

Title	埋め込みパターンとその関連操作に基づくグラフ埋め込み最適化
Author(s)	佐藤, 円
Citation	
Issue Date	2010-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/8948">http://hdl.handle.net/10119/8948</a>
Rights	
Description	Supervisor:金子 峰雄, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

埋め込みパターンと  
その関連操作に基づくグラフ埋め込み最適化

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報科学専攻

佐藤 円

2010年3月

修士論文

埋め込みパターンと  
その関連操作に基づくグラフ埋め込み最適化

指導教官 金子 峰雄 教授

審査委員主査 金子峰雄 教授  
審査委員 日比野靖 教授  
審査委員 井口寧 准教授

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科情報科学専攻

0810029 佐藤 円

提出年月: 2010年2月

## 概要

グラフ埋め込み問題における研究の多くは、ゲストグラフ  $G$  とホストグラフ  $H$  の 1 組のペアを特定した議論に重点が置かれ、その埋め込み解は、専ら、専門家による発見に委ねられている。これに対し、本研究では埋め込み解の生成を自動で行う手法の確立を大きな目標とし、本論文ではその初期段階として、メッシュ形の規則的構造を持つグラフを対象としたパターン埋め込みと、それに関連したいくつかの操作について検討・提案を行う。パターン埋め込みは少ないパラメータで広範囲の部分埋め込みを表現しようとするものであり、また、パターン切り替えと組み合わせることにより多様性のある解の生成を可能にする枠組みである。なお、本論文の議論は、メッシュグラフを対象としたものに止まっており、より広いクラスのグラフに適用するための枠組みの拡張、改変が今後の課題である。

# 目次

第1章	はじめに	1
1.1	研究の背景	1
1.2	研究の目的	1
1.3	本論文の流れ	2
第2章	グラフ埋め込み問題	3
2.1	相互結合網と並列プログラムのグラフモデル化	3
2.2	グラフ埋め込み問題の定式化	3
2.3	グラフ埋め込み問題の評価指標	4
2.4	グラフ埋め込み問題に対する本研究の意義	4
第3章	グラフ埋め込みのアプローチ	5
3.1	単位部分グラフと局所的埋め込み	5
3.2	パターン埋め込み	7
第4章	2D メッシュへの適用	8
4.1	パターン間の切り替え	11
4.1.1	変更条件: 一辺共有条件	11
4.1.2	変更条件: 対角線共有条件	12
4.2	パターン間の重ね合わせ	15
第5章	3D メッシュへの拡張	17
5.1	パターン埋め込み	17
5.2	パターン間の切り替え	23
5.2.1	変更条件: $p_{e_3}$ 切り替え条件	23
5.3	パターン間の重ね合わせ	24
5.4	異なる切り替え	26
第6章	パターン埋め込みと操作の実用例	27
6.1	[例1] 2次元メッシュにおけるパターン埋め込み	27
6.2	[例2] 3次元メッシュにおけるパターン埋め込み	29
第7章	おわりに	33

# 第1章 はじめに

## 1.1 研究の背景

並列アプリケーションの性能に大きく影響する要素に、並列計算機の相互結合網の形状が挙げられる。相互結合網の持つグラフトポロジーが、設計された並列プログラムでの想定しているグラフモデル（このモデルは、アルゴリズムのタスク間の持つトポロジーが、特定の相互結合網上で並列性を発揮できるように設計されている）と異なれば、その並列プログラムは一般に使用できないかもしくは非常に性能の悪いものになる。

そこで、実際に計算で使用する並列計算機をその各PEをグラフの頂点、通信路を辺としたホストグラフ  $H$ （以降  $H$  とよぶ）にて表現し、一方、プログラムモデルのタスクを頂点、タスク間の関係を辺としたゲストグラフ  $G$ （以降  $G$  とよぶ）としてグラフモデル化し、 $G$  の頂点や辺を  $H$  の頂点や辺に割り当てるグラフ埋め込みが重要な役割を果たすことになる。このようなグラフ埋め込み問題の議論として従来研究は、(1) ある特定のグラフトポロジー間に特化した埋め込みの議論が多く、また、(2) その解は専ら専門家の経験等に基づいた発見に委ねられている。しかし、現実の応用を考えたグラフ埋め込みでは、グラフ構造にもグラフトポロジー・サイズ・境界形状にも多様性があり、その埋め込み解には非常な多様性がある。本研究では、これらの多くのグラフ構造、サイズ、境界形状に対して普遍的に適用できて、その実行可能解や最適解を求めることができる手法を確立することが重要であると考え、これを大きな目標とする。

## 1.2 研究の目的

実行可能解や最適解を計算で求めるアプローチとして、原理的には関数  $\Phi_V : V(G) \rightarrow V(H)$  や  $\Phi_E : E(G) \rightarrow P(H)$  を列挙しつつ探索することが考えられる。しかしこのときの解空間のサイズは、頂点の重複を許せば  $|V(H)|^{|V(G)|}$ 、重複を許さないとしても  $|V(H)|! / (|V(H)| - |V(G)|)!$  となり、大きな  $|V(G)|$  に対して頂点の写像関数をそのまま適用することは難しい。

そこで本研究では、探索において頂点間やそれに付随した辺間の写像を行うよりもマクロな扱いをすることによって、探索を効率化することを考え、そのようなマクロな取り扱いを可能にするグラフの埋め込み方について検討・提案を行う。

### 1.3 本論文の流れ

本稿の構成は、まず、2章では本研究におけるグラフモデル化とグラフ埋め込みについて述べ、3章で提案する埋め込みについて定義を行っている。また、4章で  $H$  と  $G$  を2次元メッシュの場合に提案手法を適用、またこれに伴う操作を検討し、5章で  $G$  を3次元メッシュとしたときへ提案手法と操作の拡張を行なう。6章にて、パターン埋め込みと操作を  $G$  全体に行った実用例を示し、最後に7章でまとめを述べる。

## 第2章 グラフ埋め込み問題

### 2.1 相互結合網と並列プログラムのグラフモデル化

本研究において想定する並列計算機の相互結合網と並列プログラムのグラフモデルは、  
グラフ  $H$ : 頂点  $V(H)$ : 並列計算機の各 PE, 辺  $E(H)$ : 並列計算機の通信路

グラフ  $G$ : 頂点  $V(G)$ : 並列プログラムの各タスク, 辺  $E(G)$ : タスク間の演算の依存関係

とする。この並列プログラムのグラフモデルは、設計者が利用したい並列計算機の環境に合わせて明示的に設計するものとし、時間的にそのグラフモデルが変化することはないモデルとする。例えば、FFT などの演算・データ構造はそのグラフトポロジーがバタフライグラフと言われる構造であるが、この計算を、同一時刻に行わない演算に対して同一の PE を使用するように並列化を図ったハイパーキューブグラフなどがここでいう並列プログラムのグラフモデルである。

上記グラフモデルに対して、グラフ  $H$  をホストグラフ、グラフ  $G$  をゲストグラフとして、相互結合網の通信路や PE の出す性能に反映したグラフの評価指標を満足しながら  $G$  を  $H$  に埋め込むことで、異なる相互結合網を持つ並列計算機上で、既存の並列プログラムの並列処理を可能とする一助となる。

### 2.2 グラフ埋め込み問題の定式化

グラフ埋め込みとは、与えられる2つのグラフ（ホストグラフ  $H$ 、ゲストグラフ  $G$ ）に対して、次の2つの関数を求める問題のことである。

$$\Phi_V : V(G) \longrightarrow V(H) \quad (2.1)$$

$$\Phi_E : E(G) \longrightarrow P(H) \quad (2.2)$$

ただし、 $P(H)$  は  $H$  上のパスの集合であり、 $e = \{u, v\} \in E(G)$  に対して、 $\Phi_E(G)$  は  $H$  上の  $\Phi_V(u)$  と  $\Phi_V(v)$  を端点とするパスの1つである。

## 2.3 グラフ埋め込み問題の評価指標

埋め込み解の評価には, dilation, congestion, expansion などがあり, それぞれは以下のように定義される.

dilation:  $G$  における一辺のうち, 写像後に最も長くなるパスの長さのことで,  $d(\Phi_E) = \max\{\text{パスの長さ } p : p \in \Phi_E(E(G))\}$  で表される.

edge-congestion:  $H$  の 1 つの辺に写像される  $G$  の辺の個数の最大値

expansion: 埋め込む  $G$  の頂点数に対する  $H$  の頂点数のことで,  $\frac{|V(H)|}{|V(G)|}$  で表される.

load:  $H$  の 1 つの頂点に写像される  $G$  の頂点の個数の最大値

本論文では, この指標のうち  $load = 1$  を満足するような (unit load という) 埋め込み問題を検討する.

## 2.4 グラフ埋め込み問題に対する本研究の意義

ところで, 相互結合網のグラフトポロジーは今後も統一されることはないと言われており, また, 1 つの並列計算機に対して, 空いているエリア毎に別用途に利用することを考えれば, 境界形状もグラフサイズも非常に多様となることが考えられる. このように多様なグラフトポロジー, サイズ, 境界形状に対して, 従来のように, 固有のトポロジーに対し発見的に 1 つの埋め込み解を与える議論が現実的であるとは言えない. 並列計算機をより一般的に利用するためには, この多様なグラフ形状に対して普遍的に適用できるグラフ埋め込みの手法を確立することが必要であると考えらる.

また, PE への静的な割り当てを自動並列化コンパイラで実現しようとするとき, どのプロセスをどの PE へ割り当てるかというスケジューリング問題は強 NP 困難であることが知られており, 最適解を求めることが難しい問題である (これに対しては, 近似解を求めるいくつかのヒューリスティックアルゴリズムが提案されている []). グラフ埋め込み問題の意義は, このような難しいと考えられるスケジューリングを真っ向から行うのではなく, うまく並列化を図れたスケジュールについては使いまわそう, という意味を含んでいると考えられる.

本研究の意義は, このような明示的な並列化の相互結合網に依存しない再利用と, コンパイラの並列スケジューリングの困難性を回避することにあると考えられる.

## 第3章 グラフ埋め込みのアプローチ

実行可能解や最適解を求める手法の確立として，原理的には，関数  $\Phi_V : V(G) \rightarrow V(H)$  や  $\Phi_E : E(G) \rightarrow P(H)$  を列挙しつつ，実行可能な解あるいは最適な解を探索することが考えられるが [4]， $\Phi_V$  だけでも  $|V(H)|^{|V(G)|}$  あるいは  $|V(H)|! / (|V(H)| - |V(G)|)!$  の解空間サイズとなり，大きな  $|V(G)|$  に対してそのまま適用することは難しい．

そこで，本論文では新たな埋め込み解探索手法のための初期段階として，メッシュ形の規則的構造を持つグラフを対象としたパターン埋め込みを提案し，それに関連したいくつかの操作について検討を行っていく．本章ではまずメッシュの規則性を利用したパターン埋め込みについて定義する．

### 3.1 単位部分グラフと局所的埋め込み

ここで取り扱うホストグラフ  $H$ ，ゲストグラフ  $G$  は，固有の次元，サイズをもつメッシュグラフ（あるいはそれに準じたグラフ）とする．以下では， $H, G$  共に有向グラフとして表すが，埋め込みにおいては辺の向きは問わないものとする．

$k$  次元メッシュグラフは， $k$  種類  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  の辺（種類  $e_i$  の辺を， $e_i$  辺と呼ぶ）にて特徴づけられ，

- (1) 境界の頂点を除いて，すべての頂点はそれぞれの種類から 1 つずつの出辺と入辺を持ち，
- (2) ある頂点から  $a_1$  本の  $e_1$  辺， $a_2$  本の  $e_2$  辺， $\dots$ ， $a_k$  本の  $e_k$  辺を向きに沿ってたどって至る頂点は，辺をたどる順番を問わず唯一である．

$k$  次元メッシュグラフ  $M$  において， $v \in V(M)$  とその全ての出辺およびその出辺と隣接する頂点から成る部分グラフを， $M$  の  $v$  についての単位部分グラフと呼び， $N_M(v)$  と記す．以下，ゲストグラフ  $G$  を  $k$  次元メッシュグラフ，ホストグラフ  $H$  を  $\ell$  次元メッシュグラフとする．

$G$  の  $H$  への埋め込み  $\Phi_V : V(G) \rightarrow V(H)$ ， $\Phi_E : E(G) \rightarrow P(H)$  の中での  $v \in V(G)$  についての単位部分グラフ  $N_G(v)$  の埋め込みを「頂点  $v \in V(G)$  に関する局所的埋め込み」と呼び，次の  $\Phi'_V, \Phi'_E$  にて表す．

$$\Phi'_V : V(N_G(v)) \rightarrow V(H) \quad (3.1)$$

$$\Phi'_E : E(N_G(v)) \rightarrow P(H) \quad (3.2)$$

なお以下では，辺の写像  $\Phi_E$  が指定されているとき，便宜上，頂点  $v \in V(G)$  の種類  $e_i$  の出辺  $(v, w)$  に関する  $\Phi_E$  による写像（すなわち  $H$  上のパス）を  $p_{v+e_i}$  と記し，またこれを  $(\Phi_V(v), \Phi_V(w))$  の有向辺として図示する．

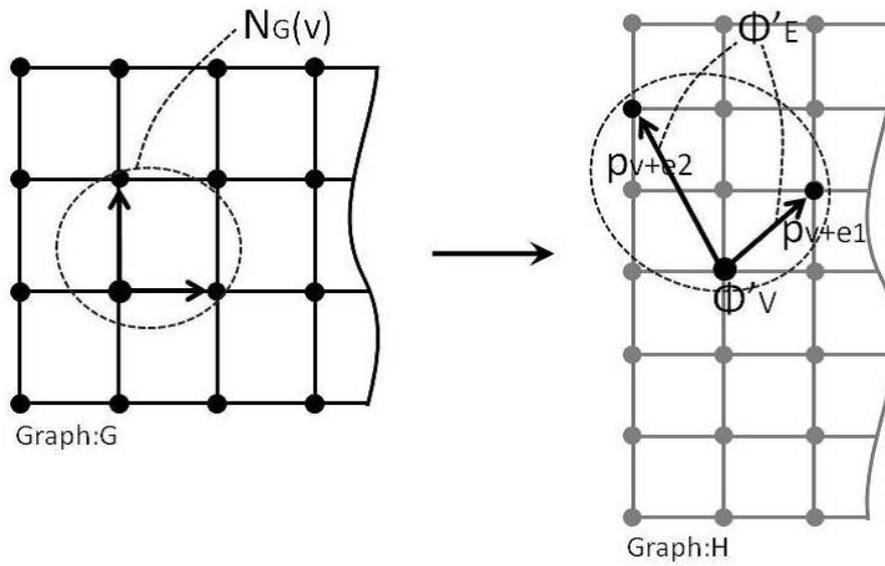


図 3.1: 単位部分グラフと局所的埋め込み

### 3.2 パターン埋め込み

ホストグラフ  $H$  の規則性から，各頂点  $v \in V(G)$  に関する単位部分グラフの  $H$  への埋め込み ( $v$  に関する局所的埋め込み) は， $G$  を規定する辺種類  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  のそれぞれに対する  $H$  を規定する辺種類  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_l\}$  の向き付き並びにて規定される．すなわち， $H$  上のパス  $p_{v+e_i}$  を始点  $\Phi_V(v)$  から終点に向かって順にたどる辺の種類と向き (順方向または逆方向) を記録することができ，また逆にこの記録と  $\Phi_V(v)$  だけでパス  $p_{v+e_i}$  を特定できる．

今， $v \in V(G)$  の単位部分グラフの  $H$  への埋め込みを規定する， $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  から  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_l\}$  の向き付き並びへの写像  $\varphi_v : \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \rightarrow \{e'_1, e'_2, \dots, e'_l, -e'_1, -e'_2, \dots, -e'_l\}^*$  を辺埋め込み列と呼ぶ． $G$  の  $H$  への埋め込み  $\Phi_V, \Phi_E$  において， $V(G)$  の部分集合  $S \subseteq V(G)$  が存在し， $S$  中の全ての頂点についての局所的埋め込みが同一の辺埋め込み列を持つとき，この  $S$  についての局所的埋め込みをパターン埋め込みと呼ぶ．

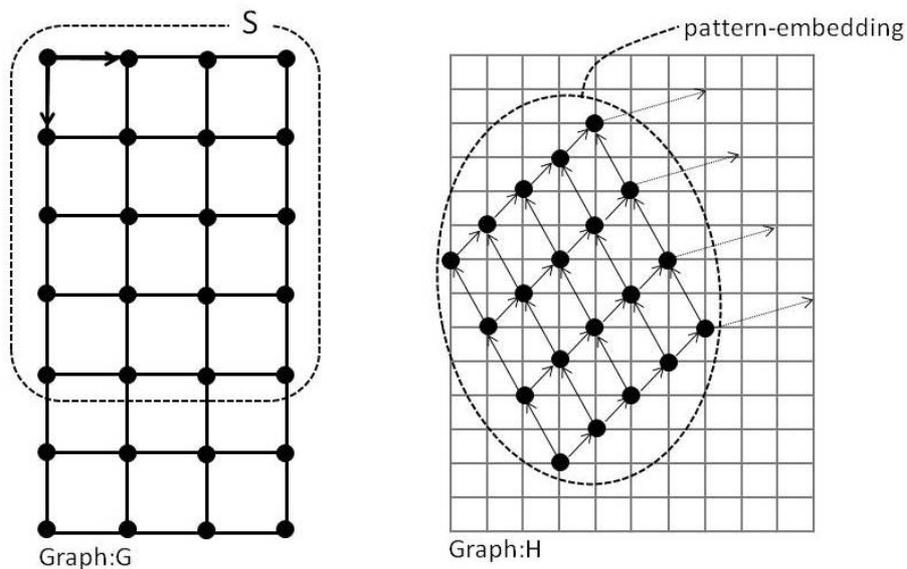


図 3.2: パターン埋め込み

## 第4章 2Dメッシュへの適用

$G$  の頂点全体  $V(G)$  についてのパターン埋め込みによって  $G$  全体がホストグラフ  $H$  へ埋め込めるとは限らないし、またそれがあつたとしても最適であるとは限らない。こうした問題を回避するために、 $G$  の部分部分で異なるパターン埋め込みを行うためのパターンの切り替え操作や2つ以上のパターンが両立する条件を考察する。

なおこの章では、 $G, H$  を共に2次元メッシュとして議論を行う。また、 $G$  を特徴づける2種類の辺を  $\{e_1, e_2\}$  とし、 $H$  を特徴づける2種類の辺  $\{e'_1, e'_2\}$  を、直交座標系における2つの基底ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  に対応させる。また、埋め込みの表現の簡単化のため、 $v \in V(G)$  の種類  $e_i$  の出辺  $(v, w)$  に関する  $\Phi_E$  による写像を  $\Phi_V(v)$  から  $\Phi_V(w)$  へ向かうベクトルにて表現する。これに合わせて、 $G$  の単位部分グラフの  $H$  への埋め込みを規定する辺埋め込み列を、 $\{e'_1, e'_2\}$  の向き並びに対応してベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を符号付き和し得られるベクトル（辺埋め込みベクトル） $p_{e_1} = \begin{pmatrix} x_{p_{e_1}} \\ y_{p_{e_1}} \end{pmatrix}, p_{e_2} = \begin{pmatrix} x_{p_{e_2}} \\ y_{p_{e_2}} \end{pmatrix}$  として表す。

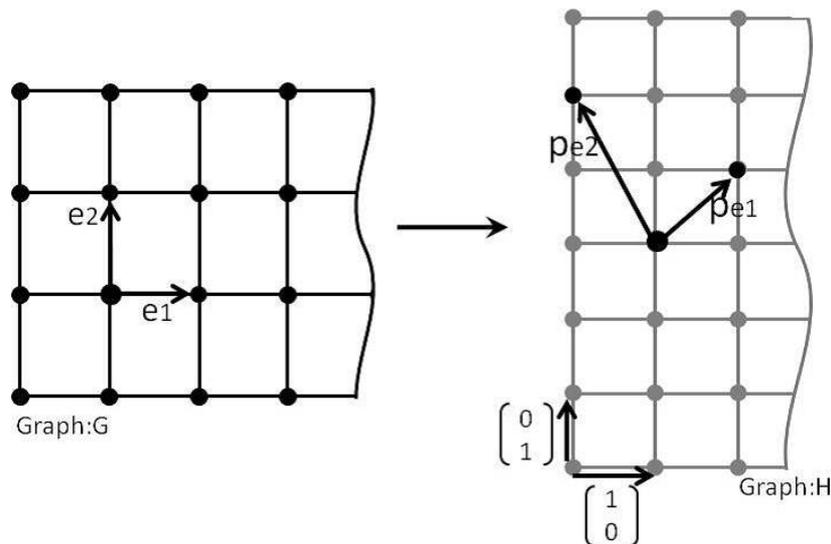


図 4.1: 辺埋め込みベクトル



一般形

デカルト平面上の任意の点は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{p}_{e_1} + \beta \mathbf{p}_{e_2} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{y_{p_{e_2}} x - x_{p_{e_2}} y}{x_{p_{e_1}} y_{p_{e_2}} - y_{p_{e_1}} x_{p_{e_2}}} \\ &= \frac{y'_{p_{e_2}} x - x'_{p_{e_2}} y}{(x_{p_{e_1}} y_{p_{e_2}} - y_{p_{e_1}} x_{p_{e_2}}) / \gcd(x_{p_{e_2}}, y_{p_{e_2}})} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{-y'_{p_{e_1}} x + x'_{p_{e_1}} y}{x_{p_{e_1}} y_{p_{e_2}} - y_{p_{e_1}} x_{p_{e_2}}} \\ &= \frac{-y'_{p_{e_1}} x + x'_{p_{e_1}} y}{(x_{p_{e_1}} y_{p_{e_2}} - y_{p_{e_1}} x_{p_{e_2}}) / \gcd(x_{p_{e_1}}, y_{p_{e_1}})} \end{aligned} \quad (4.4)$$

と表せるので，

$$s_1 = (x_{p_{e_1}} y_{p_{e_2}} - y_{p_{e_1}} x_{p_{e_2}}) / \gcd(x_{p_{e_2}}, y_{p_{e_2}}) \quad (4.5)$$

$$s_2 = (x_{p_{e_1}} y_{p_{e_2}} - y_{p_{e_1}} x_{p_{e_2}}) / \gcd(x_{p_{e_1}}, y_{p_{e_1}}) \quad (4.6)$$

とおけば，埋め込まれた  $G$  の任意の頂点は，この  $\mathbf{p}_{e_1}/s_1 - \mathbf{p}_{e_2}/s_2$  座標系においては， $M$ ， $N$  を整数として，

$$(|s_1| \cdot M, |s_2| \cdot N) \quad (4.7)$$

と表せる．

図 4.3 は一般の場合のパターン埋め込みの例である．

$\mathbf{p}_{e_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{p}_{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  であり，このとき，

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3x - y}{(6 \cdot 3 - 1 \cdot 2)} = \frac{3x - y}{16} \\ \beta &= \frac{-2x + 6y}{6 \cdot 3 - 1 \cdot 2} = \frac{-x + 3y}{8} \end{aligned}$$

から  $s_1 = 16$ ， $s_2 = 8$  となるので， $\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  の座標系で見たときの  $G$  の埋め込み先頂点の座標は， $(16M, 8N)$  で表される．

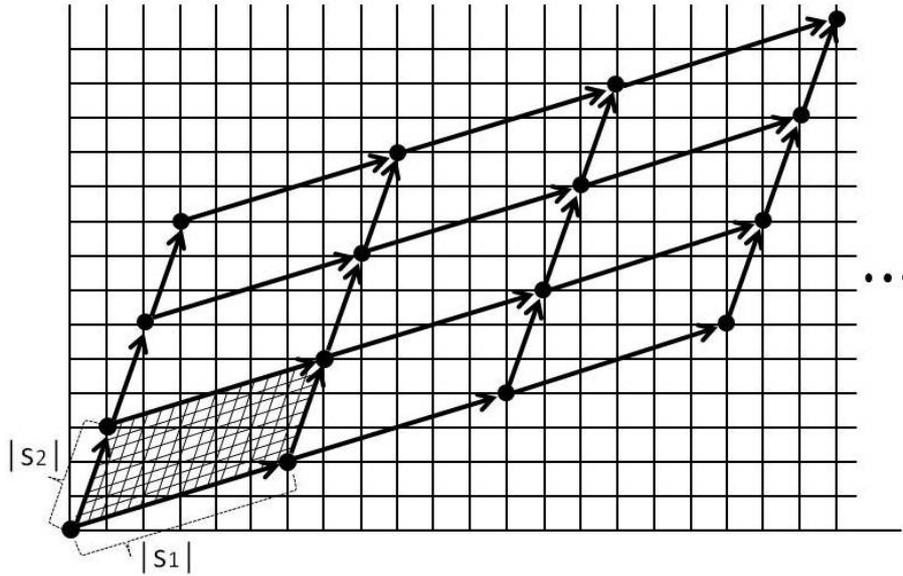


図 4.3: 一般の場合のパターン埋め込み例

## 4.1 パターン間の切り替え

切り替えとは、切り替え前後のパターンにおける頂点間の隣接関係を維持したまま、 $p_{e_1}$  と  $p_{e_2}$  の値を変更することを指す。

変更する前をパターン A、変更後をパターン B とし、それぞれの辺埋め込みベクトルを  $p_{A_{e_1}}, p_{A_{e_2}}, p_{B_{e_1}}, p_{B_{e_2}}$  とすれば、パターンの切り替えにおいてそれらの満たすべき代表的な条件は、次の条件 4.1.1 や条件 4.1.2 となる。

### 4.1.1 変更条件: 一辺共有条件

パターン A とパターン B の一辺を共有するパターンの切り替えに関する十分条件は、

$$p_{A_{e_1}} = p_{B_{e_1}} \quad (4.8)$$

あるいは

$$p_{A_{e_2}} = p_{B_{e_2}} \quad (4.9)$$

のいずれかを満たす。

図 4.4 は、一辺共有条件による切り替えの一例である。

パターン A の辺埋め込みベクトル  $p_{A_{e_1}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ 、 $p_{A_{e_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  と、パターン B の辺埋め込みベクトル  $p_{B_{e_1}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ 、 $p_{B_{e_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  は、一辺共有切り替えの条件式 (4.9) を満たし

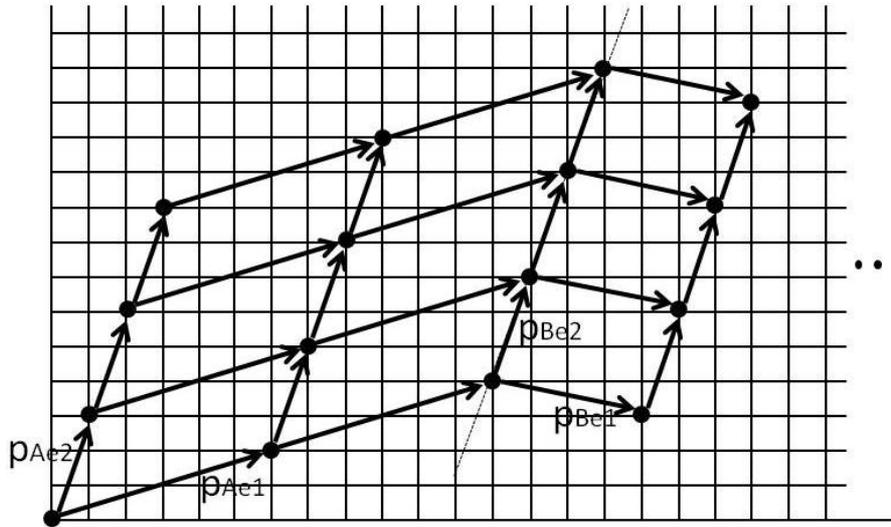


図 4.4: 一辺共有条件による切り替え例

ている .

#### 4.1.2 変更条件: 対角線共有条件

$$k_1 p_{A_{e_1}} + k_2 p_{A_{e_2}} = k_1 p_{B_{e_1}} + k_2 p_{B_{e_2}} \quad (4.10)$$

を満たす非零整数  $k_1, k_2$  が存在する .

図 4.5 は , 対角線共有条件による切り替えの例である .

パターン A の辺埋め込みベクトル  $p_{A_{e_1}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$  ,  $p_{A_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  と , パターン B の辺埋め込みベクトル  $p_{B_{e_1}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ,  $p_{B_{e_2}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  は ,  $p_{A_{e_2}} - p_{A_{e_1}} = p_{B_{e_2}} - p_{B_{e_1}}$  となり , 2次元メッシュにおける対角線切り替えの条件式 (4.10) を満たしている .

補足: 3つ以上のパターンの切り替え

なお , 3本以上の切り替え線が存在するとき , その切り替えが成立する条件は次のようになる .

3つのパターン切り替えが成立する条件

異なる3つのパターン間で接続できる十分条件は , パターン境界における切り替えの条件が互いに異なることである .

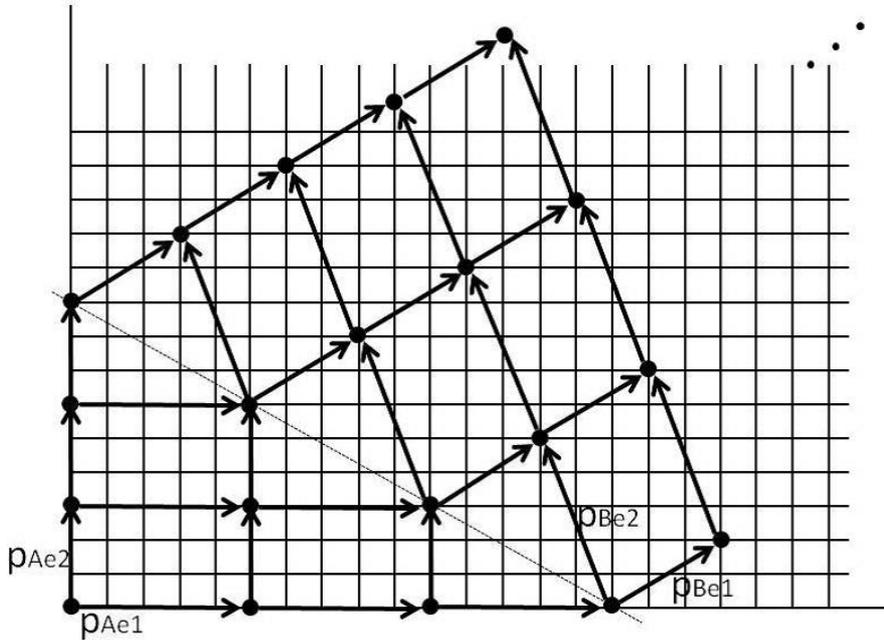


図 4.5: 対角線共有条件による切り替え例

証明. 図 4.6 において, パターン A, パターン B, パターン C の間で切り替えが可能であるとする. このとき, パターン A とパターン B, パターン A とパターン C, パターン B とパターン C は, それぞれ切り替えの条件を満たす必要がある.

切り替えの条件は, 一辺の共有が可能であるか, 対角線の共有が可能であることである. ここで, 仮にパターン A とパターン B, パターン A とパターン C における切り替えの条件が一致して, 一辺共有という条件である場合には, パターン A とパターン B 間で,

$$p_{Ae_1} = p_{Be_1} \quad (4.11)$$

を満たし, かつ, パターン A とパターン C 間で,

$$p_{Ae_1} = p_{Ce_1} \quad (4.12)$$

を満たしている. このとき, 推移律によってパターン B とパターン C 間においても

$$p_{Ae_1} = p_{Ce_1} \quad (4.13)$$

が成立する.

一方, パターン B とパターン C も切り替え条件を満たしていることより, パターン B とパターン C 間のもう一方の辺埋め込みベクトルで,

$$p_{Be_2} = p_{Ce_2} \quad (4.14)$$

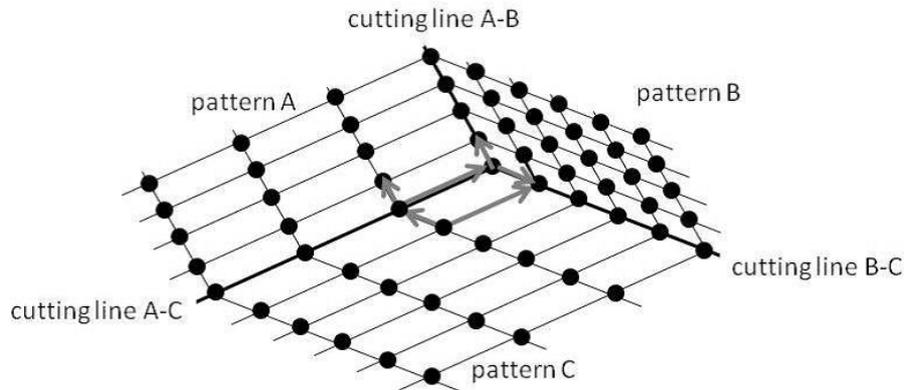


図 4.6: 3つのパターン間の切り替えの概念図

であるか、または、

$$k_1 p_{B_{e_1}} + k_2 p_{B_{e_2}} = k_1 p_{C_{e_1}} + k_2 p_{C_{e_2}} \quad (4.15)$$

を満たしている。以上のことより、パターン B とパターン C を決定付ける辺埋め込みベクトルの組  $p_{B_{e_1}}, p_{B_{e_2}}$  と  $p_{C_{e_1}}, p_{C_{e_2}}$  は同じ組み合わせとなり、パターンが切り替わっていないことになる。□

共通する切り替え条件が対角線共有の場合も同様である。

4つのパターン切り替えが成立する条件

図 4.7 において、4つのパターンの切り替えが成立する十分条件は、パターン A とパターン B 間、パターン B とパターン C 間、パターン C とパターン D 間、パターン D とパターン A 間において、2パターン間の切り替えの十分条件（一辺共有か、対角線共有）を満たしていることである（ただし、3つのパターンのときと同じ論理により、パターン A とパターン B 間、パターン C とパターン D 間での切り替えの条件は一致しないものとする）。

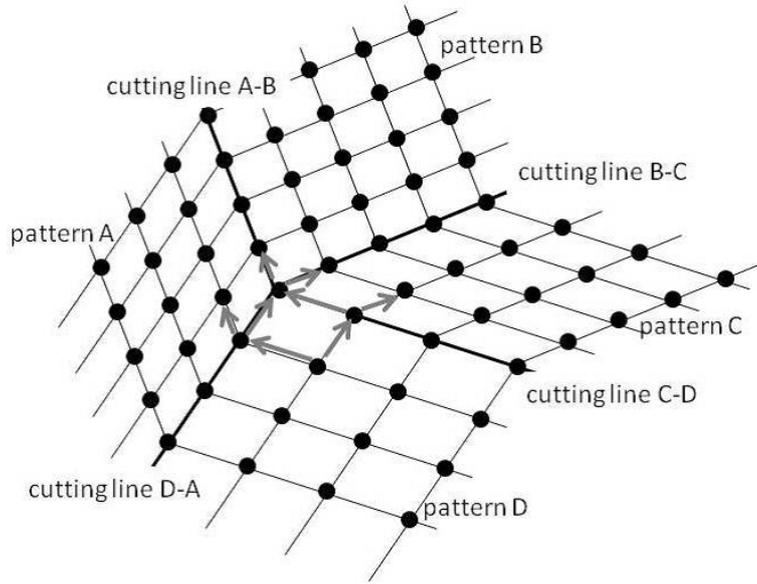


図 4.7: 4 つのパターン間の切り替えの概念図

## 4.2 パターン間の重ね合わせ

パターン切り替えを行った場合，複数の異なったパターン埋め込みがホストグラフ上に混在することになり，vertex-congestion を 1 以下に保障するための条件が必要となる．パターン A における一単位部分グラフ埋め込みにて利用されていない頂点数（空き） $|v_{free}|$  は，

$$\begin{aligned}
 |v_{free}| &= |\mathbf{p}_{A_{e_1}}| |\mathbf{p}_{A_{e_2}}| \sin \theta - 1 \\
 &= \sqrt{|\mathbf{p}_{A_{e_1}}|^2 |\mathbf{p}_{A_{e_2}}|^2 - (\mathbf{p}_{A_{e_1}} \cdot \mathbf{p}_{A_{e_2}})^2} - 1
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

にて計算できて， $|v_{free}| \geq 1$  であるときには，その空き頂点を他のパターン埋め込みにて利用（パターンの重ね合わせ）することができる．なお，2 つのパターン A, B が重ね合わせられる 1 つの十分条件は，A, B が共に  $|v_{free}| \geq 1$  を満たし，かつ， $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  を整数として，

$$\mathbf{p}_{B_{e_1}} = \alpha_1 \mathbf{p}_{A_{e_1}} + \alpha_2 \mathbf{p}_{A_{e_2}} \tag{4.17}$$

$$\mathbf{p}_{B_{e_2}} = \beta_1 \mathbf{p}_{A_{e_1}} + \beta_2 \mathbf{p}_{A_{e_2}} \tag{4.18}$$

と書けることである．パターン A の 1 つの単位部分グラフ埋め込みに対する空き頂点を  $v$  とするとき， $v$  から  $\mathbf{p}_{A_{e_1}}, \mathbf{p}_{A_{e_2}}$  の整数重み和の位置にある頂点はいずれもパターン A で使われていない．したがって，上記のような  $\mathbf{p}_{B_{e_1}}, \mathbf{p}_{B_{e_2}}$  を辺埋め込みベクトルとするパターン埋め込みは，パターン A にて使用されていない頂点のみを使うことができる．

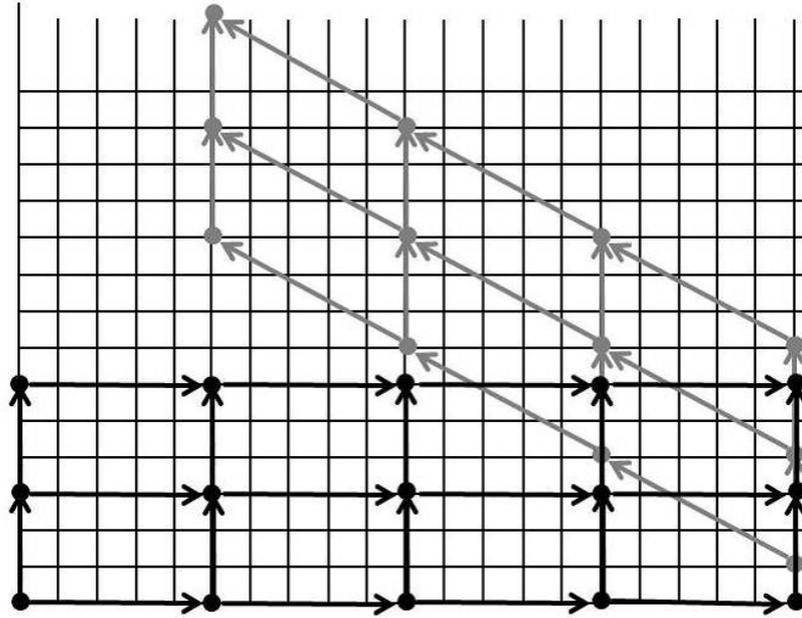


図 4.8: パターン重ね合わせの例

図 4.8 は重ね合わせの一例である .

パターン A の辺埋め込みベクトル  $p_{A_{e_1}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$  ,  $p_{A_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  と , パターン B の辺埋め込みベクトル  $p_{B_{e_1}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$  ,  $p_{B_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  は ,  $p_{B_{e_1}} = -p_{A_{e_1}} + p_{A_{e_2}}$  ,  $p_{B_{e_2}} = p_{A_{e_2}}$  となり , 2次元メッシュにおける重ね合わせの条件式 (4.17) , (4.18) を満たしている .

## 第5章 3Dメッシュへの拡張

パターン埋め込みとその操作の適用範囲を拡張すべく、本章ではゲストグラフ  $G$  が3Dメッシュグラフを特徴づける3種類の辺を  $\{e_1, e_2, e_3\}$  とし、 $e_i$  辺だけを使うパスの最大長を  $n_i - 1$  (頂点数  $n_i$ ) とする。

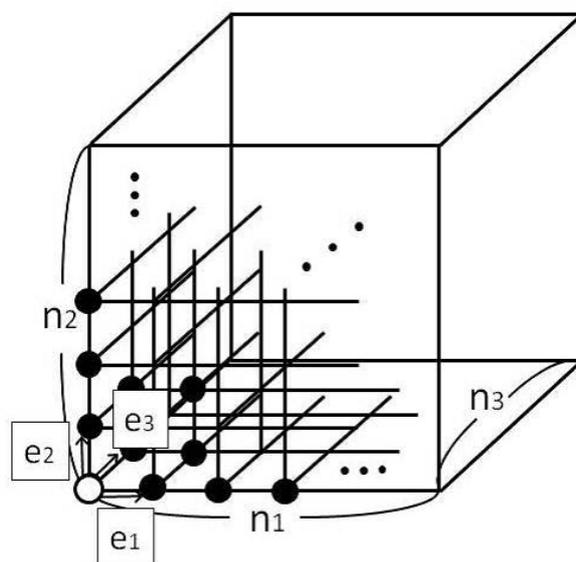


図 5.1: 3Dメッシュグラフ

### 5.1 パターン埋め込み

2Dメッシュでの検討を行った際、埋め込まれた  $G$  の頂点は、 $H$  上の格子点に対して式 (4.1), (4.7) のように表された。3Dメッシュグラフ  $G$  の2Dメッシュグラフ  $H$  への埋め込みを、 $p_{e_1}$  と  $p_{e_2}$  で成るパターンの面が  $n_3$  面 (第0面から第  $n_3 - 1$  面まで)、 $p_{e_3}$  方向に並ぶ構造として捉え、 $p_{e_1}$  と  $p_{e_2}$  で設けられる空き頂点を剰余類によって分類し、第0面を式 (4.1) や (4.7) の剰余類0における位置に埋め込むとみなして、それ以降、面毎に第0面における異なる種類の点を使うことによって、 $n_3$  面分の頂点を重ならず埋め込むことができる。

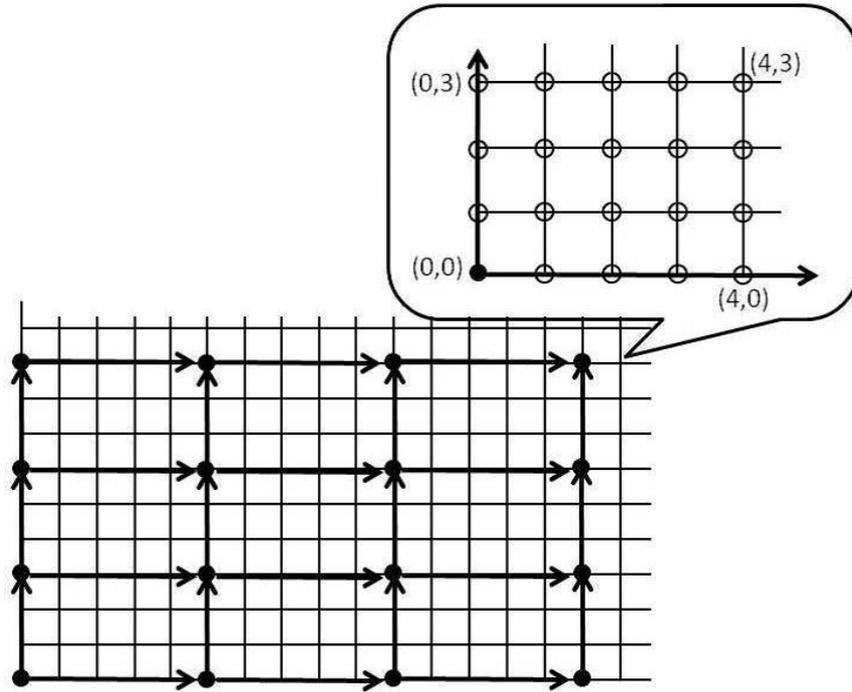


図 5.2: 剰余類による分類

図 5.2 は剰余類による分類例である .

$p_{A_{e_1}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $p_{A_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  によって,  $X$  軸方向では  $|p_{A_{e_1}}|$  の剰余類  $0, 1, 2, 3, 4$  の 5 種類,  $Y$  軸方向では  $|p_{A_{e_2}}|$  の剰余類  $0, 1, 2$  の 3 種類の組み合わせによって,  $(0, 0), (2, 0), (3, 0), \dots, (4, 2), (4, 3)$  までの  $5 \times 3$  種類の異なる種類の位置を作れるので, 各面について全て異なる位置の点を利用することが可能ならば,  $p_{A_{e_1}}, p_{A_{e_2}}$  についてはこのパターンを用いて, 15 面分の頂点を重ならず埋め込むことができる. これを踏まえ,  $p_{e_3}$  方向まで含めてパターンが成立するための条件 (すなわち, 全て固定の  $p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3}$  によって,  $n_3$  面分の頂点を全て重ならず埋め込める条件) を検討する .

$$p_{e_1} = \begin{pmatrix} x_{p_{e_1}} \\ 0 \end{pmatrix}, p_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{p_{e_2}} \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

まず, 簡単のために,  $p_{e_1}$  と  $p_{e_2}$  がデカルト平面における  $X$  軸  $Y$  軸に沿うときの  $p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3}$  について検討する. このとき  $p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3}$  が次の条件を満たしていれば,  $n_3$  枚の面を持つ 3D メッシュについてパターンが成立する .

$p_{e_1}, p_{e_2}$  の満たすべき条件

定理 5.1.1.  $p_{e_1} = \begin{pmatrix} x_{p_{e_1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $p_{e_2} = p_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{p_{e_2}} \end{pmatrix}$  のとき,  $n_3$  枚分の頂点に対しパターンが

成立する必要条件は，

$$\text{lcm}(|x_{e_1}|, |y_{e_2}|) \geq n_3 \quad (5.1)$$

が成り立つことである．

証明.  $\text{lcm}(|x_{p_{e_1}}|, |y_{p_{e_2}}|) < n_3$  が成り立つとき， $|x_{p_{e_1}}|$  の倍数でかつ， $|y_{p_{e_2}}|$  の倍数である数  $\ell$  が  $n_3$  未満の整数で存在することになる．このとき， $\mathbf{p}_{e_3}$  としてどのような整数ベクトルを選んだとしても，

$$(\ell \cdot \mathbf{p}_{e_3})_x \equiv 0 \pmod{|x_{p_{e_1}}|} \quad (5.2)$$

$$(\ell \cdot \mathbf{p}_{e_3})_y \equiv 0 \pmod{|y_{p_{e_2}}|} \quad (5.3)$$

$(\ell \cdot \mathbf{p}_{e_3})_x$ ， $(\ell \cdot \mathbf{p}_{e_3})_y$  は  $\ell \cdot \mathbf{p}_{e_3}$  の  $x$  座標成分と  $y$  座標成分，となり，この第  $\ell$  面において座標は第 0 面と一致し， $n_3$  枚分を埋め込めない．  $\square$

#### $\mathbf{p}_{e_3}$ の満たすべき条件

次に，パターンが有効であるための十分条件について示す．パターンが有効であるとは，上記の必要条件を満たす  $\mathbf{p}_{e_1}$ ， $\mathbf{p}_{e_2}$  に加え， $\mathbf{p}_{e_3}$  が  $n_3$  枚分の頂点が重ならないように選ばれることを意味する．

定理 5.1.2.  $\mathbf{p}_{e_1} = \begin{pmatrix} x_{p_{e_1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{p}_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{p_{e_2}} \end{pmatrix}$  のとき， $n_3$  枚分の頂点に対しパターンの成立する十分条件は， $\mathbf{p}_{e_3} = \begin{pmatrix} x_{p_{e_3}} \\ y_{p_{e_3}} \end{pmatrix}$  について， $x_{p_{e_3}}$  を  $U(\mathbf{Z}/|x_{p_{e_1}}|\mathbf{Z})$  から， $y_{p_{e_3}}$  を  $U(\mathbf{Z}/|y_{p_{e_2}}|\mathbf{Z})$  から選ぶことである．

証明. ある  $i$  面と  $j$  面 ( $j > i$ ) について

$$(j - i) \cdot x_{p_{e_3}} \equiv 0 \pmod{|x_{p_{e_1}}|} \quad (5.4)$$

$$(j - i) \cdot y_{p_{e_3}} \equiv 0 \pmod{|y_{p_{e_2}}|} \quad (5.5)$$

を同時に満たす解  $(j - i)$  は  $n_3$  以降にしか現れず，しかも  $x_{p_{e_3}}$  と  $y_{p_{e_3}}$  として  $\mathbf{Z}/|x_{p_{e_1}}|\mathbf{Z}$  と  $\mathbf{Z}/|y_{p_{e_2}}|\mathbf{Z}$  の正則元を選べば，その解  $(j - i)$  は一意に決まることを示せばよい．

まず，正則元を選ぶときの一次合同式の解の一意性について示す．

正の整数  $m$  と 0 でない整数  $a$  と  $b$  について， $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$  の元  $a$  が零因子を持つとは， $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$  のうち，0 でない元  $b$  が存在して， $a \cdot b = 0$  となることである．これは， $ab \equiv 0 \pmod{m}$  つまり  $m|ab$  であり， $\text{gcd}(a, m) \neq 1$  を意味する．そうでないとき，すなわち  $a$  が正則元であるとき， $\text{gcd}(a, m) = 1$  であって，このとき

補題 1. 正の整数  $m$  と 0 でない整数  $a, b$  について一次合同式  $aX \equiv b \pmod{m}$  は， $\text{gcd}(a, m) = 1$  のとき  $m$  を法として一意的な解  $X$  を持つ．

という補題が成り立つので,  $x_{p_{e_3}}$  と  $y_{p_{e_3}}$  として  $\mathbb{Z}/|x_{p_{e_1}}|\mathbb{Z}$  と  $\mathbb{Z}/|y_{p_{e_2}}|\mathbb{Z}$  の正則元を選ぶことによって, 式 (5.4) と式 (5.5) はそれぞれ  $|x_{p_{e_1}}|$  と  $|y_{p_{e_2}}|$  を法として一意的な解を持つ. さらに, 式 (5.4), 式 (5.5) を同時に満たすような  $(j-i)$  は  $n_3$  以降にしか現れないことを示す. 定理 5.1.1 により  $\text{lcm}(x_{p_{e_1}}, y_{p_{e_2}}) \geq n_3$  が成立しており, このとき

補題 2. 正の整数  $m, n$  と整数  $a, b$  について, 連立一次合同式

$$x \equiv a \pmod{m} \quad (5.6)$$

$$x \equiv b \pmod{n} \quad (5.7)$$

が解を持つための必要十分条件は

$$a \equiv b \pmod{\text{gcd}(m, n)} \quad (5.8)$$

であり, 解は  $\text{lcm}(m, n)$  を法として一意的である.

という補題を利用すれば, 式 (5.4), 式 (5.5) を同時に満たすような  $(j-i)$  は  $\text{lcm}(|x_{p_{e_1}}|, |y_{p_{e_2}}|)$  を法として一意的なので,  $n_3$  以降でしか現れないことが示される.

補題 2 の証明. 上記補題は, 中国人の剰余定理における二つの整数が互いに素でないときのことを指しており, これを示すことにする.

まず, 十分性を証明する. 式 (5.6), 式 (5.7) が解  $X$  を持つとき,  $d = \text{gcd}(m, n)$  から  $X \equiv a \pmod{d}$ ,  $X \equiv b \pmod{d}$  が成り立つので,  $a \equiv b \pmod{d}$  となる.

次に, 必要性を証明する. 式 (5.8) が成り立つとき, 式 (5.6) から

$$x = a + mt \quad (5.9)$$

と表すことができ, これと式 (5.7) から

$$a + mt \equiv b \pmod{n} \quad (5.10)$$

これより

$$mt - nu = b - a \quad (5.11)$$

と表せる. ここで, 不定方程式の次の 2 つの性質を使うことにする.

(a.) 不定方程式  $aX + bY = c$  が  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  に対して,  $\text{gcd}(a, b) = d$  とするとき  $aX + bY = c$  が解を持つ  $\iff d|c$  である.

(b.)  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  に対し,  $aX + bY = c$  が解  $(x_0, y_0)$  を持つとき, 不定方程式の全ての解は  $(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t (t \in \mathbb{Z}))$  と表せる.

これによって, 式 (5.11) の解  $t$  は  $t = t_0 + \frac{-n}{d}v$  と表せる. これによって,  $\ell = -\frac{mn}{d}$  とすると,

$$\begin{aligned} x &= a + mt \\ &= a + m(t_0 + \frac{-n}{d}v) \\ &= a + mt_0 - \frac{mn}{d}v \\ &= a + mt_0 + \ell v \end{aligned} \quad (5.12)$$

となり, これは式 (5.8) が成り立つ時, 式 (5.6), 式 (5.7) の解である.

最後に一意性を示す. 解が  $x, x'$  が存在するとすると,  $m|x, n|x, m|x', n|x'$  から  $(mn/d)|x, (mn/d)|x'$ . すなわち,  $x = x' \pmod{\ell}$ .  $\square$

□

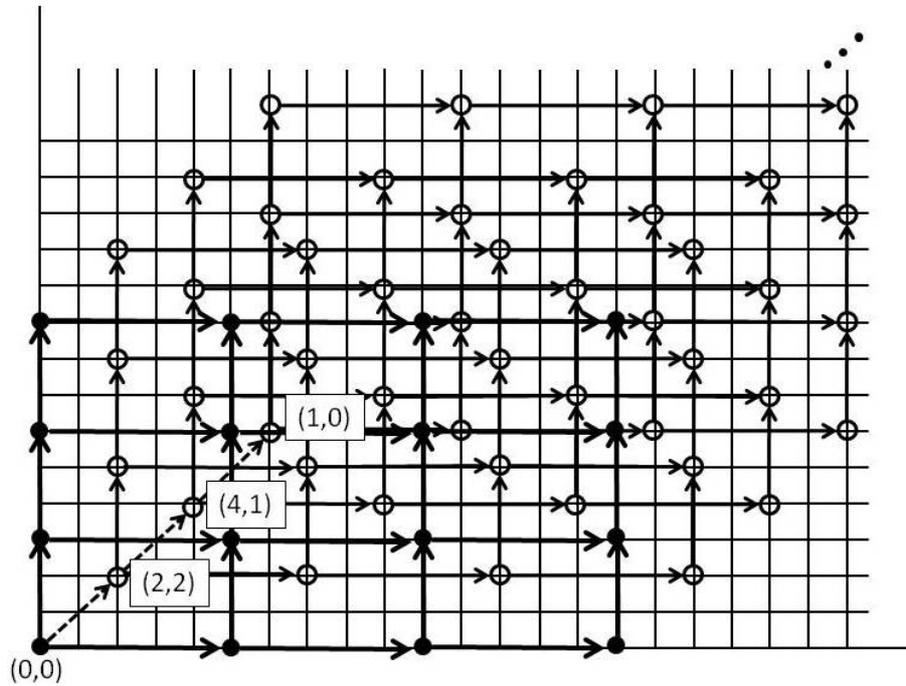


図 5.3:  $p_{e_1}, p_{e_2}$  が  $X, Y$  軸に沿う場合のパターン埋め込み例

図 5.3 は  $p_{e_1}, p_{e_2}$  が  $X, Y$  軸に沿う場合のパターン埋め込み例である。  $p_{e_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $p_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  をとるとき,  $p_{e_3}$  の  $x$  方向成分は  $U(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$  から 1 つ,  $p_{e_2}$  の  $y$  方向成分は  $U(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  から 1 つ選ぶと,  $i \cdot p_{e_3}$  ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 14$ ) による埋め込み先の座標は,  $X$  成分は  $\text{mod } 5$  において,  $Y$  成分は  $\text{mod } 3$  においてすべて異なるようにでき, このとき 15 面分の頂点が全て重ならず埋め込める。

一般形での表現

$p_{e_1}$  と  $p_{e_2}$  が一般的な場合について述べる。

このとき  $p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3}$  は, 次の条件を満たしている。

$p_{e_1}, p_{e_2}$  の満たすべき条件

定理 5.1.3. 一般形において  $n_3$  枚分の頂点に対しパターンが有効であるための必要条件は, 式 (4.5), (4.6) を用いて

$$\text{lcm}(|s_1|, |s_2|) \geq n_3 \quad (5.13)$$

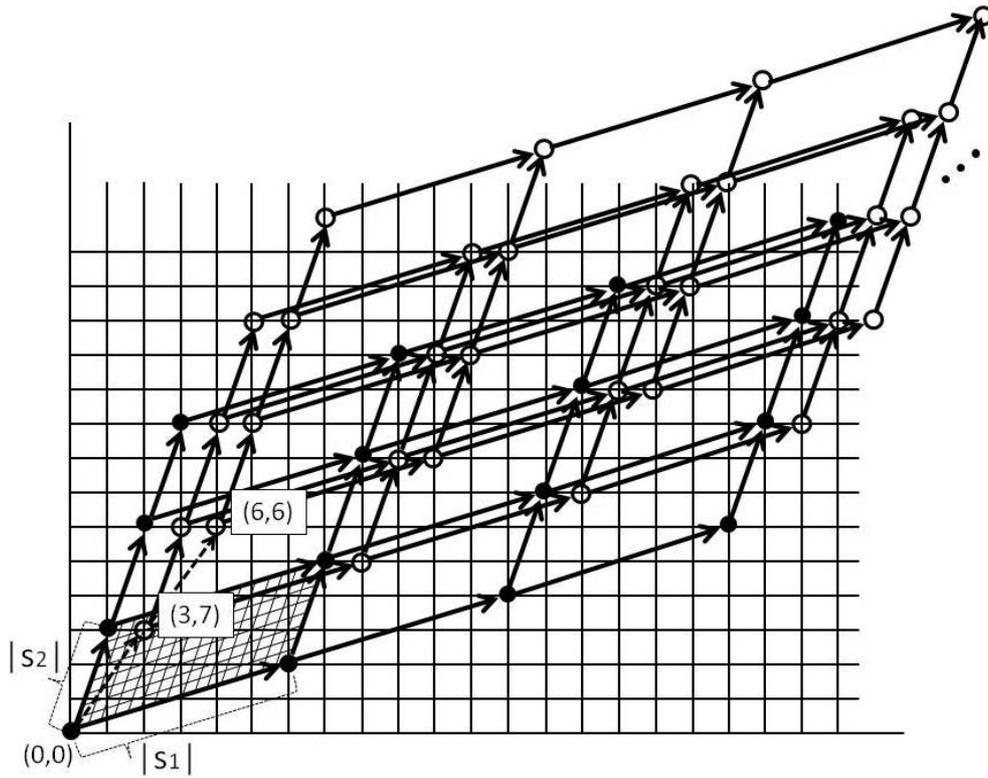


図 5.4: 一般の場合のパターン埋め込み例

と表される .

$p_{e_3}$  の満たすべき条件

定理 5.1.4. 一般系において,  $n_3$  枚分の点に対しパターンが有効であるための十分条件は,  $p_{e_3} = \begin{pmatrix} x_{p_{e_3}} \\ y_{p_{e_3}} \end{pmatrix}$  について,  $x_{p_{e_3}}$  成分は  $|s_1|$  の剰余類の正則元  $U(\mathbf{Z}/|s_1|\mathbf{Z})$ ,  $y_{p_{e_3}}$  成分は  $|s_2|$  の剰余類の正則元  $U(\mathbf{Z}/|s_2|\mathbf{Z})$  から選ぶことである .

このとき,  $\gcd(x_{p_{e_3}}, |s_1|) = 1$ ,  $\gcd(y_{p_{e_3}}, |s_2|) = 1$  となり, 補題 1 により

$$(j - i) \cdot x_{p_{e_3}} \equiv 0 \pmod{|s_1|} \quad (5.14)$$

$$(j - i) \cdot y_{p_{e_3}} \equiv 0 \pmod{|s_2|} \quad (5.15)$$

の解の一意性を満たし,  $n_3$  点分の点は重ならない .

図 5.4 は, 一般の場合のパターンの埋め込み例である .

今, パターンは辺埋め込みベクトル  $p_{e_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $p_{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  を持っており,  $p_{e_3}$  の  $p_{e_1}$  方向成分は  $U(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})$  から 1 つ,  $p_{e_2}$  の  $y$  方向成分は  $U(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$  から 1 つ選ぶと,  $i \cdot$

$p_{e_3}$  ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 15$ ) による埋め込み先の座標は,  $p_{e_1}$  成分は mod16 において,  $p_{e_2}$  成分は mod8 においてすべて異なるようにでき, このとき 16 面分の頂点が全て重ならず埋め込める.

## 5.2 パターン間の切り替え

$G$  が 2D メッシュのとき, 切り替えとは切り替え前のパターンにおける頂点間の隣接関係を維持したまま,  $p_{e_1}$  と  $p_{e_2}$  の値を変更したパターンのことであった. 3D メッシュにおいても同じ切り替えを行う場合,  $p_{e_3}$  についても頂点間の隣接関係を維持することが必要で, これは次の十分条件によって満たされる.

### 5.2.1 変更条件: $p_{e_3}$ 切り替え条件

3D メッシュにおいてパターン間に切り替えが可能な十分条件は,

$$p_{A_{e_3}} = \alpha p_{A_{e_1}} + \beta p_{A_{e_2}} \quad (5.16)$$

に対して,

$$p_{B_{e_3}} = \alpha p_{B_{e_1}} + \beta p_{B_{e_2}} \quad (5.17)$$

を満たす  $p_{B_{e_3}}$  が  $H$  上の頂点として存在することである.

パターン A とパターン B 間で, 2D メッシュの変更条件に加え, 上記の変更条件を満たすとき, 3D メッシュの埋め込みにおける切り替えを行うことができる.

図 5.5 は 3 次元メッシュにおけるパターン切り替えの例である.

パターン A は辺埋め込みベクトル  $p_{A_{e_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $p_{A_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  を持ち, ここから, 4.1.2 の対角線共有条件を経て,  $p_{B_{e_1}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  と  $p_{B_{e_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  を持つパターン B へ切り替わっている. パターン A において

$$p_{A_{e_3}} = \frac{1}{2} p_{A_{e_1}} + \frac{1}{2} p_{A_{e_2}}$$

である. 一方,  $p_{B_{e_3}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  は,

$$\alpha = \frac{2 \cdot 3 - 3}{6}$$

$$\beta = \frac{-3 + 2 \cdot 3}{6}$$

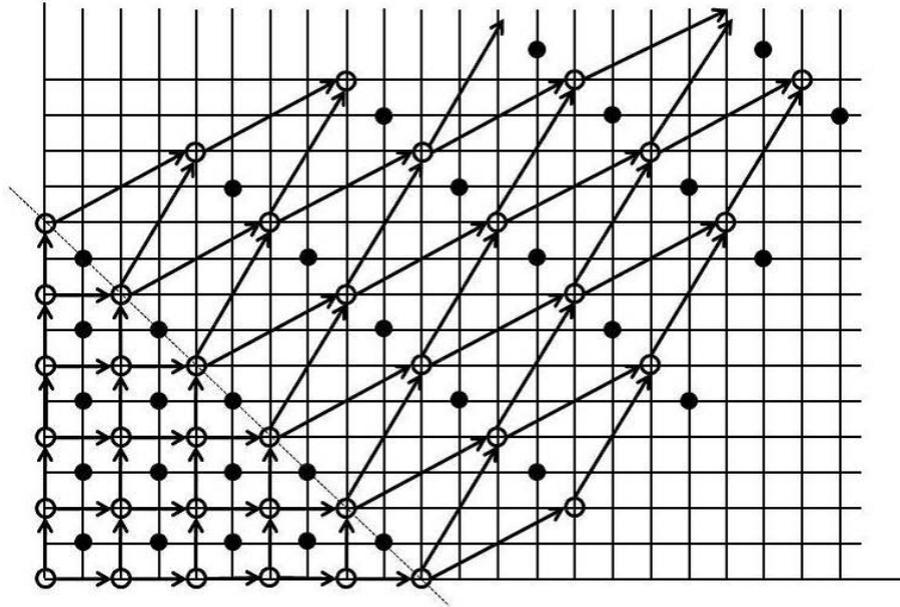


図 5.5: 3D メッシュにおけるパターン切り替えの例

によって,  $p_{B_{e_1}}/|s_1| - p_{B_{e_2}}/|s_2|$  座標系で見た  $(3, 3)$  をとり,

$$\begin{aligned} p_{B_{e_3}} &= \frac{3}{6}p_{B_{e_1}} + \frac{3}{6}p_{B_{e_2}} \\ &= \frac{1}{2}p_{B_{e_1}} + \frac{1}{2}p_{B_{e_2}} \end{aligned}$$

となるので, 3次元メッシュにおける切り替えの条件を満たしている.  
(一辺共有の切り替え条件における切り替えも同様の条件を満たす.)

### 5.3 パターン間の重ね合わせ

2つのパターン埋め込みが混在するとき, 1つのパターン(パターンA)埋め込みは, 他のパターン埋め込みが使う頂点を残してそれ以外の頂点を使う必要がある. このため, まず元々  $\text{lcm}(|s_1|, |s_2|) \geq n_3$  であったところを  $\text{lcm}(|s_1|, |s_2|) \geq 2n_3$  を条件に  $p_{e_1}, p_{e_2}$  を定め, また, 元々の倍の  $2n_3$  枚の面を埋め込めるように  $p_{e_3}$  を定める. 次に, こうして定めた  $p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3}$  に対して,  $p_{A_{e_1}} = p_{e_1}, p_{A_{e_2}} = p_{e_2}, p_{A_{e_3}} = 2p_{e_3}$  を辺埋め込みベクトルとしてパターンAを定める.

一方, このパターン埋め込みAに対して重ね合わせられるパターン埋め込みBに関する

る1つの十分条件が,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  を整数として, 次のように与えられる.

$$\mathbf{p}_{B_{e_1}} = \alpha_1 \mathbf{p}_{A_{e_1}} + \alpha_2 \mathbf{p}_{A_{e_2}} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{p}_{B_{e_2}} = \beta_1 \mathbf{p}_{A_{e_1}} + \beta_2 \mathbf{p}_{A_{e_2}} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{p}_{B_{e_3}} = \gamma_1 \mathbf{p}_{A_{e_1}} + \gamma_2 \mathbf{p}_{A_{e_2}} + \gamma_3 \mathbf{p}_{A_{e_3}}, (\gamma_3 \neq 0) \quad (5.20)$$

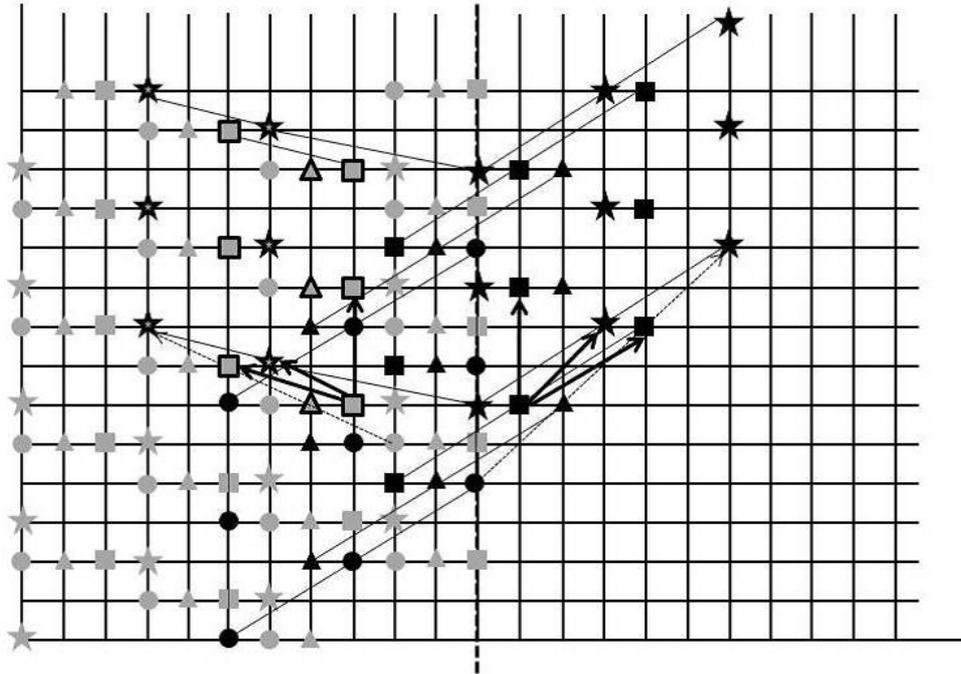


図 5.6: 3次元メッシュにおけるパターン重ね合わせの例

なお, この図では各面を黒の丸, 三角, 四角で区別し, この順でパターン A で埋め込む. 上記の式で表される十分条件を満たす重ね合わせ可能な位置は, 灰色の丸, 三角, 四角で表しており, 実際に重ね合わせパターン B として埋め込んだ位置は黒枠灰色塗りつぶしの丸, 三角, 四角で表してある.

図 5.6 は 3 次元メッシュにおけるパターン重ね合わせの例である .

パターン A は , 辺埋め込みベクトル  $p_{A_{e_1}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ,  $p_{A_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  を持ち , このとき  $|s_1| = 3$  ,  $|s_2| = 9$  から , このパターンは最大で 4 面に対して重ね合わせが可能である ( $\text{lcm}(3, 9) = 9 > 2n_3$  を満たす最大の  $n_3 = 4$  より) . ここで ,  $p_{e_3}$  は  $p_{A_{e_1}}/|s_1| - p_{A_{e_2}}/|s_2|$  系から見た  $(1, 1)$  ( $X - Y$  座標系では  $(1, 1)$ ) が選ばれており ,  $p_{A_{e_3}} = 2p_{e_3}$  によって 4 面が埋め込まれている . さらにここへ重ねあわせられたパターン B は ,  $p_{B_{e_1}} = p_{A_{e_2}} - p_{A_{e_1}}$  ,  $p_{B_{e_2}} = p_{A_{e_2}}$  ,  $p_{B_{e_3}} = p_{A_{e_2}} - p_{A_{e_3}}$  となっており , 上記の条件式 (5.18) , (5.19) , (5.20) を満足している .

## 5.4 異なる切り替え

これまでの議論では ,  $p_{e_3}$  は  $p_{e_1}$  と  $p_{e_2}$  の変更に伴って変化させねばならなかった . しかし , 3 次元メッシュにおける議論の初めに述べたように ,  $p_{e_1}$  と  $p_{e_2}$  で設けられる空き頂点に対して面毎に異なる種類の点を使うことによって ,  $n_3$  面分の頂点を重ならず埋め込む方法として ,  $p_{e_3}$  を  $p_{e_1}$  と  $p_{e_2}$  内で細かく切り替えるということが考えられる . この場合 ,  $p_{e_3}$  を独立して変更でき , これまでの検討に加えることで更に多様な解を導き出せる可能性がある . 図 5.7 は  $p_{e_1}$  ,  $p_{e_2}$  は固定であるところに  $p_{e_3}$  のみ点線の向きに  $p_{e_3}$  を変更したものである . これのみで見ると切り替え数が多いように感じられるが , グラフの形状によっては , これまで議論してきた切り替えと重ね合わせに比較して少ない切り替え数にできる可能性もある .

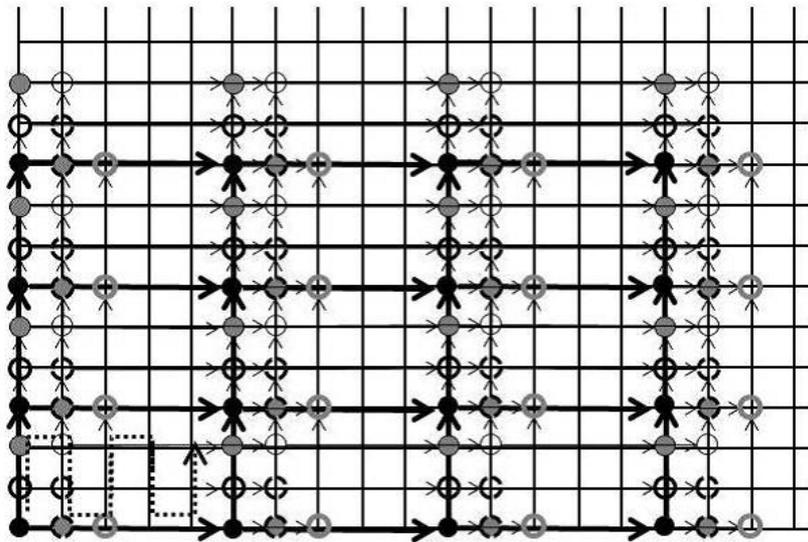


図 5.7:  $p_{e_3}$  のみの変化によるパターン埋め込みの例

## 第6章 パターン埋め込みと操作の実用例

本章では，これまで述べてきた2次元メッシュ・3次元メッシュ間のパターン埋め込みと，切り替え・重ね合わせ操作について実用例を示す．

### 6.1 [例1] 2次元メッシュにおけるパターン埋め込み

今，例として  $22 \times 4$  の2次元メッシュ (図 6.1) を所望のサイズのメッシュに埋め込むとする．このとき，まず既存の埋め込み手法を示す．図 6.2 の (a) は，論文 [1] において提

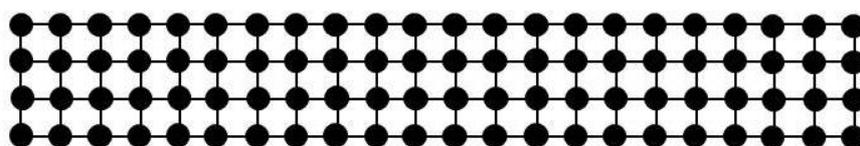


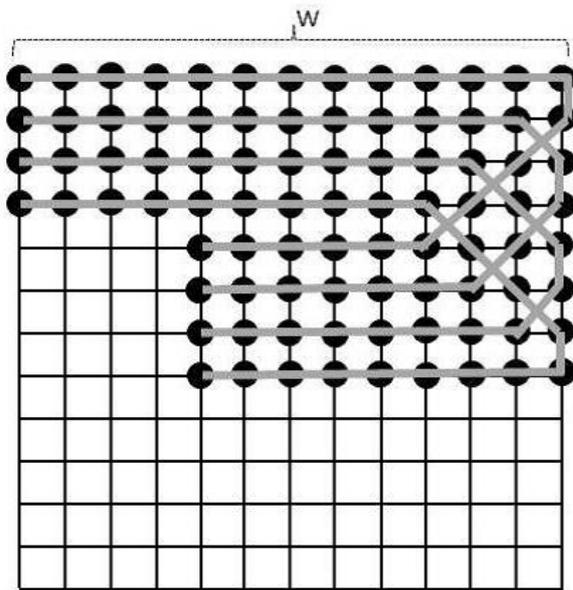
図 6.1:  $22 \times 4$  のサイズを持つメッシュ

案されている2次元メッシュ  $G$  の2次元メッシュ  $H$  への埋め込み解である．この解は，埋め込む  $H$  のメッシュサイズが次の  $s$  で決まり，

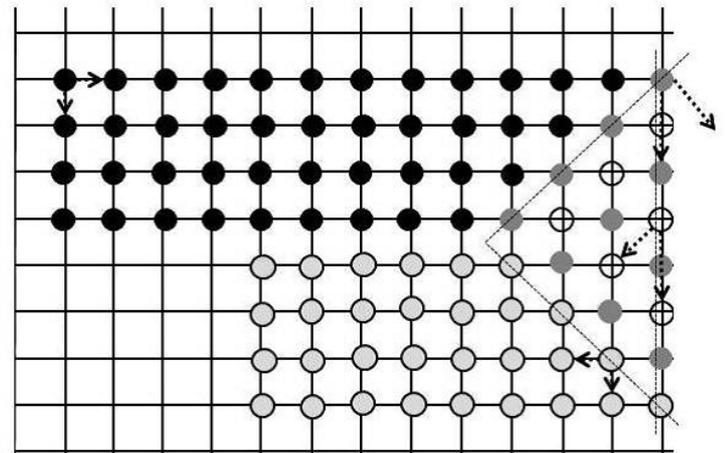
$$s(\epsilon) = \lceil \frac{h+w}{2} \rceil \quad (6.1)$$

その頂点の埋め込み先座標は，平面座標における  $(i, j)$  成分にて次のように範囲が指定され決まる．

$$\epsilon(i, j) = \begin{cases} (i, j) & (1 \leq j \leq s - i + 1) \\ (2i + j - s - 1, s + 1 - i) & (s - i + 1 \leq j \leq w - i + 1) \\ (i + w - s, j - w + s) & (w - i + 1 \leq j \leq w) \end{cases} \quad (6.2)$$



(a) 既存の2次元メッシュの埋め込み



(b) パターン埋め込み

図 6.2: 2次元メッシュの埋め込みの比較

この埋め込みをパターンによる埋め込みの枠組みにて行ったものが次の図 6.2 の (b) である．頂点の色毎に黒丸 灰色丸 白抜き黒丸 灰色塗りつぶし黒枠丸の順にパターンを変更していく．黒丸はその辺埋め込みベクトルが  $p_{A_{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $p_{A_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を持つパターンであり，一本目の切り替え線から灰色丸の頂点のパターンへ対角線共有条件を満たして変更する．このパターンの持つ辺埋め込みベクトルは  $p_{B_{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  と  $p_{B_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  である．そこから今度は， $H$  の境界に至った頂点から白抜き黒丸のパターンへ2次元メッシュの重ね合わせの条件を満たして変更する．このパターンの持つ辺埋め込みベクトルは  $p_{C_{e_1}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  と  $p_{C_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  である．終わりに，また対角線共有条件を満たして灰色塗りつぶし黒枠丸のパターンへ変更する．このパターンの持つ辺埋め込みベクトルは  $p_{D_{e_1}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $p_{D_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  である．

なお，これが最適な解なのかどうか分からないし，また，同じ  $22 \times 4$  の2次元メッシュを境界の異なるメッシュへ埋め込んだとき，パターン埋め込みにおける最適解は，これとは全く別の埋め込み解を持つかもしれない．たとえば，図 6.3 は，同じ  $22 \times 4$  の2次元メッシュを図 6.2 の (b) とは別なパターンを使ったパターン埋め込みである．このように，パターン埋め込みは辺埋め込みベクトルを変化させるだけで，多様な埋め込み解を与えることができると考えられる．図 6.3 は，同じサイズの2次元メッシュを図 6.2 と異なる辺埋め込みベクトルと切り替え線をとることによって得られる解である．dilation が

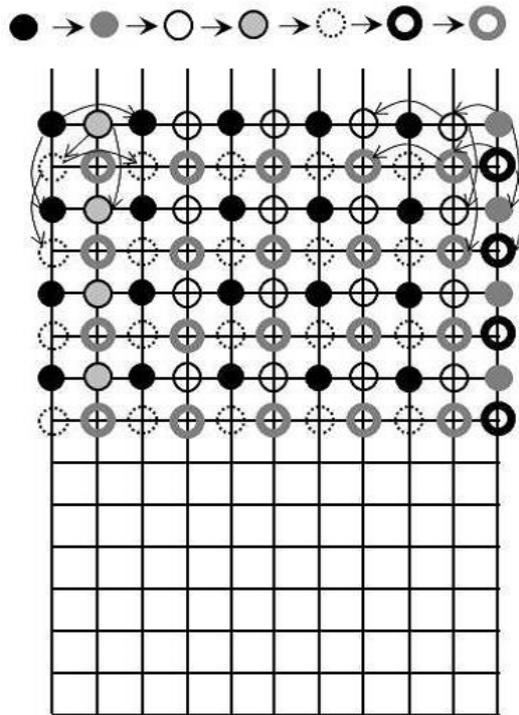


図 6.3: パターン切り替えと重ね合わせの別な例

2で右方向へ進むパターン（図の黒丸）は，右端を境界として灰色丸のパターンに切り替わり，すぐに白抜き黒丸のパターンとなり今度は左端境界手前の灰色塗りつぶし黒枠丸まで dilation2 で進む．そこから，左端の白抜き点線丸へ降り，また右端まで dilation2 で進み，これまでと同様に，右端の境界で白抜き太枠黒丸となり，白抜き太枠灰色丸で左端手前まで進むことにより，埋め込みが完了する．

## 6.2 [例2] 3次元メッシュにおけるパターン埋め込み

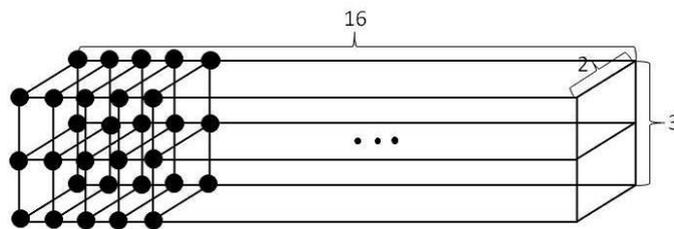


図 6.4:  $3 \times 16 \times 2$  の 3次元メッシュ

今,  $3 \times 16 \times 2$  の 3次元メッシュ (図 6.4) を 2次元メッシュに埋め込むとする.

図 6.5 は, 3次元メッシュにおいて, 先ほど 2次元メッシュで埋め込んだのと似たようなパターン埋め込みと切り替え・重ね合わせ操作を通して行った例である. 切り替え線 (境界形状) としては, 図の cutting line A, B, C を実験的にとることとする.  $p_{A_{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

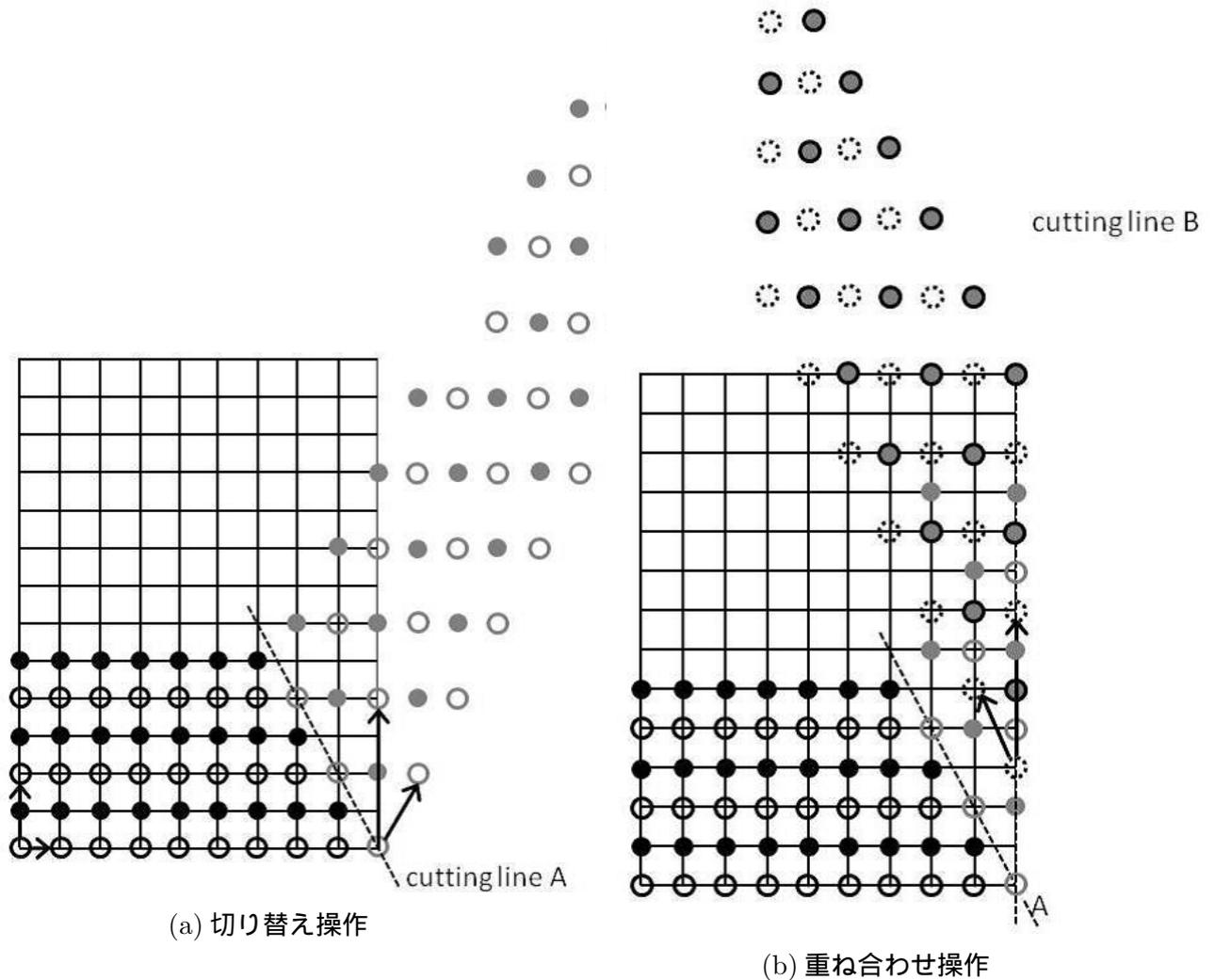


図 6.5: 3次元メッシュにおける切り替えと重ね合わせ操作一連

$p_{A_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  の辺埋め込みベクトルを持つパターン A で 2面が埋め込まれ, 切り替え線 A で対角線共有条件を満たして  $p_{B_{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $p_{B_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  を持つパターン B へ変更する. 切り替え線 B が境界とすると, ここから 3次元メッシュにおける重ね合わせの条件を満た

しながら ,  $p_{C_{e_1}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  ,  $p_{C_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  を持つパターン C へ変更する .

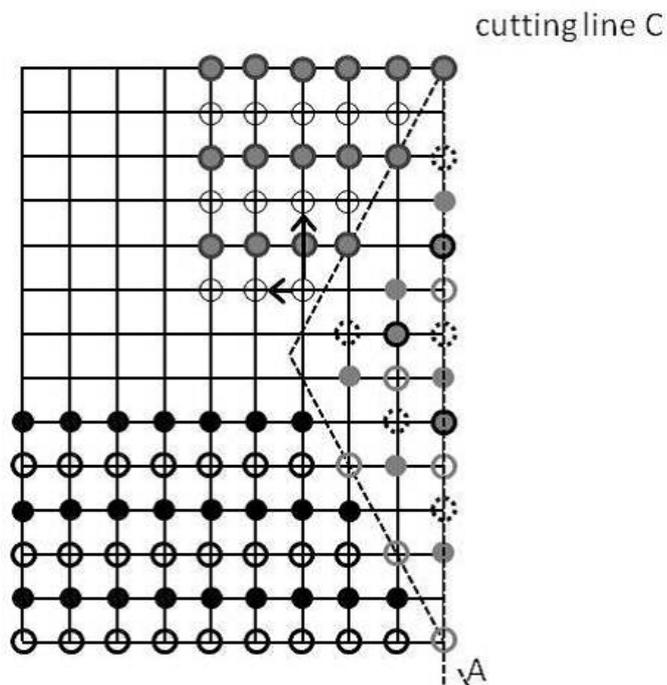


図 6.6: パターン埋め込み完成

終わりに , 切り替え線 C で対角線共有条件を満たして  $p_{D_{e_1}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ,  $p_{D_{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を持つパターン D へ変更し , 埋め込みが完了する .

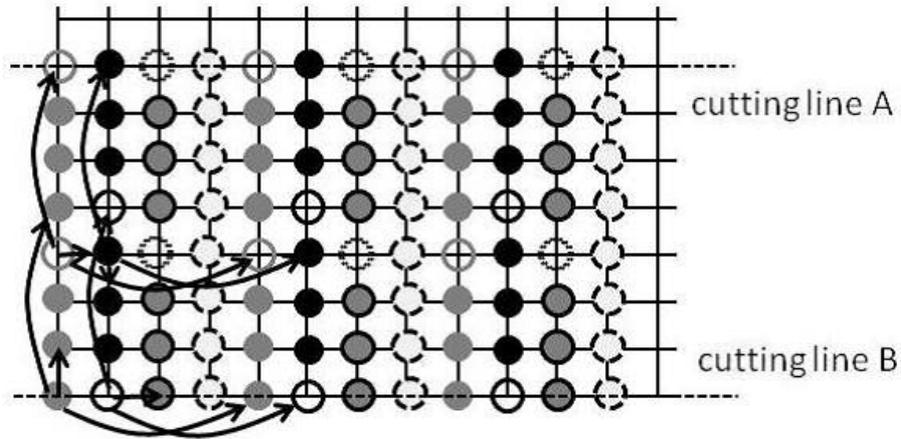


図 6.7: パターン切り替えと重ね合わせの別な例

同じ  $3 \times 16 \times 2$  のサイズを持つ 3 次元メッシュに対するパターン埋め込みであるが、今度は  $p_{e_3}$  のみが変化する埋め込みを行った結果が図 6.7 である。  $p_{e_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $p_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  は埋め込み完了まで変化しないが、 $p_{e_3}$  については切り替え線に応じて計 7 回の切り替えが行われている。

図 6.6 と図 6.7 では、境界が異なるため、一概にどちらが良い埋め込みか言うことはできない。しかし、この例によって 3 次元メッシュにおいては 2 次元メッシュの場合よりも更に多様な解を生成可能であると考えられる。

## 第7章 おわりに

本論文では，解探索による最適化のためのグラフ埋め込みの取り扱い方として，パターンによる埋め込みと関連操作を提案した．本論文の検討・提案により，現段階でメッシュグラフに限定されるが，グラフ埋め込みに対して，マクロにしかし多様性に富む解を生成するようなグラフ埋め込みの枠組みを作ることができた．

探索において，頂点毎の埋め込みとパターン埋め込みの比較をすると，頂点毎の探索の場合，単に頂点間の隣接関係しか考えられていないため，全頂点に対し写像先の表現が必要である．パターン埋め込みは，辺埋め込み列によって埋め込みが表現され，そのグラフの持つ種類だけの辺の埋め込み列が決まれば，この辺埋め込み列にて全ての頂点に対して埋め込みが表現できる．すなわち，埋め込みに際し必ず必要である情報量には，大きな差が生まれる．

パターン埋め込みにおける解空間を大まかに見積もれば，ある dilation 値を満たすパターン数を  $p$ ，パターンの切り替えの回数を  $k$  回，切り替え線の選び方が 1 本あたり  $|V(G)|C_2$  通り ( $|V(G)|$  から 2 頂点) とすれば，その解空間は  $p^{k+1} \times |V(G)|C_2$  で表され，実際の解探索における探索の効率化が可能であるかどうかは，パターンの切り替えの回数に大きく依存することが分かる．したがって，探索の際にはなるべく少ない切り替え回数による埋め込みが必要であり，これを実現する方法については今後の課題である．

また，本研究の動機は，多くのグラフ構造，サイズ，境界形状に対して普遍的に適用できる効率的埋め込み解探索手法の確立にあるが，本論文における議論は，メッシュグラフを対象としたものに止まっており，より広いクラスのグラフに適用するための枠組みの拡張，改変が今後の大きな課題である．

# 謝辞

本研究を行うにあたり，日頃より懇切丁寧な指導を賜りました金子峰雄教授に心より感謝申し上げます．また，岩垣剛助教ならびに井上恵介氏には，適切なご教示をいただき，厚く御礼申し上げます．金子研究室の学生の皆さまにも公私にわたり，さまざまな場面でお世話になりました．この場を借りて感謝いたします．

## 参考文献

- [1] Romas Aleliunas, Arnold L.Rosenberg, "On embedding rectangular grids in square grids", IEEE Trans. Comput. , vol. C-31, no. 9, PP.907-913, 1982 .
- [2] Akira Matsubayashi, Shuichi Ueno, "On the complexity of embedding of graphs into grids with mininum congestion", IEICE Trans. Fundamentals. , vol. E79, no. 4, PP.469-476, 1996.
- [3] Sheldon B. Akers, Balakrishnan Krishnamurthy, "A group-theoretic model for symmetric interconnection networks" ,IEEE Trans. Comput. , vol. 38, no. 4, PP.555-566, 1989 .
- [4] 井上 恵介, 金子 峰雄, " 整数計画法によるグラフ埋め込みの定式化と LSI 配線への応用" , 電子情報通信学会技術研究報告", CAS2009-56, PP.65-70, 2009.
- [5] 高木 浩光, 有田 隆也, 曾和 将容, " 実行タイミングの動的変動に強い静的プロセッサスケジューリング", 電子情報通信学会論文誌 D-I, vol. J75-D-I, no. 7, PP.431-439,1992.
- [6] 梅尾 博司, 超並列計算機アーキテクチャとそのアルゴリズム, 共立出版, 1992.
- [7] 吉川 圭二, 群と表現, 岩波書店, 1996.
- [8] 具象数学初級, <http://math.pisan-dub.jp/concrete/>
- [9] MATHEMATICS.PDF, <http://mathematics.web.infoseek.co.jp/>