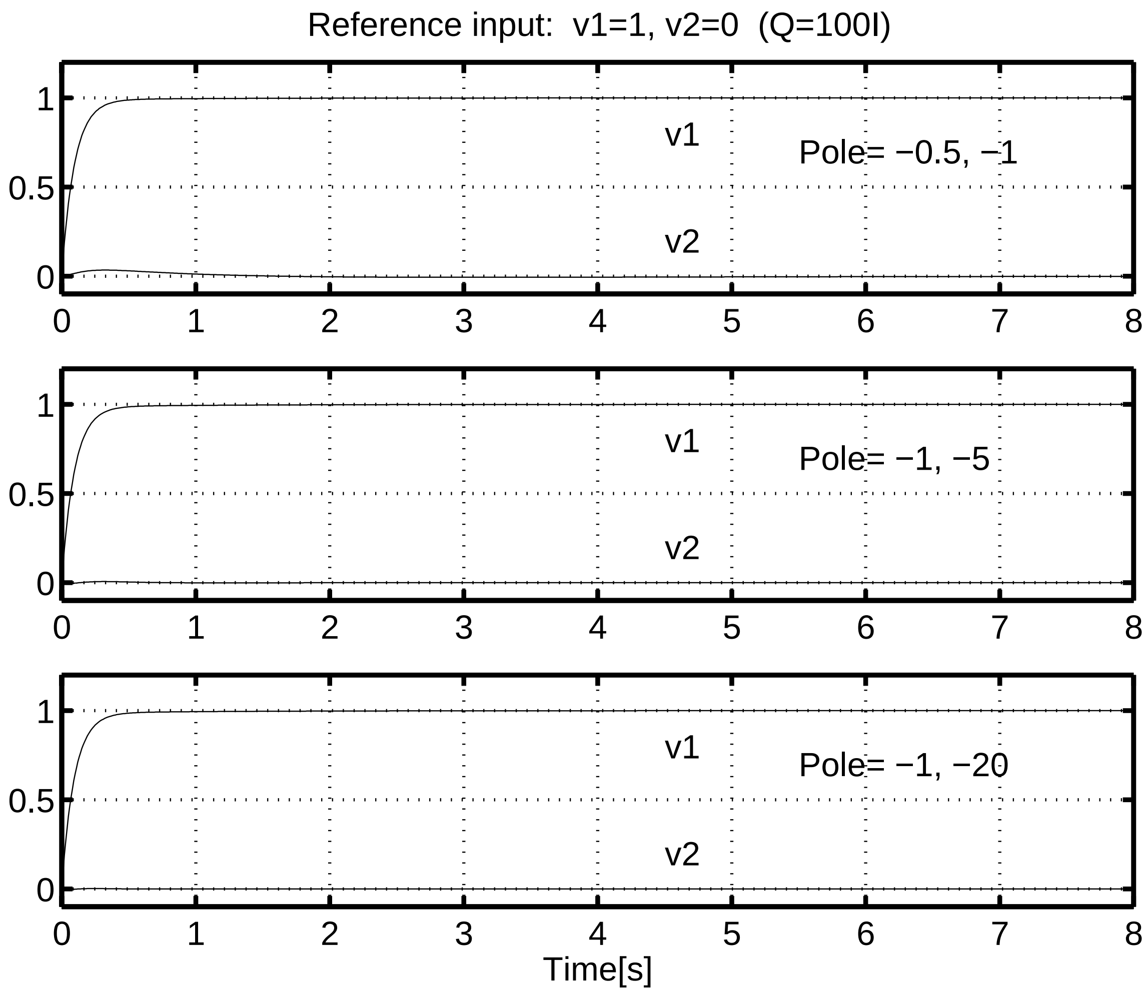


図 4.10: Step response for closed-loop system

4.5　メカニカルシステムによる実験的検証

4.5.1　非干渉制御の指南車への応用

指南車は古代中国で考案されたといわれており，晋代以降の歴代史書にその記述がある．指南車は字のとおり，台車がいかなる方向に向きを変えても台車の上にある指示棒が常に南を指している車であり，その仕組みは磁石やジャイロによるものではなく，左右の車輪の回転数から歯車によるからくりによって指示棒を台車の向きと反対方向に回転させるものである．このような特徴をもつ指南車は，古代中国において戦争時の羅針盤として，祭礼の先頭車，占いの道具として使用されたといわれている．

そこで，このような指南車を現代的にアレンジして構成したものを図4.11に示す．この指南車は，３つのDCモータから構成され，左右の車輪と指示棒を動かすことができる．台車の方向は，車輪に取り付けたロータリエンコーダで回転角を計測し，左右の回転角の差から計算する．計測された回転角の情報は，カウンターボードを通して計算機に取り込まれる．そこで，適切な制御量を計算し，D/A ボード，増幅器を通して指示棒の動きを制御する仕組みである．

なお，指南車は閉ループ系に固定極を生じるシステムではないが，本手法を用いることにより，固定極の影響を少なくする非干渉化が達成できるだけではなく，望ましい位置に極を配置することにより入力を過大にせずに非干渉系が得られる場合があることを示す．

4.5.2　モデリングと物理パラメータ

図4.11に示したパラメータおよび運動方程式の導出の際に用いるパラメータは，つぎのとおりである．

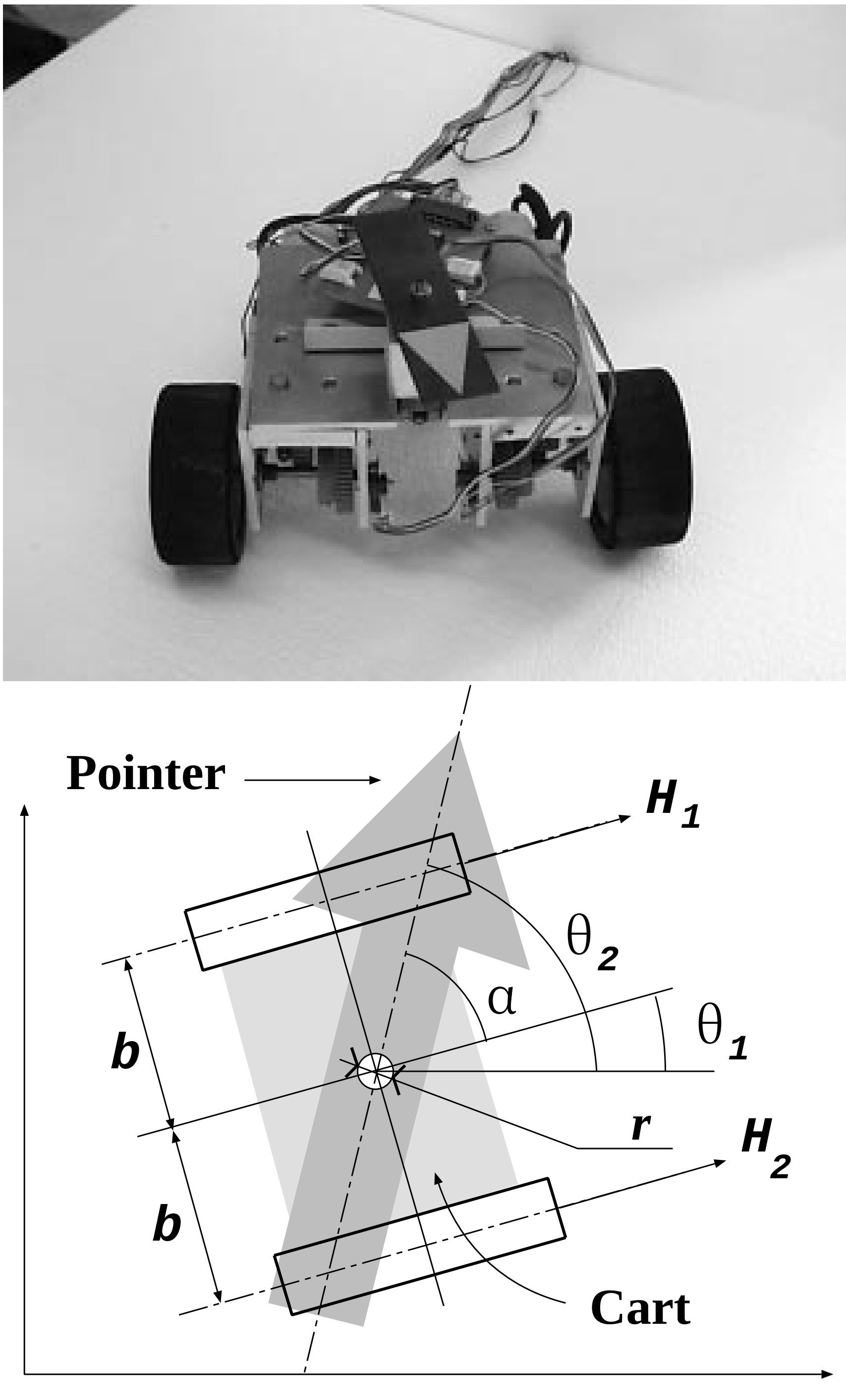


図 4.11: General view of SHINANSHA

r[m]	:	指示棒を回す軸の径
b[m]	:	左右の車輪の間隔
H_i[Nm]	:	左右の車輪用モータのトルク
α[rad]	:	台車と指示棒の間の角度
θ_i[rad]	:	絶対座標からの台車と指示棒のそれぞれの角度
I[kgm^2]	:	台車の回転モーメント
I_0[kgm^2]	:	指示棒の回転モーメント
$\hat{c}$[Ns/m]	:	車輪の粘性係数
$\hat{c}_0$[Ns/m]	:	指示棒の粘性係数
T[Nm]	:	指示棒回転用モータのトルク
M_i[kg]	:	台車と指示棒のそれぞれの質量

はじめに，台車の重心まわりの運動方程式を導出すると

$$I\ddot{\theta}_1 + b^2\hat{c}\dot{\theta}_1 - r^2\hat{c}_0\dot{\alpha} = b(H_2 - H_1) - T. \tag{4.17}$$

のようになる．つぎに，指示棒の運動方程式を導出すると

$$I_0\ddot{\alpha} + r^2\hat{c}_0\dot{\alpha} = T. \tag{4.18}$$

と与えられる．そこで，(4.17) 式と (4.18) 式を$\alpha = \theta_2 - \theta_1$の関係により座標変換すると，$\theta_1$と$\theta_2$に関するつぎの状態空間表現を得る．

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b^2\hat{c}+r^2\hat{c}_0}{I} & \frac{r^2\hat{c}_0}{I} \\ 0 & 0 & \frac{r^2\hat{c}_0}{I_0} - \frac{b^2\hat{c}+r^2\hat{c}_0}{I} & \frac{r^2\hat{c}_0}{I} - \frac{r^2\hat{c}_0}{I_0} \end{bmatrix} x \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{b}{I} & -\frac{1}{I} \\ \frac{b}{I} & \frac{1}{I_0} - \frac{1}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 - H_1 \\ T \end{bmatrix}, \qquad (4.19) \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad x = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}$$

(4.19) 式からわかるように，台車のダイナミクスが指示棒のダイナミクスに影響することがわかる．この相互の干渉を取り除いて，指南車を実現することが実験の目的である．

実験により，物理パラメータは表 4.1のように求められた．

表 4.1: Physical parameters of SHINANSHA

	Cart	Pointer
M_1, M_2 [kg]	2.94	0.14
I, I_0 [kg $\cdot$ m^2]	0.27	0.03×10^{-2}
$\hat{c}$, $\hat{c}_0$ [Ns/m]	0.50×10	0.01×10
r[m]	0.03×10^{-1}	
b[m]	1.30×10^{-1}	

4.5.3 指南車の実現と固定極の影響に関する実験的検証

提案する非干渉化手法を用いて，指南車の実現が可能なことを実験により検証する．

実験: 台車を初期位置から-0.50[rad] の方向に動かしたときに，指示棒が初期状態と同じ方向に保つようにせよ (図 4.12を参照されたい)．ただし，制御時間は 16[s] とし，サンプリングタイムは 0.20[s] とする．

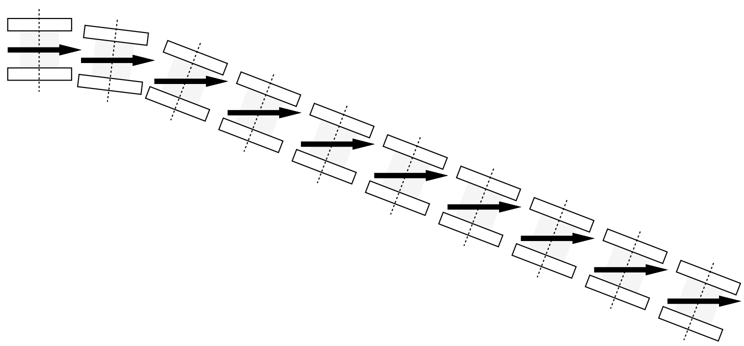


図 4.12: Track of mechanical system

評価関数の重みを$Q = qI$として，$q = 200$ のときのフィードバックゲインとフィードフォワードゲインは，それぞれつぎのように計算される．

$$
\begin{aligned}
F_{200} &= \begin{bmatrix} -14.1421 & -0.0154 & -7.0236 & -0.0079 \\ 0.0154 & -14.1421 & 0.0006 & -0.0922 \end{bmatrix}, \\
G_{200} &= \begin{bmatrix} 14.1421 & 0.0154 \\ -0.0154 & 14.1421 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

また，比較実験のために$q = 300$ のときのフィードバックゲインとフィードフォワードゲインを同様に計算しておくと，つぎのようになる．

$$
\begin{aligned}
F_{300} &= \begin{bmatrix} -17.3205 & -0.0191 & -7.8366 & -0.0088 \\ 0.0191 & -17.3205 & 0.0007 & -0.1020 \end{bmatrix}, \\
G_{300} &= \begin{bmatrix} 17.3205 & 0.0191 \\ -0.0191 & 17.3205 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

そこで，制御則を$u = F_* x + G_* v$として上の実験を行なう．台車が動いているにも関わらず，指示棒が初期状態と同じ方向を向いていれば指南車が実現されたといえる．つまり，θ_1の変位角の値に関わらずθ_2の変位角の値が 0 であればよい．

評価関数の重みを$q = 200$ としたときの実験結果を図 4.13と図 4.14に示す．図 4.13は台車と指示棒の角度を表し，図 4.14はこのときのモータへのトルクを表す．図からわかるように，台車が動いても指示棒の角度は 0 に保たれており，提案する手法を用いて非干渉化が達成できることがわかる．また，このときのθ_2の最大誤差は1.54×10^{-2}[rad](0.88[deg])である．

さらに，評価関数の重みを$q = 300$ としたときの実験結果を図 4.15と図 4.16に示す．図 4.15は台車と指示棒の角度を表し，図 4.16はこのときのモータへのトルクを表す．図からわかるように，$q = 200$ と選んだときよりも良好な制御結果が得られることがわかる．ただし，図 4.14と図 4.16を比べてみると，図 4.16の方が制御入力が大きくなっていることがわかる．

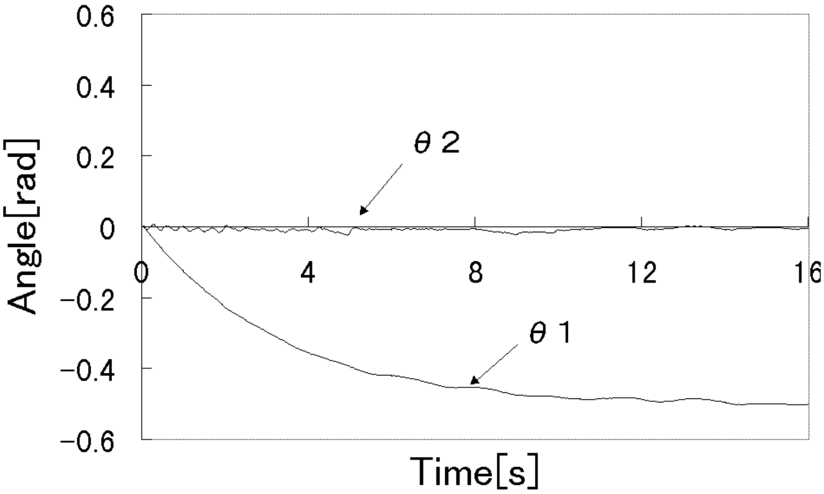


図 4.13: Experimental result: no pole placement, $Q = 200I$

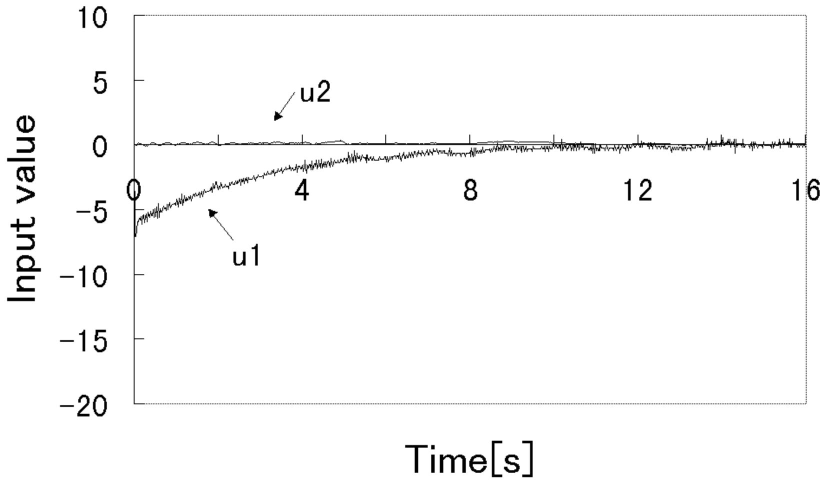


図 4.14: Input value: no pole placement, $Q = 200I$

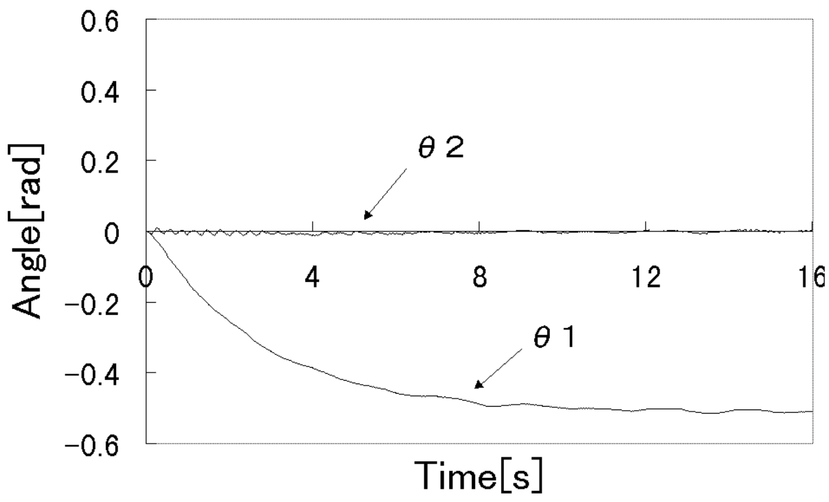


図 4.15: Experimental result: no pole placement, $Q = 300I$

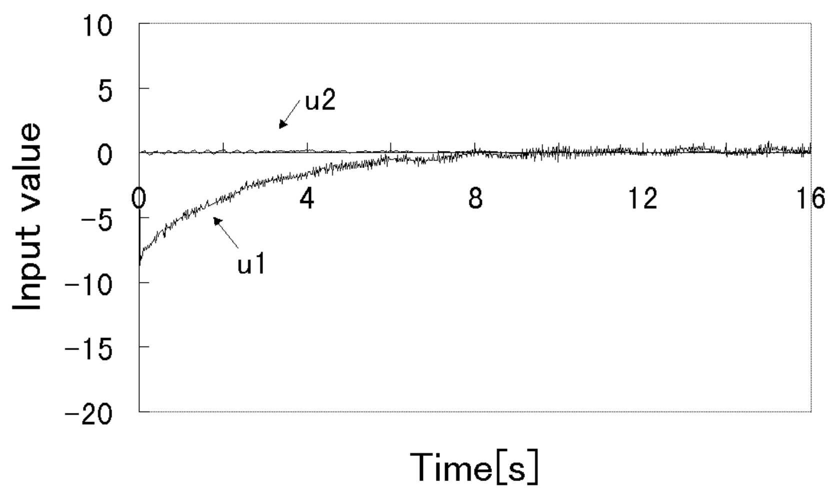


図 4.16: Input value: no pole placement, $Q = 300I$

つぎに，適当な位置に極を配置することで，より望ましい非干渉系が達成できることを実験により示す．本章では，評価関数を新たに選び直すことにより，もとの非干渉特性を変えることなく安定性や感度を向上させることができることを明らかにした．そこで，極を$\lambda = -5$ に配置するような新たな評価関数 P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\lambda \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

を選び，先ほどと同様の実験を行なう．$Q = 200I$としたときのフィードバックゲインとフィードフォワードゲインは以下のように計算される．

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{200(-5)} &= \begin{bmatrix} -14.1421 & -0.0161 & -7.5283 & -0.0088 \\ 0.0161 & -14.1421 & 0.0037 & -2.8299 \end{bmatrix}, \\ \tilde{G}_{200(-5)} &= \begin{bmatrix} 14.1421 & 0.0161 \\ -0.0161 & 14.1421 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

先ほどと同様の実験を，制御則を$u = \tilde{F}_{200(-5)}x + \tilde{G}_{200(-5)}v$として行なった結果を図 4.17と図 4.18に示す．図 4.17は台車と指示棒の角度を表し，図 4.18はこのときのモータへのトルクを表す．図からわかるように，極配置を考慮しなかった図 4.13，図 4.15と比べて，指示棒の初期応答について振動がなくなっている観点から見れば良い結果といえる．さらに，図 4.18を見るとわかるように，図 4.16と比べて初期値の入力について過大になっていない．安定性と感度についても向上していることが図 4.19と図 4.20からそれぞれ理解できる．以上により，本章で提案したように極を望ましい位置に配置することで，より良好な非干渉制御ができることが実験的に確かめられた[1]．

[1] もともと，指南車の数学モデルは

$$0(\text{重根}), -0.003, -0.3141$$

に極をもつ系である．$Q = 300I$と選んだときの閉ループ系の極は

$$-0.67 \pm j0.63, -53.70 \pm j53.70$$

であり，$Q = 200I$と選び極を-5 に配置した場合の閉ループ系の極は

$$-0.61 \pm j0.56, -5.0, -941.74$$

となる．

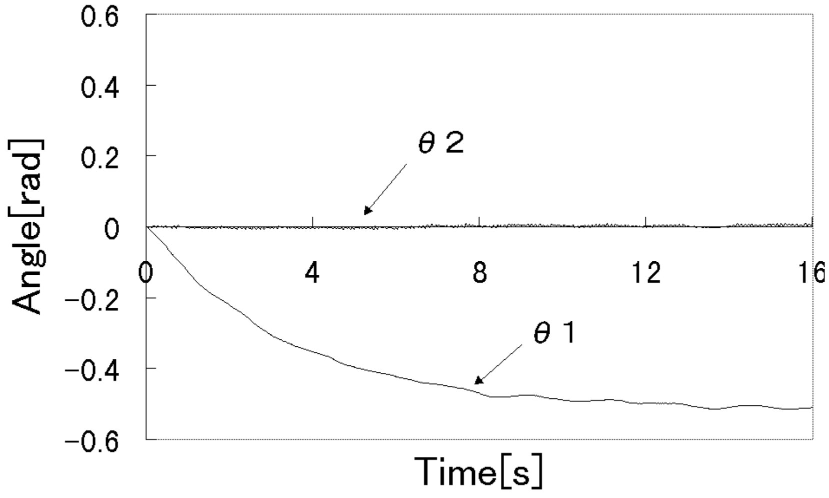


図 4.17: Experimental result: pole at -5, $Q = 200I$

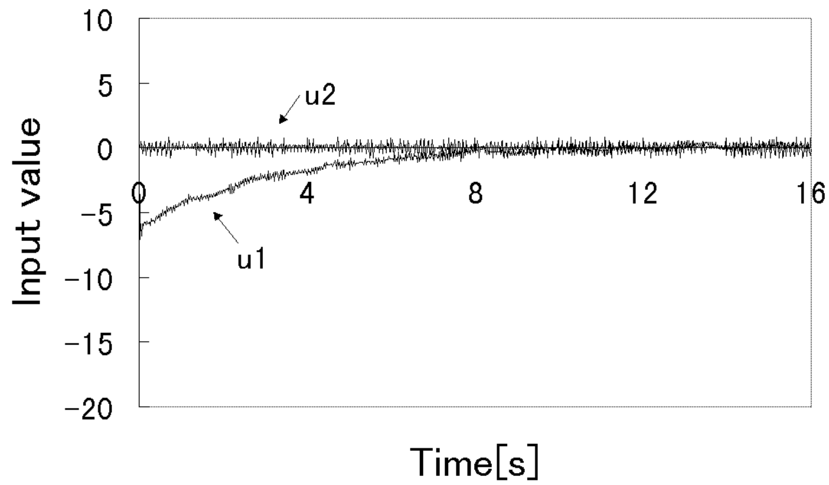


図 4.18: Input value: pole at -5, $Q = 200I$

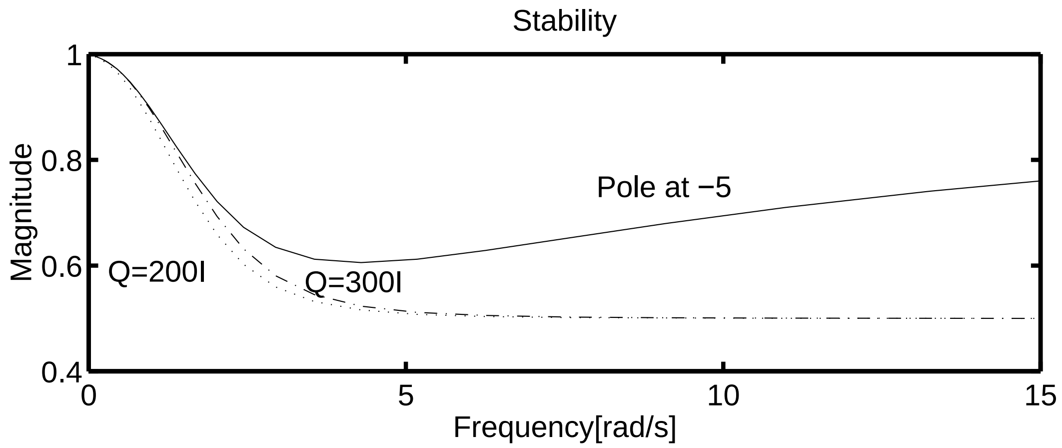


図 4.19: Stability margin of SHINANSHA (—: $Q = 200I$ and Pole $= -5$, $\cdots\cdots$: $Q = 200I$, $- \cdot -$: $Q = 300I$)

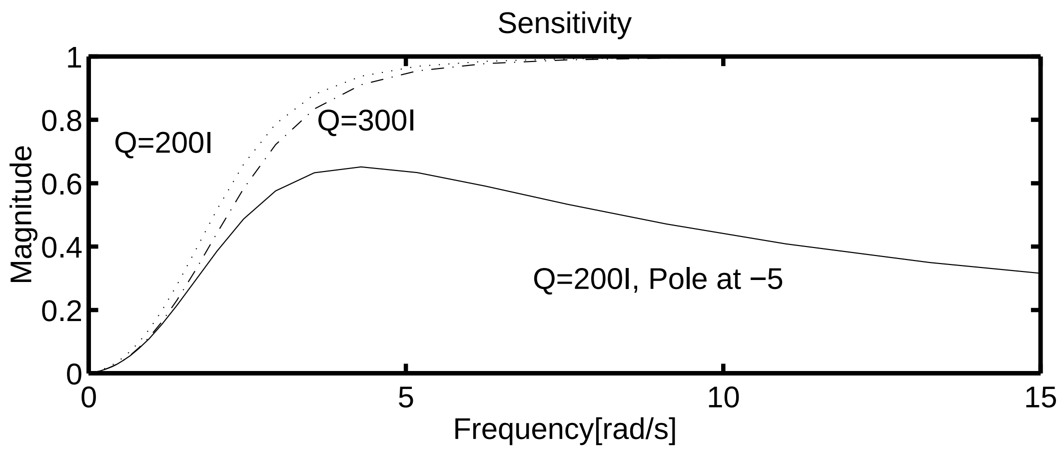


図 4.20: Sensitivity margin of SHINANSHA (—: $Q = 200I$ and Pole $= -5$, $\cdots\cdots$: $Q = 200I$, $- \cdot -$: $Q = 300I$)

4.6 おわりに

前章までの非干渉化手法には固定極が生じるという問題があった．例えば，非最小位相系については不安定零点を安定域に写像した固定極が閉ループ系に生じ，この影響でシステムの安定性や感度が損なわれることもある．

そこで本章では，新しい 2 次評価関数を選ぶことにより最適レギュレータの極限形を用いて固定極の影響を少なくする非干渉化を，もとの非干渉化特性を変えることなく達成できることを示し，ロバスト安定性が向上し感度が低下することを確かめた．この方法は，非最小位相系のみならず，最小位相系で固定極の存在する非干渉系においても適用可能であり，さらには虚軸上に零点をもつシステムに対しても非干渉化が可能になる．

また，この自由度を活かす応用として，実際のメカニカルシステムに対して閉ループ系の極を適当な位置に配置することにより，より望ましい非干渉系が構成できることを実験により確認した．この結果は，制御対象に制御入力の拘束が存在するような場合，評価関数の重みを大きくせずに (入力を過大にすることなく) 望ましい非干渉系が構成できることを意味する．

補題 4.1の Pの選定について，ここではこの存在の証明とともに選定法のひとつを示したが，この Pの簡単な選定法の検討が今後の問題として残された．また，どのように極配置すればより望ましい非干渉系を得ることができるのかという具体的な制御系設計手法の確立も重要な課題であろう．

第 5 章

最適状態推定器を用いた出力フィードバックによる非干渉制御

実際のシステムを制御する場合，システムの全ての状態を測定できるとは限らない．本章では，最適状態推定器を用いた出力フィードバックによる非干渉制御について説明する．さらに，サーボ系に対しても非干渉制御が適用できることを示す．

5.1 はじめに

最適レギュレータの極限的性質の特徴は，評価関数の重み行列を直接操作するだけで非干渉化が達成でき，しかも安定な最大のブロック分けが先験的な条件の確認なしにできることにある．しかし，これまで述べたことは状態フィードバック制御に限定した議論であり，実際のシステムの制御問題を考えた場合システムの状態を全て観測できるとは限らない．そこで，観測器 (オブザーバ) [72][2] を用いて入力と出力から真の状態を推定し，この推定値を用いてフィードバックを構成する問題を考える．この制御系設計では，真の状態を必要としないためオブザーバベースコントローラによる出力フィードバックとなる．

ハイゲインオブザーバの性質は，チープコントロールの観点から LQG/LTR に関する研究や [94][104]，完全制御と完全観測の観点からの研究 [3][53] において明らかにされているが，最適レギュレータの極限的性質を用いたオブザーバベースコントローラによる非干渉制御に関する研究はなされていない．そこで，本章では，オブザーバ併合系に対しても最適レギュレータの極限的性質による非干渉化特性を明らかにすることを目的とする．

このことにより，システムの状態がすべて観測できない場合でも，オブザーバで推定した状態によって近似的に非干渉化が可能となる．

はじめに，オブザーバを併合した外乱印加系に対して最適レギュレータの極限的性質を用ることにより外乱分離が達成されることを示す．そこでは，最適レギュレータとカルマンフィルタの双対関係から，オブザーバを併合した系の閉ループ系がフィルタの極限ゲインを用いることにより，外乱からの影響が除去できることを示す．従来このような外乱除去推定器として未知入力オブザーバ [31][68] が知られているが，本研究では条件を満足すればオブザーバのゲインを大きくすることにより，このようなオブザーバが構成可能になることを示す．

つぎに，最適状態推定器を用いた出力フィードバックにより，最適レギュレータと最適状態推定器の極限的性質を利用して非干渉化が達成できることを，同一次元オブザーバと最小次元オブザーバを用いた場合についてそれぞれ明らかにする．最後に，これらの２つのオブザーバを用いたコントローラによる出力フィードバックにより近似的に非干渉化が達成されることを数値例を用いて検証し，システム外乱の影響が出力に現れないことを確かめる．

さらには，サーボ系に対してもこれまでと同様，最適レギュレータの極限的性質を用いることにより，ステップ状の定値外乱が加わる場合でも目標値に追従する非干渉系が得られることを明らかにする．

5.2 問題設定

つぎの連続時間システムの最適レギュレータ問題を考える．

$$\dot{x} = Ax + Bu + D\xi, \quad y = Cx \tag{5.1}$$

ここで，$x \in R^n$，$y \in R^m$，$u \in R^m$，$\xi \in R^r$ である．また，システム (A, B, C) は最小位相系で，可制御，可観測で可逆とし，$CB = 0$，$\mathrm{rank}\ CAB = \mathrm{rank}\ C$，$\mathrm{rank}\ D = r$ を仮定する．このシステムに対し，標準的 2 次評価関数

$$J = \int_0^\infty (y^T Q y + u^T R u) dt, \quad Q > 0, \quad R > 0$$

を最小とする制御入力 u を求める問題の解は，評価関数の重み行列を $R = I$，$Q = \frac{1}{\epsilon^2}I$として，$\epsilon \to 0$ で得られるフィードバックゲインによりつぎのように与えられる．

$$
\begin{aligned}
&u = F_\epsilon \hat{x} && (5.2)\\
&F_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} -B^T M_\epsilon \\
&A^T M_\epsilon + M_\epsilon A - M_\epsilon B B^T M_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} C^T C = 0
\end{aligned}
$$

いま，$\hat{x}$はつぎのオブザーバにより推定されるものとする．

$$
\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}y + \hat{J}u, \quad \hat{x} = \hat{C}z + \hat{D}y \tag{5.3}
$$

ここで，$z \in R^p$，$\hat{x} \in R^n$で$\hat{A}$は安定である．さらに，オブザーバが存在する条件として，行列$U \in R^{p \times n}$に対してつぎの等式が成り立つとする．

$$
UA - \hat{A}U = \hat{B}C, \ \hat{J} = UB, \ \hat{C}U + \hat{D}C = I \tag{5.4}
$$

さて，ガウス白色雑音を受ける線形確率システム

$$
\dot{x} = Ax + Bu + D\xi, \quad \tilde{y} = \tilde{C}x + w \tag{5.5}
$$

を考える．ここで，$\tilde{y}$は観測出力で，$x \in R^n$，$\tilde{y} \in R^m$，$u \in R^m$，$\xi \in R^r$，$w \in R^q$であるとする．また，システム $(A, \tilde{C}, D)$ は最小位相系で，可制御，可観測で可逆とする．いま，観測雑音の共分散行列を $W = I$，システム雑音の共分散行列 $V = \frac{1}{\epsilon^2}I$とし[1]，定常状態におけるカルマンフィルタと，$\epsilon \to 0$ の極限におけるカルマンフィルタのゲインをつぎのように与える [17]．

$$
\dot{\hat{x}} = (A + L_\epsilon \tilde{C})\hat{x} - L_\epsilon y + Bu \tag{5.6}
$$

$$
L_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} -M'_\epsilon \tilde{C}^T \tag{5.7}
$$

$$
0 = AM'_\epsilon + M'_\epsilon A^T - M'_\epsilon \tilde{C}^T \tilde{C} M'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} D D^T \tag{5.8}
$$

このときの L_ϵを極限オブザーバゲインと呼ぶことにする．

本章では，つぎの問題を考えることを目的とする．

[1] この共分散行列Vを，後で記述する数値例の部分ではコントローラの Q と対応づけて Q_oと記述するので注意されたい．

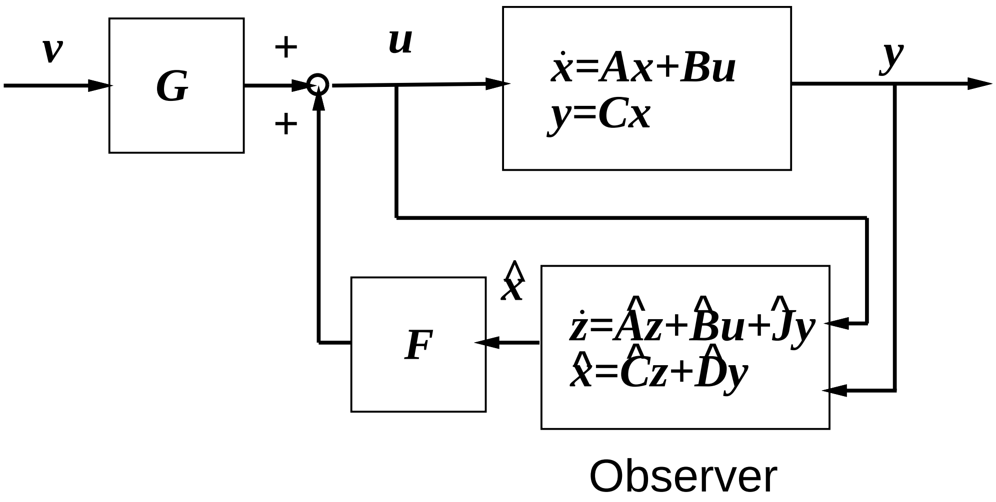


図 5.1: Observer-based control system

問題: 外乱印加系 (A, B, C, D) に対して，最適レギュレータの極限的性質と状態推定器の極限的性質を用いて，オブザーバ併合系による出力フィードバックにより非干渉化を達成するためのフィードバック制御則，およびオブザーバゲインを求めよ．

5.3 準備

5.3.1 オブザーバ併合系の外乱除去特性

つぎの外乱印加系を考える．

$$\dot{x} = Ax + Bu + D\xi,\ y = Cx,\ \tilde{y} = \tilde{C}x \tag{5.9}$$

ここで，(5.9) 式のシステムは最小位相系でつぎの条件を満足していると仮定する．

C1　　$\mathrm{rank}\ C = m,\quad \mathrm{rank}\ D = r.$

C2　　(A, D, C) の不変零点λ_fが

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} -\lambda_f I + A & D \\ C & 0 \end{pmatrix} = n + r$$

を満足する．

このとき，$\epsilon \to 0$ の極限について，オブザーバによって推定される状態$\hat{x}$を用いても外乱分離が達成されることを示す．また，観測出力$\bar{y}$は制御出力 yを含むとする．

補題 5.1 (A, B, C) が最小位相系で可制御，可観測，可逆とする．このとき，オブザーバにより推定される状態$\hat{x}$を用いても，極限ゲイン F_ϵにより閉ループ系は最大不可観測なシステムとなり，(A, D, C) が外乱分離条件を満足すれば，ImDは不可観測空間に含まれる．また，$CB = 0$，rank $CAB =$ rank Cのもとでは，また i 番目の出力からの可観測空間は，Im$(C_i^T (C_i A)^T)$ となる．

(証明) :
(5.9) 式で与えられる，外乱印加系に対して閉ループ系を以下のように構成する．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BB^T M_\epsilon)x + BB^T M_\epsilon e + CD\xi \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{5.10}$$

ただし，$e = x - \hat{x}$である．ここで，外乱の出力への影響を検討するので $x(0) = 0$ としておく．$z = Mx$ で変数変換し，リカッチ方程式を変形し整理すると，

$$\dot{z} \;=\; -A^T z - C^T \upsilon + B^* e + D^* \xi \tag{5.11}$$

$$\upsilon = QCM_\epsilon^{-1} z,\ B^* = M_\epsilon BB^T M_\epsilon,\ D^* = M_\epsilon D$$

υの微分を考える．

$$Q^{-1}\dot{\upsilon} = -CM_\epsilon^{-1}A^T z - CM_\epsilon^{-1}C^T \upsilon + CM_\epsilon^{-1}B^* e + CM_\epsilon^{-1}D^*\xi \tag{5.12}$$

さらに微分すると，

$$\begin{aligned} Q^{-1}\ddot{\upsilon} \;=\;& -CM_\epsilon^{-1}A^T \dot{z} - CM_\epsilon^{-1}C^T \dot{\upsilon} + CM_\epsilon^{-1}B^* \dot{e} + CM_\epsilon^{-1}D^* \dot{\xi} \\ =\;& (CM_\epsilon^{-1}A^T + CM_\epsilon^{-1}C^T QCM_\epsilon^{-1})A^T z \\ & (CM_\epsilon^{-1}A^T + CM_\epsilon^{-1}C^T QCM_\epsilon^{-1})C^T \upsilon \\ & -(CM_\epsilon^{-1}A^T + CM_\epsilon^{-1}C^T QCM_\epsilon^{-1})B^* e \\ & -(CM_\epsilon^{-1}A^T + CM_\epsilon^{-1}C^T QCM_\epsilon^{-1})D^* \xi \\ & +CM_\epsilon^{-1}B^* \dot{e} + CM_\epsilon^{-1}D^* \dot{\xi} \end{aligned} \tag{5.13}$$

が得られる．ここで，$CB=0$ の仮定を考慮し，リカッチ方程式から

$$CM_\epsilon^{-1}A^T = -CAM_\epsilon^{-1} - CM_\epsilon^{-1}C^TQCM_\epsilon^{-1} \tag{5.14}$$

なる関係が得られるので，これを用いて (5.13) 式を整理すれば

$$Q^{-1}\ddot{v} = -CAM_\epsilon^{-1}A^Tz - CAM_\epsilon^{-1}C^Tv + CAD\xi + CD\dot{\xi} \tag{5.15}$$

となる．ここで，$e(0)=0$，$Q^{-1}\dot{e}(0)=CD\xi(0)$ であるから，上式をラプラス変換すれば

$$Q^{-1}s^2\Upsilon(s) = -CAM_\epsilon^{-1}A^TZ(s) - CAM_\epsilon^{-1}C^T\Upsilon(s) + CAD\Xi(s) + CDs\Xi(s) \tag{5.16}$$

$$\Upsilon(s) = J_0^{-1}(s)\{-CAM_\epsilon^{-1}A^TZ(s) + CAD\Xi(s) + CDs\Xi(s)\} \tag{5.17}$$

$$J_0(s) = Q^{-1}s^2 + CAM_\epsilon^{-1}C^T \tag{5.18}$$

となる．

(5.11) 式をラプラス変換し，計算した$\Upsilon(s)$ を代入すると，閉ループ系は

$$\begin{aligned} sZ(s) &= \{-A^T + C^TJ_0^{-1}CM_\epsilon^{-1}A^T\}Z(s) + B^*E(s) \\ &\quad -C^TJ_0^{-1}CAD\Xi(s) + D^*\Xi(s) \end{aligned} \tag{5.19}$$

となる．

さて，出力は

$$y = CM_\epsilon^{-1}z \tag{5.20}$$

であり，出力の 1 階微分は $CB=0$ のもとで

$$\dot{y} = CM_\epsilon^{-1}(-A^T - C^TQCM_\epsilon^{-1})z + CD\xi \tag{5.21}$$

となる．ここで，$\dot{y}(0)=CD\xi(0)$ である．さらに，出力の 2 階微分を計算しラプラス変換して整理すれば

$$\begin{aligned} s^2Y(s) &= CAM_\epsilon^{-1}sZ(s) + CDs\Xi(s) \\ &= CAM_\epsilon^{-1}(-A^T + C^TJ_0^{-1}CAM_\epsilon^{-1}A^T)Z(s) \\ &\quad -CAM_\epsilon^{-1}C^TJ_0^{-1}CAD\Xi(s) \\ &\quad -CAM_\epsilon^{-1}C^TJ_0^{-1}CDs\Xi(s) \\ &\quad +CAD\Xi(s) + CDs\Xi(s) \end{aligned} \tag{5.22}$$

となる．ここでも，先ほどと同様に $CB = 0$ の仮定を考慮し

$$CM_\epsilon^{-1}A^T = -CAM_\epsilon^{-1} - CM_\epsilon^{-1}C^TQCM_\epsilon^{-1} \tag{5.23}$$

の関係を使い整理している．ここで，$\epsilon \to 0$ とすると，つぎの極限式が成り立つことが知られているので [7]，

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \to 0}\ CM_\epsilon^{-1}C^TJ_0^{-1}(s) = 0 \\ &\lim_{\epsilon \to 0}\ CAM_\epsilon^{-1}C^TJ_0(s) = I \end{aligned}$$

結果的に

$$s^2Y(s) = 0 \tag{5.24}$$

となり，$\epsilon \to 0$ の極限において $y = 0$ が成立する． (証明終)

5.3.2 カルマンフィルタの極限形と最適状態推定器の外乱除去特性

最適レギュレータとカルマンフィルタの双対関係を用いることにより，最適状態推定器の外乱分離特性を示すことができる．

(5.5) 式で与えられるシステムに対して，オブザーバの系の観測雑音の共分散行列を $W = I$としてシステム雑音の共分散行列 Vを無限大にしたときのカルマンフィルタの極限ゲイン L_ϵはつぎのように与えられる [17]．

$$\begin{aligned} &L_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} -M'_\epsilon\tilde{C}^T \\ &0 = AM'_\epsilon + M'_\epsilon A^T + DVD^T - M'_\epsilon\tilde{C}^T\tilde{C}M'_\epsilon \end{aligned}$$

いま，$A \leftrightarrow A^T$，$C^TC \leftrightarrow DD^T$，$B \leftrightarrow \tilde{C}^T$，$F_\epsilon \leftrightarrow L_\epsilon^T$ の双対関係より

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \to 0} C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}D \\ &\leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} D^T(sI - A^T - \tilde{C}^TL_\epsilon^T)^{-1}C^T \\ &\leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} C(sI - A - L_\epsilon\tilde{C})^{-1}D \end{aligned} \tag{5.25}$$

が成立するので，最適レギュレータとカルマンフィルタの双対関係から，最適状態推定器の極限的性質としてつぎの補題が導ける．

補題 5.2 システム (A, C, D) は最小位相系で可制御かつ可観測であるとする．このとき，極限ゲイン L_ϵを施したときの閉ループ系に対して

$$\lim_{\epsilon\to 0} \ C(sI - A - L_\epsilon C)^{-1}D = 0 \tag{5.26}$$

となる．

また，$\epsilon \to 0$ の極限で誤差 $e = x - \hat{x} = 0$ となる．

(証明) :
観測出力は制御出力を含むので (5.26) 式が成立する．

また，誤差方程式は

$$\dot{e} = (A + L_\epsilon C)e + D\xi \tag{5.27}$$

である．このときξから e までの伝達関数は

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0} \ (sI - A - L_\epsilon C)^{-1}D \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \ (sI - A)^{-1}\left(I + L_\epsilon C(sI - A - L_\epsilon C)^{-1}\right)D\end{aligned} \tag{5.28}$$

と変形できる．ところで，(5.26) 式を変形すると

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0} \ C(sI - A - L_\epsilon C)^{-1}D \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \ C(sI - A)^{-1}\left(I + L_\epsilon C(sI - A - L_\epsilon C)^{-1}\right)D = 0\end{aligned} \tag{5.29}$$

となる．この関係式が成立することは

$$\lim_{\epsilon\to 0} \ -L_\epsilon C(sI - A - L_\epsilon C)^{-1} = I \tag{5.30}$$

が成立することを意味する．したがって，(5.28) 式にこれを適用すれば，$\epsilon \to 0$ の極限において

$$\lim_{\epsilon\to 0} \ (sI - A - L_\epsilon C)^{-1}D = 0 \tag{5.31}$$

が成立し $e = 0$ となる．

補題 2.6の極限フィードバックゲイン F_ϵの極限的性質の双対より $(A + L_\epsilon C)$ の固有値は $\epsilon \to 0$ で不変零点と安定な無限遠点に漸近する．また，極限において $(A + L_\epsilon C, B)$ は最大不可制御となり，可制御部分の極は安定な無限遠点に向かうから，有限な外乱に対して誤差 e は 0 に向かうことを意味する． (証明終)

注意 5.1 完全観測の考え方においては,

$$\lim_{\rho \to 0} (sI - A - L_\rho C)^{-1} D = 0 \tag{5.32}$$

なる関係が完全制御の双対関係から別の方法により導出されている [3].

5.4 出力フィードバックによる非干渉制御

はじめに，オブザーバを併合したときの閉ループ系の伝達関数を考える．さて，(5.1) 式と (5.3) 式より制御則 $u = F\hat{x} + Gv$ を施した閉ループ系について，つぎの式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A + BF\hat{D}C & BF\hat{C} \\ \hat{B}C + \hat{J}F\hat{D}C & \hat{A} + \hat{J}F\hat{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} BG \\ \hat{J}G \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \xi \\
y &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

変換式

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C} & I \\ U\hat{C} - I & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \hat{x} \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

により状態変換すると，(5.33) 式はつぎのように書くことができる．

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ A\hat{C} - \hat{C}\hat{A} & A + BF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \hat{x} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & UD \\ BG & (I - \hat{C}U)D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \xi \end{pmatrix} \\
y &= \begin{pmatrix} C\hat{C} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \hat{x} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

5.4.1 同一次元オブザーバを用いた非干渉制御

(5.35) 式の拡大系を考える．フルオーダの同一次元オブザーバに関してはつぎの関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\hat{A} = A + LC,\ \hat{B} = -L,\ \hat{J} = B,\ \hat{C} = I, \\
&\hat{D} = 0,\ U = I
\end{aligned} \tag{5.36}$$

よって，(5.35) 式の伝達関数はつぎのようになる．

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} T_{yv}(s) \\ T_{y\xi}(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C(sI-A-BF)^{-1}BG \\ \Psi + C(sI-A-BF)^{-1}L\Psi \end{pmatrix} \\ \Psi &= C(sI-A-LC)^{-1}D \end{aligned} \tag{5.37}$$

ここで，vからyまでの伝達関数を$T_{yv}(s)$，ξからyまでの伝達関数を$T_{y\xi}(s)$と表している．いま，(5.37) 式の，vからyまでの伝達関数は定理3.1により，極限フィードバックゲインF_ϵを用いて非干渉化を達成する．さらに，未知外乱ξからyまでの伝達関数は，補題5.2の状態推定器の極限的性質よりオブザーバのゲインをL_ϵと選ぶことで

$$\lim_{\epsilon\to 0} \Psi_\epsilon + C(sI-A-BF_\epsilon)L_\epsilon\Psi_\epsilon = 0, \quad \Psi_\epsilon = C(sI-A-L_\epsilon C)^{-1}D \tag{5.38}$$

が成り立つ．よって，オブザーバを併合した系に対しても，未知外乱の影響は出力には現れないことがわかる．このことは，フィルタの共分散行列Vを無限大とすることによりシステム外乱の影響を分離できることを意味する．

以上をまとめると，つぎの定理が導ける．

定理 5.1 システム (A,B,C,D) が最小位相系で外乱分離条件を満足し，可制御，可観測かつ可逆であり，$CB=0$，$\mathrm{rank}\ CAB = \mathrm{rank}\ C$，$\mathrm{rank}\ D = r$とする．このとき，ブロック型対角インタラクタ (3.3) 式が存在すれば，つぎの制御則

$$u = F_\epsilon\hat{x} + G_\epsilon v \tag{5.39}$$

$$G_\epsilon = \left(C(-A-BF_\epsilon)^{-1}B\right)^{-1} \tag{5.40}$$

$$\dot{\hat{x}} = (A+L_\epsilon C)\hat{x} - L_\epsilon y + Bu \tag{5.41}$$

は，$\epsilon \to 0$ の極限において

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0} C(sI-A-BF_\epsilon)^{-1}BG_\epsilon \\ &= \mathrm{diag}(\Phi_1(s)\ \cdots\ \Phi_p(s)), \quad \Phi_i(0) = I\end{aligned} \tag{5.42}$$

なるブロック非干渉化を達成する．

(証明) :
オブザーバ併合系の閉ループ伝達関数は，(5.37) 式で表される．(5.38) 式より，オブザーバゲインをL_ϵと選べば，ξからyへの影響は現れない．また，vからyの伝達関数は，定理3.1より非干渉化可能である．よって定理が証明された． (証明終)

5.4.2 最小次元オブザーバを用いた非干渉制御

実際のシステムを制御するとき，状態の一部はシステムの出力を用いて観測できる場合がある．その意味で，同一次元オブザーバは冗長である．

さて，つぎの行列

$$V^* = \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

が正則となるような，$(n-m)\times n$ の行列 Eを選ぶ．この行列 V^*により，システム (5.1) 式を$\bar{x} = V^* x$ で変換するとつぎのようになる．

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \quad y = \bar{C}\bar{x} \tag{5.44}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\bar{A} = V^* A V^{*\ -1} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = V^* B = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix}, \\ &\bar{C} = C V^{*\ -1} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．

(5.9) 式のシステムはつぎの条件を満足していると仮定する．これらの条件は，同一次元オブザーバの場合の拡張として与えられるものである．

D1 rank $\bar{A}_{12} = m$，rank $C = m$，rank $D = r$．

D2 $(\bar{A}_{22}, D, \bar{A}_{12})$ の不変零点λ_rが

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -\lambda_r I + \bar{A}_{22} & ED \\ \bar{A}_{12} & CD \end{pmatrix} = n - m + r$$

を満足する．

このシステムに対して，つぎの補題が成り立つ．

補題 5.3 システム (5.9) 式に対して，$(C,\ A)$ が可観測ならば $(\bar{A}_{12},\ \bar{A}_{22})$ も可観測である．いま，(5.26) 式を満たす極限オブザーバゲイン$\bar{L}_\epsilon$が存在すれば，つぎの関係が成り立つ．

$$\lim_{\epsilon\to 0} -\bar{L}_\epsilon \bar{A}_{12}(\ sI - \bar{A}_{22} - \bar{L}_\epsilon \bar{A}_{12})^{-1} = I_{n-m} \tag{5.45}$$

(証明) :
補題の前半は明らかである．また，後半は (5.26) 式が成り立つことから

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon \to 0} C(sI - A - L_\epsilon C)^{-1} D \\
= &\lim_{\epsilon \to 0} C(sI - A)^{-1}\{I + L_\epsilon C(sI - A - L_\epsilon C)^{-1}\} D
\end{aligned}$$

と変形することにより証明できる． (証明終)

そこで，(5.43) 式の変換行列によりオブザーバの低次元化を考える。(5.44) 式のシステムに対して，(5.4) 式はつぎのようになる．

$$\begin{aligned}
&\hat{A} = \bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12},\ \hat{J} = \bar{B}_2 + \bar{L}\bar{B}_1, \\
&\hat{B} = \bar{A}_{21} + \bar{L}\bar{A}_{11} - \bar{A}_{22}\bar{L} - \bar{L}\bar{A}_{12}\bar{L}, \\
&\hat{C} = \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{pmatrix},\ \hat{D} = \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_m \\ -\bar{L} \end{pmatrix}, \\
&U = \bar{L}C + E
\end{aligned} \tag{5.46}$$

ここで，$\bar{L}$はオブザーバゲインである．

(5.46) 式よりを考慮し，$C\hat{C} = 0$，$C\hat{D} = I$ が成り立つことから (5.35) 式の伝達関数を求めるとつぎのようになる．

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} T'_{yv}(s) \\ T'_{y\xi}(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C(sI - A - BF)^{-1}BG \\ \Gamma D + \Gamma\hat{D}\bar{A}_{12}(sI - \hat{A})^{-1}UD \end{pmatrix} \\
\Gamma &= C(sI - A - BF)^{-1}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

ここで，vからyまでの伝達関数を$T'_{yv}(s)$，ξからyまでの伝達関数を$T'_{y\xi}(s)$ と表している．ただし，ξからyまでの伝達関数はつぎのように計算される．

$$\begin{aligned}
T'_{y\xi}(s) &= C\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}UD \\
&\quad + C(sI - A - BF)^{-1}\hat{D}\bar{A}_{12}(sI - \hat{A})^{-1}UD \\
&\quad + C(sI - A - BF)^{-1}\hat{D}CD \\
&= \Gamma D + \Gamma\hat{D}\bar{A}_{12}(sI - \bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})^{-1}UD
\end{aligned} \tag{5.48}$$

(5.47) 式のvからyまでの伝達関数は，定理 3.1により極限ゲイン F_ϵを用いて近似的に非干渉化を達成する．さらに，未知外乱ξからyまでの伝達関数は，

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon \to 0} \Gamma D + \Gamma\hat{D}\bar{A}_{12}(sI - \bar{A}_{22} - \bar{L}_\epsilon\bar{A}_{12})^{-1}UD \\
= &\lim_{\epsilon \to 0} \Gamma D + \Gamma\hat{D}\bar{A}_{12}(sI - \bar{A}_{22})^{-1}\left(I + \bar{L}_\epsilon\bar{A}_{12}(sI - \bar{A}_{22} - \bar{L}_\epsilon\bar{A}_{12})^{-1}\right)UD
\end{aligned} \tag{5.49}$$

と変形できるため，第 1 項は補題 5.1より極限フィードバックゲイン F_ϵ を用いて，また第 2 項は補題 5.3より極限オブザーバゲイン$\bar{L}_\epsilon$を用いてそれぞれ 0 となるので

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ \Gamma D + \Gamma\hat{D}\bar{A}_{12}(sI - \bar{A}_{22} - \bar{L}_\epsilon\bar{A}_{12})^{-1}UD = 0 \tag{5.50}$$

が成り立つ．よって，最小次元オブザーバを用いた場合でも未知外乱の影響は出力には現れない．

以上により，つぎの定理が導ける．

定理 5.2 システム (A, B, C) が最小位相系で，可制御，可観測かつ可逆であり，$CB = 0$，rank CAB = rank Cが成立し，条件 D1，D2 を満たすとする．また，正則な変換行列 V^* が存在し，(A, B, C, D) は外乱分離条件を満足する．このとき，ブロック型対角インタラクタ (3.3) 式が存在すれば，つぎの制御則

$$\begin{aligned} u &= F_\epsilon\hat{x} + G_\epsilon v && (5.51)\\ G_\epsilon &= \Big(C(-A - BF_\epsilon)^{-1}B\Big)^{-1} && (5.52)\\ \hat{x} &= \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} I_m \\ -\bar{L}_\epsilon \end{pmatrix} y\right) && (5.53)\\ \dot{z} &= (\bar{A}_{22} + \bar{L}_\epsilon\bar{A}_{12})z \\ &\quad +(\bar{A}_{21} + \bar{L}_\epsilon\bar{A}_{11} - \bar{A}_{22}\bar{L}_\epsilon - \bar{L}_\epsilon\bar{A}_{12}\bar{L}_\epsilon)y \\ &\quad +(\bar{B}_2 + \bar{L}_\epsilon\bar{B}_1)u && (5.54) \end{aligned}$$

は，

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0}\ C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}BG_\epsilon \\ &= \mathrm{diag}(\Phi_1(s)\ \cdots\ \Phi_p(s)), \quad \Phi_i(0) = I \end{aligned} \tag{5.55}$$

なるブロック非干渉化を達成する．

(証明) :
オブザーバ併合系の閉ループ伝達関数は，(5.47) 式で表される．レギュレータの極限フィードバックゲインを F_ϵとし，極限オブザーバゲインを$\bar{L}_\epsilon$を選べば，$\epsilon \to 0$ の極限において補題 5.1および補題 5.3よりξから yへの影響は現れない．また，vから yの伝達関数は定理 3.1より非干渉化できる．よって定理が証明された． (証明終)

5.4.3 数値例

つぎの外乱印加系を考える．

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

システム (A, B, C) は最小位相系で可制御，可観測かつ可逆で，非干渉化の条件を満足する．初期条件は $x(0) = 0$ とする．いま目標値を $[v_1\ v_2]^T = [1\ 0]$ とし，同一次元オブザーバを用いた閉ループ系が評価関数の重み行列を無限大としたときに，制御則 $u = F_* \hat{x} + G_* [v1\ v2]^T$ により非干渉化が達成されることをシミュレーションにより確かめる．また同時に，この系に対して，システム外乱としてノイズパワーが 0.001，サンプリングが 0.1 の白色雑音を印加する．

$Q = 100I$ としてコントローラを設計し，オブザーバのゲインを $Q_o = 100I, 1000I, 100000I$ と変えたときの出力の応答波形を比較したもの図 5.2にを示す．このときのフィードバックゲイン，フィードフォワードゲインはつぎのように計算される．

$$F_{100} = \begin{bmatrix} -11.6074 & 4.4855 & 2.1236 & 0.3030 \\ -4.4855 & 13.0521 & 1.7866 & 1.1925 \end{bmatrix},$$

$$G_{100} = \begin{bmatrix} 10.4838 & -1.0916 \\ -0.3011 & -11.4372 \end{bmatrix}$$

また，オブザーバゲインはつぎのように計算される．

$$L'_{100} = \begin{bmatrix} -7.1663 & 5.5822 & 5,8818 & -1.3645 \\ 5.5822 & -8.0851 & -1.4336 & -8.3324 \end{bmatrix}^T$$

$$L'_{1000} = \begin{bmatrix} -11.4273 & 6.2562 & 24.2047 & -7.3732 \\ 6.2562 & -11.2291 & -7.7587 & -27.3749 \end{bmatrix}^T$$

$$L'_{100000} = \begin{bmatrix} -34.2724 & 10.4644 & 282.9599 & -93.1258 \\ 10.4644 & -29.3362 & -94.9830 & -289.5450 \end{bmatrix}^T$$

図から明らかなように，オブザーバのゲインを上げていくことにより，外乱の影響が少なくなることがわかる．また，非干渉化も達成されている．これは，レギュレータとフィルタの極限的性質により，システム外乱の影響が除去されたためである．図 5.3には，このときの状態とオブザーバによって推定された誤差がどれぐらいかを示している．オブザーバのゲインを上げると誤差が 0 へ収束していくことがわかる．

最後に，最小次元オブザーバを用いたときの結果を図 5.4および図 5.5に示す．ここで，変換行列 V^*はつぎのように与えた．

$$V^* = \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また，$Q_o = 100I, 1000I, 100000I$としたときのオブザーバゲインは，それぞれつぎのように計算される．

$$L_{100} = \begin{bmatrix} -11.8026 & 4.5519 \\ 4.5519 & -12.9405 \end{bmatrix}$$

$$L_{1000} = \begin{bmatrix} -32.8899 & 4.1880 \\ 4.1880 & -33.9369 \end{bmatrix}$$

$$L_{100000} = \begin{bmatrix} -317.2546 & 4.0190 \\ 4.0190 & -318.2594 \end{bmatrix}$$

システム外乱は，同一次元オブザーバと同じノイズパワー 0.001，サンプリング 0.1 の白色雑音を印加する．図 5.4からわかるように，この例題に関しては，同一次元オブザーバを用いたときよりもよい応答結果が得られた．また，真の状態と推定した状態の誤差を図 5.5に示す．図より，$Q_o \to \infty I$とすることにより誤差は 0 に収束していくことがわかる．

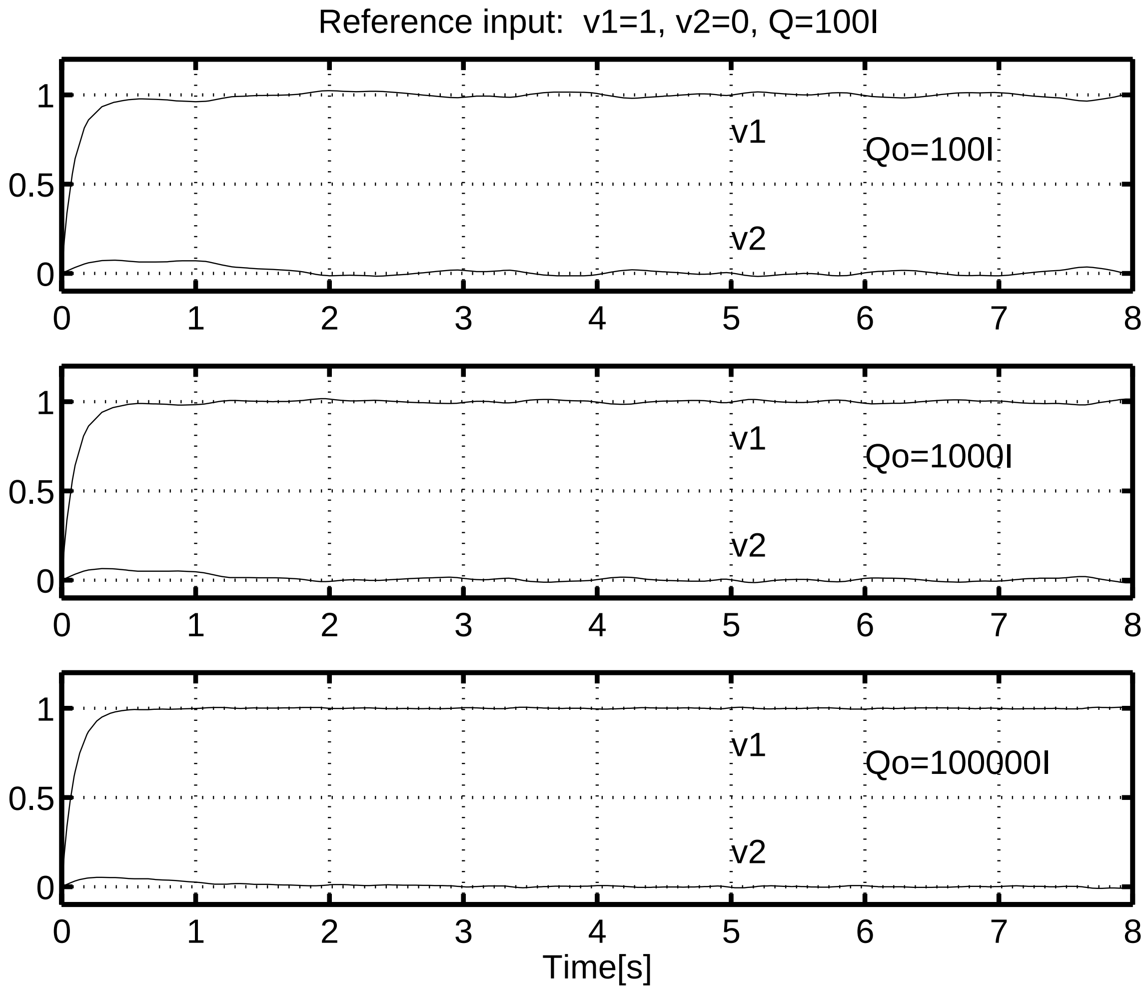


図 5.2: Step response for closed-loop system(full-order observer-based controller)

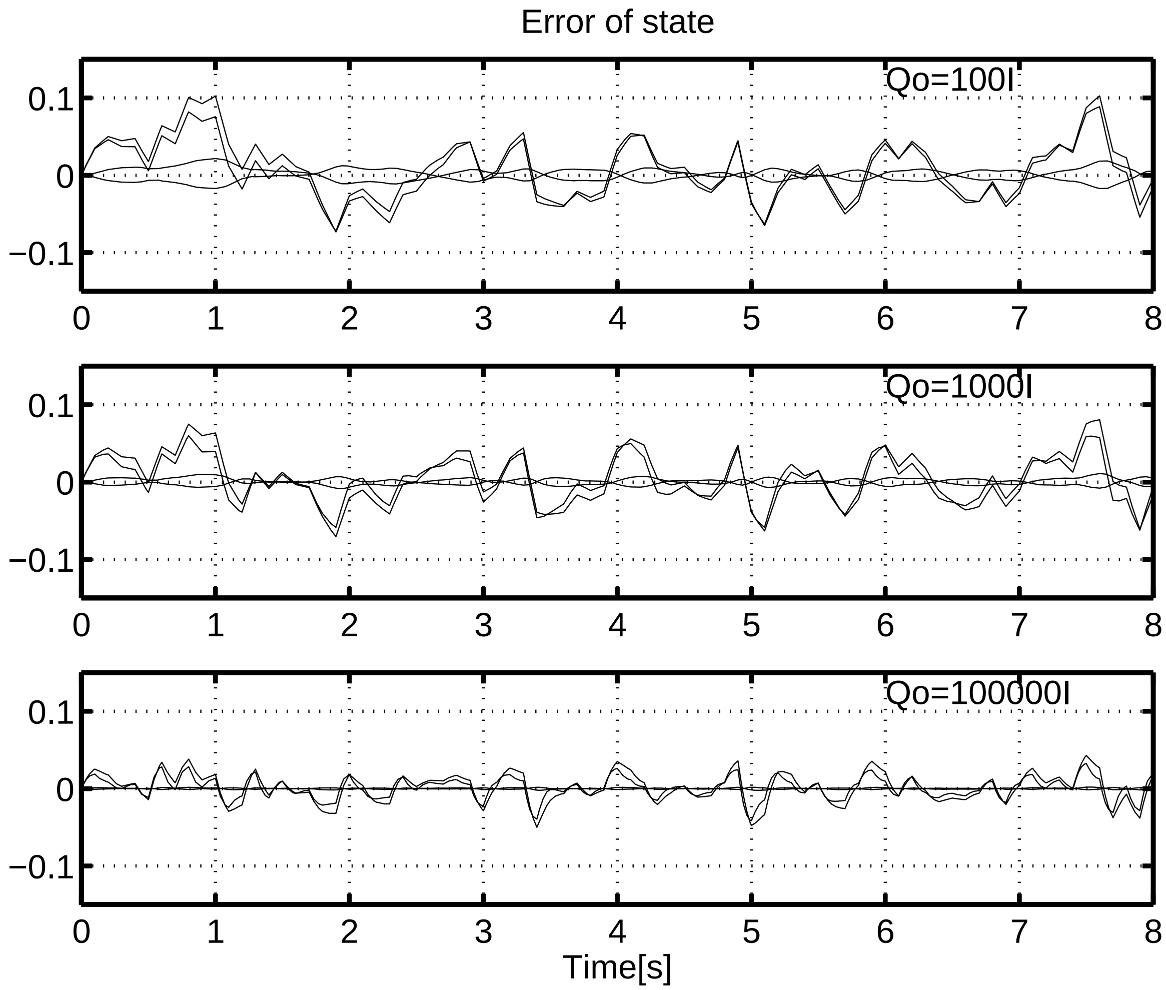


図 5.3: Error of state(full-order observer-based controller)

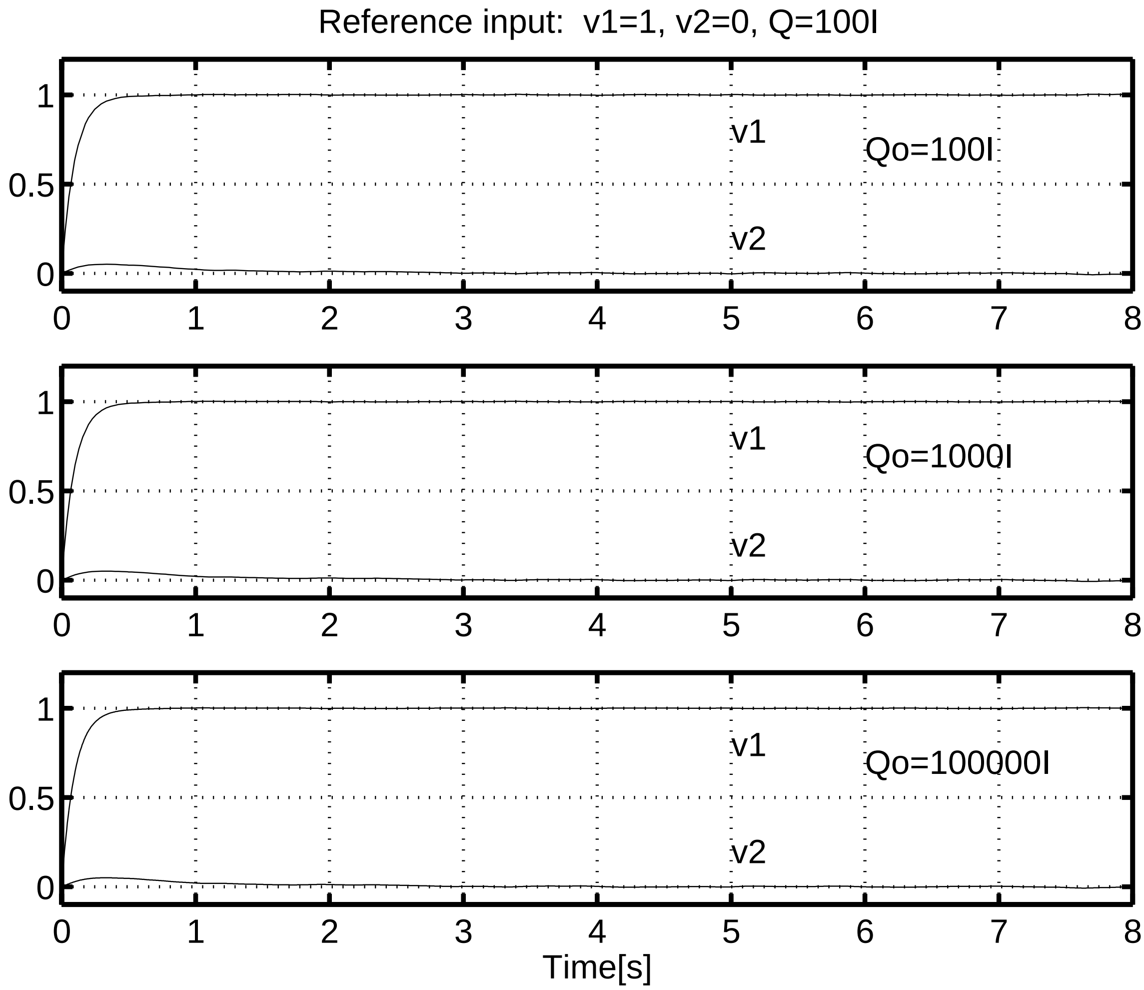


図 5.4: Step response for closed-loop system(reduced-order observer-based controller)

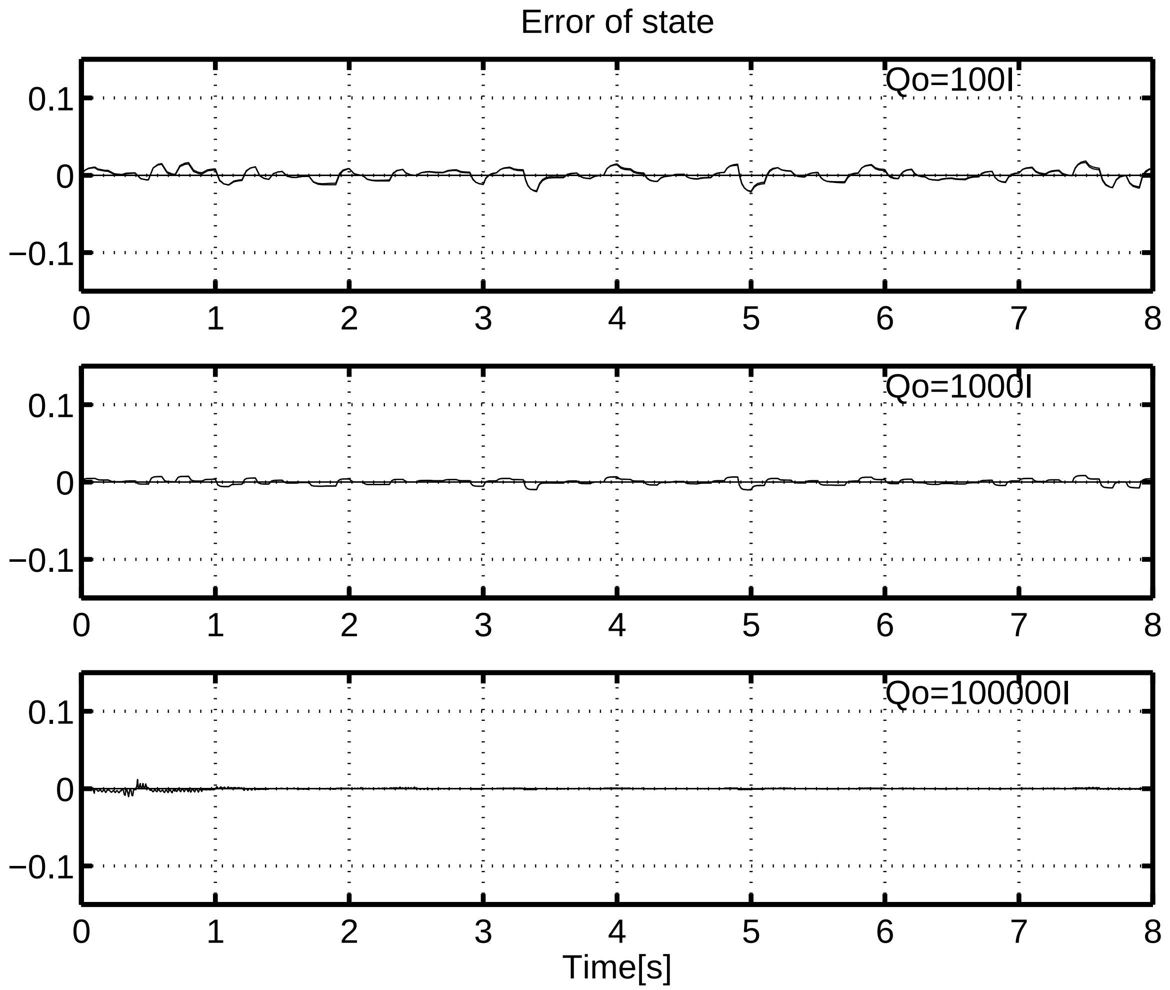


図 5.5: Error of state(reduced-order observer-based controller)

以上の結果から，外乱の影響に対する応答結果のみから比較すると，最小次元オブザーバの方を用いた方がよいようにみえるがそうではない．本研究では対象としていないが，センサに外乱が加わるような場合を考えてみる．最小次元オブザーバは，出力の値を積極的に用いるため，センサ外乱が入るような場合にはかえって応答が悪くなることが容易に想像できる．その例を，図 5.6，図 5.7に示す．ここで，センサ外乱としてパワー 0.001，サンプリング時間 $0.1[s]$ の白色雑音を加える．図からわかるように，最小次元オブザーバを用いた方が，同一次元オブザーバを用いるより，センサ外乱の影響が大きくなっていることが読み取れる．なお，フィードバックゲインは $Q = 100I$，オブザーバゲインは $Q_o = 1000I$ として求めた値を用いた．

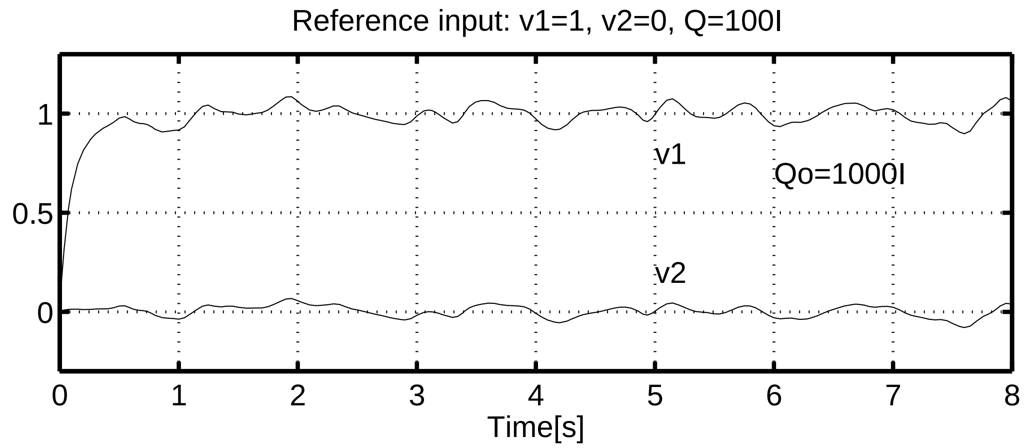


図 5.6: Step response for closed-loop system with sensor noise (full-order observer-based controller)

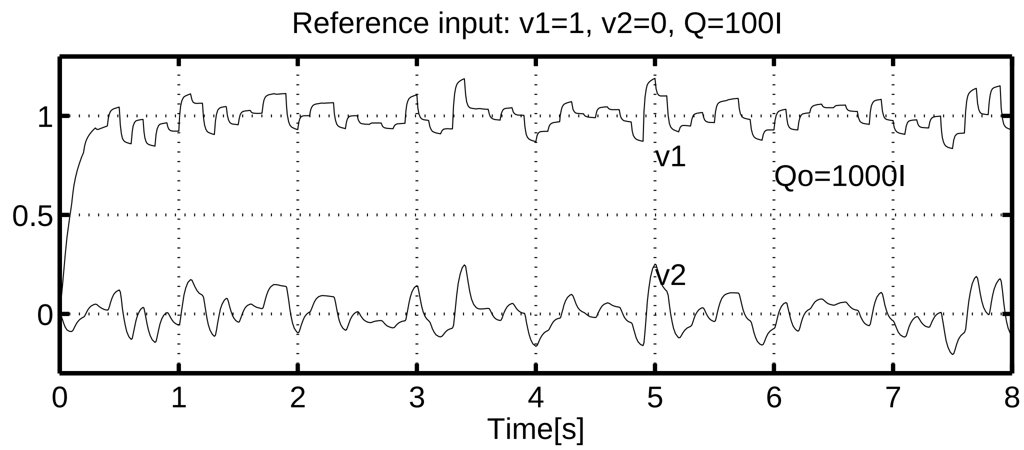


図 5.7: Step response for closed-loop system with sensor noise (reduced-order observer-based controller)

5.5 サーボ系に対する出力フィードバックによる非干渉制御

制御量を与えられた目標信号に追従させる制御系をサーボ系 [37] と呼ぶ．これまで考えてきた非干渉制御は，閉ループ系においてステップ状の定値外乱が加わる場合，実際には評価関数の重み Q を無限大にすることは不可能であるため，偏差が応答に残るという問題点があった．

サーボ系の構成法についてはすでに多くの研究がなされており，最適レギュレータの漸近的性質を用いたものもいくつか知られている [38][88]．しかし，非干渉制御まで考えた研究は少なく．最適レギュレータの極限的性質を応用した研究はなされていない．そこで，本章ではサーボ系に対する最適レギュレータの極限的性質を用いた非干渉制御について考え，最適レギュレータの極限的性質を用いることにより，ステップ状の定値外乱が加わる場合でも目標値に追従する非干渉系が得られることを示す．

5.5.1 積分型最適サーボ系

ここでは，文献 [1] をもとにした積分型サーボ系を構成する問題を考える．

つぎのシステムを考える．

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \tag{5.56}$$

ただし，$x \in R^n$，$y \in R^m$，$u \in R^m$である．また，システム (A, B, C) は可制御，可観測で可逆とする．さらに，

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.57}$$

であるシステムを考える．

このシステムに対して，定値の m 次元参照入力 vを考える．出力 yが定値 vになるような状態と入力の値 x_∞と u_∞は，(5.57) 式のもとに一意に定まり，

$$\begin{pmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

である．これらの定常値からの状態と入力の偏差$\tilde{x} = x - x_\infty$，$\tilde{u} = u - u_\infty$が速やかに零になれば望ましい制御といえる．

しかしながら，制御対象の不確かさや定値外乱に対処するには，内部モデル原理により積分補償が必要である．そこで，制御誤差 $e = v - y$に対して

$$\dot{w} = e \tag{5.59}$$

なるサーボ補償器を加えて，つぎの拡大系を考える．

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} v, \quad y = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \tag{5.60}$$

いま，状態と入力の定常値 x_∞，u_∞が

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\infty \\ w_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u_\infty + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} v = 0 \tag{5.61}$$

を満たすことを用いて，偏差$\tilde{x}$，$\tilde{u}$についてつぎの方程式を得る．

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{u}, \quad e = \begin{pmatrix} -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} \tag{5.62}$$

ここで，w_∞は wの定常値，$\tilde{w}$は偏差$\tilde{w} = w - w_\infty$である．

このシステムに対し，各偏差の２次形式からなる評価関数を考える．

$$J_s = \int_0^\infty (\tilde{x}^T Q_1 \tilde{x} + \tilde{w}^T Q_2 \tilde{w} + \tilde{u}^T R \tilde{u}) dt, \quad Q_1,\ Q_2,\ R > 0 \tag{5.63}$$

この評価関数 J_sを (5.62) 式に関して最小とする入力偏差$\tilde{u}$は，つぎのフィードバックで与えられる．

$$\tilde{u} = -R \begin{pmatrix} B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} \tag{5.64}$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A^T & -C^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{5.65}$$

また，(5.64) 式のフィードバックを入力 u について書けば

$$u = F_s x + G_s w + H_s v - G_s P_{22}^{-1} P_{12}^T x_0 - G_s w_0 \tag{5.66}$$

となる．ここで，

$$F_s = -R^{-1} B^T P_{11} \tag{5.67}$$

$$G_s = -R^{-1} B^T P_{12} \tag{5.68}$$

$$H_s = \begin{pmatrix} -F_s + G_s P_{22}^{-1} P_{12}^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \tag{5.69}$$

である．P_{22}の正則性については，文献 [1] に証明されている．(5.66) 式の制御則は，初期状態によって決まる定値項$-G_sP_{22}^{-1}P_{12}^Tx_0 - G_sw_0$を持っているが，参照入力の変化がシステムが定常状態に落ち着いている状況のみで起こると仮定すれば，この項は必要ない．つまり，定常状態では$-G_sP_{22}^{-1}P_{12}^Tx_0 - G_sw_0 = 0$ と書くことができる．

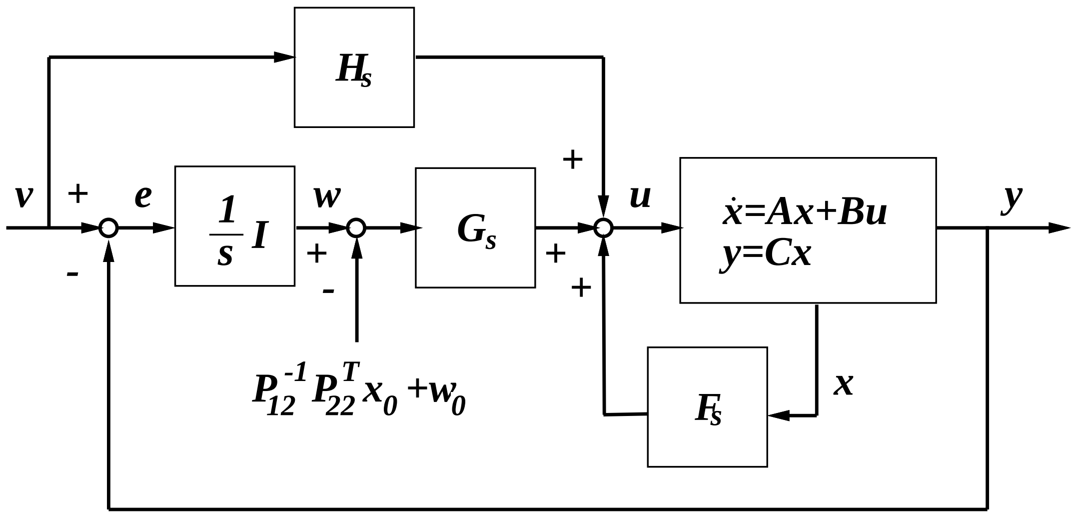


図 5.8: Servo system

さて，G_sを大きく選ぶことにより制御対象のモデル化誤差や外乱による追従特性の変化の抑制に有効に働くことが知られている [20]．このことは，図 5.9のような外乱が加わるシステムを考えれば直観的にも理解できる．制御誤差は，

$$e(t) = v(t) - y(t)$$

で与えられた．いま，外乱 e が加わる場合の $v(s)$ から e までの伝達関数を考えラプラス変換するとつぎのように表せる．

$$E(s) = \frac{1}{1 + P(s)G_s'(s)}V(s) + \frac{P(s)}{1 + P(s)G_s'(s)}D(s)$$

$P_s(s)$ が安定であるとき，時間が十分経過したあとのステップ状の外乱 $D(s) = d_0/s$ による定常偏差 $e_d(\infty)$ は，ラプラス変換の最終値の定理より

$$\begin{aligned} e_d(\infty) &= \lim_{s\to 0} \frac{sP(s)}{1 + P(s)G_s'(s)}D(s) \\ &= \frac{d_0}{G_s(0)} \end{aligned}$$

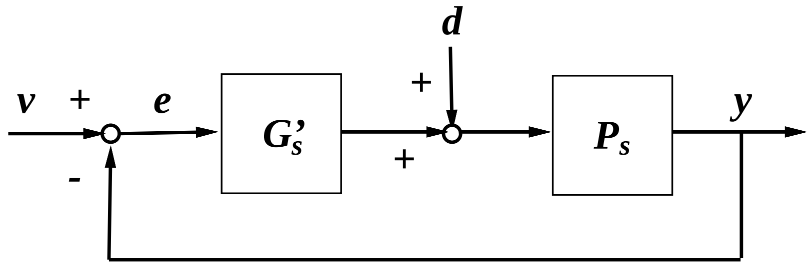


図 5.9: System with disturbance input

となる．ここで，$G'_s(s) = (1/s)G_s(s)$ である．したがって，$e_d(\infty)$ を 0 にするにはできる限り $G_s(0) = \infty$ であることが望ましいので，G_sを大きく選ぶとよい．

さて，(5.66) 式の制御則について $G_s w = 0$ の場合を考えてみる．このときの閉ループ系は，

$$\dot{x} = (A + BF_s)x + BH_s v, \quad y = Cx \tag{5.70}$$

となる．ここで，$w = 0$ のもとでの F_sと H_sはそれぞれつぎのようになる．

$$\begin{aligned} F_s &= -R^{-1}B^T P_{11} \\ H_s &= \left(-C(A - BR^{-1}B^T P_{11})^{-1}B\right)^{-1} \end{aligned}$$

したがって，$Q_1 \to \infty I$，$R = I$としたときの極限において上の F_s，H_s式は，第 3 章で与えられた (3.5) 式と (3.6) 式の極限フィードバックと極限フィードフォワードに他ならない．つまり，非干渉化条件を満足するシステムに対しては，サーボ系を構成する場合にこれまで議論してきた非干渉特性をそのまま適用することができる．

5.5.2 サーボ系の出力フィードバックによる非干渉制御

これまで考慮してきた非干渉制御をまとめることにより，サーボ系に対しても最適レギュレータと最適状態推定器の極限的性質を用いた非干渉特性を導くことができる．

サーボ系において評価関数を $R = I$とし，Q_1と Q_2を無限大にしたときに得られるそれぞれのゲインをつぎのように定義する．

$$F_{s\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} -B^T P_{11\epsilon}$$

$$
\begin{aligned}
G_{s\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0} \ -B^T P_{12\epsilon} \qquad (5.71)\\
H_{s\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0} \ \begin{pmatrix} -F_{s\epsilon} + G_{s\epsilon} P_{22\epsilon}^{-1} P_{12\epsilon}^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ただし，$P_{11\epsilon}$，$P_{12\epsilon}$，$P_{22\epsilon}$は$R=I$，$Q_1 \to \infty I$，$Q_2 \to \infty I$として得られるつぎのリカッチ方程式の解である．

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} A^T & -C^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11\epsilon} & P_{12\epsilon} \\ P_{12\epsilon}^T & P_{22\epsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11\epsilon} & P_{12\epsilon} \\ P_{12\epsilon}^T & P_{22\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} P_{11\epsilon} & P_{12\epsilon} \\ P_{12\epsilon}^T & P_{22\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11\epsilon} & P_{12\epsilon} \\ P_{12\epsilon}^T & P_{22\epsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (5.72)
\end{aligned}
$$

サーボ系に対する，同一次元オブザーバを用いた出力フィードバックによる非干渉制御はつぎの定理で与えられる．

定理 5.3 システム(A, B, C)が最小位相系で，可制御，可観測かつ可逆であり，$CB=0$，rank CAB = rank Cとする．また，(A, B, C, D)は外乱分離条件を満足し，ブロック型対角インタラクタ(3.3)式が存在するとする．評価関数

$$
J_s = \int_0^\infty (\tilde{x}^T Q_1 \tilde{x} + \tilde{w}^T Q_2 \tilde{w} + \tilde{u}^T \tilde{u}) dt, \quad Q_1,\ Q_2 > 0
$$

を最小とする最適レギュレータの解で，フィードバックゲイン$F_{s\epsilon}$，$G_{s\epsilon}$，$H_{s\epsilon}$からなる制御則

$$
u = F_{s\epsilon}\hat{x} + G_{s\epsilon} w + H_{s\epsilon} v
$$

を施したときの積分型最適サーボ系は，$\epsilon \to 0$の極限において

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0} \ C(sI - A - BF_{s\epsilon})^{-1} B H_{s\epsilon} \\
&= \mathrm{diag}(\Phi_1(s) \ \cdots \ \Phi_p(s)), \quad \Phi_i(0) = I
\end{aligned}
$$

なるブロック非干渉化を達成する．ただし，$\hat{x}$はつぎの極限オブザーバゲインL_ϵを用いて推定する．

$$
\dot{\hat{x}} = (A + L_\epsilon C)\hat{x} - L_\epsilon y + Bu
$$

(証明):

$G_{s\epsilon} = 0$のときは定理5.1より証明される．$G_{s\epsilon} \neq= 0$のときは$Q_2 \to \infty I$により$G_{s\epsilon} \to 0$

となり [20]，同様に定理 5.1より証明される． (証明終)

また，この定理は条件 D1，D2 を満足すれば最小次元オブザーバを用いた出力フィードバックによる非干渉制御への拡張も可能である．

5.5.3 数値例

第 4 章と同じ，つぎの 2 入力 2 出力システムを考える．

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

評価関数の重みを Q_1，$Q_2 = 10I$，Q_1，$Q_2 = 100I$，Q_1，$Q_2 = 1000I$ として得られる，つぎのフィードバックゲインとフィードフォワードゲインを用いた (5.66) 式の制御則 $u = F_{s*}\hat{x} + G_{s*}w + H_{s*}[v1\ v2]^T$を施した閉ループ系が，非干渉化されることをシミュレーションにより確認する．

$$F_{s10} = \begin{bmatrix} -6.3049 & 4.9063 & 2.1552 & 0.2845 \\ -4.9063 & 8.1440 & 1.9090 & 1.1480 \end{bmatrix},$$

$$G_{s10} = \begin{bmatrix} 3.1369 & -0.4000 \\ -0.4000 & -3.1369 \end{bmatrix}, \quad H_{s10} = \begin{bmatrix} 4.5165 & -2.2001 \\ -0.3722 & -6.1458 \end{bmatrix}$$

$$F_{s100} = \begin{bmatrix} -12.5174 & 4.4561 & 2.0671 & 0.1051 \\ -4.4561 & 13.9135 & 1.4187 & 1.0734 \end{bmatrix},$$

$$G_{s100} = \begin{bmatrix} 9.9964 & -0.2674 \\ -0.2674 & -9.9964 \end{bmatrix}, \quad H_{s100} = \begin{bmatrix} 10.5295 & -1.0518 \\ -0.2825 & -11.4630 \end{bmatrix}$$

$$F_{s1000} = \begin{bmatrix} -33.8051 & 4.1656 & 2.0230 & 0.0346 \\ -4.1656 & 34.9434 & 1.1473 & 1.0257 \end{bmatrix},$$

$$G_{s1000} = \begin{bmatrix} 31.6226 & -0.1040 \\ -0.1040 & -31.6226 \end{bmatrix}, \quad H_{s1000} = \begin{bmatrix} 31.7959 & -0.3714 \\ -0.1191 & -32.1344 \end{bmatrix}$$

また，$\hat{x}$は同一次元オブザーバを用いて推定し，オブザーバゲインは$Q_o = 10000I$として計算されるつぎの値を用いる．

$$L_{10000} = \begin{bmatrix} -101.0652 & 4.0549 & -0.9901 & 0.0398 \\ 4.0549 & -102.1098 & 0.0346 & -1.0248 \end{bmatrix}^T$$

時刻 0 秒目から入力 $v1$ に単位ステップ入力，入力 $v2$ に零を入力し，さらにシステム外乱として$\xi = [d1\ d2]^T = [3\ 3]^T$のステップ状の定値外乱を与えたときの応答を図 5.10に示す．

図 5.10から明らかなように，コントローラのゲインを Q_1，$Q_2 \to \infty I$とし，オブザーバのゲインも $Q_o \to \infty I$として得られる制御則により，定値外乱が加わる場合でも目標値に追従し，かつ非干渉化が達成されることがわかる．

5.6 おわりに

本章では，オブザーバベースコントローラを用いた出力フィードバックによって，最適レギュレータと最適状態推定器の極限的性質を利用して近似的に非干渉化できることを明らかにした．さらに，与えられたシステムが条件を満足すれば，同一次元オブザーバを用いた場合と最小次元オブザーバを用いた場合の出力フィードバックによる制御系に対して，極限的性質によりシステムに加わる未知外乱の影響を除去できることを明らかにした．さらに，数値例によりオブザーバベースコントローラを用いた出力フィードバック非干渉制御により非干渉化が達成できることを確認した．

最後に，サーボ系に対する最適レギュレータの極限的性質を用いた非干渉制御について考え，非干渉化条件を満足するシステムに対しては最適レギュレータの極限的性質を用いることにより，ステップ状の定値外乱が加わる場合でも目標値に追従する非干渉系が評価関数の重みを直接操作するだけで得られることを示した．

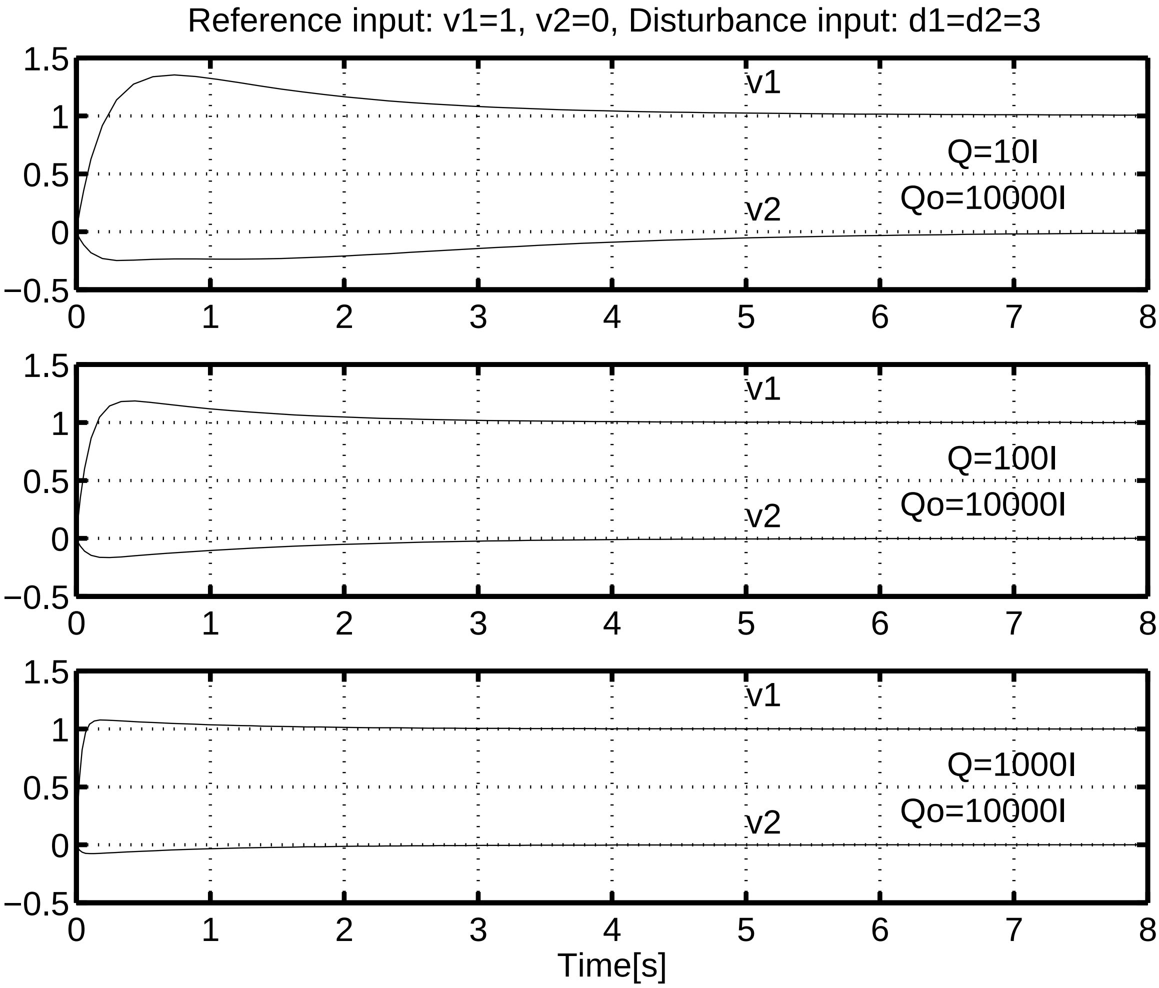


図 5.10: Step response for closed-loop system with step disturbance (full-order observer-based controller)

第 6 章

非線形システムの非干渉制御とフィードバック線形化

本章では，非線形システムに対する非干渉制御についての一考察を行なう．とくに，非線形システムに対する非干渉化のひとつといわれているフィードバック線形化の手法に着目し，実験的な観点からその問題点を指摘する．

6.1 はじめに

これまで線形多変数系に対する非干渉制御について考えてきた．しかしながら，非線形多変数系の非干渉制御に関する研究は理論的な観点からのものは多いが，それらの有効性を実システムに応用し実験的に検証したものは極めて少ない．

本章では，非線形多変数系の非干渉制御に関する一考察をする．はじめに，非線形システムに対する多変数系の非干渉化手法のひとつであるといわれている，フィードバック線形化について説明する．フィードバック線形化は全ての状態を必要とするため，状態の信号が雑音などで撹乱されるような場合には脆いという指摘もある [49]．さらに，制御対象が平衡点から大きく移動した場合には，非線形性をキャンセルするために過大な入力を生じる場合もある．

つぎに，この方法を磁気浮上系に応用しその有効性を実験的に検証する．本章で扱う磁気浮上系は 1 入力 1 出力のシステムであるが，多変数系の場合でも入出力間が非干渉化されれば，それぞれの入力と出力について 1 入力 1 出力のシステムと同様に議論できる

ことになる.

6.2　フィードバック線形化

6.2.1　フィードバック線形化とは

制御対象の数学モデルは，一般には非線形方程式で与えられる．例えば，磁気浮上系の理想的な数学モデルは，電磁石の吸引力の式が非線形の方程式で与えられることから非線形の運動方程式で記述される．このような，非線形システムの制御系設計の方法のひとつとして，フィードバック線形化の手法 [62] が知られており，多変数系にこの方法を適用することにより，入出力間の非干渉化を達成することが可能であるといわれている．また，磁気浮上系に対してもフィードバック線形化を用いて線形モデルを得ることで，幅広い動作点において鉄球を浮上させることができるという報告もある [22] [14]．しかしながら，フィードバック線形化は全ての状態を必要とするため，状態の信号が雑音などで撹乱されるような場合には脆いという指摘があり，さらには制御対象が平衡点から大きく移動した場合非線形性をキャンセルするために過大な入力を生じることがある [49]．本章では，磁気浮上系 [65] を制御対象としこれらの問題を実験的に検証することを目的とする．

フィードバック線形化の一般的な手順については文献 [62] を参考にされたい．

6.2.2　磁気浮上系とモデリング

実験に使用する磁気浮上装置を，図 6.1に示す．電磁石は馬締型で，その両端に取り付けられたレーザ型のギャップセンサにより，電磁石と鉄球の間のギャップを測定できるようになっている．本装置を用いて電磁石の吸引力を制御し，鉄球を電磁石に接触することなく浮上させる制御問題を考える．

図 6.1に示したパラメータは，つぎのとおりである．

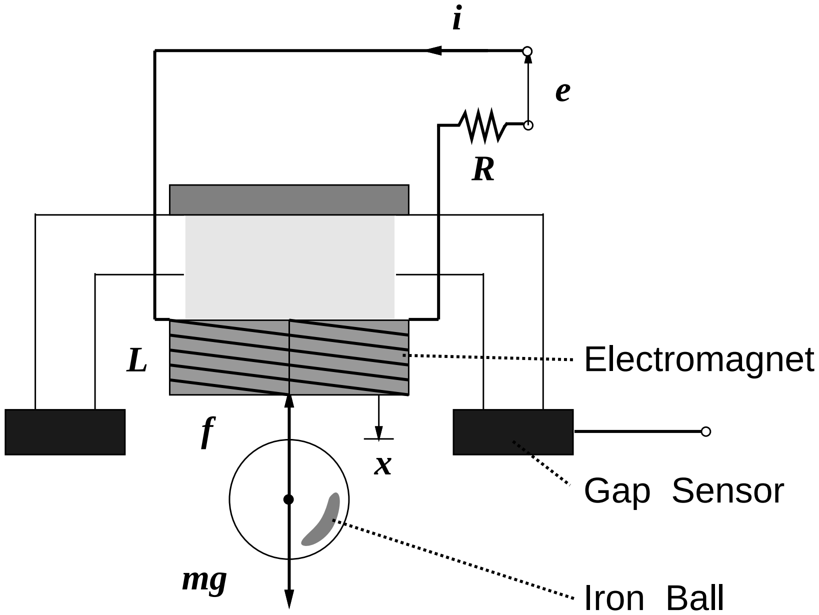


図 6.1: Magnetic suspension system

m	:	鉄球の質量
X	:	定常ギャップ
L	:	電磁石のインダクタンス
R	:	電磁石の抵抗
I	:	電磁石の定常電流
E	:	電磁石の定常電圧
x	:	定常ギャップからの微小変位
i	:	定常電流からの微小電流
e	:	定常電流からの微小電圧

同定実験により得られた物理パラメータは，表 6.1に示すとおりである．

なお，鉄球の速度信号を直接測定することはたいへん困難であるため，鉄球と電磁石の変位信号から擬似的な微分により求める．

これらの物理パラメータを用いて，理想的な数学モデルをつぎの仮定をおく．

A1) 電磁石の鉄芯の透磁率は無限大である．

A2) 電磁石には漏れ磁束，磁気飽和，ヒステリシスがない．

表 6.1: Physical parameters of magnetic suspension system

Parameter	Value
m	0.355[kg]
X	3.000×10^{-3}[m]
L	7.720×10^{-2}[H]
R	7.607[Ω]
I	1.531[A]
k	$5.459 \times 10^{-5}[\mathrm{Nm}^2/\mathrm{A}^2]$
Q	$1.092 \times 10^{-4}[\mathrm{Nm}^2/\mathrm{A}^2]$
L_0	5.920×10^{-2}[H]
x_0	2.950×10^{-3}[m]

A3) 鉄芯中に生じる渦電流は無視できる．

また，2 つの違うモデルを導出し比較するために，コイルのインダクタンスについてつぎの 2 つの仮定をおく．

A4-1) 電磁石のインダクタンスは平衡点近傍で一定とし，速度起電力の項は無視できるとする．

A4-2) 電磁石のインダクタンスの電圧特性は，電磁石と鉄球のギャップの距離に対して非線形性をもつと考え，つぎのようにギャップの関数として表す．

$$L(x) = \frac{Q}{x_0 + x} + L_0 \tag{6.1}$$

ここで，定数 Q，L_0，x_0は表 6.1 にも示したように，実験により求められる定数である．

以上の仮定により，電磁石のコイルインダクタンスを定数と考えるモデルと，そのコイルのインダクタンスを鉄球と電磁石の変位に関する関数と考えるモデルの，2 つの異なった磁気浮上系のモデルが得られる．電磁石の球引力 fは $f = k\left(\frac{i}{x_0+x}\right)^2$と定義する．ここで，定数 kは実験により決定される値である (表 6.1を参照されたい)．

非線形モデル *1:* 簡単な数学モデル

A1) – A3) and A4-1) の仮定のもとで，つぎの理想的な数学モデルを得ることができる．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}) \tag{6.2}$$

ここで，$\boldsymbol{x} := [\,x \quad \dot{x} \quad i\,]^T$，$\boldsymbol{u} := e$ であり，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) &:= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ g - \frac{k}{m}\frac{i^2}{(x_0+x)^2} \\ -\frac{R}{L}i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}) &:= x. \end{aligned} \tag{6.3}$$

である．

非線形モデル *2:* 詳細な数学モデル

また，A1) – A3) and A4-2) の仮定のもとで，つぎの理想的な数学モデルを得ることができる．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}) \tag{6.4}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) &:= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ g - \frac{Qi^2}{2m(x_0+x)^2} \\ \frac{Q\dot{x}i - R(x_0+x)^2 i}{(x_0+x)\{Q+L_0(x_0+x)\}} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}) &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x_0+x}{Q+L_0(x_0+x)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}) := x. \end{aligned} \tag{6.5}$$

である．

6.2.3 磁気浮上系のフィードバック線形化

磁気浮上系の理想的な数学モデルは，電磁石の吸引力の式が非線形の方程式で与えられることから，非線形の運動方程式で記述される．このような，非線形システムの制御系設計のひとつにフィードバック線形化の考え方 [62] がある．この方法は，制御対象の非線形

モデルを近似を用いることなく，システムの非線形性を厳密に線形化する手法で，様々な実システムへ応用 (例えば，磁気浮上系への応用 [22]，[14]) がなされその有用性が報告されている．しかしながら，フィードバック線形化の手法が本来もつ**脆さ**に関して実験的な検証をした報告は少ない．

本章では，この**脆さ**に関して実験的な検証を試みる．また，異なるモデルに対する制御性能の違いについても実験的な検証をする．そこで，従来の線形化とフィードバック線形化の 2 つの手法を用いて，前節で与えられた 2 つの非線形の方程式を平衡点近傍で線形化する．従来の線形化手法による磁気浮上系の線形モデルの導出については，文献 [52] を参考されたい．

簡単な非線形モデルに対するフィードバック線形化

非線形モデル 1 に対して，フィードバック線形化を用いて線形モデルを導出する．まず，$\phi(\boldsymbol{x}) = x$ とし，座標変換$\boldsymbol{\xi}_1$をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1 &= [\,\phi(\boldsymbol{x}) \quad L_{f_1}\phi(\boldsymbol{x}) \quad L_{f_1}^2\phi(\boldsymbol{x})\,]^T \\ &= [\,x \quad \dot{x} \quad \ddot{x}\,]^T, \end{aligned} \tag{6.6}$$

ここで，$L_{f_1}\phi(\boldsymbol{x})$ はリー微分を表し，つぎのような演算を施すことを意味する: $L_{f_1}\phi(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$．平衡点 $(\boldsymbol{\xi}_1^0, \boldsymbol{u}^0)$ まわりの微小変動をそれぞれ$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1 = [\,\tilde{\xi}_1^1 \quad \tilde{\xi}_1^2 \quad \tilde{\xi}_1^3\,]^T$，$\tilde{\boldsymbol{u}}$とし，つぎのように記述する．

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_1^0 + \tilde{\boldsymbol{\xi}}_1, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0 + \tilde{\boldsymbol{u}}. \tag{6.7}$$

以上の状態と入力の変換により，変数$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1$ に対するつぎの線形モデルが与えられる．

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1^{31} & a_1^{32} & a_1^{33} \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1^3 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}}, \tag{6.8}$$

ここで，

$$\begin{aligned} a_1^{31} &= \frac{2kRI^2}{mL(x_0+X)^3},\ a_1^{32} = \frac{2kLI^2}{mL(x_0+X)^3} \\ a_1^{33} &= -\frac{mR(x_0+X)^3}{mL(x_0+X)^3},\ b_1^3 = -\frac{2k(x_0+X)I}{mL(x_0+X)^3}. \end{aligned}$$

さらに，入力 u はつぎのように計算される．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \frac{1}{L_{g_i} L_{f_i}^2 \phi(\boldsymbol{x})} \\ &\times \left(a_i^{31}\tilde{\xi}_1^1 + a_i^{32}\tilde{\xi}_1^2 + a_i^{33}\tilde{\xi}_1^3 + b_i^3 \tilde{\boldsymbol{u}} - L_{f_i}^3 \phi(\boldsymbol{x})\right) \end{aligned} \tag{6.9}$$

ここで，$i = 1$ のとき

$$L_{f_1}^3 \phi(\boldsymbol{x}) = \frac{2R}{L}(g - \ddot{x}),$$
$$L_{g_1} L_{f_1}^2 \phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{2}{L(x_0 + X)}\sqrt{\frac{k(g - \ddot{x})}{m}}$$

となる．上式より，$L_{g_1} L_{f_1}^2 \phi(\boldsymbol{x})$ の項が零に近い値をとる場合，入力は過大になることが容易に想像できる．

表 6.1の値を代入することにより，非線形モデル 1 に対してつぎのフィードバック線形化モデルが得られる．

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_1 = \boldsymbol{A}_{1g}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1 + \boldsymbol{B}_{1g}\tilde{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_{1g}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1 \tag{6.10}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{1g} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 327340 & 3510 & -98.53 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}_{1g} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -175.2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_{1g} = [1 \quad 0 \quad 0] \end{aligned} \tag{6.11}$$

である．

詳細な非線形モデルに対するフィードバック線形化

同様の手法により，非線形モデル 2 に対してもフィードバック線形化モデルを導出することができる．

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_2^{31} & a_2^{32} & a_2^{33} \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2^3 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}}, \tag{6.12}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
a_2^{31} &= \frac{QRI^2}{m(x_0+X)^2\{Q+L_0(x_0+X)\}} \\
a_2^{32} &= \frac{QL_0I^2}{m(x_0+X)^2\{Q+L_0(x_0+X)\}} \\
a_2^{33} &= -\frac{mR(x_0+X)^3}{m(x_0+X)^2\{Q+L_0(x_0+X)\}} \\
b_2^3 &= -\frac{Q(x_0+X)I}{m(x_0+X)^2\{Q+L_0(x_0+X)\}}
\end{aligned}
$$

である．(6.9) 式の入力は，$i=2$ とすればつぎのように与えられる．

$$
L_{f_2}^3\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{2(g-\ddot{x})}{Q+L_0(x_0+x)}\left(L_0\dot{x}+R(x_0+x)\right),
$$

$$
L_{g_2}L_{f_2}^2\phi(\boldsymbol{x}) = -\sqrt{\frac{2Q(g-\ddot{x})}{m}}\frac{1}{Q+L_0(x_0+x)}.
$$

同様に，表 6.1の値を代入することにより，つぎの線形モデルが得られる．

$$
\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_2 = \boldsymbol{A}_{2g}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_2 + \boldsymbol{B}_{2g}\tilde{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_{2g}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_2 \tag{6.13}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{2g} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 335700 & 2612 & -98.10 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{B}_{2g} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -171.5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_{2g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.14}
$$

である．

以上により，平衡点近傍で厳密に線形化された，2 つのフィードバック線形化モデルが得られた．導出したフィードバック線形化モデルを見ればわかるように，このモデルは全ての状態を必要とする．そのため，例えば速度信号が外乱に撹乱される場合，その影響が閉ループ系の応答に現れることが予想される．

6.2.4　制御系設計

前節までに，磁気浮上系に対するフィードバック線形化を用いた線形モデルが得られた．ここでは，得られた線形モデルに対して出力フィードバック $\mathcal{H}_\infty$制御に基づくロバス

ト制御系設計を行なう．$\mathcal{H}_\infty$制御やμ解析などによるロバスト制御系設計は，これまでに多くのシステムに応用されその有効性が認められている．磁気浮上系への適用に対しても，すでに数多くの研究がある [52][76]．

ここでは，従来の線形化の手法とフィードバック線形化の手法を比較するため，線形モデルに対する制御系設計は，出力フィードバックのみを考えることにする．こうすることで，全ての状態を必要としない従来の線形化に出力フィードバックコントローラを施したものと，全ての状態を必要とするフィードバック線形化に出力フィードバックコントローラを施したもの両者の比較が可能となり，状態が外乱で撹乱されるときの閉ループ系の制御性能が評価できる．

制御問題の設定

$\mathcal{H}_\infty$制御理論は，微分ゲーム理論と密接な関係にあることが知られている [28]．微分ゲームの観点からいえば，$\mathcal{H}_\infty$制御理論は，外乱入力が常に制御入力にとって最悪な状況をもたらすものと想定してそのような状況のもとで最適な設計を行なっていることになり，最悪外乱に対する最適制御になっている．

制御対象のモデリングの際には，つぎのような不確かさの存在を陽には考慮しなかった．

- 鉄球と電磁石などのパラメータ誤差
- モデル化されなかったダイナミクス (渦電流を無視したこと等)
- 無視した非線形性や非線形化誤差
- 鉄球への物理的な外力やセンサ雑音などの外乱

そこで，これらの不確かさの影響をシステムに加わる外乱としてモデリングし，これらの影響を少なくする制御系設計を考える．

ここで，予期できない外力やパラメータ誤差の不確かさの影響を表す外乱として$\boldsymbol{v}_0$，モデル化されなかったダイナミクスや無視した非線形性などに起因する不確かさなどを表す外乱として$\boldsymbol{w}_0$を定義し，磁気浮上系を改めてつぎのように記述する [21]．

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \boldsymbol{A}_g\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{B}_g\tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{D}_g\boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_g\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{w}_0 \tag{6.15}$$

ここで，

$$\boldsymbol{D}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.81 & 0 \\ 0 & 0 & 12.9 \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

であり，また，$\tilde{\boldsymbol{\xi}}$は状態変数を表し，$\tilde{\boldsymbol{u}} = e$ は制御入力を表す．この式は，本章で議論している全ての線形モデルを表現する．

システムに加わる外乱は，一般に何らかの周波数特性をもつと考えられる．そこで，外乱を定量的に特徴づけるために$\boldsymbol{v}_0$，$\boldsymbol{w}_0$をそれぞれつぎのように周波数重みをつけて

$$\boldsymbol{v}_0(s) = \boldsymbol{W}_v(s)\boldsymbol{v}(s), \quad \boldsymbol{w}_0(s) = \boldsymbol{W}_w(s)\boldsymbol{w}(s) \tag{6.17}$$

と表す．周波数重みは，設計者が自由に決めることができるパラメータであり，とくに外乱の加わる周波数帯域でゲインが大きくなるように定める．

また，これらの外乱入力に対して，鉄球と電磁石の定常状態からの変位とその速度を被制御出力としてつぎのように表す．

$$\boldsymbol{z}_g = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_g\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \quad \boldsymbol{H}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.18}$$

一方，操作入力も小さく抑えたいことから，注目している出力信号を

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{z}_g \\ \rho\tilde{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

とまとめる．ここで，$\boldsymbol{\Theta} = \mathrm{diag}\ [\theta_1 \quad \theta_2]$ とρはそれぞれ$\boldsymbol{z}_g$と u に関する重み係数である．

いま，フィードバック$\tilde{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}$ を施すと，閉ループ系の伝達関数は

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{z_1 v} & \boldsymbol{T}_{z_1 w} \\ \boldsymbol{T}_{z_2 v} & \boldsymbol{T}_{z_2 w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

となる．

最終的に，磁気浮上系の最悪外乱に対する制御問題は，システムを内部安定にし，かつ条件

$$\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{T}_{z_1 v} & \boldsymbol{T}_{z_1 w} \\ \boldsymbol{T}_{z_2 v} & \boldsymbol{T}_{z_2 w} \end{matrix} \right\| < \gamma \tag{6.21}$$

を満たす出力フィードバックコントローラ Kを適当な重み行列を選定し構成することである．

コントローラの設計

コントローラの設計は，制御系設計のための CAD を用いれば可能であるが，パラメータの調整にはこれまでの経験と多くの時間を要する．磁気浮上系のコントローラの設計にの詳細については，文献 [52] を参考にされたい．ここでは，フィードバック線形化により導出された，簡単な線形モデルと詳細な線形モデルに対するコントローラの設計を行なう．

簡単な線形モデルに対するコントローラ

つぎの設計パラメータをつぎのように選定する．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{W}_{1v} &= \frac{5.0\times 10^3}{1+s/0.0055}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\
\boldsymbol{W}_{1w} &= \frac{6.00\times 10^{-7}(1+s/0.063)}{(1+s/18.84)}\\
&\quad \times\frac{(1+s/0.377)(1+s/318.3)}{(1+s/31.40)(1+s/50.24)}\\
\boldsymbol{\Theta}_1 &= \mathrm{diag}\,[\;80\quad 0.7\;],\qquad \rho_1 = 8.0\times 10^{-5}
\end{aligned}$$

このパラメータに対して，$\gamma = 1$ として $\mathcal{H}_\infty$制御問題を解けば，簡単な線形モデルに対するコントローラはつぎのように計算される．

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{-8.33\times 10^8(s+101.3)(s+55.49)(s+50.27)}{(s+728.0)(s+814.7\pm j913.3)}\\
&\times \frac{(s+31.14)(s+18.85)(s+1.534)}{(s+50.67\pm j33.83)(s+14.19)(s+0.004)}.
\end{aligned}$$

詳細な線形モデルに対するコントローラ

つぎのパラメータを，詳細な線形モデルに対して選定する．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{W}_{2v} &= \frac{5.0\times 10^3}{1+s/0.005}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\
\boldsymbol{W}_{2w} &= \frac{5.37\times 10^{-7}(1+s/0.063)}{(1+s/18.84)}\\
&\quad \times\frac{(1+s/0.377)(1+s/62.80)}{(1+s/31.40)(1+s/50.24)}\\
\boldsymbol{\Theta}_2 &= \mathrm{diag}\,[\;80\quad 0.6\;],\qquad \rho_2 = 8.0\times 10^{-5}
\end{aligned}$$

このパラメータに対して，同様に$\gamma = 1$として$\mathcal{H}_\infty$制御問題を解けば，詳細な線形モデルに対するコントローラはつぎのように計算される．

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{-1.11 \times 10^9 (s+78.20)(s+74.76)(s+50.27)}{(s+1182)(s+749.2 \pm j891.5)} \\ &\times \frac{(s+31.42)(s+18.85)(s+1.443)}{(s+55.04 \pm j18.21)(s+14.68)(s+0.004)}. \end{aligned}$$

6.2.5 フィードバック線形化のロバスト性と脆さに関する実験的検証

以上で，従来の線形化手法とフィードバック線形化手法の比較をする準備が揃った．平衡点近傍では，従来の線形化による線形モデルとフィードバック線形化による線形モデルは同じである．つまり，フィードバック線形化のための状態フィードバックを施さなければ，従来の線形化による線形モデルと考えてもよい．したがって，設計されたコントローラK_1とK_2は，それぞれの線形化モデルに適用できる．

比較する制御則はつぎの4つとなる．

- u_{NL1}: 簡単な線形モデル + フィードバック線形化 + 出力フィードバックコントローラ
- u_{NL2}: 詳細な線形モデル + フィードバック線形化 + 出力フィードバックコントローラ
- u_{L1}: 簡単な線形モデル + 従来の線形化 + 出力フィードバックコントローラ
- u_{L2}: 詳細な線形モデル + 従来の線形化 + 出力フィードバックコントローラ

なお，連続時間で設計されたコントローラは，Tustin変換により離散化をし，ディジタル制御装置に実装した．サンプリングタイムは100[μs]である．

簡単なモデルに対する従来の線形化とフィードバック線形化の比較

図6.2に，u_{L1} and u_{NL1}について，定常状態まわり$X = 0.003 \pm 0.002$ [m]で鉄球を浮上させたときの鉄球へのステップ外乱に対する応答を示す．(a1)が制御則u_{L1}を施したときの閉ループ系の応答，同様に(b1)が制御則u_{NL1}を施したときの閉ループ系の応答である．定量的なステップ外乱を直接鉄球へ与えることは難しいため，約34.7 [N]の力で鉄球

の鉛直下向に加えるという想定で電磁石の電圧信号に擬似的な外乱信号を与えた．この値は，鉄球の質量 0.355 [kg] からみれば，非常に大きな値である．ただし，$X = 0.005$[m] の点では鉄球がセンサの測定範囲を越えないように 10.6 [N] の大きさの外乱を加えた．大変大きな値の外乱を加えているにも関わらず，どちらの応答を見ても鉄球は安定に浮上している．しかし，図 6.2の (a1) と (b1) を比較した場合，ピーク値に関していえば (b1) のほうが低く，いくぶん u_{NL1} がより安定なコントローラといえる．磁気浮上系の簡単なモデルに対しては，フィードバック線形化を用いることで従来の線形化手法よりよい制御系設計ができることがわかった.

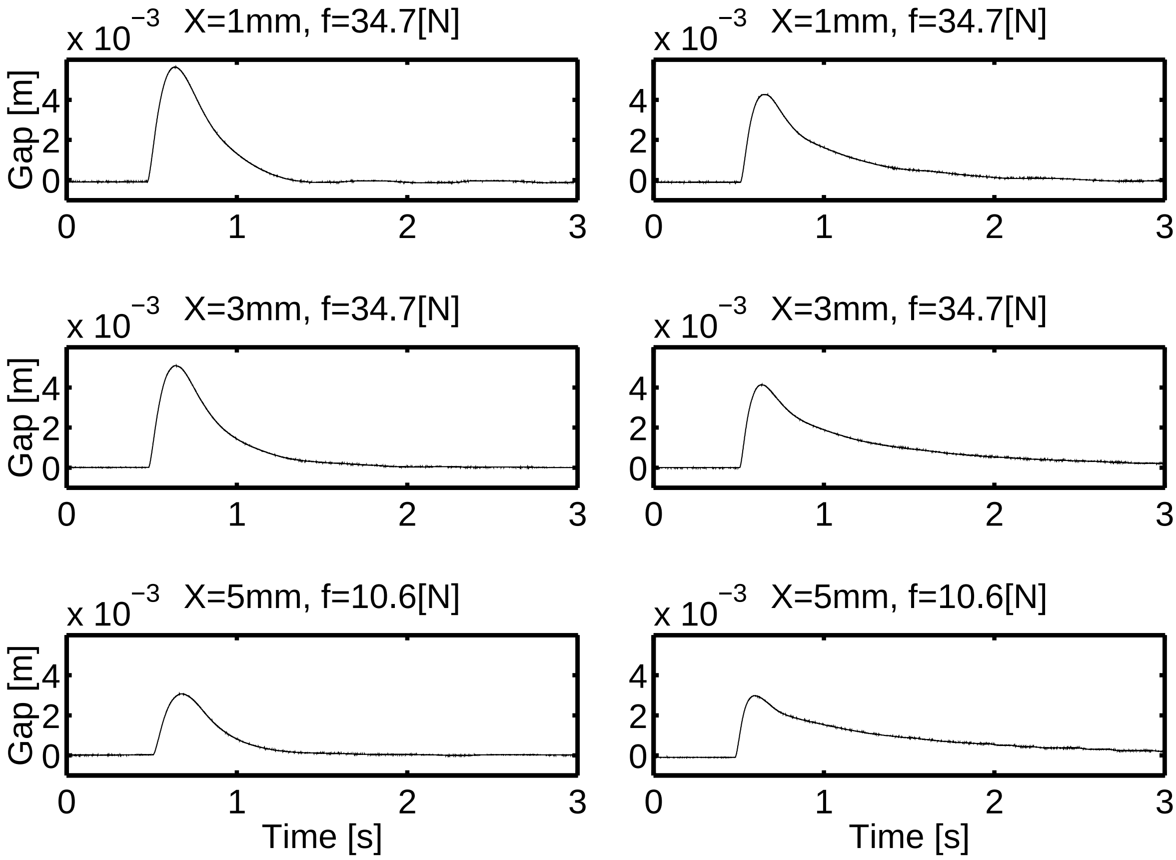
詳細なモデルに関する比較

図 6.3に，u_{L2} and u_{NL2}について，定常状態まわり $X = 0.003 \pm 0.002$ [m] で鉄球を浮上させたときの鉄球へのステップ外乱に対する応答を示す．(a2) が制御則 u_{L2}を施したときの閉ループ系の応答，同様に (b2) が制御則 u_{NL2}を施したときの閉ループ系の応答である．ここでは，全ての浮上実験に関してステップ外乱として約 34.7 [N] の力で鉄球の鉛直下向に加えた．u_{L2}，u_{NL2}ともに大きな値の外乱を加えているにも関わらず鉄球は安定に浮上していることがわかる．しかし，図 6.2とは違い，図 6.3の (a2) と (b2) のピーク値を比較してもほとんどその差が見られない．また，どちらも簡単なモデルの場合と比べて，大きく性能が良くなっている．この理由は，電磁石のインダクタンスをより厳密にモデリングしたためであろう．図 6.3の結果からは，詳細なモデリングを行なうことで，フィードバック線形化と同様の性能が得られるコントローラが従来の線形化手法を用いても設計できることが確かめられた.

その他に u_{L1}，u_{L2}，u_{NL1}，u_{NL2}に対して鉄球の質量を変えて浮上させる等の実験を試みたが，従来の線形化手法を用いた場合もフィードバック線形化を用いた場合も応答に大きな変化は見られず，センサの測定可能な範囲まで安定に浮上した.

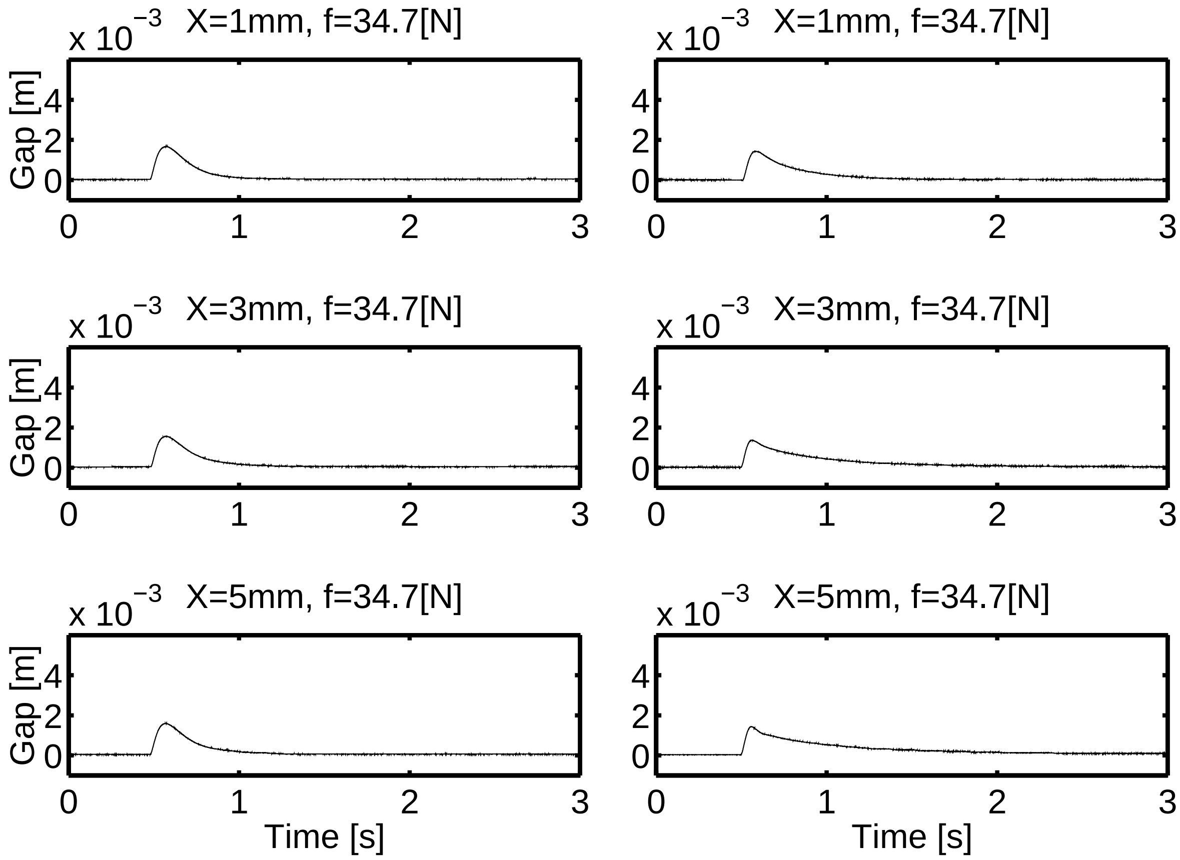
フィードバック線形化の脆さ

最後にフィードバック線形化の脆さに関する実験的な検証を行なう．ここでは，制御則 u_{NL1}と u_{NL2}に関する比較をする．フィードバック線形化のために必要な信号のひとつに鉄球の速度信号がある．一般に，鉄球の速度を測定するのは困難であるため変位の擬似微分を用いて得られることが多い．したがって，速度信号は外乱からの影響を大きく受



(a1) Jacobian linearization (b1) feedback linearization

図 6.2: Step response of Model 1



(a2) Jacobian linearization (b2) feedback linearization

図 6.3: Step response of Model 2

けやすい信号といえよう．そこで，脆さの検証として，速度信号に外乱が加わったときにフィードバック線形化を用いた制御系設計はどのような挙動を示すのか確かめてみる．ここで，注意すべきことは，従来の線形化を用いて設計された制御則 u_{L1}，u_{L2}は，鉄球の速度信号を必要としないことである．

鉄球の速度信号に外乱が加わっていいる状態で，約 3.47 [N] のステップ状の外乱を加えたときの u_{NL1}と u_{NL2}による閉ループ系の応答を図 6.4に示す．それぞれ図中の実線が u_{NL2}，一点鎖線が u_{NL1}を施したときの閉ループ系の応答を示している．図からわかるように，状態の一部が雑音などの影響で撹乱される場合，ステップ外乱が加わるとその影響が閉ループ系の応答に現れることがわかる．従来の制御方法を用いた場合は，全ての状態を必要としないのでこのように速度信号の雑音の影響が現れることはない．一例ではあるが，フィードバック線形化の手法の外乱に対する脆さが実験的に検証されたといえる．

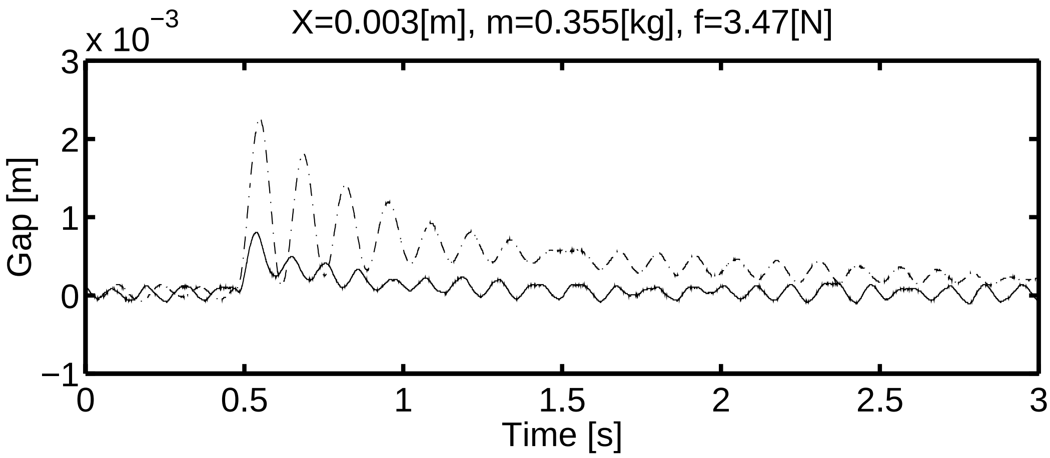


図 6.4: Influence of velocity disturbed by noise (–·–: Model1, —: Model 2)

6.3 おわりに

本章では，非線形多変数系の非干渉制御のひとつであるフィードバック線形化について，実際の磁気浮上系に応用し実験的な検証を行ないつぎのこと明らかにした.

1. 磁気浮上系の制御において，簡単なモデルを用いる場合はフィードバック線形化による制御性能の向上が確認されたが，詳細なモデルを用いることにより従来の線形化による制御則を用いた場合でもフィードバック線形化による手法と変わらないロバストな制御系設計が可能なことを実験的に確かめた.

2. フィードバック線形化の手法は非線形項をキャンセルするためのフィードバックを構成する際に全ての状態を必要とするため，状態の信号が雑音などで撹乱されるような場合には脆いことを実験により確かめた (従来の線形化手法を用いる場合は，出力フィードバックによる制御系設計を行なえば全ての状態を必要としないため，このような外乱の影響は少ない).

第 7 章

結論

7.1　本論文で明らかにされたこと

本論文では，最適レギュレータと最適状態推定器の極限的性質を用いた多変数系の非干渉制御についてつぎのことを明らかにした．

はじめに，第 3 章において，最小位相系について明らかにされていた最適レギュレータの非干渉特性を，あるクラスの非最小位相系にまで拡張した．これにより，本論文の定理で与えた条件を満たす多変数系に対して，評価関数の重み行列を直接操作して得られる極限フィードバックゲインと，それから構成されるフィードフォワードゲインによる制御則によって非干渉化が達成できることを明らかにした．この結果，評価関数の重み行列を直接操作する比較的簡単な手法で非干渉化が達成でき，しかも安定な最大のブロック分けが先験的な条件の確認なしに可能となった．

つぎに，第 4 章において，新しい 2 次評価関数を選ぶことにより，もとの非干渉特性を変えることなく固定極の影響を少なくする極限的性質を用いた非干渉化手法を示し，ロバスト安定性が向上し感度が低下することを確かめた．この方法を用いることにより，非最小位相系のみならず最小位相系で固定極の存在する非干渉系においても適用可能であり，さらには虚軸上に零点をもつシステムに対しても非干渉化が可能になる．また，この自由度を活かす応用として，実際のメカニカルシステムに対して閉ループ系の極を適当な位置に配置することにより，より望ましい非干渉系が構成できることを実験により確認した．

また，第 5 章においては，状態を全て測ることができるとは限らないため，最適状態推定器の極限的性質を用いてオブザーバベースコントローラに基づく出力フィードバックに

より非干渉制御が可能なことを明らかにした．オブザーバのゲインをあげていくことにより，外乱の影響を小さくできることを数値例を用いて確認した．さらに，サーボ系に対する極限的性質を用いた非干渉制御を考え，閉ループ系においてステップ状の定値外乱が加わるような場合でも評価関数の重みを直接操作するだけで目標値に追従し，かつ非干渉化を達成することを明らかにした．また，数値例を用いてその有効性を確認した．

第 3 章から第 5 章において明らかにした，最適レギュレータの極限的性質を用いた非干渉制御は，評価関数の重み行列を直接操作するだけで非干渉系が得られる．したがって，実際の制御系設計において設計パラメータは評価関数の重み Q のみであり，インタラクタの計算等を必要とせず，さらに安定な最大のブロック分けが先験的な条件の確認なしに非干渉系を得ることができる．これは，実システムの制御系設計の観点から見ても有用な結果であると思われる．本論文では，これらのことが状態フィードバックによる非干渉制御，オブザーバベースコントローラを用いた出力フィードバックによる非干渉制御，サーボ系に対する非干渉制御に適用できることを実際のメカニカルシステムへの応用と併せて示した．

最後に，第 6 章において，非線形多変数系の非干渉制御のひとつとされるフィードバック線形化のロバスト性と脆さについて，磁気浮上系に応用し実験的な検証を行なった．フィードバック線形化は適当な変数変換により入出力関係を 1 対 1 にすることができる手法であり，動作点付近におけるシステムのもつ非線形性を近似することなく厳密に線形化できるという利点をもつ．しかしながら，全ての状態を必要とするため状態の信号が雑音などで撹乱されるような場合には，出力フィードバックによる線形ロバストコントローラに比べて脆いという問題点があることを実験的に検証した．

7.2　今後の課題

本研究で明らかにした非干渉制御は，簡単なメカニカルシステムに適用してその有効性を確認しているが，その他の複雑なシステムへ応用し有効性を検証する必要がある．

また，評価関数を周波数依存型に変えた場合の極限的性質と非干渉特性の関係について明らかにする問題や，

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Dw$$

と記述されるシステムに対する極限的性質と非干渉特性の関係について明らかにする問題，また，ディスクリプタ形式で表現されるようなシステムに対する極限的性質と非干渉特性の関係について明らかにする問題や，パラメータ変動があるシステムに対するロバスト非干渉制御などの枠組へ拡張する問題等々の多くの課題が残されている．本研究の結果は，これらの課題を解決して行く上での一つの基礎になると考えられる．

謝辞

本研究を行なうに当たり, 博士前期課程から現在まで本当に多くの御指導を賜わりました藤田政之 助教授に心より厚く御礼申し上げます．ならびに，大学学部時代から長きにわたって御指導をいただきました金沢工業大学 小林伸明 教授に深く感謝致します.

日頃から有益な御助言をいただき，さらにドイツ留学の機会を与えて下さいました本大学の示村悦二郎学長に厚く御礼申し上げます.

また，1995〜1997 年のドイツ留学中にたいへんお世話になりました，ドイツウルム大学 計測制御マイクロ技術研究所の Eberhard P. Hofer 教授に深く感謝致します.

さらに，本論文をまとめるにあたり御指導いただきました，本大学の嵯峨山茂樹 教授，松沢照男 教授，吉田武稔 助教授，金沢工業大学在籍中からこれまでお世話になりました金沢工業大学 谷井琢也 名誉教授ならびに同大学 服部陽一 教授に心から感謝致します.

日頃から様々な御協力をいただいた北陸先端科学技術大学院大学の示村・藤田研究室の諸兄，ならびに実験等の御協力をいただいた金沢工業大学の小林研究室の諸兄に厚く御礼申し上げます.

最後に，いつも蔭で支え，励ましてくれた両親や妹に心から感謝します.

参考文献

[1] 池田，須田: 積分型最適サーボ系の構成，計測自動制御学会論文集，**24**-1，pp. 40-46, 1988.

[2] 岩井，井上，川路: オブザーバ，コロナ社，1988.

[3] 木村，杉山: 完全制御と完全観測を用いたロバスト制御系の設計法，計測自動制御学会論文集，**18**-10，pp. 955-960, 1982.

[4] 小林，川嶋，櫻井，神崎: 連続時間最適レギュレータによる非干渉化と指南車への応用，システム制御情報学会論文集，**11**-11，pp. 608-615, 1998.

[5] 小林，小泉，中溝: 中間標準システムの非干渉化条件に関する考察，計測自動制御学会論文集，**29**-12，pp. 1480-1482, 1993.

[6] 小林，櫻井，加藤，中溝: 離散時間最適レギュレータの極限形と非干渉制御，計測自動制御学会論文集，**29**-10，pp. 1156-1162, 1993.

[7] 小林，櫻井，中溝，矢野: 最適レギュレータの極限形式と外乱分離問題，計測自動制御学会論文集，**34**-6，pp. 563-570, 1998.

[8] 小林，中溝: 最大非可観測システムの安定性とその応用，計測自動制御学会論文集，**17**-2，pp. 168-175, 1981.

[9] 小林，中溝: 非干渉系の極配置問題，計測自動制御学会論文集，**17**-4，pp. 317-323, 1982.

[10] 小林，中溝: レギュレータの極限形式と出力零化問題，計測自動制御学会論文集，**20**-12，pp. 1089-1094, 1984.

[11] 櫻井，小林，中溝，神崎，永谷: 最適レギュレータの極限形式と拘束条件付力学系の制御問題，精密工学会誌，**62**-8，pp. 1187-1193, 1996.

[12] 島ほか: 非線形システム制御理論，コロナ社, 1997.

[13] 下村，藤井: ILQ 最適サーボ設計法の非最小位相系への拡張，システム制御情報学会論文集，**6**-11，pp. 498-507, 1993.

[14] 杉江，清水，井村: 厳密な線形化を用いた $\mathcal{H}_\infty$制御とその磁気浮上系への応用，システム制御情報学会論文集，**6**-1，pp. 57-63, 1993.

[15] 電気学会磁気浮上応用技術調査専門委員会編: 磁気浮上と磁気軸受，コロナ社, 1993.

[16] 得丸，岩井: 非線形多変数系の無干渉制御，計測自動制御学会論文集，**4**-3，pp. 271-279, 1968.

[17] 中溝，小林: Kalman フィルタの極限形式としての未知外乱系の状態推定，計測自動制御学会論文集，**18**-12，pp. 1125-1131, 1982.

[18] 疋田，渡辺: システムの特性変動に対する非干渉系の安定性と感度，計測自動制御学会論文集，**22**-5，pp. 497-502, 1986.

[19] 藤井，下村: ILQ 最適サーボ系設計法の一般化，システム制御情報学会論文集，**1**-6，pp. 194-203, 1988.

[20] 藤崎，池田: 2 自由度積分型最適サーボ系の構成，計測自動制御学会論文集，**27**-8，pp. 907-914, 1991.

[21] 藤田: 磁気浮上系, システム制御情報学会編，制御系設計 $\mathcal{H}_\infty$制御とその応用, 第 10 章, 朝倉書店, 1994.

[22] 藤田，竹田，松村: 厳密な線形化による磁気浮上系の広域安定化，電学論 D，**112**-6, pp.583-584, 1992.

[23] 千田，美多，三平，王: 有界実条件を使った H^∞状態フィードバック則の直接的導出法，システム制御情報学会論文集，**2**-12，pp. 422-430, 1989.

[24] J. Ackermann: Robust Decoupling, Ideal Steering Dynamics, and Yaw Stabilization of 4WS Cars, *Automatica*, **30**-11, pp. 1761-1768, 1994.

[25] J. Ackermann and T. Bünte: Yaw Disturbance Attenuation by Robust Decoupling of Car Steering, *Control Eng. Practice*, **5**-8, pp. 1131-1136, 1997.

[26] A. Ailon: Decoupling of Square Singular System Via Proportional State Feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-36**-1, pp. 95-102, 1992.

[27] B. D. O. Anderson and J. B. Moore: *Optimal Control - Linear Quadratic Methods* -, Prentice Hall, 1990.

[28] T. Başar and P. Bernhard: $\mathcal{H}_\infty$*-Optimal Control and Related Minimax Design Problems*, Birkhäuser, 1991.

[29] G. Basile and G. Marro: *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*, NJ: Prentice-Hall, 1992.

[30] S. Battilotti: *Noninteracting Control with Stability for Nonlinear Systems*, Springer-Verlag, 1994.

[31] S. P. Bhattacharyya: Observer Design for Linear Systems with Unknown Inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-23**-3, pp. 483-484, 1978.

[32] A. S. Boksenbom and R. Hood: General Algebraic Method Applied to Control Analysis of Complex Engine Types, *NACA Tech. Rept.*, **980**, 1950.

[33] E. H. Bristol: On a New Measure of Interaction for Multivariable Process Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-11**-1, pp. 133-134, 1966.

[34] C. Commault, J. M. Dion and J. A. Torres: Minimal structure in the block decoupling problem, *Automatica*, **27**-2, pp. 331-338, 1991.

[35] C. Commault, J. M. Dion and V. Hovelaque: A Geometric Approach for Structured Systems: Application to Disturbance Decoupling, *Automatica*, **33**-3, pp. 403-409, 1997.

[36] G. Conte, A. M. Perdon: Robust Disturbance Decoupling Problem for Parameter Dependent Families of Linear Systems, *Automatica*, **29**-2, pp. 475-478, 1993.

[37] E. J. Davison: The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable system, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-21**-1, pp. 25-34, 1976.

[38] E. Davison and B. M. Scherzinger: Perfect Control of the Robust Servomechanism Problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-32**-8, pp. 689-702, 1987.

[39] A. De Luca: Decoupling and Feedback Linearizarion of Robots with Mixed Rigid/Elastic Joints, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **8**-11, pp. 965-977, 1998.

[40] J. Descusse and J. M. Dion: On the structure at infinity of linear square decouplable systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-27**-4, pp. 971-974, 1982.

[41] J. Descusse, J. F. Lafay and M. Malabre: On the structure at infinity of linear block decouplable systems: the general case, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-28**-12, pp. 1115-1118, 1983.

[42] J. Descusse, J. F. Lafay and M. Malabre: Solution to Morgan's Problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-33**-8, pp. 732-739, 1988.

[43] J. M. Dion and C. Commault: Feedback Decouopling of Structured Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-38**-7, pp. 1132-1135, 1993.

[44] C. Dórea and B. Milani: A Computational Method for Optimal L-Q Regulation wirh Simultaneous Disturbance Decoupling, *Automatica*, **31**-1, pp. 155-160, 1995.

[45] C. Dórea and B. Milani: Disturbance Decoupling in a Class of Linear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-42**-10, pp. 1427-1431, 1997.

[46] E. Fabian and W. M. Wonham: Decoupling and Data Sensitivity, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-20**-3, pp. 338-344, 1975.

[47] P. L. Falb and W. A. Wolovich: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-12**-6, pp. 651-657, 1967.

[48] B. A. Francis: The optimal linear quadratic time invariant regulator with cheap control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-24**-4, pp. 616-621, 1979.

[49] R. A. Freeman and P. V. Kokotović: *Robust Nonlinear Control Design*, Birkhäuser, 1996.

[50] B. Friedland: Limiting Forms of Optimal Stochastic Linear Regulators, *ASME Transactions*, Series G, **10**-2, pp. 134-141, 1971.

[51] E. Freund: The Structure of Decoupled Nonlinear Systems, *Int. J. Control*, **21**-3, pp. 443-450, 1975.

[52] M. Fujita, T. Namerikawa, F. Matsumura and K. Uchida: "μ-synthesis of an electromagnetic suspension system," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-40**-3, pp. 530-536, 1995.

[53] M. Fujita, K. Uchida and F. Matsumura: Asymptotic H_∞ Disturbance Attenuation Based on Perfect Observation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-36**-7, pp. 875-880, 1991.

[54] K. Furuta and S. Kamiyama: State Feedback and Inverse System, *Int. J. Control*, **25**, pp. 229-241, 1977.

[55] E. G. Gilbert: Controllability and observability in multivariable control systems, *SIAM J. Control*, **2**-1, pp. 128-151, 1963.

[56] E. G. Gilbert: The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback, *SIAM J. Control*, **7**-1, pp. 50-63, 1969.

[57] J. W. Grizzle and A. Isidori: Block noninteracting control with stability via static state-feedback, *Mathematics of Control, Systems and Signals*, **2**, pp. 315-341, 1989.

[58] I. J. Ha and G. Gilibert: A complete characterization of decoupling control law for general class of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-31**-8, pp. 823-830, 1986.

[59] W. M. J. Hautus and M. Heyman: Linear feedback decoupling-transfer function analysis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-28**-8, pp. 823-832, 1983.

[60] A. N. Herrera H. and J. F. Lafay: New Results about Morgan's Problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-38**-12, pp. 1834-1838, 1993.

[61] L. C. Hui: *General Decoupling Theory of Multivariable Process Control Systems*, Springer-Verlag, 1983.

[62] A. Isidori: *Nonlinear Control Systems*, 3rd Ed., Springer-Verlag, 1995.

[63] A. Isidori. A. J. Krener, C. Gori-Giorgi and S. Monaco: Nonlinear Decoupling via Feedback: A Differential Geometric Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**-2, pp. 331-345, 1981.

[64] S. Kamiyama and K. Furuta: Decoupling by Restricted State Feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **21**-3, pp. 413-415, 1976.

[65] C. R. Konspe and E. G. Collins (Eds.): "Special Issue on Magnetic Bearing Control," *IEEE Trans. Control Systems Technology*, **4**-5, 1996.

[66] F. N. Koumboulis: Inout-Output Triangular Decoupling and Data Sensitivity, *Automatica*, **32**-4, pp. 569-573, 1996.

[67] F. N. Koumboulis: Block Decoupling of Generalized State Space Systems, *Automatica*, **33**-10, pp. 1885-1897, 1997.

[68] P. Kudva, N. Viswanadham and A. Ramakrishna: Observers for Linear Systems with Unknown Inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-25**-1, pp. 113-115, 1980.

[69] H. Kwakernaak and R. Sivan: *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., 1972.

[70] C. Lin and C. Wu: Block-Decoupling Linear Multivariable Systems: Necessary and Sufficient Conditions, *Automatica*, **34**-2, pp. 237-243, 1998.

[71] A. Linnemann and Q. Wang: Block Decoupling with Stability by Unity Output Feedback – Solution and Performance Limitations, *Automatica*, **29**-3, pp. 735-744, 1993.

[72] D. G. Luenberger: An introduction to observers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-16**-6, pp. 596-602, 1971.

[73] A. G. J. MacFarlane: A Survey of some Recent Results in Linear Multivariable Feedback Theory, *Automatica*, **8**, pp. 455-492, 1972.

[74] A. G. J. MacFarlane and J. J. Belletrutti: The Characteristic Locus Design Method, *Automatica*, **9**-5, pp. 575-558, 1973.

[75] M. Malabre *et. al.*: On the Fixed Poles for Disturbance Rejection, *Automatica*, **33**-6, pp. 1209-1211, 1997.

[76] F. Matsumura (Ed.): *Proc. Fifth Int. Symp. Magnetic Bearings*, Kanazawa, Japan, 1996.

[77] M. V. Meerov: *Multivariable Control Systems*, Israel Program for Scientific Translations Ltd., 1968.

[78] M. D. Mesarovic: *The Control of Multivariable Systems*, John Wiley & Sons, Inc., 1960.

[79] B. S. Morgan: The synthesis of linear multivariable systems by state feedback, In *Proc. 1964 Joint Automatic Control Conf.*, pp. 468-472, 1964.

[80] B. S. Morgan: The Synthesis of Linear Multivariable Systems by State-Variable Feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-9**-5, pp. 405-411, 1964.

[81] A. S. Morse and W. M. Wonham: Triangular Decoupling of Linear Multivariable Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-15**-4, pp. 447-449, 1970.

[82] A. S. Morse and W. M. Wonham: Status of noninteractiong control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-16**-6, pp. 568-581, 1971.

[83] P. J. Moylan: Stable Inversion of Linear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-22**-1, pp. 74-78, 1977.

[84] H. Nijmeijer and J. M. Schumacher: The Regular Local Noninteracting Control Problem for Nonlinear Control Systems, *SIAM J. Control Opt.*, **24**-6, pp. 1232-1245, 1986.

[85] A. B. Özgüler: *Linear Multichnnel Control: A System Matrix Approach*, Prentice Hall, 1994.

[86] G. J. Pack and W. E. Phillips, Jr.: Analog study of interacting and noninteracting multiple-loop control systems for turbojet engines, *NACA Tech. Rept.*, **1212**, 1955.

[87] Y. Peng and M. Kinnaert: Explicit Solution to the Singular LQ Regulation Problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-37**-5, pp. 633-636, 1992.

[88] L. Qiu and E. J. Davison: Performance Limitations of Non-minimum Phase System in the Servomechanism, *Automatica*, **29**-2, pp. 337-349, 1993.

[89] H. H. Rosenbrock: Design of Multivariable Control Systems Using Inverse Nyquist Array, *Proc. IEE*, **116**-11, pp. 1929-1936, 1969.

[90] A. Saberi and P. Sannuti: Cheap and Singular Controls for Linear Quadratic Regulators, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-32**-3, pp.208-219, 1987.

[91] U. Shaked: Explicit Solution to the Singular Discrete-Time Stationary Linear Filtering Problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-30**-1, pp. 34-47, 1985.

[92] L. M. Silverman: Decoupling with state feedback and precompensation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-15**-4, pp. 487-489, 1970.

[93] L. M. Silverman and H. J. Payne: Input-output structure of linear systems with application to the decoupling problem, *SIAM J. Control*, **9**-2, pp. 199-233, 1971.

[94] G. Stein and M. Athans: The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-32**-2, pp. 105-114, 1987.

[95] R. Suzuki, N. Kobayashi, M. Kawashima and M. Fujita: H_2 Decoupling Control with Limiting Properties and Its Application to Robot Manipulator, In *Proc. 24th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 1399-1404, Aachen, 1998.

[96] R. Suzuki, M. Fujita, N. Kobayashi and M. Kawashima: Decoupling Control of A Mechanical System with Limiting Properties of LQR and Its Applications, In *Proc. IEEE Conference on Control Applications*, pp. 822-826, Trieste, 1998.

[97] J. W. van der Woude: Disturbance Decoupling by Measurment Feedback for Structured Transfer Matrix Systems, *Automatica*, **32**-3, pp. 357-363, 1996.

[98] F. van Diggelen and K. Glover: A Hadamard Weighted Loop Shaping Design Procedure for Robust Decoupling, *Automatica*, **30**-5, pp. 831-845, 1994.

[99] T. W. Williams and P. J. Antsaklis: A unifying approach to the decoupling of linear multivariable systems, *Int. J. Control*, **44**, pp. 181-201, 1986.

[100] W. A. Wolovich and P. L. Falb: On the structure of multivariable systems, *SIAM J. Control*, **7**-3, pp. 437-451, 1969.

[101] W. M. Wonham: *Linear Multivariable Control*, 3rd ed., Springer-Verlag, 1985.

[102] W. M. Wonham and A. S. Morse: Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach, *SIAM J. Control*, **8**-1, pp. 1-18, 1971.

[103] P. Zagalak, J. F. Lafay and A. N. Herrera-Hernandez: The Row-by-row Decoupling via State Feedback: A Polynomial Approach, *Automatica*, **29**-6, pp. 1491-1499, 1993.

[104] Z. Zhang and J. S. Freudenberg: Loop Transfer Recovery for Nonminimum Phase Plants, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-35**-5, pp. 547-553, 1990.

本論文に関する発表

- 論文
  - 鈴木亮一, 小林伸明, 藤田政之, “非最小位相系に対する最適レギュレータの極限形を用いた近似非干渉制御”, 電気学会論文誌 C, **119**-2, pp.183-189, 1999.
  - R. Suzuki, T. Namerikawa and M. Fujita, “H_∞ Control of a Nonlinear Magnetic Suspension System with Feedback Linearization: An Experimental Study of Robustness and Fragility”, 電気学会論文誌 D, (投稿中).
  - M. Sakurai, N. Kobayashi, R. Suzuki and T. Nakamizo, “Decoupling Properties of the Singular L.Q. Regulation Problem”, *International Journal of Control*, 1998 (submitted).
- 国際学会発表論文
  - R. Suzuki, M. Fujita, N. Kobayashi and M. Kawashima, “Decoupling Control of A Mechanical System with Limiting Properties of LQR and Its Application”, In *Proc. 1998 IEEE Conference on Control Applications*, Trieste, pp.822-826, 1998.
  - R. Suzuki, N. Kobayashi, M. Kawashima and M. Fujita, “H_2 Decoupling Control with Limiting Properties and Its Application to Robot Manipulator”, In *Proc. The 24th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Aachen, pp.1399-1404, 1998.

– M. Fujita, R. Suzuki, E. Shimemura and G. Schmidt, “H_∞ Control of a Nonlinear Magnetic Suspension System with Feedback Linearization: An Experimental Study”, In *Proc. 3rd European Control Conference ECC’95*, Rome, pp.252-257, 1995.

– M. Fujita, N. Kanamori and R. Suzuki, “Nonlinear Magnetic Suspension Control with Application to Robot Hands”, In *Proc. the 6th Japanese-German Seminar on Nonlinear Problems in Dynamical Systems - Theory and Applications* -, pp.69-79, 1994.

– R. Suzuki, M. Doi, N. Kobayashi and S. Furuya, “IMC Design with Limiting Properties of LQR and Its Application to Trajectory Tracking Control”, *1999 IEEE Conference on Control Applications*, (submitted).

- 国内学会発表論文

  – 鈴木亮一, 小林伸明, 藤田政之, “最適レギュレータとカルマンフィルタの極限的性質を用いたオブザーバベースコントローラによる近似非干渉制御”, SICE98 学術講演会予稿集, pp.511-512, 1998.

  – 鈴木亮一, 小林伸明, 藤田政之, “最適レギュレータの極限的性質を用いた非最小位相系の近似非干渉制御”, 第 27 回 制御理論シンポジウム資料, pp.45-48, 1998.

  – 藤田政之, 鈴木亮一, 示村悦二郎, “フィードバック線形化による磁気浮上系の制御における問題点”, SICE95 学術講演会予稿集, pp.683-684, 1995.

  – 藤田政之, 鈴木亮一, “厳密な線形化を用いた磁気浮上系の大域安定化”, 第 17 回 Dynamical System Theory シンポジウム, pp.225-228, 1994.

  – M. Fujita and R. Suzuki, “Magnetic Suspension Control with Application to Robot Manipulator”, 電気関係学会北陸支部連合大会講演論文集, pp.112, 1994.

– 小林伸明, 土肥雅晴, 高井辰広, 鈴木亮一 “内部モデル制御と L.Q. 制御による軌道制御”, 自動制御連合講演会, 大分, pp.21-22, 1998.