

Title	Hof fmanパズルの解の列挙と一般化に関する研究
Author(s)	後藤, 新
Citation	
Issue Date	2011-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/9624
Rights	
Description	Supervisor:上原隆平, 情報科学研究科, 修士

Hoffman パズルの解の列挙と一般化に関する研究

後藤 新 (0810024)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2011 年 2 月 8 日

キーワード: アルゴリズム, パズル, パッキング問題.

実社会において物を詰め込むという行為はなくてはならない行為である．例としては大きさが決まっているコンテナやトラックに効率的に荷物を積み込むことなどが挙げられる．一般的に，容積が大きいほうがたくさんの荷物を詰め込むことができる．しかし，実社会では容積が制限されている場合が多い．よって，制限された容積により多くの荷物を積み込むことが求められる．このような問題はパッキング問題と呼ばれている．

パッキング問題は複数の物体を容器に詰め込む問題である．一般のパッキング問題は NP 困難問題の一つとして知られており，あらゆる場合において効率的に詰め込む万能なアルゴリズムは知られていない．パッキング問題の特殊な例として Hoffman パズルが挙げられる．

Hoffman パズルは 1978 年に Hoffman が発表した 27 個のピースと箱から構成される詰め込みパズルである．27 個のピースすべてを箱からはみ出さないように詰め込むことを目的とする．1 つのピースは直方体で 3 辺 a b c の長さがすべて異なる．そして，27 個すべて同じ形と大きさであり，箱は立方体である．箱の 1 辺の長さはピースの a b c の 3 辺の長さを足し合わせたものである．また，Hoffman パズルは Hoffman の条件 $\frac{1}{4}(a+b+c) < a < b < c$ を満たす．1981 年には Conway と Cutler が Hoffman パズルの解の数が 21 個であることを示した．

2004 年に Knuth は Hoffman パズルを拡張し，Hoffman-Knuth の条件 $\frac{1}{4}(a+b+c) = a < b < c$ の場合を考察した．この Hoffman-Knuth の条件が成立するパズルを Hoffman-Knuth パズルという．Hoffman-Knuth パズルは Hoffman-Knuth の条件より $a + b + c = 4a$ が成り立つ．よって，Hoffman-Knuth パズルでは 4 つのピースを並べて入れることができる．

実際に Knuth はピースのサイズを $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ に限定して検討し，27 個だけでなく 28 個のピースが少なくとも 3 通りの方法で入ることを示した．また，2010 年には石野が Hoffman-Knuth パズルのピースのサイズを $(a, b, c) = (4, 5, 7)$ に限定して検討し，28 個詰められる解が存在することを示した．なお，この解においては位置の固定されないピースが存在する．

本研究では、まず Hoffman パズルに対して計算機による解析を行い、Hoffman パズルの解の総数とパターンを求めた。解析を行う際に計算爆発を起こさないために、Hoffman パズルの制約条件をうまく使うことによって無駄な探索空間を削った。

次に、Hoffman パズルから Hoffman-Knuth パズルへの拡張を考えた。そして、Hoffman-Knuth パズルでピースが 28 個の場合の解をすべて見つけることができた。本質的には 3 パターンに分かれており、ピースのブロックの入れ替えにより異なる解が 20 通り存在する。さらに、Hoffman-Knuth パズルで解が存在するための必要十分条件を明らかにした。具体的には、 $\frac{1}{4}(a+b+c) = a < b < c$ だけではなく、 $a < b < \frac{4}{3}a$ 、 $\frac{5}{3}a < c < 2a$ および $(\frac{3a}{2} - b) = (c - \frac{3a}{2})$ が成立しなければならない。つまり、Hoffman パズルとは違って、いつでも解が存在するとは限らない。例えば、 $(a, b, c) = (5, 6, 9)$ などの時は Hoffman-Knuth パズルは解をもつが、 $(a, b, c) = (5, 7, 8)$ などの時は Hoffman-Knuth パズルは解を持たず、28 個目のピースを入れることはできない。また、Hoffman-Knuth パズルにおいては 29 個目のピースを入れることは不可能であることも示した。すなわち、Hoffman-Knuth パズルのすべての解だけではなく、Hoffman-Knuth パズルの必要十分条件を示すことに成功した。