JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	バンド幅問題の効率のよいアルゴリズムの開発に関する研究
Author(s)	中西，朗裕
Citation	
Issue Date	2010-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/8965
Rights	
Description	Supervisor:上原隆平，情報科学研究科，修士

Japan Advanced Institute of Science and Technology

バンド幅問題の効率のよいアルゴリズムの開発に関する研究

中西 朗裕 (0810044)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2010 年 2 月 14 日

キーワード: アルゴリズム, バンド幅問題, 2 部パーミュテーショングラフ.

グラフ G=(V, E) のレイアウト σ とは V から集合 $\{1, 2, \ldots, |V|\}$ への全単射である．グラフ G のレイアウト σ のバンド幅 $bw(\sigma)$ とは，$\max\{|\sigma(u) - \sigma(v)| \mid \{u, v\} \in E\}$ である．グラフ G のバンド幅 $bw(G)$ とは，$\min_\sigma\{bw(\sigma)\}$ である．バンド幅 $bw(G)$ を持つレイアウトを最適なレイアウトという．直感的には，グラフ G のバンド幅 $bw(G)$ を求めることは，与えられたグラフの頂点を一列に並べたとき，G において隣接している 2 頂点の中で，最も離れた頂点間の距離が最小となる頂点の配置，すなわちレイアウトを求めることである．

バンド幅問題とは，入力としてグラフ G が与えられたとき，$bw(G)$ を計算する最適化問題である．一方，k バンド幅問題とは，入力としてグラフ G と定数 k が与えられたときに，バンド幅 k 以下のレイアウトが存在すれば “yes”，存在しなければ “no” を出力する判定問題である．

バンド幅問題は疎行列の計算や，分子生物学に応用を持つことが知られている．たとえば，対角成分がすべて 0 である対称疎行列 S が与えられたとする．このとき，S の非零成分を 1 におきかえた対称行列を隣接行列とするようなグラフ G が存在する．このグラフ G に対してバンド幅問題を解き，最適なレイアウトが得られたとする．このとき，行列 S の行を最適なレイアウトの順に並びかえて得られる対称行列は，S の行と列を入れ替えて得られる対称行列の中で行列のバンド幅が最小である．よって，グラフのバンド幅問題を解くことにより．対称行列の積などの演算の高速化が期待できる．

バンド幅問題は，一般のグラフに対して NP 完全であり，グラフを木に限定しても NP 完全である．一般のグラフに対してバンド幅問題を解く厳密なアルゴリズムは，2008 年 Cygan と Pilipczuk により $O(5^n)$ 時間のアルゴリズムが提案された．ここで n はグラフの頂点数である．グラフクラスを限定すると，いくつかのグラフクラスに対して，バンド幅問題または k バンド幅問題を解く多項式時間アルゴリズムが提案されている．閾値グラフとチェーングラフでは線形時間でバンド幅問題を解くアルゴリズムが提案されている．また，区間グラフは $O(n \log n)$ 時間，2 部パーミュテーショングラフは $O(n^2)$ 時間で k バンド幅問題を解くアルゴリズムが提案されている．本稿では，2 部パーミュテーショングラフの $O(n^2)$ 時間の k バンド幅問題を解くアルゴリズムの線形時間への改善を提案する．

Copyright © 2010 by Nakanishi Akihiro

2部パーミュテーショングラフはチェーングラフの列 $G_1 = (V_1, V_2, E_1), G_2 = (V_2, V_3, E_2), \ldots, G_m = (V_{m-1}, V_m, E_m)$ に分解することができる．2部パーミュテーショングラフの k バンド幅問題を解く既存のアルゴリズムは，この性質を利用している．

2部パーミュテーショングラフ $G = (X, Y, E)$ の k バンド幅問題を解くアルゴリズムは，まず前処理として，頂点集合 $X \cup Y$ に対して，$V_0, V_1, V_2, \ldots, V_m$ を計算する．次に，チェーングラフの列 $G_1, G_2, \ldots, G_m$ を作る．そして，各 G_i のバンド幅 k 以下のレイアウト σ_i を求める．そして，それぞれの $\sigma_i (1 \leq i \leq m)$ を左から順に並べる．すると，各 G_i のバンド幅が k 以下であっても，G_i と G_{i-1} の間で隣接する2頂点の間の距離が k をこえてしまうことがある．そこで，そのようなことがおこらないように，頂点の配置を並びかえる必要がある．この頂点の配置の移動の計算を素直に実行すると，並べかえの場合の数が指数通り存在するので指数時間かかってしまう．既存の結果では，$G_1 \cup \ldots \cup G_{i-1}$ のバンド幅が k 以下であるときに，$G_1 \cup \ldots \cup G_i$ のバンド幅が k 以下になるように，$\sigma_1, \ldots, \sigma_i$ を修正する，ということを i の値が2から m まで繰り返すということを行う．この際，$G_1 \cup \ldots \cup G_i$ の計算において，G_{i-1} の頂点数に比例するサイズのテーブルを参照しながらの計算をすることにより，計算時間を $O(n^2)$ 時間におさえていた．これは大きな改善であるが，まだ改善の余地があると考えられる．

本稿では，$\sigma_1, \ldots, \sigma_i$ を修正する際，頂点の移動する場所が高々定数個しか存在しないことを示した．したがって，適切なデータ構造を用いれば，再配置するべき頂点の発見，および頂点の再配置を高速に行うことが可能である．以上の結果により，既存のアルゴリズムを線形時間に改善することができた．