

Title	確率ハイブリッドシステムの確率拘束付き最適制御に関する研究
Author(s)	間藤, 光一朗
Citation	
Issue Date	2011-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/9612
Rights	
Description	Supervisor:平石 邦彦, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

確率ハイブリッドシステムの確率拘束付き
最適制御に関する研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報科学専攻

間藤 光一朗

2011 年 3 月

修 士 論 文

確率ハイブリッドシステムの確率拘束付き 最適制御に関する研究

指導教官 平石 邦彦教授

審査委員主査 平石 邦彦教授

審査委員 浅野 哲夫教授

審査委員 緒方 和博准教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報科学専攻

0910061 間藤 光一郎

提出年月: 2011 年 2 月

目次

第1章	はじめに	1
第2章	確率ハイブリッドシステム	4
2.1	確率ハイブリッドシステムの定義	4
2.2	確率ハイブリッドシステムの例	5
第3章	問題設定	9
第4章	MLDS 表現を用いた最適制御	11
4.1	混合論理動的システム表現	11
4.2	モデリング方法	12
4.3	最適制御問題の MIQP 問題への変換	19
4.4	計算例	20
第5章	危険状態到達可能性グラフ	23
5.1	問題の考え方	23
5.2	危険状態到達可能性グラフの作成方法	26
5.3	例題	27
5.4	最適制御問題の MIQP 問題への変換	32
5.5	計算例	34
第6章	まとめ	38

第1章 はじめに

ハイブリッドシステムとは、モードの切り替え規則（離散ダイナミクス）によって、微分方程式（連続ダイナミクス）が切り替わるシステムである [1]。分散システムや組込みシステムの解析や設計に有効であり、多くの実システムに対する数学的モデルとして使われている。例としては、自動車や航空交通管理システム、生産システム、化学課程、ロボット工学、リアルタイム通信ネットワークなどがあり、制御理論や計算機科学の分野において研究されている。近年、ロボットが通信ネットワークを介して、衝突を回避する連携行動や、飛行機の追従飛行などの協調制御が盛んに研究されている。協調制御では、複数のロボットが互いの位置を確認し、同時に違う動作をしたり、または、先頭の一台の飛行機に対して全く同じ動きを必要とする。このように、様々な場面において、目的物の動作が異なるため、システムの動作が複雑になる。通信の ON / OFF や飛行機のダイナミクスをモデリングする必要があることから、協調制御に代表される複雑なシステムを制御するためには、ハイブリッドシステムとして複雑なシステムを表現することが有用である。

また、ハイブリッドシステムの拡張として、確率的なモード遷移を含む確率ハイブリッドシステムがある。一般に確率ハイブリッドシステムは離散ダイナミクス、連続ダイナミクスのいずれも確率的に定義されるハイブリッドシステムである [2]。本研究では、離散ダイナミクスのみ確率的に定義されるハイブリッドシステムを考える。例として、機械の正常動作 / 異常動作、ネットワークの接続 / 切断などがある。機械の正常動作 / 異常動作は、正常な場合における機械の動作を表現する運動方程式と、異常が発生した場合における運動方程式の間の遷移を、確率的にモデル化することが適切である。また、ネットワークの接続 / 切断も確率的に表現可能である。従って、離散ダイナミクスのみが確率的であっても、様々な応用が考えられる。

ハイブリッドシステムの代表的な表現方法の一つとして、混合論理動的システム表現 (MLDS 表現) が挙げられる。MLDS 表現は、連続値の状態の変化によってモードが変化する場合や、モードごとに異なる連続ダイナミクスをもつハイブリッドシステムを、線形

な形式で簡単に記述できる．また MLDS 表現は拘束システムと同じ形式であり，拘束システムに対する有効な制御系設計法の一つであるモデル予測制御手法を利用する事ができる．本研究では MLDS 表現を用い確率ハイブリッドシステムをモデル化する．

ハイブリッドシステムに関する既存研究として，制御に関する研究では，MLDS 表現を用い，確率と状態に関する関係式を線形関数に変換することで，混合整数 2 次計画 (MIQP) 問題に帰着させ，最適制御問題を解く研究 [3] がある．また，離散時間確率ハイブリッドシステムに対して，確率拘束を考慮した到達可能性解析の研究 [4] などもある．他には，確率ハイブリッドシステムの形式検証を提案し，自動検証ツールを実装するとともに，抽象化を用いることにより検証の効率化を図った研究 [5] がある．通信ネットワークにおいて，ネットワークの混雑の回避を実現することを目的に，離散モード間の遷移が，連続時間マルコフ連鎖の状態間の遷移のように，確率的にモード遷移が起きるハイブリッドシステムとして，通信ネットワークをモデリングする研究 [6][7] などもある．確率ハイブリッドシステムに対する最適制御問題を解くための研究では，最適値を得るために計算量的に扱いやすいアルゴリズムの導出し，アルゴリズムの収束率や複雑さを解析した研究 [8] がある．しかしながら，これらの研究は

- 確率的な拘束 (例えば設定する状態に確率 0.9 で到達させる)
- 評価関数を最小化する制御入力 of 計算

を満足する最適制御問題は考えられていないのが現状である．

そこで本研究では，離散ダイナミクスのみ確率的に決まるハイブリッドシステムに対して，確率的な拘束を満足する最適制御問題に対する解法を提案する．最適制御問題として，

- 与えられる危険状態に確率 ϵ 以下で遷移する
- 実現確率が ρ 以上となる離散状態 (制御ロケーション) の系列のなかで，評価関数を最小化する

ことを満たす制御入力を求めることを考える．解法は，オフライン計算とオンライン計算の二つからなる．オフライン計算では危険状態に到達する状態，制御入力の範囲および到達する確率を表現するグラフを作成する．オンライン計算では作成したグラフから確率

拘束を満足するパスを列挙し，そのパスの中で表現される状態と制御入力の関係式を，拘束条件として，線形不等式で表現する．さらに文献 [3] の手法を用いて混合整数 2 次計画 (MIQP) 問題に帰着させ，最適制御問題を解く．また，モデル予測制御では，最適制御問題を各時刻で解き，制御入力を生成する．

本論文の構成は以下の通りである．第 2 章では，確率ハイブリッドシステムの定義と例について述べる．第 3 章では本論文で考える問題設定と解法について述べる．第 4 章では，確率ハイブリッドシステムを混合論理動的システムを用いて表現する方法について述べ，例としてポンプシステムを混合論理動的システム表現に変換し，計算した結果について示す．第 5 章では設定する問題に対する解法の概要について述べ，オフライン計算時に用いる危険状態到達可能性グラフの作成方法を述べ，ポンプシステムを用いて説明する．さらにポンプシステムに対する計算例を示す．第 6 章はまとめである．

第2章 確率ハイブリッドシステム

本章では、本論文で考える確率ハイブリッドシステムを与える。また、ポンプシステムの例について説明する。

2.1 確率ハイブリッドシステムの定義

確率ハイブリッドシステム $SHS = (X, L, init, inv, prob, grd, E)$ は、次の要素から成る。

- **State variables** $X \subset R^n$ は、連続状態の集合である。
- **Location** L は制御ロケーションの有限集合である。SHS の状態は、制御ロケーション $l \in L$ と、状態 $x \in X$ の組 (l, x) で構成される。
- **Initial state** $init = (l_0, x_0)$ は確率ハイブリッドシステムの初期状態を表わす。
- **Invariants** 関数 $inv(l)$ は各制御ロケーションに、不変条件を割り当てる。SHS の状態は、不変条件が満たされる間、制御ロケーション l に留まることができる。
- **Continuous flow** 各制御ロケーションに対して、離散時間線形システム $x(k+1) = A_l x(k) + B_l u(k) + a_l$, $x \in X$, $u(k) \in U \subset R^m$ を与える。ここで、 $U = \{u | u_{min} \leq u \leq u_{max}\}$ であり、 U は制御入力である。
- **Discrete probability distribution** 関数 $prob(l)$ は各制御ロケーションに、離散確率分布の空でない集合を割り当てる。
- **Enabling conditions** 関数 $grd(l)$ は各 $l \in L$ に対しての l における各離散確率分布に事前条件 (*guard*) を割り当てる。条件を満足するとき分布によるロケーション遷移が実行可能になる。

- **Probabilistic edges** $l \in L, p_l^i = p \in \text{prob}(l), \text{grd}(l) = g$ に対し, 枝 $e = (l, g, p, X, \text{updt}, l')$ が分布より作られ, その集合を $E = \{e \mid p(X, \text{updt}, l') > 0\}$ とする. エッジでの確率的変動が起こると同時に更新式に従い, 変数 x_i へ新たな値 x'_i が割り当てられる.

2.2 確率ハイブリッドシステムの例

確率ハイブリッドシステムの例として, ポンプシステムを考える. ポンプシステムは, 水の入った容器, センサ, ポンプ, 制御装置から成るシステムである. また熱による蒸気の生成に対して, 減少した容器の水位を一定に保つために, 水位を Δ 秒間隔でセンサによって検知し, 入水ポンプの流量の制御を行う.

容器内の水位の下限値を L , 上限値を U とし水位が $[N1, N2]$ にある状態を正常とする. 水位が正常な場合は入水ポンプの流量の制御を必要としないが, 水位が $N1$ を下回った場合, ポンプが on による給水で水位を上昇させ, $N2$ を上回った場合ポンプが off になり, 蒸気の排出により水位を減少させる. またセンサに不具合が生じ, 水位を読み取れなくなるエラーが発生する場合がある. 水位が上限値 U を超えるまたは, 下限値 L を下回る場合は動作がストップする.

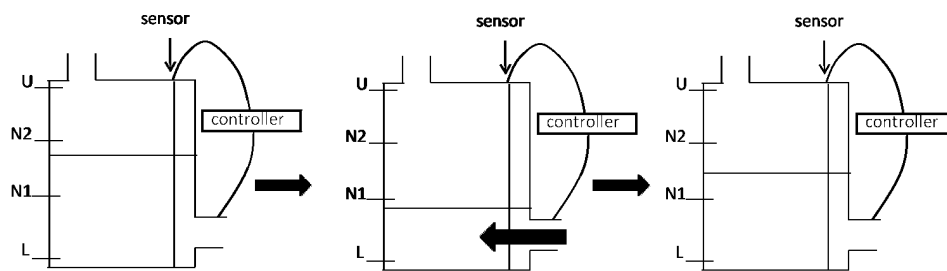


図 2.1: ポンプシステム水位減少動作

図 2.1 は (i) 水位の減少に対して, (ii) ポンプの給水により, (iii) 水位を正常な状態に戻す動作を示す.

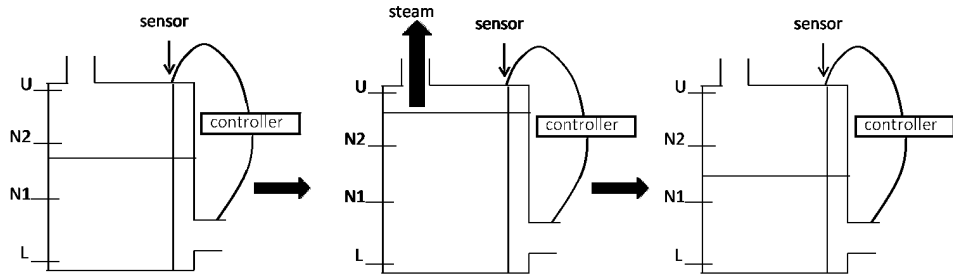


図 2.2: ポンプシステム水位上昇動作

図 2.2 は (i) 水位の上昇に対して, (ii) 蒸気の排出により, (iii) 水位を正常な状態に戻す動作を示す。

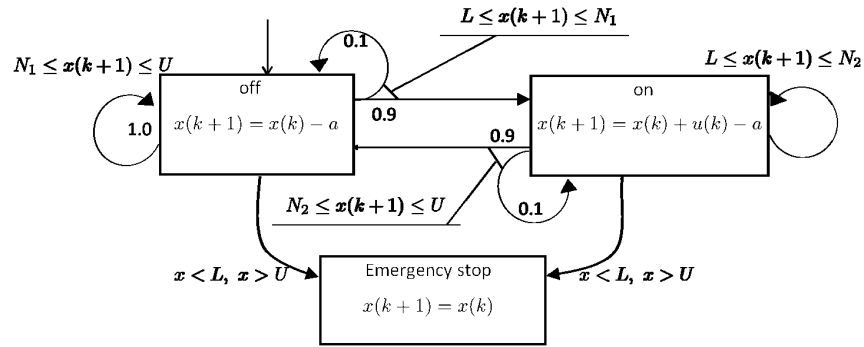


図 2.3: ポンプシステムに関する確率ハイブリッドシステム

このとき, ポンプシステムは図 2.3 の確率ハイブリッドシステムとして表現できる. 図 2.2 においてポンプシステムの動作を表わす状態を四角の枠線で囲み, 矢印によってシステムの状態の遷移を表し, 矢印の上に遷移条件を示す。

- **State variables** 水位を状態変数 x とする。
- **Location** 制御ロケーションは $L = \{off, on, stop\}$ で与えられる。
- **Initial state** 初期状態は $init = (off, x_0)$ で与えられる。
- **Invariants** 各制御ロケーションに不変条件を割り当てる関数は $inv(off) = N_1 \leq x(k+1) \leq U$, $inv(on) = L \leq x(k+1) \leq N_2$ で与えられ, 各制御ロケーションに留まる事ができる。

- **Continuous flow** 各制御口ケーションに与えられる離散時間線形システムは、制御口ケーション off では $x(k+1) = x(k) - a$ 、制御口ケーション on では $x(k+1) = x(k) + u(k) - a$ 、制御口ケーション stop では $x(k+1) = x(k)$ となる。
- **Discrete probability distribution** 各制御口ケーションに割り当てられる離散確率分布はそれぞれ $prob(off) = \{p_{off}\}$ 、 $prob(on) = \{p_{on}\}$ となる。このとき、 p_{off} 、 p_{on} はそれぞれ、 $p_{off} = (x, x(k+1) = x(k) - a, off) = 0.1$ 、 $p_{off} = (x, x(k+1) = x(k) - a, off) = 0.9$ 、 $p_{on} = (x, x(k+1) = x(k) + u(k) - a, on) = 0.1$ 、 $p_{on} = (x, x(k+1) = x(k) + u(k) - a, off) = 0.9$ 、で与えられ、 $p_{off} = \{0.1, 0.9\}$ 、 $p_{on} = \{0.1, 0.9\}$ となる。
- **Enabling conditions** 各離散確率分布に事前条件を割り当てる関数は、それぞれ $grd(off_1) = L \leq x \leq N_1$ 、 $grd(off_2) = x < L \vee x > U$ 、 $grd(on_1) = N_2 \leq x \leq U$ 、 $grd(on_2) = x < L \vee x > U$ で与えられる。条件を満足するとき分布による口ケーション遷移が実行可能になる。このとき、 p_{off} の guard となるのは、 $grd(off_1)$ であり、 p_{on} の guard となるのは、 $grd(on_1)$ である。
- **Probabilistic edges** $L = \{off, on, stop\}$ 、 $p_l^i = p \in prob(l)$ 、 $grd(l) = g$ に対し、枝 $e(l) = (L, g, p, X, updt, l')$ が分布より作られ、 $e(off) = (off, grd(off_1), p_{off}, X, x(k+1) = x(k) - a, \{off, on\})$ 、 $e(on) = (on, grd(on_1), p_{on}, X, x(k+1) = x(k) + u(k) - a, \{on, off\})$ 、 $e(stop) = (stop, \emptyset, \emptyset, X, x(k+1) = x(k), stop)$ となる。

次に各制御口ケーションでの動作を説明する。

- **Location : Off and On** システムの動作を表わす状態がこれらの制御口ケーションにある間、水位は蒸気の排出により減少する。単位時間あたりの水位の変化量を $x(k+1) = x(k) - a$ と表す。制御口ケーション on では、水位の減少に対してポンプによって給水が行われる。この時の単位時間あたりの吸水による水位の変化量を $x(k+1) = x(k) + u(k) - a$ と表す。また、これらの制御口ケーションではセンサに不具合が生じ水位を読み取れず、もう一度同じ動作を繰り返してしまう事がある。
- **Location : emergency stop** 水位の推測値が下限値 L を下回る場合、もしくは、上限値 U を上回る場合、システムの動作を表わす状態は Location emergency stop

に移る．この状態では，システムがストップしてしまうため，単位時間あたりの水位の変化量は $x(k+1) = x(k)$ となる．

第3章 問題設定

前章で紹介したポンプシステムにおいて，stop 状態に遷移する事は望ましくない．このように一般的に望ましくない状態に割り当てられた状態の領域を，危険状態と呼ぶこととする．本研究で考える有限時間最適制御問題を以下で与える．

【問題1】確率ハイブリッドシステム (SHS) が与えられているとする．また初期状態 $x(0) = x_0$ ，オフセット状態 x_d が与えられているとする．このとき，次の条件

条件1 危険状態に到達する確率が ε 以下となる．

条件2 実現確率が ρ 以上となる離散状態 (制御ロケーション) の系列のなかで，次の評価関数

$$J(x(k), u) = \sum_{k=0}^{N-1} \{x(k) - x_d\}^T Q \{x(k) - x_d\} + \{u(k) - u_d\}^T R \{u(k) - u_d\} \quad (3.1)$$

を最小化する．

を満足する制御入力列 $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ を求めよ．

モデル予測制御では，問題1を各時刻で繰り返し解くことにより，制御入力を生成する．解法の概要を説明する．

まずオフライン計算では，

1. 危険状態に遷移する状態を列挙する．
2. 各々の状態に到達するための制御入力の範囲および到達する確率を計算し，グラフを作成する．
3. 作成したグラフを基に，危険状態に遷移する確率が ε 以下となるパスを列挙する．

オンライン計算では，

1. 文献 [3] の手法を用い，確率ハイブリッドシステムを MLDS 表現に変換する．変換によって得られたモデルを拘束条件とすることで，最適制御問題を解く事ができる．
2. 有向辺に与えられた 0-1 変数と確率の関係式を線形関数に変換することで，問題 1 を混合整数 2 次計画 (MIQP) 問題として扱う．
3. オフライン計算で得られたグラフの中の有向辺に与えられる状態と制御入力に関する線形不等式を MIQP 問題の拘束条件に追加する．拘束条件が追加された MIQP 問題を解く事によって，最適な制御入力を計算することができる．

確率ハイブリッドシステムに関する研究は制御問題や検証問題など様々行われている．制御問題では，確率ハイブリッドシステムを MLDS 表現で変換し，最適制御問題を解いた研究がある．また，検証問題では，確率ハイブリッドオートマトンを定義し，その記号的な到達可能性を解析した安全性の検証に関する研究や，制御入力を持たない確率ハイブリッドシステムの確率的な到着可能性に関する研究などがある．

本研究では，確率ハイブリッドシステムとして表現する際に MLDS 表現を用い，確率的な拘束を考慮した最適制御問題の解法を提案する．

第4章 MLDS表現を用いた最適制御

4.1 混合論理動的システム表現

本研究では，ポンプシステムを混合論理動的システム (MLDS) 表現 [3] を用いて，モデル化する．MLDS 表現の一般形は

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + B_2z(k) + B_3\delta(k) \quad (4.1)$$

$$Cx(k) + D_1u(k) + D_2z(k) + D_3\delta(k) \leq E \quad (4.2)$$

で与えられる．ここで， $k \in \{0, 1, \dots\}$ は離散時間， $x \in R^{n_c} \times \{0, 1\}^{n_d}$ は状態， $u \in R^{m_{1c}} \times \{0, 1\}^{m_{1d}}$ は入力， $z \in R^{m_2}$ ， $\delta \in \{0, 1\}^{m_3}$ はそれぞれ連続値と離散値の補助変数である．不等式 (4.2) は p 本，すなわち $C \in R^{p \times n}$ ， $D_i \in R^{p \times m_i}$ ($i = 1, 2, 3$)， $E \in R^p$ であり， $\leq$ は要素ごとの大小関係を表す．不等式 (3.2) は混合整数不等式と呼ばれ，補助変数 z と δ は，混合整数不等式において一意に定まるとする．

MLDS 表現は補助変数 z や δ を，拘束条件 (4.1) 式，(4.2) 式を満たす入力であるとみなすと，より見通しがよくなる．すなわち

$$v(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ z(k) \\ \delta(k) \end{bmatrix}, B = [B_1 \ B_2 \ B_3], D = [D_1 \ D_2 \ D_3] \quad (4.3)$$

とおくと，MLDS 表現は

$$x(k+1) = Ax(k) + Bv(k) \quad (4.4)$$

$$Cx(k) + Dv(k) \leq E \quad (4.5)$$

と表現できる．これは拘束システムと同じ形式であるので，拘束システムに対する有効な

制御系設計法の一つであるモデル予測制御手法が MLDS 表現に対しても利用できる。

4.2 モデリング方法

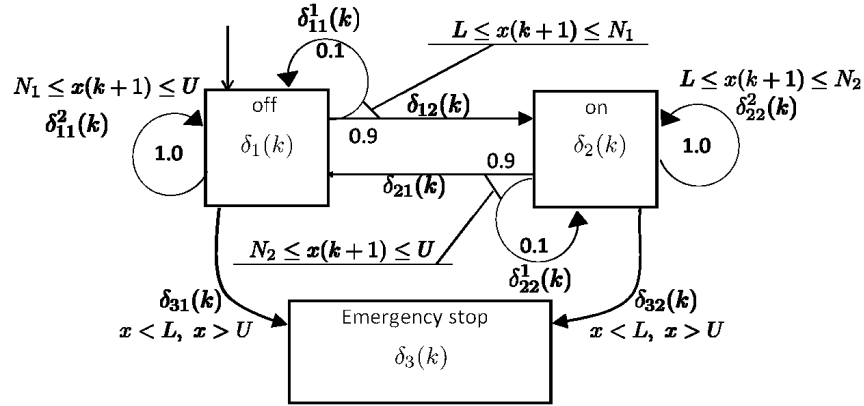


図 4.1: ポンプシステム

この節では，ポンプシステムの例を用いて，MLDS 表現を用いたモデリング方法を説明する．図 4.1 にポンプシステムにおいて，それぞれの状態間の遷移条件とそれを示す矢印への 0-1 変数の割り当てを示した図を記す．

制御ロケーション on, off, stop とそれぞれの制御ロケーション間の遷移条件を命題論理とし，0-1 変数を用いた線形不等式で表現する事により，MLDS 表現としてモデリングする．ここで，与えられる命題論理を 0-1 変数を用いた線形不等式で表現する方法について，次の結果を紹介する [9]．

補題 1 $\delta \in \{0, 1\}$, $x \in R^n$ とすると， R^n の有界閉集合 β 上で，次の関係が成り立つ．

(i) $[\delta = 1] \leftrightarrow [h(x) \geq 0]$ は，次の線形不等式によって十分な精度で近似できる．

$$h_{\min}(1 - \delta) \leq h(x) \leq h_{\max}\delta + (\delta - 1)\varepsilon \quad (4.6)$$

ただし， $h_{\min} = \min_{x \in \beta} h(x)$, $h_{\max} = \max_{x \in \beta} h(x)$, ε は十分小さな定数である．

(ii) $z = \delta g(x)$ は次の不等式と等価である．

$$g_{\min}\delta \leq z \leq g_{\max}\delta \quad (4.7)$$

$$g(x) - g_{\max}(1 - \delta) \leq z \leq g(x) - g_{\min}(1 - \delta) \quad (4.8)$$

ただし，不等号は要素ごとの大小関係を表し， $g_{\min} = \min_{x \in \beta} g(x)$ ， $g_{\max} = \max_{x \in \beta} g(x)$ は m 次元ベクトルである．

補題 1 を用いてポンプシステムを MLDS 表現に変換する．

[step 1 : 連続領域とインデックス変数の関係づけ]

まずはそれぞれの連続領域とインデックス変数の関係を示す．off 状態からの遷移を表わす命題が，

$$[\delta_{11}^2(k) = 1] \longrightarrow [N_1 \leq x(k+1) \leq U] \quad (4.9)$$

$$[\delta_{11}^1(k) = 1] \vee [\delta_{12}(k) = 1] \longrightarrow [L \leq x(k+1) \leq N_1] \quad (4.10)$$

となり，on 状態からの遷移を表わす命題が，

$$[\delta_{22}^2(k) = 1] \longrightarrow [L \leq x(k+1) \leq N_2] \quad (4.11)$$

$$[\delta_{21}(k) = 1] \vee [\delta_{22}^1(k) = 1] \longrightarrow [N_2 \leq x(k+1) \leq U] \quad (4.12)$$

となり，危険状態への遷移を表わす命題が，

$$[\delta_{31}(k) = 1] \longrightarrow [U \leq x(k+1)] \vee [x(k+1) \leq L] \quad (4.13)$$

$$[\delta_{32}(k) = 1] \longrightarrow [U \leq x(k+1)] \vee [x(k+1) \leq L] \quad (4.14)$$

となり，式 (4.9) ~ 式 (4.14) の命題を補題 1 を用いて線形不等式で近似する．

$[\delta_{11}^2(k) = 1] \longrightarrow [N_1 \leq x(k+1) \leq U]$ の線形不等式表現

まず $[N_1 \leq x(k+1)] \leftrightarrow [\gamma_{31}(k) = 1]$ ， $[x(k+1) \leq U] \leftrightarrow [\gamma_{32}(k) = 1]$ と置くと

$$[\delta_{11}^2(k) = 1] \longrightarrow [\gamma_{31}(k) = 1] \wedge [\gamma_{32}(k) = 1] \quad (4.15)$$

となり， $[\gamma_5(k) = 1] \leftrightarrow [[\gamma_{31}(k) = 1] \wedge [\gamma_{32}(k) = 1]]$ とおき，この命題の関係を不等式

で表わすと

$$\begin{aligned}\delta_{11}^2(k) - \gamma_5(k) &\leq 0, \quad \gamma_{31}(k) - \gamma_5(k) \geq 0 \\ \gamma_{32}(k) - \gamma_5(k) &\geq 0, \quad \gamma_{31}(k) + \gamma_{32}(k) - \gamma_5(k) \leq 1\end{aligned}\quad (4.16)$$

となる． $[\gamma_{31}(k) = 1] \leftrightarrow [N_1 \leq x(k+1)]$ を不等式を用いて等価的に表わすと，補題 1(i) より，

$$h_{\min}^1(1 - \gamma_{31}(k)) \leq h(x) \leq h_{\max}^1 \gamma_{31}(k) + (\gamma_{31}(k) - 1)\varepsilon_1 \quad (4.17)$$

となり，また $[\gamma_{32}(k) = 1] \leftrightarrow [x(k+1) \leq U]$ は

$$h_{\min}^1(1 - \gamma_{32}(k)) \leq h(x) \leq h_{\max}^1 \gamma_{32}(k) + (\gamma_{32}(k) - 1)\varepsilon_1 \quad (4.18)$$

となり，式 (4.16),(4.17),(4.18) により，命題 $[\delta_{11}^2(k) = 1] \rightarrow [N_1 \leq x(k+1) \leq U]$ が線形不等式で近似されたことになる．

$[\delta_{11}^1(k) = 1] \vee [\delta_{12}(k) = 1] \longrightarrow [L \leq x(k+1) \leq N_1]$ の線形不等式表現

まず $[\gamma_1(k) = 1] \leftrightarrow [\delta_{11}^1(k) = 1] \vee [\delta_{12}(k) = 1]$ と置き，この命題の関係を不等式で表わすと，

$$\delta_{11}^1(k) - \gamma_1(k) \leq 0, \delta_{12}(k) - \gamma_1(k) \leq 0, \delta_{11}^1(k) + \delta_{12}(k) - \gamma_1(k) \geq 0 \quad (4.19)$$

と表す事ができる．そして，式 (4.10) は，

$$[\gamma_1(k) = 1] \longleftrightarrow [L \leq x(k+1) \leq N_1] \quad (4.20)$$

となり，

$$[\gamma_1(k) = 1] \longleftrightarrow [L \leq x(k+1)] \wedge [x(k+1) \leq N_1] \quad (4.21)$$

と表すことができ， $[L \leq x(k+1)] \leftrightarrow [\gamma_{11}(k) = 1], [x(k+1) \leq N_1] \leftrightarrow [\gamma_{12}(k) = 1]$ と

置くと ,

$$[\gamma_1(k) = 1] \longleftrightarrow [\gamma_{11}(k) = 1] \wedge [\gamma_{12}(k) = 1] \quad (4.22)$$

となり , 式 (4.22) の命題の関係を不等式で表わすと ,

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(k) - \gamma_1(k) &\geq 0, \quad \gamma_{12}(k) - \gamma_1(k) \geq 0, \\ \gamma_{11}(k) + \gamma_{12}(k) - \gamma_1(k) &\leq 1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

となる . $[\gamma_{11}(k) = 1] \longleftrightarrow [L \leq x(k+1)]$ を不等式を用いて等価的に表すと , 補題 1(i) より

$$h_{\min}^2(1 - \gamma_{11}(k)) \leq h(x) \leq h_{\max}^2\gamma_{11}(k) + (\gamma_{11}(k) - 1)\varepsilon_2 \quad (4.24)$$

となり , $[\gamma_{12}(k) = 1] \longleftrightarrow [x(k+1) \leq N_1]$ を不等式を用いて等価的に表すと , 補題 1(i) より

$$h_{\min}^2(1 - \gamma_{12}(k)) \leq h(x) \leq h_{\max}^2\gamma_{12}(k) + (\gamma_{12}(k) - 1)\varepsilon_2 \quad (4.25)$$

となり , 式 (4.19) , (4.23) , (4.24) , (4.25) により , 命題 $[\delta_{11}^1(k) = 1] \vee [\delta_{12}(k) = 1] \longrightarrow [L \leq x(k+1) \leq N_1]$ が線形不等式で近似されたことになる .

$[\delta_{22}^2(k) = 1] \longrightarrow [L \leq x(k+1) \leq N_2]$ の線形不等式表現

まず $[L \leq x(k+1)] \leftrightarrow [\gamma_{41}(k) = 1]$, $[x(k+1) \leq N_2] \leftrightarrow [\gamma_{42}(k) = 1]$ と置くと

$$[\delta_{22}^2(k) = 1] \longrightarrow [\gamma_{41}(k) = 1] \wedge [\gamma_{42}(k) = 1] \quad (4.26)$$

となり , $[\gamma_3(k) = 1] \leftrightarrow [[\gamma_{41}(k) = 1] \wedge [\gamma_{42}(k) = 1]]$ とおき , この命題の関係を不等式で表わすと

$$\begin{aligned} \delta_{22}^2(k) - \gamma_3(k) &\leq 0, \quad \gamma_{41}(k) - \gamma_3(k) \geq 0, \\ \gamma_{42}(k) - \gamma_3(k) &\geq 0, \quad \gamma_{41}(k) + \gamma_{42}(k) - \gamma_3(k) \leq 1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

となる． $[\gamma_{41}(k) = 1] \leftrightarrow [L \leq x(k+1)]$ を不等式を用いて等価的に表わすと，補題 1(i) より，

$$h_{min}^3(1 - \gamma_{41}(k)) \leq h(x) \leq h_{max}^3\gamma_{41}(k) + (\gamma_{41}(k) - 1)\varepsilon_3 \quad (4.28)$$

となり，また $[\gamma_{42}(k) = 1] \leftrightarrow [x(k+1) \leq N_2]$ は

$$h_{min}^3(1 - \gamma_{42}(k)) \leq h(x) \leq h_{max}^3\gamma_{42}(k) + (\gamma_{42}(k) - 1)\varepsilon_3 \quad (4.29)$$

となり，式 (4.27)，(4.28)，(4.29) により，命題 $[\delta_{11}^2(k) = 1] \rightarrow [N_1 \leq x(k+1) \leq U]$ が線形不等式で近似されたことになる．

$[\delta_{21}(k) = 1] \vee [\delta_{22}^1(k) = 1] \longrightarrow [N_2 \leq x(k+1) \leq U]$ の線形不等式表現

まず $[\gamma_2(k) = 1] \leftrightarrow [\delta_{21}(k) = 1] \vee [\delta_{22}^1(k) = 1]$ と置き，この命題の関係を不等式で表わすと，

$$\delta_{22}^1(k) - \gamma_2(k) \leq 0, \delta_{21}(k) - \gamma_2(k) \leq 0, \delta_{22}^1(k) + \delta_{21}(k) - \gamma_2(k) \geq 0 \quad (4.30)$$

と表す事ができる．そして，式 (4.12) は，

$$[\gamma_2(k) = 1] \longleftrightarrow [[N_2 \leq x(k+1) \leq U]] \quad (4.31)$$

となり，

$$[\gamma_2(k) = 1] \longleftrightarrow [N_2 \leq x(k+1)] \wedge [x(k+1) \leq U] \quad (4.32)$$

と表すことができ， $[N_2 \leq x(k+1)] \leftrightarrow [\gamma_{21}(k) = 1], [x(k+1) \leq U] \leftrightarrow [\gamma_{22}(k) = 1]$ と置くと，

$$[\gamma_2(k) = 1] \longleftrightarrow [\gamma_{21}(k) = 1] \wedge [\gamma_{22}(k) = 1] \quad (4.33)$$

となり，式 (4.33) の命題の関係を不等式で表わすと，

$$\gamma_{21}(k) - \gamma_2(k) \geq 0, \gamma_{22}(k) - \gamma_2(k) \geq 0,$$

$$\gamma_{21}(k) + \gamma_{22}(k) - \gamma_2(k) \leq 1 \quad (4.34)$$

となる． $[\gamma_{11}(k) = 1] \leftrightarrow [L \leq x(k+1)]$ を不等式を用いて等価的に表すと，補題 1(i) より

$$h_{\min}^4(1 - \gamma_{21}(k)) \leq h(x) \leq h_{\max}^4 \gamma_{21}(k) + (\gamma_{21}(k) - 1)\varepsilon_4 \quad (4.35)$$

となり， $[\gamma_{12}(k) = 1] \leftrightarrow [x(k+1) \leq N_1]$ を不等式を用いて等価的に表すと，補題 1(i) より

$$h_{\min}^4(1 - \gamma_{22}(k)) \leq h(x) \leq h_{\max}^4 \gamma_{22}(k) + (\gamma_{22}(k) - 1)\varepsilon_4 \quad (4.36)$$

となり，式 (4.30)，(4.34)，(4.35)，(4.36) により，命題 $[\delta_{21}(k) = 1] \vee [\delta_{22}^1(k) = 1] \rightarrow [N_2 \leq x(k+1) \leq U]$ が線形不等式で近似されたことになる．

$$[\delta_{31}(k) = 1] \longrightarrow [U \leq x(k+1)] \vee [x(k+1) \leq L],$$

$$[\delta_{32}(k) = 1] \longrightarrow [U \leq x(k+1)] \vee [x(k+1) \leq L] \text{ の線形不等式表現}$$

まず $[\gamma_{51}(k) = 1] \leftrightarrow [U \leq x(k+1)]$, $[\gamma_{52}(k) = 1] \leftrightarrow [x(k+1) \leq L]$ と置くと，式 (4.13)，式 (4.14) は

$$[\delta_{31}(k) = 1] \longrightarrow [\gamma_{51}(k) = 1] \vee [\gamma_{52}(k) = 1] \quad (4.37)$$

$$[\delta_{32}(k) = 1] \longrightarrow [\gamma_{51}(k) = 1] \vee [\gamma_{52}(k) = 1] \quad (4.38)$$

となる．ここで $[\gamma_7(k) = 1] \leftrightarrow [[\gamma_{51}(k) = 1] \wedge [\gamma_{52}(k) = 1]]$ と置き，この命題の関係を不等式で表わすと，

$$\begin{aligned} \delta_{31}(k) - \gamma_7(k) &\leq 0, \delta_{32}(k) - \gamma_7(k) \leq 0, \delta_{33}(k) - \gamma_7(k) \leq 0, \\ \gamma_{51}(k) - \gamma_7(k) &\leq 0, \gamma_{52}(k) - \gamma_7(k) \leq 0, \gamma_{51}(k) + \gamma_{52}(k) - \gamma_7(k) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

となる． $[\gamma_{51}(k) = 1] \leftrightarrow [U \leq x(k+1)]$ を不等式を用いて等価的に表すと，補題 1(i) より

$$h_{\min}^5(1 - \gamma_{51}(k)) \leq h(x) \leq h_{\max}^5 \gamma_{51}(k) + (\gamma_{51}(k) - 1)\varepsilon_5 \quad (4.40)$$

となり , $[\gamma_{52}(k) = 1] \leftrightarrow [x(k+1) \leq L]$ を不等式を用いて等価的に表すと , 補題 1(i) より

$$h_{min}^5(1 - \gamma_{52}(k)) \leq h(x) \leq h_{max}^5 \gamma_{52}(k) + (\gamma_{52}(k) - 1)\varepsilon_5 \quad (4.41)$$

となり , 式 (4.39) , (4.40) , (4.41) により , 命題 $[\delta_{31}(k) = 1] \longrightarrow [U \leq x(k+1)] \vee [x(k+1) \leq L]$, $[\delta_{32}(k) = 1] \longrightarrow [U \leq x(k+1)] \vee [x(k+1) \leq L]$ が線形不等式で近似されたことになる .

[step 2 : 連続ダイナミクスの線形表現]

連続ダイナミクスは $z_i(k) = \delta_i(k)(A_i x(k) + B_i u(k) + a_i)$ とおくと

$$x(k+1) = \sum_i^3 z_i(k) \quad (4.42)$$

となり , ポンプシステムの場合 , 節 2.2 より $A_1 = A_2 = A_3 = 1, B_1 = B_3 = 0, B_2 = 1, a_1 = a_2 = -a, a_3 = 0$ となる . ここで $z_i(k) = \delta_i(k)(A_i x(k) + B_i u(k) + a_i)$ は , 補題 1(ii) を用いると

$$g_{min}^1 \delta_1(k) \leq z_1(k) \leq g_{max}^1 \delta_1(k) \quad (4.43)$$

$$g_{min}^2 \delta_2(k) \leq z_2(k) \leq g_{max}^2 \delta_2(k) \quad (4.44)$$

$$g_{min}^3 \delta_3(k) \leq z_3(k) \leq g_{max}^3 \delta_3(k) \quad (4.45)$$

$$x(k) - a - g_{max}^1(1 - \delta_1(k)) \leq z_1(k) \leq x(k) - a - g_{min}^1(1 - \delta_1(k)) \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} x(k) - a + u(k) - g_{max}^2(1 - \delta_2(k)) &\leq z_2(k) \\ &\leq x(k) - a + u(k) - g_{min}^2(1 - \delta_2(k)) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$x(k) - g_{max}^3(1 - \delta_3(k)) \leq z_3(k) \leq x(k) - g_{min}^3(1 - \delta_3(k)) \quad (4.48)$$

で表現できる .

[step 3 : 各モードのラベル付け]

各時刻でのポンプシステムの動作は , off , on , stop のいずれかであり , 同時に二つ

の動作が行われる事はない．よって

$$\delta_1(k) + \delta_2(k) + \delta_3(k) = 1 \quad (4.49)$$

の関係が与えられる．そして，各状態とその状態からの遷移条件の関係を表す式を

$$\delta_1(k+1) = \delta_{11}^1(k) + \delta_{11}^2(k) + \delta_{21}(k) \quad (4.50)$$

$$\delta_2(k+1) = \delta_{22}^1(k) + \delta_{22}^2(k) + \delta_{12}(k) \quad (4.51)$$

$$\delta_1(k) = \delta_{11}^1(k) + \delta_{11}^2(k) + \delta_{21}(k) + \delta_{31}(k) \quad (4.52)$$

$$\delta_2(k) = \delta_{22}^1(k) + \delta_{22}^2(k) + \delta_{12}(k) + \delta_{32}(k) \quad (4.53)$$

となる．

step1 から step3 で表わした式で，式 (4.16) ～ 式 (4.18)，式 (4.19)，式 (4.23) ～ 式 (4.25)，式 (4.27) ～ 式 (4.29)，式 (4.30)，式 (4.34) ～ 式 (4.36)，式 (4.39) ～ 式 (4.41)，式 (4.43) ～ 式 (4.53) で $Cx(k) + D_1u(k) + D_2z(k) + D_3\delta(k) \leq E$ の形式を得る．そして式 (4.42) より $x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + B_2z(k) + B_3\delta(k)$ の形式を得る．これで式 (4.1)，式 (4.2) を表わせたことになり，MLDS 表現を得る．

4.3 最適制御問題の MIQP 問題への変換

最適制御問題を混合整数 2 次計画 (MIQP) 問題に変換する．この節では，その変換の方法について説明する．各制御口ケーションに与えられる離散確率分布の集合を $p = [p_1, \dots, p_l]^T$ とし，有向辺に割り当てた 0-1 変数の集合を $\delta_E(k) = [\delta_1(k), \dots, \delta_l(k)]^T$ とすると，二つの式の関係は

$$\begin{bmatrix} \pi(0) \\ \vdots \\ \pi(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_E^T(0) \\ \vdots \\ \delta_E^T(N-1) \end{bmatrix} \cdot p, \quad \pi = \pi(\delta_E(0), \dots, \delta_E(N-1)) = \prod_{k=0}^{N-1} \pi(k) \quad (4.54)$$

で表わされる．このときポンプシステムの場合， p と δ_E はそれぞれ

$$p = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \delta_E(k) = \begin{bmatrix} \delta_{12}(k) \\ \delta_{12}^1(k) \\ \delta_{21}(k) \\ \delta_{22}^1(k) \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

となる．式 (4.54) は時刻 $0, 1, \dots, N-1$ で状態 π になる確率を表わす．また式 (4.54) では非線形であるために，混合整数 2 次計画 (MIQP) 問題に変換できない．そこで $\pi(\delta_E(0), \dots, \delta_E(N-1)) = \prod_{k=0}^{N-1} \pi(k)$ に対して，対数変換を用いる．このとき

$$\ln \pi(\delta_E(0), \dots, \delta_E(N-1)) = \ln \left(\prod_{k=0}^{N-1} \pi(k) \right) \quad (4.56)$$

を得る．よって式 (4.56) は式 (4.54) より

$$\ln \pi(\delta_E(0), \dots, \delta_E(N-1)) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^l \delta_{Ei}(k) \ln(p_i) \quad (4.57)$$

となり制約条件を，線形関数として扱う事ができる．よって，条件 1 を除いた問題 1 は，次の MIQP 問題に帰着できる．

【問題 A】 $find \ v(0), v(1), \dots, v(N-1)$

$$\min \ J(x(k), u) = \sum_{k=0}^{N-1} \{x(k) - x_d\}^T Q \{x(k) - x_d\} + \{u(k) - u_d\}^T R \{u(k) - u_d\}$$

$$subject \ to \ x(k+1) = Ax(k) + B_1 u(k) + B_2 z(k) + B_3 \delta(k)$$

$$Cx(k) + D_1 u(k) + D_2 z(k) + D_3 \delta(k) \leq E$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^l \delta_i(k) \ln(p_i) \geq \rho$$

4.4 計算例

ポンプシステムを例に導出した MLDS 表現を用い，条件 1 を除いた問題 1 を解くことを考える．

与えられた最適制御問題を解くうえでの，ポンプシステムのパラメータを表 4.1 にまとめる．最適制御問題を解くうえで用いる評価関数を

表 4.1: ポンプシステムのパラメータ

水位の初期値	60
水位の最大値	120
水位の上限値 (U)	91
水位 (N2)	62
水位 (N1)	41
水位の下限值 (L)	13
水位の最低値	0
入力の拘束条件	$20 \leq u(k) \leq 30$

$$J(x(k), u) = \sum_{k=0}^{N-1} \{x(k) - x_d\}^T Q \{x(k) - x_d\} + \{u(k) - u_d\}^T R \{u(k) - u_d\} \quad (4.58)$$

で与え， $N = 50$ ， $R = 0$ ， $Q = 1$ ， $x_d = 50$ ， $u_d = 0$ とする．また評価関数を最小化する確率

$$\rho = -\ln(0.1^{10} \times 0.9^{30} \times 1.0^{10}) \quad (4.59)$$

とする．得られた制御入力を用いて，水位の変化を計算した結果を図 4.2 に示す．また，図 4.2 では 10000 本のサンプルを示している．

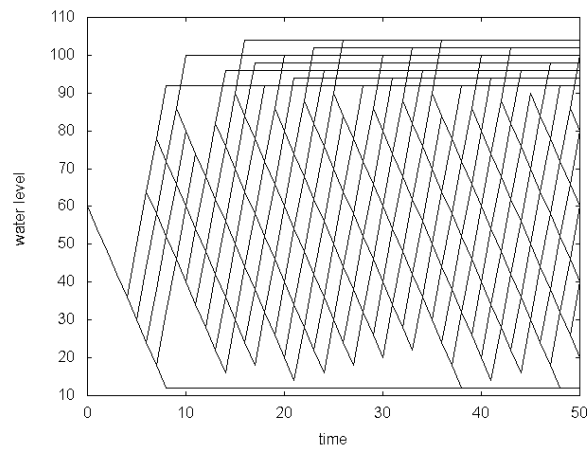


図 4.2: ポンプシステムの水位の変化

図 4.2 で軌跡に分岐が生じるのは，図 4.1 より状態 off から状態 on への遷移，状態 on から状態 off への遷移が確率的に決定するので，水位が一意に定まらないためである．

第5章 危険状態到達可能性グラフ

3章で述べた問題に対しての解法は，オフライン計算とオンライン計算から構成される．オフライン計算では，危険状態に到達する状態，到達するための制御入力範囲および到達する確率を計算するグラフを作成する．作成するグラフのことを危険状態到達可能性グラフと呼ぶ事とする．本章では，述べられた問題に対しての解法について述べ，オフライン計算時において，作成する危険状態到達可能性グラフのアルゴリズムを示す．そしてポンプシステムを例に用い，危険状態到達可能性グラフの作成方法について述べる．

5.1 問題の考え方

3章で述べた問題の解法について，ポンプシステムを例に概要を示す．

まず，オフライン計算において，図 5.1 に示す危険状態到達可能性グラフを作成する．

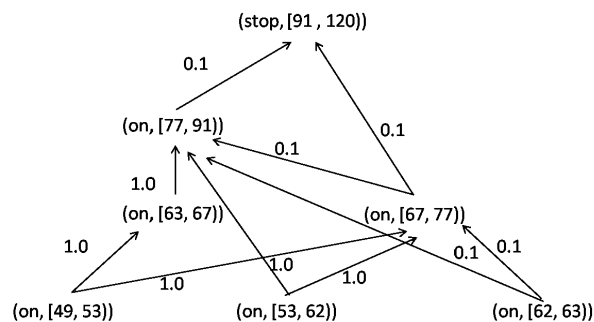


図 5.1: 危険状態到達可能性グラフの例

図 5.1 は危険状態到達可能性グラフの一例である．これは有向辺に，ポンプシステムの状態の遷移確率と，水位の状態・入力に関する線形不等式が割り当てられる．グラフの頂点には，ポンプシステムの状態と，その時の水位の領域が割り当てられる．

危険状態到達可能性グラフを基に，危険状態に遷移する確率が ε 以下になるパスを列挙する． $\varepsilon = 0.001$ とすると，3step 以内で， $\varepsilon = 0.001$ 以下となるパスは，図 5.1 の場合

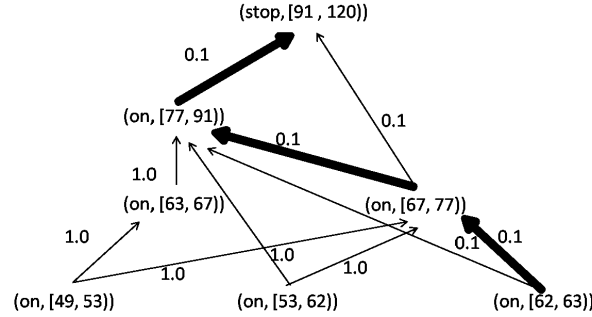


図 5.2: 問題を満たすパス

図 5.2 で示すパスとなる．つまり，

- $(\text{on}, [62, 63]) \rightarrow (\text{on}, [67, 77]) \rightarrow (\text{on}, [77, 91]) \rightarrow (\text{stop}, [91, 20])$

のパスとなる．図 5.2 で示すパスの場合，状態 $(\text{on}, [62, 63])$ から状態 $(\text{on}, [67, 77])$ ，状態 $(\text{on}, [67, 77])$ から状態 $(\text{on}, [77, 91])$ ，状態 $(\text{on}, [77, 91])$ から状態 $(\text{stop}, [91, 120])$ にそれぞれ遷移が可能となる拘束条件を制御入力に課す．

例として，状態 $(\text{on}, [62, 63])$ から状態 $(\text{on}, [67, 77])$ への遷移を可能とする制御入力への条件の課し方を説明する．入力が $20 \leq u(k) \leq 30$ で定義され，単位時刻あたりに蒸発する水量 $a = 6$ とする．時刻 $k + 1$ での水位 $x(k + 1)$ は

$$x(k + 1) = x(k) + u(k) - 6 \quad (5.1)$$

で与えられ，式 (5.1) から時刻 k での水位 $x(k)$ から，時刻 $k + 1$ での水位 $x(k + 1)$ への遷移条件となる制御入力 $u(k)$ が求められる．また時刻 k の状態 $x(k)$ の最小値と最大値から，時刻 $k + 1$ の状態 $x(k + 1)$ の最小値と最大値への遷移条件となる制御入力 $u(k)$ を考えることで，次の状態に遷移するための制御入力 $u(k)$ の拘束条件を得ることができる．

まず時刻 k での最小値 $x(k) = 62$ の場合を考える．時刻 $k + 1$ で $x(k + 1) = 67$ の状態に遷移するための制御入力は，式 (5.1) より $u(k) - 6 = 67 - 62 = 5$ となる．また時刻 $k + 1$ で $x(k + 1) = 77$ の状態に遷移するための制御入力は，式 (5.1) より $u(k) - 6 = 77 - 62 = 15$

となる．よって時刻 k で水位 $x(k) = 62$ の場合，状態 $(\text{on}, [67, 77])$ に遷移できる制御入力
の範囲は

$$5 \leq u(k) - 6 \leq 15 \quad (5.2)$$

となる．しかしここで定義される入力拘束は $20 \leq u(k) \leq 30$ ，つまり $14 \leq u(k) - 6 \leq 24$
なので，制御入力の拘束条件は

$$14 \leq u(k) - 6 \leq 15 \quad (5.3)$$

となる．

次に時刻 k で最大値 $x(k) = 63 - \varepsilon$ の場合を考える．時刻 $k + 1$ で $x(k + 1) = 67$ の
状態に遷移するための制御入力は，式 (5.1) より $u(k) - 6 = 67 - (63 - \varepsilon) = 4 + \varepsilon$ とな
る．また時刻 $k + 1$ で $x(k + 1) = 77$ の状態に遷移するための制御入力は，式 (5.1) より
 $u(k) - 6 = 77 - (63 - \varepsilon) = 14 + \varepsilon$ となる．よって時刻 k で水位 $x(k) = 62$ の場合，状態
 $(\text{on}, [67, 77])$ に遷移できる制御入力の範囲は

$$4 + \varepsilon \leq u(k) - 6 \leq 14 + \varepsilon \quad (5.4)$$

となる．しかしここで定義される入力拘束は $20 \leq u(k) \leq 30$ ，つまり $14 \leq u(k) - 6 \leq 24$
なので，制御入力の拘束条件は

$$14 \leq u(k) - 6 \leq 14 + \varepsilon \quad (5.5)$$

となる．

式 (5.1) より制御入力と水位の関係は

$$u(k) - 6 = x(k + 1) - x(k) \quad (5.6)$$

と書け, $x(k+1) = 77$ に遷移する制御入力を考えると,

$$u(k) - 6 = 77 - x(k) \quad (5.7)$$

と $x(k)$ と $u(k)$ の関係式で書くことができ, 状態 (on,[62,63)) から状態 (on,[67,77)) への遷移を可能とする制御入力は,

$$14 \leq u(k) - 6 \leq 77 - x(k) \quad (5.8)$$

となる. この拘束条件を状態間の遷移毎に制御入力に課し, 最適制御問題を解くことで問題 1 を解くことができる.

この場合は問題を満たすパスは一つであるが, 問題を満たすパスが複数ある場合は, 列挙したパスに対して, それぞれ通過する拘束条件を入力に課し, 最適制御問題を解く. そして, パス毎に得られた評価関数の最適値のなかで, 最小のものを問題 1 の評価関数の最適値, 対応する制御入力を最適制御入力とする.

5.2 危険状態到達可能性グラフの作成方法

この論文で考える問題に対しての解法は, オフライン計算とオンライン計算から構成される. この節では, 3 章で述べたオフライン計算で用いる危険状態到達可能性グラフを作成するためのアルゴリズムについて説明する. なお, 危険状態到達可能性グラフを作成する際に, 次の関数を使う.

Pre: 状態空間 X に到達する状態と入力の集合

Pro_X: 拡張状態空間内の領域 S の状態空間 X への射影

Step 1: 拡張危険状態 $D_u = D \times U$ を与える.

Step 2: $Y_1 := \text{Pre}(D) - D_u$ を計算する.

Step 3: $Y_i := \text{Pre}(\text{Pro}_X(Y_{i-1}))$, $i = 2, 3, \dots, N$ を計算する.

Step 4: $\text{Pro}_X(Y_i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ を $\text{Pro}_X(Y_i) - \cup_{j>i} \text{Pro}_X(Y_j)$ を表現する凸多面体

の集合と, $Pro_X(Y_i) \cap (\cup_{j>i} Pro_X(Y_j))$ の凸多面体に分割する．ただし, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ である．また, 分割された状態の集合が *invariant* と *guard* の境界を含む場合, 該当する状態集合を凸多面体で分割する．危険状態 D および, 得られる状態の集合を $X_1, X_2, \dots, X_p$ とする．このとき, 各 X_i に対して, 危険状態に到達可能な最小のステップ数をラベル付ける．

Step 5: $N = 1$ ならば, 終了する． $N \geq 2$ ならば, $k = 2$ として Step 6 へ．

Step 6: $Pro_X(Pre(X_1)), Pro_X(Pre(X_2)), \dots, Pro_X(Pre(X_p))$ を計算する．ただし, ラベルが N の場合, 計算を行わない．

Step 7: $Pro_X(Pre(X_i)), i = 1, 2, \dots, p$ を $Pro_X(Pre(X_i)) - \cup_{j>i} Pro_X(Pre(X_j))$ を表現する凸多面体の集合と, $Pro_X(Pre(X_i)) \cap (\cup_{j>i} Pro_X(Pre(X_j)))$ の凸多面体に分割する．ただし, $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ である．危険状態 D および, 得られる状態の集合を $X_1, X_2, \dots, X_p$ とする．このとき各 X_i に対して, 危険状態に到達可能な最小のステップ数をラベル付ける．

Step 8: Step 6 で新たな分割が行われない, あるいは, $k = N$ であれば, 終了する．そうでなければ, $k = k + 1$ として Step 5 へ戻る．

Step 9: 分割された領域 $X_1, X_2, \dots, X_p$ を頂点とし, Step 4 と Step 7 の分割手順と最小のステップ数から, 有向辺を求め, グラフを作成する．有向辺に与えられる状態と制御入力に関する線形不等式は $Pre(X_i)$ を求めることによって得られる．

5.3 例題

問題 1 を解決するために利用するグラフの作成方法について, ポンプシステムを用いて説明する．前提条件として, 入力拘束を $20 \leq u(k) \leq 30$, $a = 6$ とする．また $N = 2$ の場合の危険状態到達可能性グラフを作成する．

Step 1

まず拡張危険状態 $D_u = (\text{stop}, [91, 120])$ を設定する

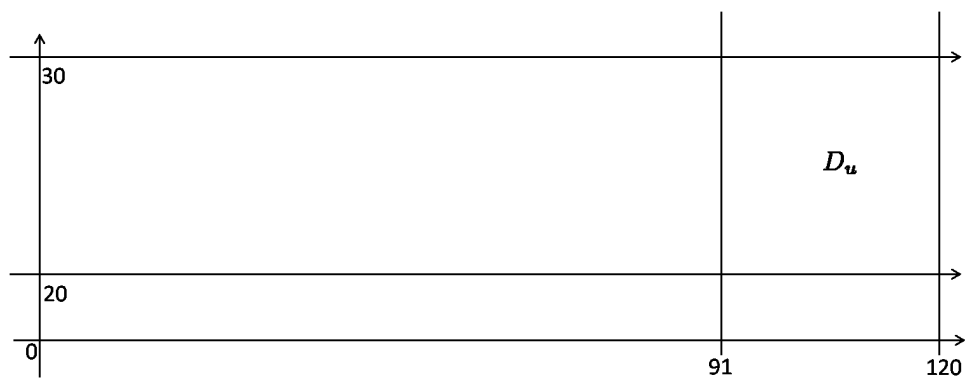


図 5.3: 拡張危険状態の設定

Step 2

次に $Y_1 = Pre(D) - D_u$ を計算する .

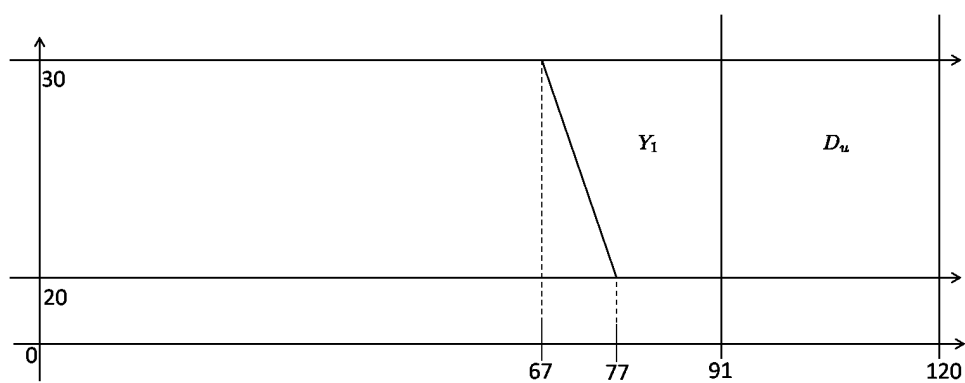


図 5.4: $Y_1 = Pre(D) - D_u$ の計算

Step 3

$Y_2 = Pre(Pro_X(Y_1))$ を計算する .

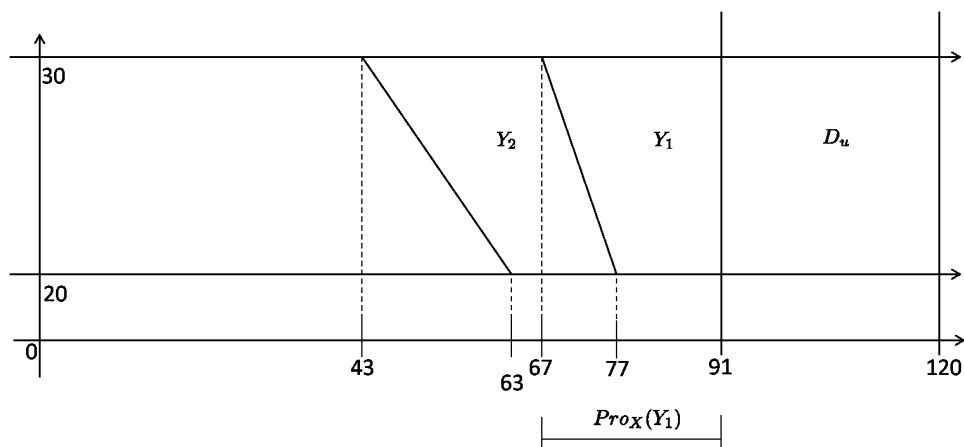


図 5.5: $Y_2 = \text{Pre}(\text{Pro}_X(Y_1))$ の計算

Step 4

$\text{Pro}(Y_1)$, $\text{Pro}(Y_2)$ によって射影された領域を分割する．またこのとき, *invariant* と *guard* の境界を含むので, 境界も含めて分割し, $X_1, \dots, X_5$ を得る．そして $X_1, \dots, X_5$ にラベル付けを行う．

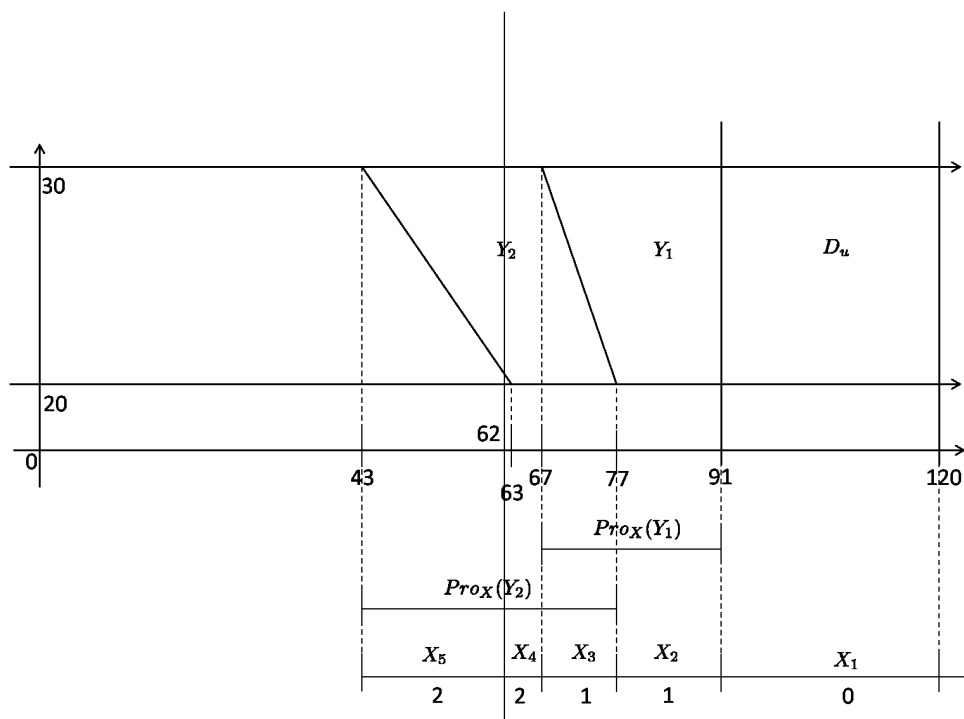


図 5.6: 領域の分割とラベルづけ

Step 5

$N = 2$ なので $k = 2$ として, Step 6 へ.

Step 6

$Pro_X(Pre(X_1)), Pro_X(Pre(X_2)), Pro_X(Pre(X_3))$ を計算する. このとき, $Pro_X(Pre(X_4)), Pro_X(Pre(X_5))$ は, X_4, X_5 につくラベルの値が 2 のため計算しない.

Step 7 $Pro_X(Pre(X_1)), Pro_X(Pre(X_2)), Pro_X(Pre(X_3))$ によって射影された領域を分割する. そして分割によって得られた領域 $X_1, X_2, \dots, X_7$ にラベル付けを行う.

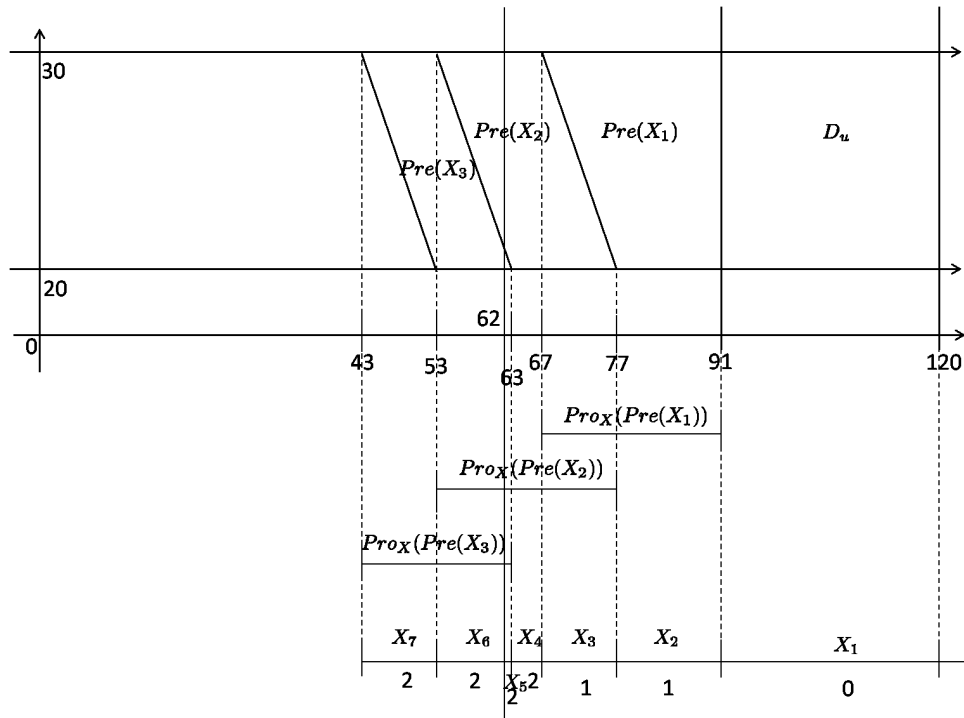


図 5.7: Step 6, Step 7 の作業

Step 8 $k = N = 2$ なので終了する.

Step 9 分割された領域 $X_1, X_2, \dots, X_7$ を頂点とし, グラフを作成する. また, 図 5.6, 図 5.7 に示されるラベルより, 2 ステップ以内で危険状態に遷移可能な有向辺が決まる. 作成された危険状態到達可能性グラフを図 5.8 に示す. そして $N = 5$ とし, 作成できるグラフを図 5.9 に示す.

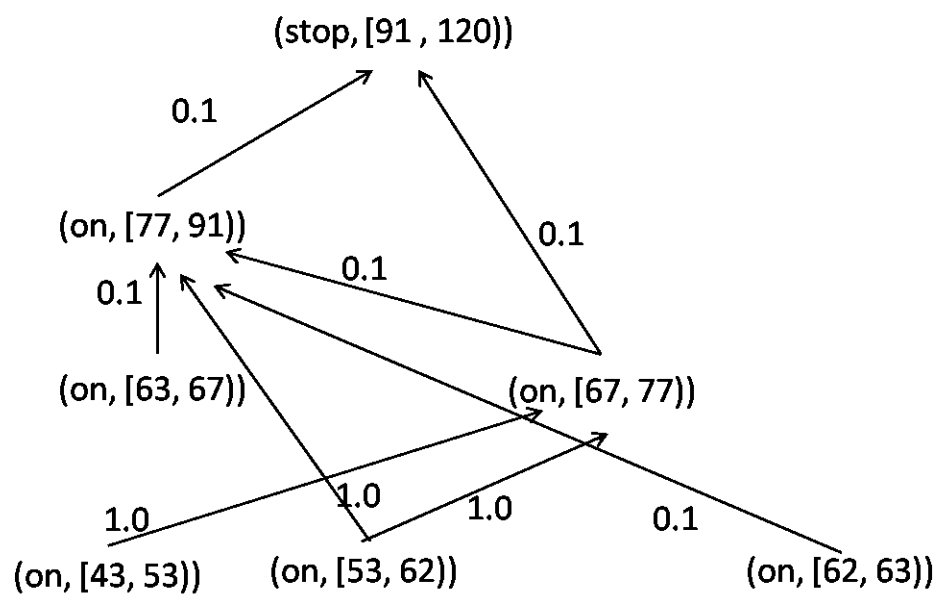


図 5.8: 危険状態到達可能性グラフ ($N = 2$)

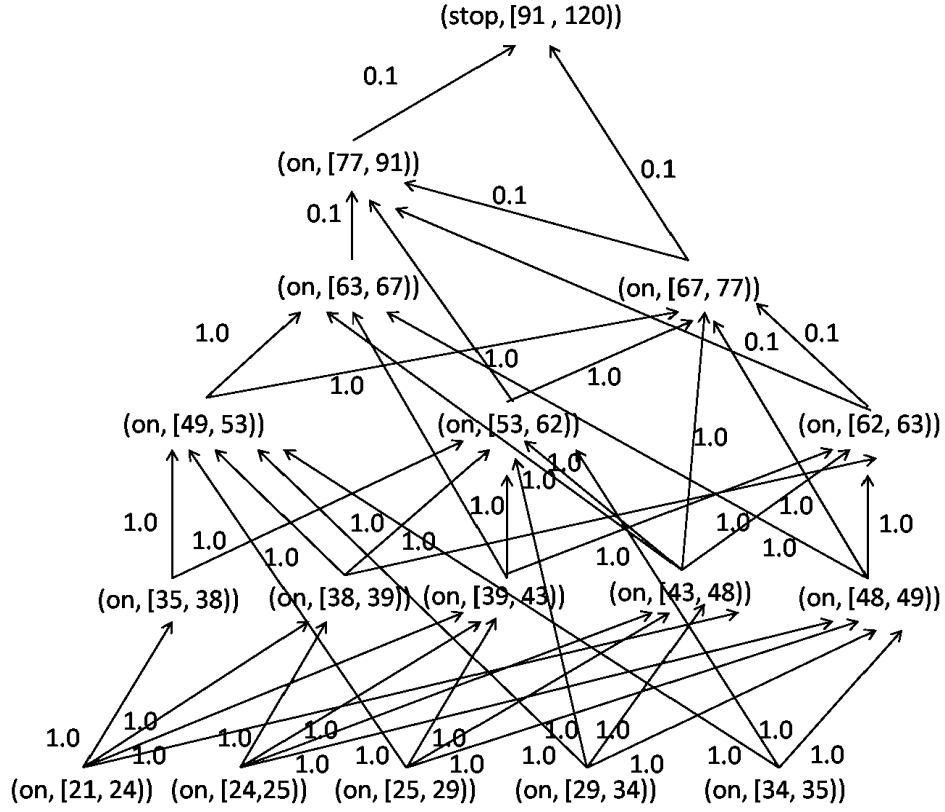


図 5.9: 危険状態到達可能性グラフ ($N = 5$)

5.4 最適制御問題の MIQP 問題への変換

問題 1 の最適制御問題の解法について説明する．最適制御問題の解法はオフライン計算とオンライン計算から構成される．オフライン計算で得たグラフを基に危険状態に遷移する確率が ε 以下となるパスを列挙する．この危険状態に到達するそれぞれのパスの辺には，次の状態に遷移するための条件が，状態と入力に関する線形不等式の形で与えられる．そのため，MIQP 問題に変換する際に，状態と入力に関する線形不等式を拘束条件として追加しなければならない．一般に状態と入力に関する線形不等式は，次の

$$F(k)x(k) + G(k)u(k) \leq H(k) \quad (5.9)$$

と書ける，ここで $F(k)$ ， $G(k)$ ， $H(k)$ は各時刻で異なる行列を生成する関数である．式 (5.9) の線形不等式を制約条件に追加することで，3 章で与えた最適制御問題を MIQP 問題へと変換することが可能になる．問題 B に得られた線形不等式を拘束条件に追加した MIQP 問題を示す．

【問題 B】 $find \ v(0), v(1), \dots, v(N-1)$

$$\min J(x(k), u) = \sum_{k=0}^{N-1} \{x(k) - x_d\}^T Q \{x(k) - x_d\} + \{u(k) - u_d\}^T R \{u(k) - u_d\}$$

$$\text{subject to } x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + B_2z(k) + B_3\delta(k)$$

$$Cx(k) + D_1u(k) + D_2z(k) + D_3\delta(k) \leq E$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^l \delta_i(k) \ln(p_i) \geq \rho$$

$$F(k)x(k) + G(k)u(k) \leq H(k)$$

与えられた問題 B を解くことにより解を得ることができる．

5.5 計算例

ポンプシステムに対して，3章で述べる問題を考える．初期値を $x(0) = 21$ と決めると，全部で 31 本のパスを得る．31 本のパスの中で，3章で述べた問題で $\varepsilon = 0.002$ とすると，それを満たすパスは

1. $(\text{on}, [19, 24)) \rightarrow (\text{on}, [43, 48)) \rightarrow (\text{on}, [62, 63)) \rightarrow (\text{on}, [67, 77)) \rightarrow (\text{on}, [77, 91)) \rightarrow (\text{stop}, [91, 120))$
2. $(\text{on}, [19, 24)) \rightarrow (\text{on}, [39, 43)) \rightarrow (\text{on}, [62, 63)) \rightarrow (\text{on}, [67, 77)) \rightarrow (\text{on}, [77, 91)) \rightarrow (\text{stop}, [91, 120))$
3. $(\text{on}, [19, 24)) \rightarrow (\text{on}, [38, 39)) \rightarrow (\text{on}, [62, 63)) \rightarrow (\text{on}, [67, 77)) \rightarrow (\text{on}, [77, 91)) \rightarrow (\text{stop}, [91, 120))$

となり，全部で 3 本ある．この 3 本のパスそれぞれに入力拘束を課し，それぞれで最適制御問題を解く．最適制御問題を解く上でのポンプシステムのパラメータを表 5.1 に示す．それぞれパスを順にパス 1，パス 2，パス 3 とする．

表 5.1: ポンプシステムのパラメータ

水位の初期値	20
水位の最大値	120
水位の上限値 (U)	91
水位 (N2)	62
水位 (N1)	41
水位の下限値 (L)	13
水位の最低値	0

最適制御問題を解くうえで用いる評価関数を

$$J(x(k), u) = \sum_{k=0}^{N-1} \{x(k) - x_d\}^T Q \{x(k) - x_d\} + \{u(k) - u_d\}^T R \{u(k) - u_d\} \quad (5.10)$$

とし, $N = 5$, $R = 1$, $Q = 1$, $x_d = 50$, $u_d = 0$ とする. また 3 章で述べた評価関数を最小化する確率を

$$\rho = -\ln(0.1^1 \times 0.9^3 \times 1.0^1) \quad (5.11)$$

とし, 3 本のパスでそれぞれ計算された入力, 水位の値, 各パスの評価関数をそれぞれ表 5.2, 表 5.3, 表 5.4 にまとめる.

表 5.2: それぞれのパスでの入力

パス 1		パス 2		パス 3	
$u(0)$	28	$u(0)$	24	$u(0)$	23
$u(1)$	25	$u(1)$	29	$u(1)$	30
$u(2)$	20	$u(2)$	20	$u(2)$	20
$u(3)$	20	$u(3)$	20	$u(3)$	20
$u(4)$	20	$u(4)$	20	$u(4)$	20

表 5.3: それぞれのパスでの水位

パス 1		パス 2		パス 3	
$x(0)$	21	$x(0)$	21	$x(0)$	21
$x(1)$	43	$x(1)$	39	$x(1)$	38
$x(2)$	62	$x(2)$	62	$x(2)$	62
$x(3)$	56	$x(3)$	56	$x(3)$	56
$x(4)$	50	$x(4)$	50	$x(4)$	50

表 5.4: 各パスの評価関数値

パス 1	3715
パス 2	3795
パス 3	3830

表 5.4 より，この 3 本のパスの中で評価関数値が最小となるのはパス 1 である．よって，この場合の最適制御入力パス 1 の計算された入力となる．そして，この 3 本のパスが危険状態に $\varepsilon = 0.002$ 以下で遷移することをシミュレーションにより確認する．表 5.5 の到達回数とは，100000 サンプルのうち，危険状態まで到達した回数のことであり，確率は危険状態に到達する確率を示し，3 本のパスがそれぞれ，危険状態に $\varepsilon = 0.002$ 以下で遷移することが確認できる．最後にそれぞれのパスで得られた入力の値で，取り得る水位の変化を表わすグラフを図 5.10 ~ 図 5.12 に示す．

表 5.5: 各パスの危険状態到達確率

パス名	サンプル数	到達回数	確率
パス 1	100000	127	0.001
パス 2	100000	127	0.001
パス 3	100000	127	0.001

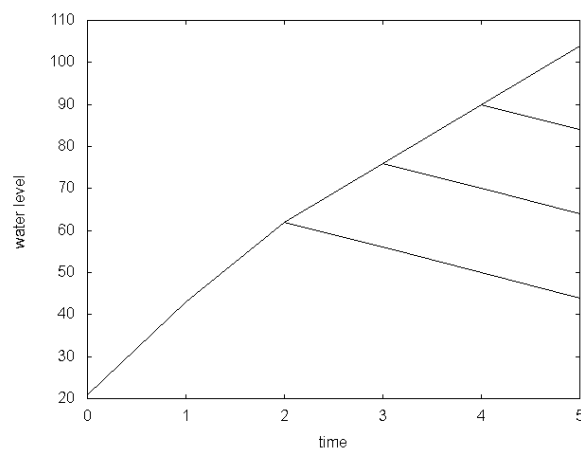


図 5.10: 水位の変化 (パス 1)

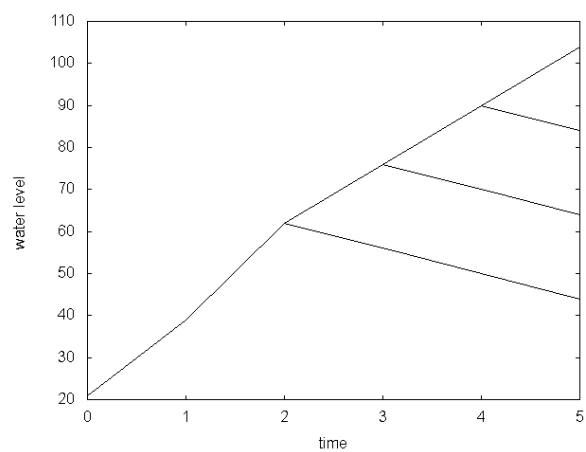


図 5.11: 水位の変化 (パス 2)

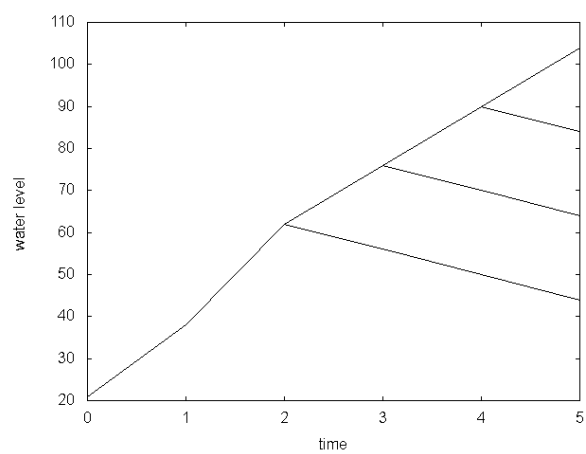


図 5.12: 水位の変化 (パス 3)

第6章 まとめ

本研究では確率ハイブリッドシステムの確率拘束付き最適制御問題に対する解法を提案した．提案した解法は，オフライン計算とオンライン計算から構成される．実際に，オフライン計算では危険状態到達可能性グラフを作成する．オンライン計算では危険状態到達可能性グラフから得られる線形不等式拘束をもつ MIQP 問題を解けばよい．

ポンプシステムを例に最適制御問題を解き，実際に最適制御入力を求めることにより確認を行った．またシミュレーションにより，選んだパスが危険状態に確率 ε 以下で遷移することも確認した．

本研究では危険拡張状態を一つ定め，最適制御問題に対する解法を提案した．しかし一般的に定める危険拡張状態は複数個の場合もある．今後の課題としては，複数個の危険拡張状態を含む最適制御問題を考える必要がある．複数個の危険拡張状態を含む最適制御問題を考える場合，それぞれの危険状態に遷移するパスにおいて，時刻 k の状態から時刻 $k + 1$ の状態に遷移するための拘束条件で，共通の領域を拘束条件とし，最適制御問題を解くことで解決できると考えている．

謝辞

本研究に対して、終始ご熱心に御指導頂いた平石邦彦教授に感謝の意を表し、心よりお礼申し上げます。本研究を進めるにあたり、貴重な助言を頂いた小林孝一助教に深く感謝致します。また、大学院での生活において様々な面で支えていただいた崔舜星氏をはじめとする平石研究室の皆様感謝します。

参考文献

- [1] 井村順一, 東俊一; ハイブリッドシステムの制御 I: 総論, システム/制御/情報, Vol.51, No.5, pp.230–237, 2007
- [2] L. Bujorianu and J. Lygeros, General Stochastic Hybrid Systems: Modelling and Optimal Control, 43rd IEEE Conference on Decision and Control pp.1872–1877, 2004.
- [3] A. Bemporad and S. Di Cairano: Optimal Control of Discrete Hybrid Stochastic Automata, Hybrid Systems: Computation and Control, Lecture Notes in Computer Science 3414, pp. 417–432, 2005.
- [4] A. Abate, M. Prandini, J. Lygeros, and Shankar Sastry: Probabilistic reachability and safety for controlled discrete time stochastic hybrid systems, Automatica, Vol.44, pp.2724–2734, 2008.
- [5] Y. Mutsuda, T. Kato, and S. Yamane: Symbolic Reachability Analysis of Probabilistic Linear Hybrid Automata, IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol.E88-A, No.11, pp.2972–2981, 2005.
- [6] J. P. Hespanha: A model for stochastic hybrid systems with application to communication networks, Vol.62 Nonlinear Analysis, pp.1353–1383, 2005.
- [7] J. Lee, S. Bohacek, J. P. Hespanha, and K. Obraczka: Modeling Communication Networks With Hybrid Systems, IEEE/ACM Transactions on Networking, Vol. 15, No. 3, pp. 630–643, 2007.
- [8] L. Shi, A. Abate, S. Sastry: Optimal Control for a class of Stochastic Hybrid Systems, 43rd IEEE Conference on Decision and Control, pp.842–1847, 2004.

- [9] 井村順一;ハイブリッドシステムの制御 II: モデリング, システム/制御/情報, Vol.51, No.7, pp.306-312, 2007

本研究に関する発表論文

国内会議

[1] 間藤 光一郎, 平石 邦彦, 小林 孝一: 確率ハイブリッドシステムの確率拘束付き最適制御, 電子情報通信学会総合大会, 2011(発表予定)